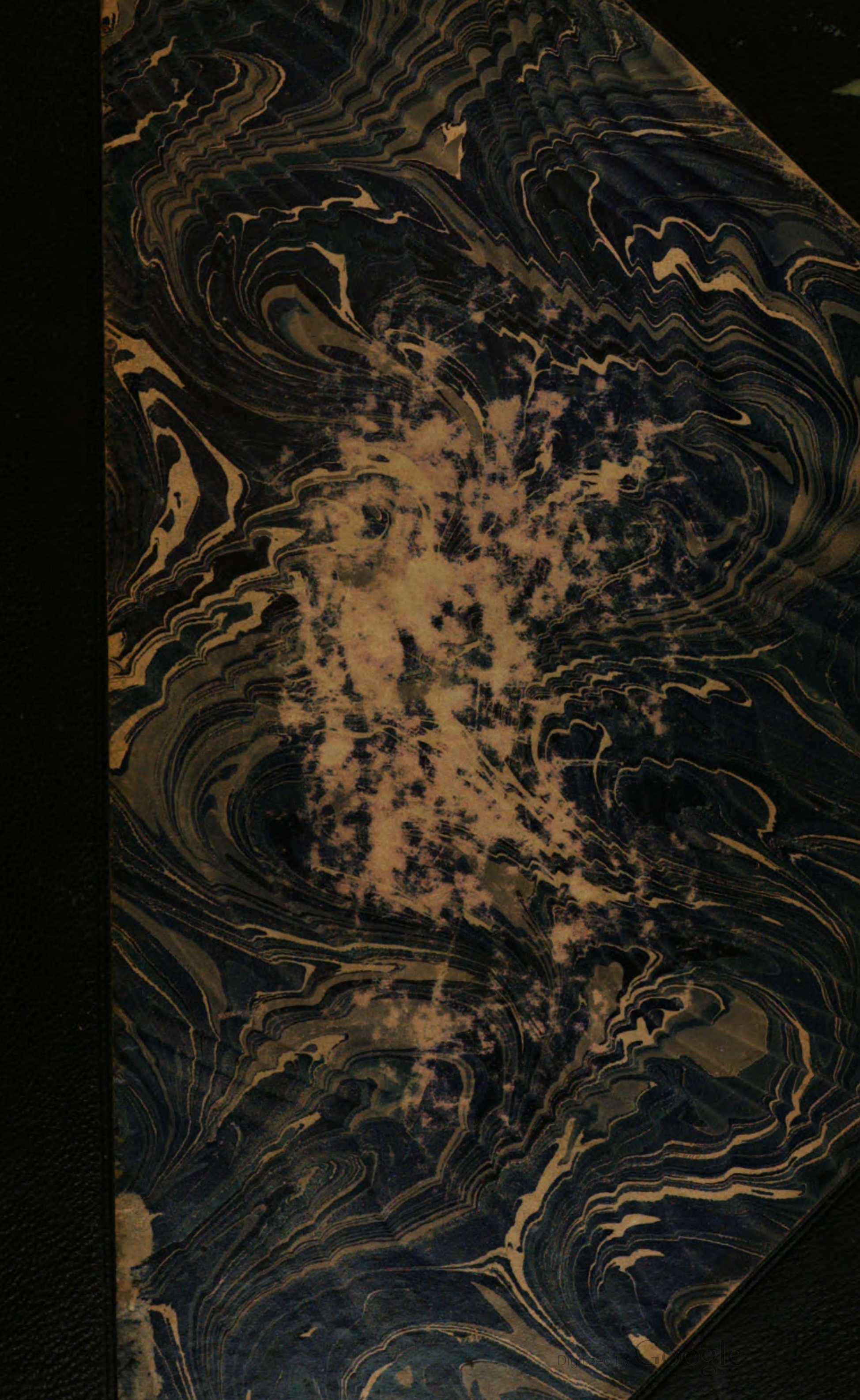



SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
CHRISTO ET ECCLESIAE
VE RI TAS



Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

begründet

von

Carl Ohrtmann.

Im Verein mit anderen Mathematikern

und unter besonderer Mitwirkung der Herren

Felix Müller und **Albert Wangerin**

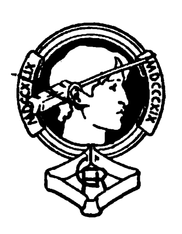
herausgegeben

von

Emil Lampe.

Band 27.

Jahrgang 1896.



Berlin.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1899.

1898, Aug 20 – 1899, Mar 20

Farrar fund

Erklärung der Citate.

Eine eingeklammerte Zahl vor der (fett gedruckten) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu welcher der Band gehört. Einige periodische Schriften, in denen nur zuweilen eine vereinzelte mathematische Arbeit erschienen ist, sind in dieses Verzeichnis nicht aufgenommen worden; das bezügliche Citat im Texte ist dann in hinreichender Ausführlichkeit gegeben.

Acta Math.: Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm. 4°. **20.**

Acta Soc. Fennicae: Acta societatis scientiarum Fennicae. Helsingfors 4°.

American Acad. Proc.: Proceedings of the American Academy of arts and sciences. 8°. **31, 32.**

American J.: American Journal of Mathematics. Editor S. Newcomb, Associate Editor Th. Craig. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Baltimore. 4°. **18.**

American M. S. Bull.: Bulletin of the American Mathematical Society. A historical and critical review of mathematical science. Edited by Th. S. Fiske, A. Ziwet, F. Morley, F. N. Cole. New York. 8°. (2) **2, 3.**

Am. J. of science: The American Journal of Science. Editor: Edward S. Dana. Associate editors: Professors Geo. L. Goodale etc. New Haven, Connecticut. 8°.

Amst. Akad. Verh.: Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Amsterdam. Verhandelingen. **4.**

Amst. Akad. Versl. oder *Amst. Sitz.-Ber.*: Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Amsterdam. Verslagen. **4, 5.**

Annali di Mat.: Annali di matematica pura ed applicata diretti dal prof. Francesco Brioschi colla cooperazione dei professori: L. Cremona, E. Beltrami, U. Dini. Milano. 4°. (2) **24.**

Annals of Math.: Annals of Mathematics. Ormond Stone, editor. William M. Thornton, associate editor. Office of publication: University of Virginia. B. Westermann and Co. New York. 4°. **10, 11.**

Ann. de Chim. et Phys.: Annales de Chimie et de Physique par MM. Berthelot, Friedel, Mascart. Paris: G. Masson, éditeur. 8°. (7) **7, 8, 9.**

Ann. de l'Éc. Norm.: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées etc. par un comité de rédaction composé de MM. les maîtres de conférences de l'École. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 4°. (3) **13.**

Annuaire Belg.: Annuaire de l'observatoire royal de Belgique. Par F. Folie. Bruxelles: Hayez. 1896, **63.**

A*

Arch. f. Art.: Archiv für die Artillerie- und Ingenieur-Officiere des deutschen Reichsheeres. Redaction: Schröder. Berlin: Mittler u. Sohn. 8°. **103**.

Archivo de Mat.: Archivo de matemáticas puras y aplicadas. Periodico mensual publicado por D. Luis Gonzago Gascó con la colaboración de E. León, M. Belmás. Madrid, Valencia. 8°. **1**.

Arch. Néerl: Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem et rédigées par J. Bosscha etc. Harlem. 8°. **39**.

Arch. sc. phys.: Bibliothèque universelle. Archives des sciences physiques et naturelles. Genève, Bureau des Archives. 8°. (3) **35**.

Assoc. Franç.: Association Française pour l'avancement des sciences. Compte rendu de la 24me session. Congrès de Bordeaux (1895). Paris au secrétariat de l'association et chez G. Masson. 8° (1896).

Astr. Nachr.: Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher. Unter Mitwirkung des Vorstandes der Astronomischen Gesellschaft herausg. von A. Krüger. Kiel. 4°. **139, 140, 141**.

Atti Acc. Gioenia: Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania. (4) **9**.

Atti Acc. Napoli: Atti dell'Accademia di Napoli. (2) **8**.

Atti dell'Acc. Pont.: Atti dell'Accademia Pontaniana. Napoli. **26**.

Batt. G.: Giornale di matematiche di Battaglini per il progreso degli studi nelle università italiane. Fondato nel 1863. Proseguito dal prof. A. Capelli. Napoli. gr. 8°. **34**.

Belg. Ann.: Annuaire de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles: F. Hayez. 1896, **62**.

Belg. Bull.: Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. 8°. (3) **31, 32**.

Belg. Mém.: Mémoires de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. In 4°.

Belg. Mém. C.: Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Collection in 8°. Bruxelles: F. Hayez. **53**.

Belg. Mém. S. É.: Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles: F. Hayez. 4°. **54**.

Berl. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°.

Berl. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8°. 1896.

Berl. Phys. Ges. Verh.: Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Leipzig: Barth. 8°. **15**.

Bibl. Math.: Bibliotheca Mathematica, Zeitschrift für Geschichte der Mathematik, herausgegeben von Gustaf Eneström. Stockholm. 8°. (2) **10**.

Bologna Mem.: Memorie della R. Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4°. (5) **5, 6**.

Bologna Rend.: Rendiconto delle sessioni dell'Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 8°. 1896.

Bordeaux Mém.: Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°.

Brit. Ass. Rep.: Report of the meeting of the British Association for the advancement of science. London. gr. 8°. 1896.

Brux. Ann.: Annales de l'observatoire royal de Bruxelles. Annales astronomiques. Bruxelles: F. Hayez. 1896, **7**.

Brux. S. sc.: Annales de la Société scientifique de Bruxelles. Bruxelles: Schepens; Paris: Gauthier-Villars et Fils. (Doppelt paginirt, unterschieden durch A und B; A = 1ère partie, B = 2e partie.) **20**.

Bull. intern. de l'Ac. François Joseph: Siehe *Rozpravy*.

Cambr. Proc.: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge. 8°. **9**.

Cambr. Trans.: Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge. 4°. **16**.

Časopis: Časopis; Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigirt mit besonderer Rücksicht auf Studirende der Mittel- und Hochschulen von F. J. Studnička, herausgegeben vom Vereine böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8°. (Böhmisch.) **25**.

Centralbl. der Bauverw.: Centralblatt der Bauverwaltung. Herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Redacteure O. Sarrazin und O. Hossfeld. Berlin: Ernst u. Sohn. 4°. **16**.

Charkow Ges.: Sammlung der Mitteilungen und Protokolle der mathematischen Gesellschaft in Charkow. (Russisch.) (2) **5**.

Civiling.: Der Civilingenieur. Organ des sächsischen Ingenieur- und Architekten-Vereins. Unter Mitwirkung etc. herausgegeben von Dr. E. Hartig. Leipzig: Arthur Felix. 4°. **42**.

C. R.: Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris. 4°. **122, 123**.

Darboux Bull.: Bulletin des sciences mathématiques, rédigé par MM. G. Darboux et J. Tannery avec la collaboration de MM. André, Beltrami etc. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 8°. (2) **20**.

Deutsche Bauztg.: Deutsche Bauzeitung. Verkündigungsblatt des Vereins deutscher Architekten- und Ingenieurvereine. Redacteure: K. E. O. Fritsch und E. W. Büsing. Berlin: E. Toeche. **30**.

Deutsche Math. Ver.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes von A. Wangerin, A. Gutzmer. Berlin: Georg Reimer. 8°. **4**.

Dublin Proc.: Proceedings of the Royal Irish Academy. Dublin. 8°. (3) **4**.

Dublin Trans.: The Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin. 4°.

Edinb. M. S. Proc.: Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. 8°. **14**.

Edinb. Proc.: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 8°. **21**.

Edinb. Trans.: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 4°. **38**.

Ed. Times: Mathematical questions and solutions, from the „Educational Times", with many papers and solutions in addition to those published in the „Educational Times." Edited by W. J. C. Miller. London: Francis Hodgson. 8°. **64, 65**.

Gött. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 4°.

Gött. Nachr.: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen. Göttingen. 8°. 1896.

Hamb. Mitt.: Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg Leipzig: B. G. Teubner. 8⁰. **3.**

Hoffmann Z.: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Unter Mitwirkung der Herren u. s. w. herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Leipzig: Teubner. 8⁰. **27.**

Hoppe Arch.: Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Lehranstalten, gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. Leipzig: C. A. Koch. 8⁰. (2) **14, 15.**

Japan Journ.: Journal of the college of science, imperial university, Japan. Published by the university. Tokyo. 4⁰.

J. de l'Éc. Pol.: Journal de l'École Polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 4⁰.

J. de Math. élém.: Journal de Mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de M. de Longchamps. Paris: Delagrave. 8⁰. (4) **5.**

J. de Math. spéc.: Journal de Mathématiques spéciales à l'usage des candidats aux Écoles Polytechnique, Normale et Centrale, publié sous la direction de M. de Longchamps. Paris: Delagrave. 8⁰. (4) **5.**

J. für Math.: Journal für die reine und angewandte Mathematik, gegründet von A. L. Crelle 1826. Herausgegeben unter Mitwirkung etc. von L. Fuchs. Berlin: G. Reimer. 4⁰. **116, 117.**

Johns Hopkins Univ. Circ.: Johns Hopkins University Circulars. Published with the approbation of the Board of Trustees. Baltimore. 4⁰. **15.**

Jordan Z. f. V.: Zeitschrift für Vermessungswesen. Organ des deutschen Geometervereins. Herausgegeben von W. Jordan und C. Steppes. Stuttgart. 8⁰. **25.**

Journ. de Math.: Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé en 1836 et publié jusqu'en 1874 par J. Liouville etc. Publié par C. Jordan avec la collaboration de M. Lévy, A. Mannheim, É. Picard, H. Poincaré, Paris: Gauthier-Villars et Fils. 4⁰. (5) **2.**

Journ. de phys.: Journal de physique théorique et appliquée. Fondé par J. Ch. d'Almeida et publié par MM. E. Bouty, A. Cornu, E. Mascart, A. Potier. Paris: Au Bureau du Journal de Physique. 8⁰. (3) **5.**

Kansas Univ. Quart.: The Kansas University Quarterly. Series A: Science and mathematics. Published by the University. Lawrence, Kansas. 8⁰. **4, 5.**

Kasan Ges.: Nachrichten der physiko-mathematischen Gesellschaft an der Kaiserlichen Universität zu Kasan. (Russisch.) (2) **5, 6.**

Kiew Univ. Nachr.: Nachrichten der Kaiserlichen Universität zu Kiew. (Russisch.) 1896.

Kjöbenhavn Overs.: Oversigt over det kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger. Kjöbenhavn. 1896.

Königsb. Physik.-ökon. Ges.: Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Königsberg i. Pr. gr. 4⁰.

Kosmos: Kosmos [Czasopismo Polskiego Towarzystwa Przyrodników im. Kopernika]. Red. B. Radziszewski. Lemberg. 8⁰. (Polnisch.)

Krakau. Denkschr.: Denkschriften der Krakauer Akademie der Wissenschaften. Krakau. (Polnisch.)

Krakau. Ber.: Sitzungsberichte der Krakauer Akademie der Wissenschaften. Krakau. (Polnisch.)

Leipz. Abh.: Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Leipzig: 4⁰. **23**.

Leipz. Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. Leipzig. 8⁰. **48** (1896).

Leop. Nova Acta: Nova Acta Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae Germanicae Naturae Curiosorum. Halle. 4⁰. **65**.

Leopoldina: Leopoldina. Amtliches Organ der Kais. Leopoldino - Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Herausgeg. von K. v. Fritsch. Halle a. S. gr. 4⁰. **32**.

Liége Mém.: Mémoires de la Société Royale des sciences de Liége. Bruxelles: Hayez; Paris: Roret.

Lisboa Jorn.: Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes publicado sob os auspicios da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Lisboa. 1896.

Lomb. Ist. Rend.: Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Milano. 8⁰. (2) **29**.

Lond. M. S. Proc.: Proceedings of the London Mathematical Society. London. 8⁰. **27**.

Lond. Phil. Trans.: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. 4⁰. **186**, **187**.

Lond. R. S. Proc.: Proceedings of the Royal Society of London. London. 8⁰. **59**, **60**.

Math. Ann.: Mathematische Annalen. In Verbindung mit C. Neumann begründet durch R. F. A. Clebsch. Unter Mitwirkung der Herren P. Gordan, C. Neumann, M. Noether, K. VonderMühll, H. Weber gegenwärtig herausgegeben von F. Klein, W. Dyck und A. Mayer. Leipzig: Teubner. 8⁰. **47**, **48**.

Mathesis: Mathesis, Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne publié par P. Mansion et J. Neuberg avec la collaboration de plusieurs professeurs belges et étrangers. Paris: Gauthier-Villars et Fils. Gand: Hoste. 8⁰. (2) **6**.

Math. Magazine: The Mathematical Magazine. A Journal of elementary and higher mathematics. Edited and published by Artemas Martin. Washington D. C. 4⁰. **2**.

Mém. Sav. Étr.: Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre. 4⁰.

Messenger: The Messenger of Mathematics. Edited by J. W. L. Glaisher. London and Cambridge: Macmillan and Co. 8⁰. (2) **25**, **26**.

Meteor. Zeitschr.: Meteorologische Zeitschrift. Herausgegeben im Auftrage der österreich. Gesellschaft für Meteorologie und der deutschen Meteorol. Gesellschaft, redigirt von J. Hann u. G. Hellmann. Wien: Ed. Hölzel. gr. 8⁰. **13**.

Mitt. üb. Art. u. Genie: Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Genie-Wesens. Herausgegeben vom K. K. technischen u. administrativen Militär-Comité. Wien: R. v. Waldheim. 8⁰. **27**.

Modena Mem.: Memorie della Regia Accademia di scienze, lettere ed arti in Modena. Modena. 4⁰.



Monatsh. f. Math.: Monatshefte für Mathematik und Physik. Mit Unterstützung des hohen K. K. Ministeriums für Cultus und Unterricht herausgegeben von G. v. Escherich und L. Gegenbauer in Wien. Wien. 8°. **7.**

Monthly Notices: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. London. 8°. **56.**

Moskau. Math. Samml.: Mathematische Sammlung, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft in Moskau. (Russisch.) **18, 19.**

Moskau. Phys. Sect.: Arbeiten der physikalischen Section der Kaiserlichen Gesellschaft der Freunde der Naturkunde, Anthropologie und Ethnographie. Moskau. (Russisch.) **7, 8.** (Auch unter dem Titel: Nachrichten der Kaiserlichen Gesellschaft etc.)

Münch. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Zweite Klasse. München. 4°. **19.**

Münch. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. München. 8°. **26.**

Napoli Rend.: Rendiconto dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Napoli. 4°. (3) **2.**

Nature: Nature, a weekly illustrated journal of science. London and New York: Macmillan and Co. 4°. **53, 54, 55.**

Nieuw Archief: Nieuw Archief voor wiskunde uitgegeven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam onder redactie van J. C. Kluyver, D. J. Korteweg en P. H. Schoute. Amsterdam. 8°. (2) **3.**

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux Écoles spéciales, à la licence et à l'agrégation, rédigé par C. A. Laisant et X. Antomari. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 8°. (3) **15.**

Nuovo Cimento: Il Nuovo Cimento. Giornale fondato da C. Matteucci e R. Piria per la fisica e la chimica. Continuato da R. Felici, A. Batelli, V. Volterra per la fisica esperimentale e matematica. Pisa: Salvioni. gr. 8°. (4) **3, 4.**

Nyt Tidss. for Math.: Nyt Tidsskrift for Mathematik. Redigeret af P. T. Foldberg og C. Juel. (Abteilung A für elementare, B für höhere Mathematik.) Kjöbenhavn. 8°. **7.**

Odessa Ges.: Denkschriften der mathematischen Abteilung der neurussischen Gesellschaft der Naturforscher. (Russisch.)

Padova Atti: Atti della Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova.

Palermo Rend.: Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Palermo. gr. 8°. **10.**

Periodico di Mat.: Periodico di matematica per l'insegnamento secondario pubblicato per cura di A. Lugli. Roma. 8°. **11.**

Petersb. Bull.: Bulletin der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. St. Petersburg. **5.**

Petersb. Denkschr.: Denkschriften der Kais. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. St. Petersburg. (8) **3.**

Phil. Mag.: The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science. Conducted by Lord Kelvin, G. F. Fitzgerald, W. Francis. London. 8°. (5) **41, 42.**

Phys.-Math. Wiss.: Die physiko-mathematischen Wissenschaften. Journal der reinen und angewandten Mathematik, Astronomie und Physik, herausgegeben von W. W. Bobynin. Moskau. (Russisch.) **8.**

Pisa Ann.: Annali della Reale Scuola Normale Superiore di Pisa. Scienze fisiche e matematiche. Pisa.

Politecnico: Il Politecnico. Giornale dell'ingegnere architetto civile ed industriale. Milano: Tipografia e Litografia degli Ingegneri. gr. 8⁰.

Poske Z.: Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht. Unter der besonderen Mitwirkung von E. Mach und B. Schwalbe, herausgegeben von F. Poske. Berlin: J. Springer. gr. 8⁰. **9.**

Pr. = Programmabhandlung, *Gymn.* = Gymnasium, *Realgymn.* = Realgymnasium, etc. 1896.

Prace mat.-fiz.: Prace matematyczno-fizyczne. (Mathematische und physikalische Abhandlungen, hrsg. in Warschau von S. Dickstein, W. Gosiewski, E. u. W. Natanson.) gr. 8⁰. (Polnisch.) **7.**

Prag. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 8⁰. 1896.

Quart. J.: The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics. Edited by N. M. Ferrers, J. W. L. Glaisher, A. R. Forsyth. London. 8⁰. **28.**

Revue d'Art.: Revue d'Artillerie paraissant le 15 de chaque mois. Paris. 8⁰. **47, 48, 49.**

Revue de Math.: Revue de Mathématiques (Rivista di Matematica), publiée par G. Peano. Turin. 8⁰. **6.**

Revue de Math. spéc.: Revue de Mathématiques spéciales rédigée par M. M. R. Humbert et G. Papelier avec la collaboration de MM. etc. Paris: Nony et Cie. Bruxelles: Ramlot. 4⁰. **6, 7.**

Revue des Quest. sc.: Revue des Questions scientifiques, publiée par la Société scientifique de Bruxelles. Bruxelles. gr. 8⁰.

Rivista di Mat.: Siehe *Revue de Math.*

Rom. Acc. L. Mem.: Memorie della Reale Accademia dei Lincei. Roma. gr. 4⁰. (5) **2.**

Rom. Acc. L. Rend.: Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Roma. 4⁰. (5) **5** (1896). (Je zwei Semester, unterschieden als $\mathbf{5}_1$ und $\mathbf{5}_2$.)

Rom. Acc. P. d. N. L.: Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. Roma. 4⁰. **49.**

Rom. Acc. P. d. N. L. Mem.: Memorie dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. Roma. 4⁰.

Rozpravy: Rozpravy české Akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění, (II. Cl.). Prag. (Böhmisch.) **5.** (Dazu: *Bulletin international.* Résumés des travaux présentés. Classe des sciences mathématiques et naturelles. — Académie des Sciences de l'Empereur François Joseph I.)

Schlömilch Z.: Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben unter verantwortlicher Redaction von O. Schlömilch und M. Cantor. Leipzig: Teubner. 8⁰. **41.**

Hl. A.: Historisch-litterarische Abteilung (besonders paginirt).

S. M. F. Bull.: Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires. Paris. 8⁰. **24.**

Soc. Philom. Bull: Bulletin de la Société Philomathique de Paris. Paris. 8°. (8) **8.**

Spaczinski's Bote: Spaczinski's Bote der Experimentalphysik und elementaren Mathematik. (Russisch.) 1896.

Stockh. Akad. Bihang: Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Stockholm. 8°. **22.**

Stockh. Öfv.: Öfversigt af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Stockholm. **53.**

Teixeira J.: Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas publicado pelo Dr. F. Gomes Teixeira. Coimbra. 8°. **12, 13.**

Tokio Math. Ges.: Tokyo sugaku butsurigaku kwai kiji (Zeitschrift der Physiko-Mathematischen Gesellschaft in Tokio. Englisch u. Japanisch.) Tokio. 8°. **7.**

Torino Atti: Atti della Reale Accademia di Torino. Torino. 8°. **31, 32.**

Torino Mem.: Memorie della Reale Accademia delle scienze di Torino. Torino. 4°. (2) **46.**

Toulouse Ann.: Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques, publiées par un comité de rédaction composé des professeurs de mathématiques, de physique et de chimie de la faculté etc. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 4°. **10.**

Toulouse Mém.: Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles lettres de Toulouse. Toulouse: Douladoure-Privat. 8°. (9) **8.**

Ungar. Ber.: Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ung. Akad. der Wissensch. und der Königl. Ung. naturwissenschaftlichen Gesellschaft hrsg. von Baron R. Eötvös etc. Redig. v. I. Fröhlich. Budapest. 8°. **13.**

Upsala Nova Acta: Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. (3) **15.**

Ven. Ateneo: L'Ateneo Veneto. Rivista mensile di scienze, lettere ed arti diretta da A. S. de Kiriaki e L. Gambari. Venezia. 8°.

Ven. Ist. Atti: Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 8°. (7) **7.**

Ven. Ist. Mem.: Memorie del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Venezia. 4°.

Verh. Naturf. Ges. Lübeck: Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte zu Lübeck 1895. Herausgegeben von A. Wangerin und O. Taschenberg. Leipzig: F. C. W. Vogel. **1, 2** (1896).

Vierteljahrsschr. Astr. Ges.: Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von den Schriftführern der Gesellschaft R. Lehmann-Filhés und G. Müller. Leipzig: W. Engelmann. 8°. **31.**

Warschau. Univ. Nachr.: Nachrichten der Warschauer Universität. Warschau. (Russisch.) 1896.

Washington Bull.: Bulletin of the Philosophical Society of Washington. Washington, D. C. Judd and Dettweiler, Printers.

Wiedemann Ann.: Annalen der Physik und Chemie. Unter Mitwirkung der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin und insbesondere des Herrn M. Planck herausgegeben von G. und E. Wiedemann. Leipzig: Barth. 8°. **57, 58, 59.**

Wien. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Zweite Abteilung. Wien. 8°. **104**, **105**.

Wundt Philos. Studien: Philosophische Studien. Herausgegeben von Wilhelm Wundt. Leipzig: Wilhelm Engelmann. 8°. **12**.

Zeitschr. deutscher Ing.: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, herausgegeben von Th. Peters. Berlin: J. Springer. 4°. **40**.

Zeitschr. f. Bauwesen: Zeitschrift für Bauwesen, herausgegeben im Ministerium der öffentlichen Arbeiten. Redacteure: O. Sarrazin u. O. Hossfeld. Berlin: Ernst u. Sohn. 4°. **46**.

Zürich. Naturf. Ges.: Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Herausgegeben unter Mitwirkung etc. von F. Rudio. Zürich. 8°. **41**.

Inhaltsverzeichnis.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.)

Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

Kapitel 1. Geschichte.

A. Biographisch-Litterarisches.

Seite

G. Loria. Un'opera recente sulla storia delle matematiche 1
G. A. Gibson. M. Cantor's Geschichte der Mathematik III 1
D. E. Smith. History of modern mathematics 1
F. Cajori. A history of elementary mathematics 1
†G. Fano. Uno sguardo alla storia della matematica 1
†J. L. Heiberg. Den graeske Mathematiks Overleverings historie . 2
M. Steinschneider. Die Mathematik bei den Juden 2
W. W. Bobynin. Mathematische Wissenschaften im Occident . . 2
G. Eneström. Questions 56—61. Remarque sur la question 34 . . 2
H. Suter. Bemerkung zur Anfrage 60 2
J. H. Graf. Zur Geschichte der Mathematik in der Schweiz . . . 2
Sereni Antinoensis opuscula. Edidit J. L. Heiberg 3
J. L. Heiberg. Euclidis optica, catoptrica 3
M. Curtze. Uebersetzungen der Elementa im Mittelalter 3
Apollonius of Perga. Treatise on conic sections. Edited by Heath 4
Archimedes. The works of Archimedes. Edited by Heath . . . 4
W. T. Lynn. Claudius Ptolemy and his work 5
†H. Suter. Die Araber als Vermittler der Wissenschaften in deren Uebergang vom Orient in den Occident 5
G. Eneström. Le commentaire de Ziegler sur la „Saphea“ de Zarkali 5
†S. Günther. Jakob Ziegler, ein bayerischer Mathematiker 5
R. Daublebsky v. Sterneck. Zur Vervollständigung der Schrift des Jordanus Nemorarius: „Tractatus de numeris datis“ . . . 5
M. Steinschneider. Johannes Anglicus und sein Quadrant . . . 5
M. Curtze. Ueber Johann von Gemunden 6
M. Steinschneider. Bemerkung zur Bibl. Math. 1896, S. 4 . . . 6
V. Vianello. Luca Pacioli nella storia della ragioneria 6
C. P. Kheil. Bearbeitungen des Buchhaltungstractates von L. Pacioli 6
L. Pacioli. Divina proportione. Uebersetzt von C. Winterberg . 6
A. von Braunmühl. Nicolaus Copernicus 6
Francesco Maurolico. Commemorazione del 4° centenario . . . 6

Seite
†P. Bernhardt. Ph. Melanchthon als Mathematiker und Physiker . . 7
Fontès. Pierre Forcadel, lecteur du Roy ès mathématiques 7
F. Ritter. Viète. Notice sur sa vie et ses oeuvres 7
Galileo Galilei. Le opere di Galileo Galilei. 6 7
A. Favaro. Indice cronologico del carteggio Galileano 8
A. Favaro. Amici e corrispondenti di Galileo Galilei 8
†A. Carli e A. Favaro. Bibliografia Galileiana 1568—1895 8
†S. Günther. Biographien Kepler's und Galilei's 8
B. Gibson. La Géométrie de Descartes au point de vue de sa méthode 9
J. Berthet. La méthode de Descartes avant le discours 9
P. Natorp. Le développement de la pensée de Descartes 9
A. Hannequin. La preuve ontologique cartésienne 9
H. Schwarz. Descartes, sur la connaissance du monde extérieur . 9
P. Tannery. Descartes physicien 9
D. J. Korteweg. Descartes et les manuscrits de Snellius 9
E. Boutroux. Morale et science dans la philosophie de Descartes . 9
V. Brochard. Le traité des passions de Descartes 9
G. Lanson. L'influence de Descartes sur la littérature française . 9
M. Blondel. Le christianisme de Descartes 9
F. Tocco. Descartes jugé par Vico 9
Ch. Adam. Correspondance de Descartes 9
Fermat. Oeuvres de Fermat. 3 9
D. J. Korteweg. Das Geburtsjahr von Johannes Hudde 10
J. Bosscha. Christian Huygens 10
J. G. Hagen. Index operum Leonardi Euleri 11
H. Simon. Vandermonde's Vornamen 11
A. Cornu. Les travaux de Fresnel en optique 11
E. Hess. J. F. C. Hessel. Zur Säcularfeier seines Geburtstages . 11
P. Dupuy. La vie d'Evariste Galois 12
†J. Boyer. Le mathématicien franc-comtois F. J. Servois 12
J. Scheiner. Doppler und das Doppler'sche Princip 12
S. Dickstein. Hoene Wronski. Sein Leben und seine Werke . . 13
S. Dickstein. Découvertes mathématiques de Wronski 13
de Jonquières. Lettre de Gauss, du mois de juin 1805 13
de Jonquières. Zwei Druckfehler in Gauss' Werken 13
A. Cauchy. Oeuvres complètes (1) 9 13
Compte rendu du bureau local du Comité Lobatschefskij 14
Die Enthüllung des Lobatschefskij-Denkmals in Kasan 14
A. W. Wassiliew. Die Bedeutung von Lobatschefskij für Kasan . . 14
†A. Vassilief. Éloge historique de Nicolas J. Lobatschefsky . . 15
Ed. Weyr. Die Feier des 100. Geburtstages von N. J. Lobatschefskij . 15
F. Bützberger. Zum hundertsten Geburtstage Jakob Steiner's . . 15
J. H. Graf. Briefwechsel zwischen J. Steiner und L. Schläfli . . . 15
J. Plücker's physikalische Abhandlungen. Hrsg. von Fr. Pockels . 16
†N. Reichesberg. Der berühmte Statistiker Quetelet 16
Hermann Grassmann's gesammelte Werke. 1,II. In Gemeinschaft mit H. Grassmann dem Jüngeren hrsg. von Fr. Engel . . 17
†K. Lasswitz. Gustav Theodor Fechner 17
L. Lorenz. Oeuvres scientifiques. Revues par H. Valentiner . . . 17
H. Valentiner. Remarques sur les mémoires contenus dans le premier fascicule des „Oeuvres scientifiques" de L. Lorenz . . 18
†S. Kowalewska. Jugenderinnerungen 18
†G. B. Airy. Autobiography of Sir George Biddle Airy 18
J. C. Adams. The scientific papers. Vol. 1 18
K. A. Andreiew, P. A. Nekrassow und N. E. Joukowsky. Leben und wissenschaftliche Thätigkeit von W. G. Imschenetzky . . . 19

Seite
†H. H. Turner. A. C. Pritchard, Memoirs of his life 19
†H. Hertz. Miscellaneous papers 19
P. Mansion. Notice sur Eugène-Charles Catalan 19
E. Kusch. C. G. J. Jacobi und Helmholtz auf dem Gymnasium . . 20
A. P. Grusintsew. H. von Helmholtz in seinen letzten Werken . . 20
†J. S. Epstein. H. von Helmholtz als Mensch und Gelehrter . . . 20
Ed. Weyr. P. L. Tschebyscheff 20
A. Cayley. Collected mathematical papers. Vol. 11, 12, 13 . . . 21
de Bernardières. Vie et travaux du contre-amiral Fleuriais . . . 21
W. E. Plummer. Obituary notice of Dr. John Russell Hind . . . 21
F. Tisserand. Notice sur les travaux de M. Hind 21
H. Gyldén. Hans Masal 22
M. Krause. Gustav Ferdinand Mehler † 22
A. Wangerin. F. E. Neumann 22
G. Gerland. E. L. A. v. Rebeur-Paschwitz 22
J. H. Graf. Ludwig Schläfli (1814 bis 1895) 22
E. Lampe. Nachruf für Julius Worpitzky 23
E. Stracciati. Adolfo Bartoli 23
Dr. T. Nekrolog Brockmann 23
Obituary notice of Charles Chambers 23
Professor Dr. Moritz Wilhelm Drobisch † 23
M. Heinze. Gedächnisrede auf M. W. Drobisch 23
A. Gray. Armand Hippolyte Louis Fizeau 24
A. Cornu. Discours prononcé aux funérailles de M. Hippolyte Fizeau 24
P. Mansion et J. Neuberg. J. Graindorge 24
O. Callandreau. Notice sur M. Hugo Gyldén 24
H. Kreutz. Carl Nicolaus Adalbert Krüger 24
Obituary notice of Dr. Adalbert Krüger 24
E. Millosevich. Aurelio Lugli † 25
Dr. Bernhard Minnigerode † 25
A. W. Phillips. Hubert Anson Newton 25
W. E. P. Obituary notice of Hubert A. Newton 25
H. Künssberg. Zum Andenken an Ludwig Ofterdinger 26
Maurice Lévy. Notice sur Amé-Henry Resal 26
C. Jordan. Henry Resal (1828—1896) 26
W. E. P. François Félix Tisserand 26
A. Cornu. Félix Tisserand 26
†H. Poincaré. La vie et les travaux de F. Tisserand 26
H. H. G.-A. Obituary notice of General J. T. Walker 26
Zur Erinnerung an Dr. Christian Wiener 27
A. Gray. Lord Kelvin 27
A. Gray. Lord Kelvin's jubilee 27
E. H. Moore, O. Bolza, H. Maschke, H. S. White. Mathematical papers read at the mathematical congress in Chicago . 27
F. Rudio. Vierteljahrsschrift der Naturf.-Ges. in Zürich 1896. Jubelband 27
Fünfundzwanzigjähriges Jubiläum der Moskauer Math. Gesellschaft . 28
R. Bettazzi. Bollettino dell' Associazione Mathesis 28
Il Pitagora, Giornale di Matematica 28
G. Eneström. Les femmes dans les sciences exactes 29

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

H. G. Zeuthen. Om den historiske Udvikling af Mathematiken som exakt Videnskab indtil Udgangen af det 18de Aarhundrede . . 29
G. Vailati. Sull' importanza della storia delle scienze 29

Seite
W. Hellmann. Mathematischer Unterricht an den Erfurter Schulen im 16. und 17. Jahrhundert 30
F. Lindemann. Zur Geschichte der Polyeder und der Zahlzeichen 30
†H. v. Jacobs. Das Volk der „Sieben-Zähler" 30
Aubry. Essai historique sur la théorie des équations 30
M. Curtze. Ueber die sogenannte Regel Ta Yen in Europa . . . 30
†Chr. F. Müller. Henricus Grammateus und sein Algorismus . . . 31
G. Wertheim. Die Arithmetik des Elia Misrachi. 2. verb. Aufl. . . 31
†G. Brambilla. Storia della ragioneria presso i popoli antichi . . 31
V. Bobynin. Esquisse de l'histoire du calcul fractionnaire 31
†W. W. Bobynin. Entwickelung der Operationen mit den Zahlen . 31
V. V. Bobynin. Racines carrées dans la Grèce antique 31
Mathieu. Méthodes de division à la fin du siècle dernier 31
E. Netto. Die arithmetisch-algebraischen Tendenzen Kronecker's . 32
Fr. Meyer. Stand der Invariantentheorie. Polnisch von S. Dickstein . 32
†Fr. Meyer. Rapport sur les progrès de la théorie des invariants 32
†Fr. Meyer. Stato presente della teoria degli invarianti 32
Kewitsch. Die Basis der Bürgi'schen Logarithmen 32
Kewitsch. Bemerkungen zu dem vorigen Aufsatze 32
†J. Cohn. Geschichte des Unendlichkeitsproblems bis Kant . . . 33
E. Tischer. Begründung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz 33
G. Loria. Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche 33
P. Stäckel. Ein Brief von Gauss an Gerling 34
†J. Bolyai. The science absolute of space, independent of the truth or falsity of Euclid's axiom XI. Translated by Halsted. 4th ed. 34
F. Klein. L'oeuvre géométrique de Sophus Lie 34
Aubry. Notice historique sur la géométrie de la mesure 34
H. G. Zeuthen. Die geometrische Construction als „Existenzbeweis" in der antiken Geometrie 35
†Epaphroditus et Vitruvius. Traités d'arpentage et de géométrie. Publié par Mortet. Avec introduction par Tannery 35
M. Kutta. Geometrie mit constanter Zirkelöffnung im Altertum . . 35
Ambros Sturm. Das delische Problem 35
H. Adam. Calcul de Descartes ou Introduction à sa Géométrie . . 35
D. Kikuchi. Ajima's method of finding the length of an arc of a circle 35
D. Kikuchi. Metodo giapponnese per determinare l'area del cerchio 36
A. Schülke. Zur Decimalteilung des Winkels 36
A. von Braunmühl. Prosthaphäretische Methode der Trigonometrie 36
†V. Schlegel. Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre 36
E. Vigarié. La bibliographie de la géométrie du triangle 37
†R. T. Glazebrook. James Clerk Maxwell and modern physics . . 37
E. Goldbeck. Kepler's Lehre von der Gravitation 37
M. Curtze. Zur Geschichte der Physik im 14. Jahrhundert 37
D. J. Korteweg. Descartes et les manuscrits de Snellius 38
N. Jadanza. Per la storia del cannocchiale 38
W. Le Conte Stevens. Recent progress in optics 38
M. Curtze. Im Mittelalter zur Feldmessung benutzte Instrumente . 39
H. Suter. Nochmals der Jakobsstab 39
O. Zanotti Bianco. Per la storia delle superficie geoidiche . . . 39
G. W. Hill. Celestial mechanics since the middle of the century . 39
K. Zelbr. Das Problem der kürzesten Dämmerung 39
W. von Boole. Arithmometer von P. Tschebyschew 40
W. von Boole. Die Rechenmaschinen der russischen Erfinder . . 40
†Weitere Litteratur 40

Seite

Kapitel 2. Philosophie und Pädagogik.

A. Philosophie.

K. Gimler. Der Festpunkt des Denkens 40
E. v. Schmidt. Zum Begriff und Sitz der Seele 41
J. Unbehaun. Versuch einer philosophischen Selectionstheorie . . 41
W. Wundt. Ueber naiven und kritischen Realismus 41
G. Loria. Matematica. Articolo del Dizionario illustrato di Pedagogia 42
H. Scheffler. Wesen der Mathematik und Aufbau der Welterkenntnis 42
H. Scheffler. Die Grundfesten der Welt. Selbstkritik 42
H. Schotten. Grenze zwischen Philosophie und Mathematik . . . 44
F. Klein. Sullo spirito aritmetico nella matematica 44
F. Klein. The arithmetizing of mathematics 44
F. Klein. Ueber Arithmetisirung der Mathematik 44
K. Strecker. Logische Uebungen. 1. Heft 45
G. Frege. Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene . . . 45
A. Nagy. Alcuni teoremi intorno alle funzioni logiche 46
P. Poretsky. La loi des racines en logique 46
L. L. Conant. The number concept: its origin and development . . 46
W. Killing. Ueber transfinite Zahlen 46
K. Goebel. Die Zahl und das Unendlichkleine 46
W. P. Ermakow. Worin besteht das Wesen der Algebra? 47
Z. G. de Galdeano. El álgebra simbólica, las geometrías no-euclídeas y el concepto de hiper-espacio 47
J. C. V. Hoffmann. Erzeugung der Fläche und des Körpers . . . 47
W. Dyck. Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik 48
† Weitere Litteratur 48

B. Pädagogik.

F. Dauge. Cours de méthodologie mathématique 49
F. Klein. Die Anforderungen der Ingenieure und die Ausbildung der mathematischen Lehramtscandidaten 49
G. Holzmüller. Beziehungen des mathematischen Unterrichts zum Ingenieurwesen und zur Ingenieurerziehung 50
B. Schwalbe. Beziehungen des mathematischen Unterrichts zur Ingenieur-Erziehung 50
Report of Committee. On the establishment of a national physical laboratory 50
D. E. Smith. Sex in mathematics 51
P. Treutlein. Der Lehrplan für den mathematischen Unterricht des badischen Realgymnasiums 51
Hubert Müller. Die Lehrpläne von 1892 51
J. Kleiber. Aphorismen zum Aufgaben-Repertorium 52
K. Israel-Holtzwart. Intuitive mathematische Darstellungsmittel 52
R. Nelson. Methodisches zum Unterricht in der Arithmetik 52
M. Löwe. Zahlenrechnen an der sächsischen Realschule 53
E. W. G. Schulze. Geometrischer Unterricht in Quarta 53
Ed. Weber. Zahlenbegriff in der elementaren Arithmetik 54
G. Degenhardt. Praktische Geometrie auf dem Gymnasium . . . 54
G. Holzmüller. Ueber die Tragweite einer Reihenformel 55
Report of Committee. Teaching of science in elementary schools . . 55
Norrenberg. Zur indirecten Beweisführung 55
Weber. Logik und Sprachrichtigkeit im mathematischen Unterricht 55
von der Heyden. Das Rechenlineal 55
† A. R. Hornbrook. Laboratory methods of teaching mathematics . 55



Seite
†J. A. McLellan and J. Dewey. The psychology of number . . . 55
†J. Larmor. On the geometrical method 55

Zweiter Abschnitt. Algebra.

Kapitel 1. Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen.)

H. Weber. Lehrbuch der Algebra. 2. 56
E. Netto. Vorlesungen über Algebra. 1. 58
†H. B. Lübsen. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra 59
†L. Matthiessen. Grundzüge der antiken und modernen Algebra . 59
Alex. McAulay. „Octonions“ 59
S. Kimura. On the nabla of quaternions 59
†A. S. Hathaway. A primer of quaternions 60
†C. Galopin-Schaub. Premières notions du calcul des quaternions 60
†J. B. Shaw. Development of some useful quaternion expressions . 60
A. L. Baker. Algebraic symbols 60
C. Burali-Forti. Le classi finite 60
R. Bettazzi. Sulla catena di un ente in un gruppo 61
R. Bettazzi. Fondamenti per una teoria generale dei gruppi . . . 61
R. Bettazzi. Gruppi finiti ed infiniti di enti 62
D. Hilbert. Ein neuer Beweis des Kronecker'schen Fundamentalsatzes über Abel'sche Zahlkörper 62
N. H. Abel. Memorias sobre las ecuaciones algébricas 63
J. Pierpont. On the Ruffini-Abelian theorem 63
E. Netto. Irreductibilität ganzzahliger ganzer Functionen 64
†G. Kreuzberg. Zerlegbarkeit rationaler ganzer Functionen . . . 64
G. Cordone. Una classe d'equazioni risolubili algebricamente . . . 64
L. Gegenbauer. Zwei allgemeine Sätze über Sturm'sche Ketten . 65
J. de Vries. Ueber gewisse Sturm'sche Ketten 65
E. Borel. Sur le théorème de Descartes 65
E. Baudran. Solution de la question 286 65
Guitton. Solution de la question 95 66
†H. Vogt. Résolution algébrique de l'équation binôme $x^p-1=0$. 66
†S. Giermann. Anwendungen der Binomialgleichungen $z^n \pm 1=0$. 66
V. Mollame. Le equazioni cubiche con radici reali 66
M. Sepp. Zur Auflösung der kubischen Gleichungen 66
W. Heymann. Didaktische Bemerkungen zur kubischen Gleichung 67
†E. Humbert. Invariant de la forme cubique 67
†J. Girod. Résolution trigonométrique de l'équation cubique . . . 67
Ch. H. Kummell. To express the roots of the solvable quantics as symmetrical functions of homologues 67
†F. Hack. Beiträge zur Anwendung der Gruppentheorie auf kubische und biquadratische Gleichungen 68
R. Hoppe. Bezirke der drei Wurzelformen der Gleichung 4. Grades 68
F. Giudice. Sull' equazione di 5° grado 68
G. Vivanti. Ueber die Ikosaederirrationalität 69
F. Brioschi. Sur l'équation Jacobienne du sixième degré 69
G. Frattini. Intorno a una proprietà dell'equazione di sesto grado 69
E. M. Lémeray. Convergence des substitutions uniformes 70
K. Scheele. Auflösung algebraischer Gleichungen durch Reihen . . 70
N. W. Bugaiew. Die Methode der successiven Annäherungen und die numerische Auflösung der algebraischen Gleichungen . . . 70
N. W. Bugaiew. Die Methode der successiven Annäherungen und die Entwickelung der Functionen in stetige Reihen 70

Seite

N. W. Bugaiew. Die Methode der successiven Annäherungen und die Ableitung der Theoreme von Taylor und Lagrange 70
N. W. Bugaiew. Die Methode der successiven Annäherungen und die Integration der Differentialgleichungen 70
C. A. Laisant. Sur les méthodes d'approximation dans les équations algébriques 72
†E. Carvallo. Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes 72
E. M. Lémeray. Sur les racines de l'équation $x = a^x$ 72
B. Mlodziewsky. Der Apparat von Prof. Mehmke für die Auflösung der Gleichungen höherer Grade 72
W. H. O. Madsen. Grafisk Lösning af Ligninger 73
M. d'Ocagne. Sur les équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés 73
M. d'Ocagne. Théorème relatif aux abaques 73
M. d'Ocagne. Sur l'emploi des systèmes réguliers de points cotés pour la représentation des équations 73
M. d'Ocagne. Sur la représentation nomographique des équations du second degré à trois variables 73
A. Hurwitz. Équations avec des racines à partie réelle négative . . 73
†A. Gay. Les machines de M. Torres à résoudre les équations . . 73

Kapitel 2. Theorie der Formen (Invariantentheorie).

A. Capelli. Sopra un principio generale di aritmetica ed una nuova deduzione del teorema di Hilbert 74
A. Capelli. Estensione del teorema di Hilbert al caso di polinomi con infiniti termini 74
F. Brioschi. Sopra un teorema del sig. Hilbert 74
E. B. Elliott. Note on the linear factors of a quartic 75
F. Brioschi. Il risultante di due forme binarie biquadratiche . . . 75
E. Waelsch. Ueber die Lamé'schen Polynome zweiter Ordnung einer Form fünfter Ordnung 75
J. Hammond. On the a, b, c form of the binary quintic 76
E. B. Elliott. Systems of four and five irreducible invariants of the binary quintic and the binary sextic 76
R. Alagna. Le relazioni irreduttibili fra gl'invarianti d'una forma qualunque d'ottavo ordine 77
H. Vogt. Réduction simultanée de deux formes quadratiques de trois variables à des formes canoniques 77
Boulanger. Sur certains invariants relatifs au groupe de Hesse . . 78
S. Pincherle. Le operazioni distributive e le omografie 78
H. B. Newson. On a remarkable covariant of a system of quantics 78
D. B. Mair. An algebrically complete system of quaternariants . . 78
G. Frobenius. Zur Theorie der Scharen bilinearer Formen 79
G. Frobenius. Cogrediente Transformationen der bilinearen Formen 79
G. Landsberg. Fundamentalsysteme und bilineare Formen 80
A. Voss. Cogrediente Transformation der bilinearen Formen in sich 81
F. Lindemann. Ueber die linearen Transformationen einer quadratischen Mannigfaltigkeit in sich 81
A. Voss. Ueber die Anzahl der cogredienten und adjungirten Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst 82
A. Voss. Symmetrische und alternirende Lösungen der Gleichung $SX = XS'$ 82
G. Sforza. Sulle forme bilineari simili (fine) 83
A. Loewy. Transformationen einer quadratischen Form in sich selbst 83
A. Loewy. Zur Theorie der linearen Substitutionen 87

Seite

A. Loewy. Bemerkungen zur Theorie der conjugirten Transformation einer bilinearen Form in sich selbst 88
J. Deruyts. Invariantes associées à un système transformable . . . 88
J. Deruyts. Déterminant d'un système transformable 88
†M. Noether. Gemeinsamer Factor zweier binären Formen 89
†F. Brioschi. Invariants de deux formes binaires à facteur commun 89
†J. Lüroth. Gemeinsamer Factor zweier binären Formen 89

Kapitel 3. Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

E. Netto. Zur Theorie der Resultanten (nebst Nachtrag) 89
J. Hadamard. Mémoire sur l'élimination 90
H. Laurent. Sur les fonctions entières 91
A. Pleskot. Zur Eliminationstheorie 91
†Th. Muir. On the eliminant of a set of ternary quadrics 91
G. Frobenius. Ueber Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe . 91
G. Frobenius. Ueber Gruppencharaktere 92
G. Frobenius. Ueber die Primfactoren der Gruppendeterminante . 94
H. Laurent. Théorie nouvelle de substitutions linéaires 95
W. Burnside. Isomorphism of a group with itself 96
W. Burnside. Doubly transitive groups of degree n and order $n(n-1)$ 97
W. Burnside. Doubly transitive groups of degree 2^m and order $2^m(2^m-1)$ 97
G. A. Miller. List of transitive substitution groups of degree 12 . 97
G. A. Miller. The regular substitution groups whose order is less than 48 97
G. A. Miller. On several theorems on operation groups 98
G. A. Miller. On the lists of all the substitution groups that can be formed with a given number of elements 98
G. A. Miller. The substitution groups whose order is the product of two unequal prime numbers 98
G. A. Miller. Sur les groupes de substitutions (2 Noten) 99
G. A. Miller. The non-regular transitive substitution groups whose order is the cube of any prime number 99
G. A. Miller. The substitution groups whose order is four 99
G. A. Miller. The operation groups of order 8p 100
H. Taber. On certain sub-groups of the general projective group . 100
H. Taber. Note on the special linear homogeneous group 100
†H. Taber. Automorphic linear transformation of a bilinear form . 101
†H. Taber. On the group of linear transformations whose invariant is an alternate bilinear form 101
H. W. Lloyd Tanner. On the enumeration of groups of totitives . 101
L. Autonne. Sur les substitutions régulières non linéaires. 101
Ed. Maillet. Note sur les groupes de substitutions 102
Ed. Maillet. Propriétés des groupes de substitutions d'ordre donné 102
E. Beke. Beitrag zur Theorie der rationalen Functionen. 102
J. Pierpont. Invariance of the factors of a substitution-group . . 102
G. Cordone. Gruppo di sostituzioni razionali e lineari 103
R. Fricke. Einfache Gruppe von 360 Operationen 103
A. Wiman. Einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen . . . 103
E. H. Moore. A doubly-infinite system of simple groups 104
F. Fano. Endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen 104
R. Levavasseur. Sur les groupes d'opérations 105
L. E. Dickson. Analytic functions suitable to represent substitutions 105

Seite

A. A. Radzig. Die Anwendung des Theorems von Sylow auf die symmetrische Gruppe . . . 105
H. Maschke. The representation of finite groups by Cayley's color diagrams . . . 105
H. Maschke. Ueber die Darstellung endlicher Gruppen durch Cayley'sche Farbendiagramme . . . 105
A. Loewy. Sur les formes quadratiques définies à indéterminées conjuguées de M. Hermite . . . 106
L. Fuchs. Remarque sur une note de M. A. Loewy . . . 106
†G. Caldarera. Le sostituzioni rappresentate mediante trasposizioni 106
G. Bohlmann. Continuirliche Gruppen von quadratischen Transformationen der Ebene . . . 106
G. Brunel. Systèmes de triades formés avec $6n+1$ éléments . . . 107
C. G. J. Jacobi. Bildung und Eigenschaften der Determinanten. Hrsg. von Stäckel . . . 107
C. G. J. Jacobi. Ueber die Functionaldeterminanten. Hrsg. von Stäckel . . . 107
E. Pascal. I determinanti, teoria ed applicazioni . . . 107
F. J. Studnička. Beitrag zur Theorie der Determinanten . . . 108
A. Bonolis. Sul prodotto delle matrici . . . 108
M. Arnaldi. Sui determinanti orlati . . . 108
E. Pascal. Relazioni fra i determinanti di una matrice rettangolare 108
E. Pascal. Relazioni fra i determinanti formati coi medesimi elementi 108
E. Pascal. Un teorema del sig. Netto relativo ai determinanti . . 108
J. Brill. Note on matrices . . . 109
†Ch. J. Joly. Quaternion invariants of linear vector functions . . . 109
†P. G. Tait. On the linear and vector function . . . 109
G. Frobenius. Ueber vertauschbare Matrizen . . . 109
H. S. White. Kronecker's linear relation among minors of a symmetric determinant . . . 110
Ch. Michel. Le déterminant symétrique gauche d'ordre pair . . . 110
G. Rados. Zur Theorie der adjungirten Substitutionen . . . 110
Elgé. Exercices sur les déterminants . . . 111
L. G. Gascó. Reglas para es desarrollo de las determinantes . . . 111
F. J. Studnička. Potenzdeterminanten und deren wichtigste Eigenschaften . . . 111
T. Cazzaniga. Sopra i determinanti di cui gli elementi principali variano in progressione aritmetica . . . 111
Niels Nielsen. En Determinantformel . . . 111
W. W. Taylor. Evaluation of a certain dialytic determinant . . . 111
E. Brand. Note sur les déterminants . . . 112
F. Schicht. Beitrag zur Theorie der Determinanten . . . 112
E. H. Roberts. Note on infinite determinants . . . 112
H. von Koch. Convergence des déterminants d'ordre infini . . . 112
C. A. Laisant. Propriétés des coefficients du binôme . . . 113
H. Taber. On a twofold generalization of Stieltjes' theorem . . . 113
C. Ciamberlini. Relazione tra le distanze di 5 punti dello spazio 114
J. Brill. Generalization of certain properties of the tetrahedron . . 114
D. André. Théorème nouveau de réversibilité algébrique . . . 114
C. A. Laisant. Identités relatives à des polynômes entiers . . . 115
Fr. Junker. Die elementaren symmetrischen Functionen und die Potenzsummen einer oder mehrerer Reihen von Veränderlichen 115
Fr. Junker. Die symmetrischen Functionen der gemeinschaftlichen Variabelnpaare ternärer Formen . . . 116
M. J. M. Hill. Generalisation of Vandermonde's theorem . . . 117
†L. Saalschütz. Einfache Beweise der Newton'schen Identitäten 117

Seite

Dritter Abschnitt. Niedere und höhere Arithmetik.

Kapitel 1. Niedere Arithmetik.

W. Briggs and G. H. Bryan. The intermediate algebra 118
E. Gelin. Recueil de problèmes d'arithmétique 119
K. Koppe's Arithmetik und Algebra. Bearb. von J. Dieckmann. 13. Aufl. I, II 119
G. Löwenberg. Lehrbuch der Mathematik 119
J. Müller. Die sieben arithmetischen Operationen 120
W. Pflieger. Elemente der Arithmetik 120
H. Schubert. Arithmetik und Algebra 120
H. Schubert. Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra . . . 120
K. Schwering. Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik. I, II, III 120
W. Winter. Algebra. Lehrbuch mit Aufgabensammlung 121
J. D. Höppner. Note on four-dimensional figures 121
E. Gelin. Du meilleur système de numération 121
N. Sokolow. Numerationssysteme mit einer veränderlichen Basis . 122
J. Mayer. Grundrechnungsarten mit periodischen Decimalbrüchen . 122
C. E. Bickmore. Sur les fractions décimales périodiques 122
R. Schönherr. Auflösung einiger eingekleideter Aufgaben 122
F. J. Studnička. Multiplicatorische Spielereien 122
B. Schiappa Monteiro. Sur une inégalité 122
L. Carlini. Ricerca del massimo comun divisore di due o più numeri mediante la divisione 123
C. Reuschle. Abgekürzte abgebraische Division 123
C. Reuschle. Geometrische Bedeutung der Partialbruchzerlegung . 123
P. T. Foldberg. Tilnaeret Beregning af Produkter og Qvotienter . 123
G. Mazzola. Nuova teoria delle approssimazioni aritmetiche . . . 123
Aubry. Sur l'extraction des racines carrées et cubiques 123
E. S. Barrachina. Raíces de los numeros 124
B. Krause. Zur Berechnung einer dreistelligen Logarithmentafel . 124
†Weitere Litteratur 124

Kapitel 2. Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

U. Scarpis. Primi elementi della teoria dei numeri 127
H. Minkowski. Geometrie der Zahlen. Lfg. 1 127
H. Minkowski. Sur les propriétés des nombres entiers qui sont dérivées de l'intuition de l'espace 133
J. de Vries. Geometrische Beweise zahlentheoretischer Sätze . . . 134
†Tannery, J. Introduction à l'étude de la théorie des nombres et de l'algèbre supérieure. Par E. Borel et J. Drach 134
†F. Klein. Ausgewählte Kapitel der Zahlenlehre 134
P. A. Mac Mahon. Theory of the partition of numbers. Part I . 134
A. R. Forsyth. Algebraical theorems connected with the theory of partitions 135
J. Hermes. Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl in Summanden. II 135
K. Glösel. Ueber die Zerlegung der ganzen Zahlen 135
K. Glösel. Notiz über die Zerlegung der ganzen Zahlen 136
R. Daublebsky von Sterneck. Zur additiven Erzeugung der ganzen Zahlen 136
P. Stäckel. Ueber Goldbach's empirisches Theorem 136
J. J. Sylvester. On the Goldbach-Euler theorem 137
F. W. Lawrence. Factorisation of numbers 137
G. Speckmann. Ueber die Factoren der Zahlen 137

Seite
†G. Speckmann. Arithmetische Studien 138
G. Wertheim. Zerlegung ungerader Zahlen in Factoren 138
M. Neumann. Zur Zerlegung ungerader Zahlen in Factoren . . . 138
C. Bourlet. Sur les nombres parfaits 138
J. Bezdíček. Ueber befreundete und vollkommene Zahlen 138
†A. Haas. Eine Bemerkung über befreundete Zahlen 138
A. G. Fazio. Sui multipli dei numeri della forma $10Q+R$ 138
F. Nachtikal. Zwei arithmetische Sätze 139
R. Aigar. Solution of question 12847 139
C. E. Bickmore. On the numerical factors of a^n-1 139
C. E. Bickmore. Solution of question 13058 139
E. H. Moore. A two-fold generalization of Fermat's theorem . . . 139
R. Daublebsky von Sterneck. Ueber den Wilson'schen Satz . . 140
Lognon. Généralisation de la formule de Wilson 140
N. Nielsen. En Egenskab ved Talraekken 140
L. Birkenmajer. Ueber einen zahlentheoretischen Satz 141
M. Lerch. Sur un théorème de Zolotarev 141
N. Sokolow. Ein Theorem aus der Arithmetik 141
F. Gruber. Zur Theorie der Fermat'schen Congruenzen 141
J. Mayer. Zu Kessler's „Periodlänge" unendlicher Decimalbrüche 142
E. Busche. Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes . . . 142
Lange. Ein elementarer Beweis des Reciprocitätssatzes 143
X. Stouff. Sur les lois de réciprocité 143
de Séguier. Sur les sommes de Gauss 143
F. Mertens. Ueber die Gaussischen Summen 144
G. Wertheim. Primitive Wurzeln der Primzahlen $2^x q^\lambda+1$ 144
G. Wertheim. Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln g aller Primzahlen p zwischen 3000 und 5000 144
de Jonquières. Propriétés des racines primitives des nombres premiers 144
de Jonquières. Propriétés des racines secondaires des nombres premiers 144
de Jonquières. Au sujet d'une précédente communication 145
de Jonquières. Au sujet des nombres premiers dont un nombre quelconque donné ne peut être racine primitive 145
Pepin. Formes linéaires des diviseurs de $x^2\pm A$ 145
G. Speckmann. Auflösung der Congruenz $x^2\equiv a$ 145
N. Aladow. Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste von einer Primzahl P in der Reihe $1, 2, \ldots, P-1$ 146
A. Cunningham. On 2 as a 16-ic residue 146
A. Cunningham. Note 146
F. Hromadko. Proben aus Diophantos 146
G. B. Mathews. Representation of a number as a sum of squares 147
A. Martin. Square numbers whose sum is a square 147
A. Martin. Biquadrate numbers whose sum is a biquadrate 147
A. Martin. Cube numbers whose sum is a cube number. II . . . 147
Ed. Maillet. Décomposition d'un nombre entier en une somme de cubes d'entiers positifs 148
Ed. Maillet. Quelques extensions du théorème de Fermat sur les nombres polygones 148
Ed. Maillet. Sur une application à l'analyse indéterminée de la théorie des suites récurrentes 148
H. F. Blichfeldt. Triangles with rational sides and areas 148
J. Iwanow. Ueber eine Congruenz dritten Grades 149
L. Gegenbauer. Bemerkung über reelle Primzahlen 149
R. Daublebsky von Sterneck. Ueber einige specielle zahlentheoretische Functionen 149

Seite

R. Daublebsky v. Sterneck. Bemerkungen über die von Dirichlet in seiner Breslauer Habilitationsschrift behandelten Functionen . 150
Ch. J. de la Vallée Poussin. Démonstration simplifiée du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique 150
†L. Carlini. Progressioni aritmetiche e numeri primi 151
E. Busche. Ueber die Teiler der natürlichen Zahlenreihe 151
G. Bertolani. Contributo alla teoria della funzione $E(x)$ 152
E. Cesaro. Sulla distribuzione dei numeri primi 152
C. Aiello. Numero dei numeri primi inferiori ad un dato limite . . 152
J. Franel. Sur la fonction $\xi(t)$ de Riemann 153
H. von Mangoldt. Sur le mémoire de Riemann relatif au nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée 153
J. Hadamard. Distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ 154
J. Hadamard. Les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann 154
J. Hadamard. Sur la fonction $\zeta(s)$ 155
Kluyver. Sur les valeurs que prend la fonction $\zeta(s)$ de Riemann pour s entier positif et impair 155
Ch. J. de la Vallée Poussin. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers 155
†B. Riemann. Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée 155
N. W. Berwi. Kurzer Abriss des gegenwärtigen Standes der Theorie der zahlentheoretischen Functionen 156
N. W. Berwi. Die Auflösung einiger allgemeinen Fragen der Theorie der zahlentheoretischen Functionen 156
N. W. Berwi. Zahlentheoretische Anwendungen der Analysis des Unendlichkleinen und analytische Anwendungen der Zahlentheorie 157
N. W. Bugaiew. Bestimmte Zahlenintegrale nach den Divisoren . 158
L. Gegenbauer. Arithmetische Bemerkung 158
M. Lerch. Sur diverses formules d'arithmétique 159
G. Landsberg. Fundamentalsystem und Discriminante der Gattungen algebraischer Zahlen, welche aus Wurzelgrössen gebildet sind 159
J. A. Gmeiner. Ueber die ganzen Zahlen im Rationalitätsgebiete der fünften Einheitswurzeln 159
H. Weber. Ueber einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integralrechnung 160
K. Zsigmondy. Beiträge zur Theorie Abel'scher Gruppen und ihrer Anwendung auf die Zahlentheorie 160
A. Hurwitz. Ueber die Zahlentheorie der Quaternionen 162
†K. Ssorokin. Complexe Zahlen mit einfachen Moduln 163

B. Theorie der Formen.

F. Klein. Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie I. Ausgearbeitet von A. Sommerfeld 163
Ch. J. de la Vallée Poussin. Recherches arithmétiques sur la composition des formes binaires quadratiques 164
G. Osborn. Addendum on the quadratic residues of primes 165
G. Frattini. Risoluzione dell' equazione $ax^2+bxy+cy^2=m$ . . . 165
G. Frattini. Dell' equazione di Pell a coefficiente algebrico . . . 165
G. Speckmann. Ueber unbestimmte Gleichungen x^{ten} Grades . . . 166
C. Störmer. En Egenskab ved Lösningen af den Pellske Ligning . 166
C. Störmer. Sur les solutions entières de l'équation $\Sigma x_i \operatorname{arctg}(1/k_i)=\frac{1}{4}k\pi$ 166
A. Meyer. Ueber indefinite ternäre quadratische Formen 167
H. W. Lloyd Tanner. Notes on a ternary cubic 167
†Th. Dedoff. Untersuchungen über quadratische Formen 168

Seite

Kapitel 3. Kettenbrüche.

D. N. Lehmer. Proof of a theorem in continued fractions 168
F. Giudice. Sulle frazioni continue numeriche 168
A. Hurwitz. Kettenbrüche, deren Teilnenner arithmetische Reihen bilden 169
J. Heawood. On certain distinctions between the theories of converging fractions and converging multiples 169
H. Minkowski. Généralisation de la théorie des fractions continues 170
G. Woronoi. Verallgemeinerung des Kettenbruch-Algorithmus . . 170
A. A. Markow. Neue Anwendungen der Kettenbrüche 174
A. Markow. Nouvelles applications des fractions continues 176
F. Klein. Sur une représentation géométrique du développement en fraction continue ordinaire 177

Vierter Abschnitt. Combinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

D. André. Démonstration de la relation entre le nombre des permutations alternées et celui des permutations quasi-alternées . 178
E. Busche. Die Schubert'sche Lösung eines Bachet'schen Problems . 178
Coccoz. Carrés magiques en nombres non consécutifs 179
†B. Portier. Le carré diabolique de 9 et son dérivé 179
Fontès. Sur les carrés à bordure de Stifel (1544) 179
A. H. Frost. The construction of Nasik squares of any order . . . 180
J. A. Isnoskow. Magische Quadrate 180
P. A. Nekrassow. Theorie der Wahrscheinlichkeiten 180
E. Mortara. Osservazioni critiche circa il calcolo delle probabilità . 180
K. Delannoy. Emploi de l'échiquier pour la résolution de certains problèmes de probabilités 180
Zerr. Solution of question 11924 181
W. J. C. Mittler, H. Fortey. Solution of question 3631 181
H. Fortey, D. Biddle, T. C. Simmons. Solution of question 12898 181
W. J. C. Sharp, Zerr. Solution of question 9806 181
W. J. C. Miller, N. Coondoo, Zerr. Solution of question 2042 . 181
Finkel, D. Biddle, Radhakrishnan. Solution of question 13080 182
Ch. Lagrange. Démonstration du théorème de Bernoulli 182
†Ch. Lagrange. Moindres carrés 182
B. Gustavicz. Die Ausgleichungsrechnung 182
J. Andrade. Sur la méthode des moindres carrés 182
Kopsel. Zur Methode der kleinsten Quadrate 183
A. K. Kononowitsch. Résolution du système des équations linéaires à trois inconnues par la méthode des moindres carrés 184
F. Y. Edgeworth. The asymmetrical probability curve 184
F. Y. Edgeworth. The compound law of error 184
K. Pearson. Contributions to the mathematical theory of evolution 185
C. B. Davenport and C. Bullard. Quantitative study of correlated variation and the comparative variability of the sexes 185
Bennecke. Verfahren zu Durchschnittsalters-Ermittelungen 185
A. Pringsheim. Die Grundlage der modernen Wertlehre: Daniel Bernoulli, Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung . 185
L. Grossmann. Die Mathematik im Dienste der Nationalökonomie 186
B. Danielewicz. Mathematische Grundlagen der Lebensversicherung 186
E. Fagnart. Sur le calcul des annuités viagères 186
G. Eneström. Om lifränteberäkningsmetoderna under sextonhundratalet 187
G. Eneström. Ett bidrag till mortalitetstabellernas historia före Halley 187

Seite
G. Eneström. Befolkningsstatistiska formler för dödligheden, då hänsyn tages till emigration och immigration 187
G. Eneström. Generalisation af ett par formler inom befolkningsstatistiken 188
G. Eneström. Sur une formule de l'assurance de survie 188
E. Phragmén. Sur la théorie des élections multiples 188
G. Eneström. Om aritmetiska och statistiska metoder för proportionella val 189
†Weitere Litteratur 189

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Kapitel 1. Allgemeines.

B. Sporer. Niedere Analysis 191
A. Pringsheim. Ueber die sogenannte Grenze und die Grenzgebiete zwischen Convergenz und Divergenz 191
W. F. Osgood. Ueber die ungleichmässige Convergenz und die gliedweise Integration der Reihen 193
W. F. Osgood. A geometrical method for the treatment of uniform convergence and certain double limits 194
A. S. Chessin. On non-uniform convergence of infinite series . . . 195
A. S. Chessin. On infinite products 195
A. S. Chessin. A new classification of infinite series 195
A. S. Chessin. Limit for regular sequences of rational numbers . 196
A. S. Chessin. Additional note on divergent series 196
F. Cajori. Multiplication and involution of semi-convergent series 196
R. Bryant. Note on the convergency of series 197
M. J. M. Hill. Cauchy's condensation test for the convergency of series 197
É. Borel. Théorie des séries divergentes sommables 197
É. Borel. Région de sommabilité d'un développement de Taylor . 197
É. Borel. Sur les séries de Taylor 198
É. Borel. Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure 198
É. Borel. Applications des séries divergentes sommables 200
M. Petrovitch. Un problème sur les séries 200
N. Bougaief. Sur le théorème de Taylor avec l'approximation du troisième degré 201
Ed. Lemaire. Séries entières à plusieurs variables indépendantes 201
W. Williams. On the convergency of the Fourier series 202
A. Berger. Sur le développement de quelques fonctions discontinues en séries de Fourier 202
M. Lerch. Transformation abélienne des séries trigonométriques . . 202
M. Lerch. Abel'sche Transformation trigonometrischer Reihen . . 203
W. A. Steklow. Entwickelung einer gegebenen Function in eine Reihe nach den harmonischen Functionen 203
N. W. Bugaiew. Ableitung der Theoreme von Taylor und Lagrange 204
Ch. Méray. Nouveaux exemples d'interpolations illusoires 204
E. Netto. Analogon zu den Euler'schen Interpolationsformeln . . . 205
G. Löwenberg. Lehrbuch der Mathematik 205
†S. Romano. Sulla convergenza delle serie 205

Kapitel 2. Besondere Reihen.

A. Arnaudeau. Table de triangulaires de 1 à 100000 205
A. Emmerich. Formel für die Summe der Quadratzahlen 206

Seite
E. J. Nanson. Transformation of a series 206
A. S.-Chessin. Note on Cauchy's numbers 206
O. Schlömilch. Ueber einige unendliche Producte und Reihen . . 206
M. Lerch. Ueber eine Gattung semiconvergenter Entwickelungen . 207
M. Lerch. Sur une espèce de séries semiconvergentes 207
N. Nielsen. Sur la sommation de quelques séries 208
N. Nielsen. Summation of nogle elementaere Raekker 208
J. W. L Glaisher. Correction of an error 208
Ch. J. de la Vallée Poussin. Sur la série de Lambert 209
E. Bunitzky. Reihen mit constantem Excess 209
J. Neuberg. Sur une suite récurrente 209
J. Neuberg. Sobra una serie reccurente 209
Sonin et Hermite. Sur les polynômes de Bernoulli 209
C. Pietrocola. Sui numeri e polinomi di Bernoulli 212
†G. de Rocquigny-Adanson. Les nombres triangulaires 213
†L. Saalschütz. Zwei Sätze über arithmetische Reihen 213
†G. Fleuri. Elementary exposition of the theory of power series . 213
†R. Mildner. Ueber einige allgemeinere, durch einfache und Doppelintegrale ausdrückbare unendliche Reihen und Producte 213

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Kapitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.).

É. Picard. Traité d'analyse. Tome III 214
O. Stolz. Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. II. . 217
M. Merriman and R. S. Woodward. Higher mathematics 218
J. Graham. An elementary treatise on the calculus 219
A. G. Greenhill. Differential and integral calculus 220
F. Gomes Teixeira. Curso de analyse infinitesimal. Calcolo diferencial 220
A. H. Barker. Graphical calculus 220
L. Kiepert. Grundriss der Differential- und Integralrechnung. II. 221
B. Williamson. An elementary treatise on the integral calculus . 221
F. Tisserand. Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal . . . 221
W. H. Echols. Calculus of functions derived from limiting ratios . 222
†Weitere Litteratur 223

Kapitel 2. Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima).

E. M. Lémeray. Sur la dérivée des fonctions interpolées 224
W. H. Echols. The fundamental problem of the differential calculus 224
E. J. Nanson. Hessian of an implicit function 224
E. J. Nanson. Change of independent variables in the Hessian . . 224
E. Bortolotti. Determinanti di funzioni nel calcolo alle differenze finite 225
E. B. Elliott. Note on a class of exact differential expressions . . 225
R. Harley. Results connected with the theory of differential resolvents 225
A. Perna. Sulla derivabilità reciproca per polare di due funzioni delle stesse serie di variabili 226
W. Kleinmichel. Maxima und Minima auf dem Gymnasium 226
E. J. Nanson. Conditions for maximum or minimum of stationary value of a function of any number of variables 226
E. J. Nanson. On the condition that a quadric may be of invariable sign when the variables are connected by given linear relations 226
E. J. Nanson. Conditions that a quadric may be one-signal 227

Seite

V. v. Dantscher. Ueber die Ellipse vom kleinsten Umfange durch drei gegebene Punkte. II. 227
†G. Pennacchietti. Sui parametri differenziali 227
†W. Schidlowsky. Zur Lehre vom Differential und Integral . . . 227

Kapitel 3. Integralrechnung.

G. A. Gibson. A reduction formula for indefinite integrals 228
G. Morera. Dimostrazione di una formola di calcolo integrale . . . 228
G. Morera. Sopra una formola di calcolo integrale 228
G. Koenigs. Sur les invariants intégraux 229

Kapitel 4. Bestimmte Integrale.

O. Stolz. Der von G. Peano aufgestellte Begriff des bestimmten Integrals 229
M. Fouché. Sur la définition de l'intégrale définie 230
C. Burali-Forti. Sur la définition de l'intégrale définie 230
M. Petrovitch. Décomposition des intégrales définies en éléments simples 231
W. F. Osgood. Zur Differentiation des bestimmten Integrales nach einem Parameter 231
N. Nielsen. Sur la transformation d'une intégrale définie 232
M. Bôcher. On Cauchy's theorem concerning complex integrals . 232
E. Gubler. Ueber ein discontinuirliches Integral 232
M. Lerch. Betrachtungen über einige Fragen der Integralrechnung 233
Calculation of the $G(r, \nu)$-integrals 234
V. Jamet. Sur les intégrales de Fresnel 235
E. Fabry. Sur les intégrales de Fresnel 235
E. J. Nanson. On certain definite integrals, single and multiple . . 235
G. Oltramare. Note sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos yx}{(a^2+b^2x^2)^n}\,dx$ 236
†C. Störmer. Om en generalisation af integralet $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ 236
†J. Richard. Note sur l'intégrale définie 236
A. Maggi. Sull'area delle superficie curve 236
P. H. Schoute. L'aire des paraboles d'ordre supérieur 237
D. J. Korteweg. Sur un théorème énoncé par M. P. H. Schoute . 237
G. Mannoury. Sur une note de M. P. H. Schoute 237
J. Franel. Sur la formule sommatoire d'Euler 237
L. Raffy. Sur la méthode de quadrature de Gauss 238
L. F. Marrecas Ferreira. Estudo sobre o planimetro de Amsler . 238

Kapitel 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

C. Arzela. Sull'esistenza degl'integrali nelle equazioni differenziali ordinarie 238
S. Lie. Zur allgemeinen Transformationstheorie. I. Ueber Differentialgleichungen, die eine continuirliche Gruppe gestatten 238
E. Picard. Sur l'extension des idées de Galois à la théorie des équations différentielles 239
F. Marotte. Application de la théorie des groupes continus à l'étude des points singuliers des équations différentielles linéaires . . . 240
J. M. Page. Note on singular solutions 240
J. Maddison. On singular solutions of differential equations of the first order 240
A. Kneser. Neue Beweise für die Convergenz der Reihen, welche bei der Integration linearer Differentialgleichungen in der Umgebung der einfachsten singulären Stellen auftreten 241

Seite

L. Fuchs. Eine Klasse linearer homogener Differentialgleichungen . 241
L. Schlesinger. Ueber die Integration linearer homogener Differential-Gleichungen durch Quadraturen 242
L. Schlesinger. Zur Theorie der Euler'schen Transformirten einer homogenen linearen Differentialgleichung der Fuchs'schen Klasse 243
L. Heffter. Ueber gemeinsame Vielfache linearer Differentialausdrücke und lineare Differentialgleichungen derselben Klasse . . 244
P. Günther. Zur Theorie der adjungirten Differentialgleichung . . 244
A. Gutzmer. Zur Theorie der adjungirten Differentialgleichungen . 245
A. Gutzmer. Sur certaines équations différentielles linéaires . . . 245
G. F. Metzler. Equations and variables associated with the linear differential equation 245
M. Petrovitch. Remarques algébriques sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre 246
G. Wallenberg. Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung 246
A. Korkine. Équations différentielles ordinaires du premier ordre 247
P. Painlevé. Sur les équations différentielles du premier ordre . . 247
A. Korkine. Équations différentielles ordinaires du premier ordre . 248
P. Painlevé. Sur les équations différentielles du premier ordre. Réponse à M. Korkine 248
M. Petrovitch. Sur une équation différentielle du premier ordre . 248
J. Bendixson. Équations différentielles linéaires à solutions périodiques 248
A. Guldberg. Om integration af Differentialligninger af 2den orden 249
A. Guldberg. Om Differentialligninger af anden orden 250
E. Naetsch. Untersuchungen über die Reduction und Integration von Picard'schen Differentialgleichungen 250
A. Berger. Généralisation algébrique des nombres de Lamé . . . 252
A. Markoff. Sur l'équation de Lamé 252
A. Liapounoff. Sur une série relative à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques 252
H. Gyldén. Sur une équation différentielle du second ordre nonlinéaire et à coefficients doublement périodiques 253
H. Gyldén. Remarques ultérieures 253
A. Kneser. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen 253
A. Tresse. Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$ 254
M. Petrovitch. Sur l'équation différentielle de Riccati 256
W. Anissimow. Riccati's Gleichung allgemeiner Form 256
S. Maillard. Extrait d'une lettre 256
A. A. Markow. Ueber eine Differentialgleichung 256
F. Enriques. Equazioni differenziali lineari del 4º ordine che divengono integrabili quando è noto un loro integrale particolare . . 257
F. Brioschi. Le equazioni differenziali lineari equivalenti alle rispettive equazioni differenziali aggiunte di Lagrange 257
N. Bugaiew. Monogeneität der Integrale von Differentialgleichungen 258
W.. Anissimow. Ueber die Form der Differentialgleichungen mit periodischen Coefficienten 258
P Nekrassow. Imschenetzky's Regel zur Auffindung der algebraischen rationalen Integrale einer linearen Differentialgleichung 258
P. Nekrassow. Methode von P. Ermakow zur Auffindung der rationalen Integrale der linearen Differentialgleichung 258
F. H. Jackson. A certain linear differential equation 258

Seite
G. Chrystal. Fundamental theorem regarding the equivalence of systems of ordinary linear differential equations 259
J. Horn. Reihenentwickelung der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen 260
A. Guldberg. Unbeschränkt integrable totale Differentialgleichungen 261
A. A. Markoff. Differenzenrechnung 261
G. Torelli. Forme lineari alle differenze con fattori di primo grado commutabili 261
F. Bortolotti. Forma aggiunta di una forma lineare alle differenze 262
G. Oltramare. Intégration des équations linéaires aux différences mêlées à coefficients constants 263
†Weitere Litteratur 263

Kapitel 6. Partielle Differentialgleichungen.

E. Goursat. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. I . . 264
K. Boehm. Untersuchungen über die Reduction partieller Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen 266
É. Delassus. Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles 267
É. Delassus. Sur les systèmes algébriques et leurs relations avec certains systèmes d'équations aux dérivées partielles 267
É. Delassus. Sur les transformations des systèmes différentiels . . 267
J. Bendixson. Démonstration de l'existence de l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles linéaires 268
S. Lie. Zur allgemeinen Transformationstheorie. II. Einige Bemerkungen über Pfaff'sche Ausdrücke und Gleichungen 268
Fr. Engel. Das Pfaff'sche Problem 269
C. Russjan. Theorie der Integration der Differentialgleichung $\Sigma X dx = 0$ und die Methode von Pfaff 269
A. J. Stodólkiewicz. Ueber das Pfaff'sche Problem 271
J. Zantschewsky. Le problème de Pfaff 271
W. G. Imschenetsky. Aufstellung gewisser Systeme kanonischer Gleichungen und vollständig integrirbarer partieller Differentialgleichungen 271
W. G. Imschenetsky. Bemerkung über partielle Differentialgleichungen 271
P. A. Nekrassow. Zur Bemerkung von W. G. Imschenetsky über partielle Differentialgleichungen 271
P. A. Nekrassow. Simultane kanonische Differentialgleichungen, welche mit gewissen complexen Grössen zusammenhängen . . . 271
P. A. Nekrassow. Zur Abhandlung über simultane kanonische Differentialgleichungen etc. 271
J. V. Mestschersky. Bemerkungen über ein System kanonischer Gleichungen von W. G. Imschenetsky und über „analytische Kräfte“ von Lecornu 271
P. A. Nekrassow. Einige Gleichungen der Dynamik, welche mit Hülfe der Methode der complexen Grössen integrirt werden können 271
F. Marotte. Sur les singularités des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre 273
M. Kowalsky. Neue Methode zur Integration der nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung 273
E. Lindelöf. Sur les équations homogènes 273
É. Delassus. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles . 273
J. Beudon. Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles dont les caractéristiques dépendent d'un nombre fini de paramètres . 274

Seite

E. v. Weber. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles simultanées 274
E. v. Weber. Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen in drei Variabeln 274
E. v. Weber. Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die sich durch gewöhnliche Differentialgleichungen integriren lassen 275
P. Burgatti. Di alcuni invarianti relativi alle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine e del loro uso 275
O. Niccoletti. Sulla trasformazione delle equazioni lineari omogenee alle derivate parziali del secondo ordine 276
E. Picard. Sur la détermination des intégrales d'une équation aux dérivées partielles par ses valeurs sur un contour fermé 276
Le Roy. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires et du second ordre à caractéristiques imaginaires . . 276
É. Picard. Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques imaginaires 277
E. Goursat. Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace 277
E. Goursat Sur les systèmes en involution d'équations du second ordre 278
E. Goursat. Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre 278
E. Cotton. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables 278
V. Jamet. Sur une équation aux dérivées partielles 279
J. Le Roux. Sur une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre 279
U. Dini. Sulle equazioni a derivate parziali del 2° ordine 279
M. Chini. Sulle equazioni a derivate parziali del 2° ordine 280
W. Wirtinger. Beiträge zu Riemann's Integrationsmethode für hyperbolische Differentialgleichungen 281
L. Bianchi. Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore 282
B. O. Peirce. On a certain class of equipotential surfaces 283
P. Craig. Sur une suite d'équations linéaires aux dérivées partielles provenant de la théorie des surfaces 284
E. Almansi. Sull' integrazione dell' equazione differenziale $\Delta^2\Delta^2 = 0$ 284
G. Lauricella. Integrazione dell' equazione $\Delta^2(\Delta^2 u) = 0$ in un campo di forma circolare 284
V. Volterra. Osservazioni sulla nota del prof. Lauricella e sopra una nota di analogo argomento dell' Ing. Almansi 284
R. Marcolongo. Sulla equazione $\Delta_2 U + k^2 U = 0$ in uno spazio di n dimensioni 285
A. Thybaut. Sur certaines classes d'équations de Laplace à invariants égaux 285
A. Thybaut. Sur une classe de surfaces isothermiques dépendant de deux fonctions arbitraires 285
G. Vivanti. Contributo alla teoria delle equazioni a derivate parziali del secondo ordine 285
†W. Müller. Transformationstheorie der Monge-Ampère'schen Differentialgleichungen 285
H. Grönvall. Några användningar af de 2 n-periodiska funktionerna på teorin för system af lineära totala differentialekvationer . . 285
A. Fabre. Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordre n, à deux variables x_1, x_2 et une fonction X . 286
G. Oltramare. Sur le nombre des fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale complète des équations linéaires aux différentielles ou aux différences partielles à coefficients constants 286

Seite

S. Lie. Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Polnisch von K. Zorawski 286
J. Paczowski. Ueber Differentialgleichungen, welche infinitesimale Transformationen gestatten 286
O. Biermann. Zur Lie'schen Theorie von den partiellen Differentialgleichungen 287
E. Vessiot. Sur la recherche des équations finies d'un groupe continu fini de transformations 287
E. Cartan. Sur la réduction à sa forme canonique de la structure d'un groupe de transformations fini et continu 288
S. Lie. Zur Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen 290
G. Fano. Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè 290
A. Emch. On the fundamental property of the linear group of transformation in the plane 290
†G. H. Ling. On the solution of a certain differential equation . . 291

Kapitel 7. Variationsrechnung.

H. Hancock. Calculus of variation. II. 291
H. Hancock. The calculus of variations: Derivation of some of the fundamental Weierstrassian formulae 291
H. Hancock. Number of catenaries through two fixed points . . . 291
A. Mayer. Die Kriterien des Minimums einfacher Integrale bei variabeln Grenzwerten 291
B. Turksma. Begründung der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung 293
A. C. Dixon. On a point in the calculus of variations 294
A. C. Dixon. The reduction of the second variation of an integral 294
W. Zimmermann. Sprunglinien in der Variationsrechnung 294
G. Koenigs. Problèmes de variations relatifs aux intégrales doubles 296

Siebenter Abschnitt. Functionentheorie.

Kapitel 1. Allgemeines.

D. Hilbert. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen 297
Frau E. Litwinowa. Aus dem Gebiete der höheren Arithmetik . . 297
A. P. Kotelnikow. Schraubenrechnung und ihre Anwendungen . . 298
J. Thomae. Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre 298
T. Brodén. Das Weierstrass-Cantor'sche Condensationsverfahren . 298
L. Maurer. Mittelwerte der Functionen einer reellen Variabeln . . 299
A. Pringsheim. Ueber Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Functionen 300
A. Pringsheim. Zur Theorie der synektischen Functionen 300
W. F. Osgood. Some points in the elements of the theory of functions 301
A. S. Chessin. Singularities of single-valued and generally analytic functions 301
A. S. Chessin. On a point of the theory of functions 301
F. Gerbaldi. Sulle serie di funzioni analitiche 302
W. H. Echols. Expansion of a function without use of derivatives 302
S. Pincherle. Validità effettiva di alcuni sviluppi in serie di funzioni 302
E. Fabry. Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série 303
F. G. Teixeira. Sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus 304

Seite

F. G. Teixeira. Développement de x^k en série ordonnée suivant les puissances du sinus de la variable 305
Hamy. Note sur la série de Lagrange 305
E. Delassus. Sur les séries de puissances et les fonctions majorantes 305
E. Study. Ueber eine besondere Klasse von Functionen einer reellen Veränderlichen 306
E. H. Moore. Concerning transcendentally transcendental functions 307
A. Köpcke. Eine Function mit Symmetrien in jedem Intervall . . 307
E. Picard. Sur une classe de fonctions transcendantes 308
M. Petrovitch. Résidus des fonctions définies par les équations différentielles 308
V. Volterra. Sulla inversione degli integrali definiti 309
V. Volterra. Sulla inversione degli integrali multipli 309
V. Volterra. Sull'inversione degli integrali definiti 309
P. Painlevé. Inversion des systèmes de différentielles totales . . . 310
P. Painlevé. Sur les fonctions uniformes définies par l'inversion de différentielles totales 311
E. M. Lémeray. Sur les fonctions itératives et sur une nouvelle fonction 311
A. Grévy. Étude sur les équations fonctionnelles 311
M. Cantor. Functionalgleichungen mit drei Veränderlichen 312
S. Pincherle. Sopra alcune equazioni simboliche 312
S. Pincherle. Operazioni distributive: l'integrazione successiva . . 313
S. Pincherle. Operazioni distributive: le equazioni differenziali lineari non omogenee 313
E. Pascal. Funzioni olomorfe nel campo ellittico 313
G. Koenigs. Sur un théorème de Kronecker 313
O. Biermann. Ueber Functionen zweier reellen Variabeln 314
H. Grönwall. Ueber Integrale algebraischer Differentialausdrücke von mehreren Veränderlichen 314
E. Borel. Sur les fonctions de deux variables réelles 315
L. Autonne. Sur les pôles des fonctions uniformes à deux variables indépendantes 315
H. Poincaré. La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet 316
D. A. Grave. Sur le problème de Dirichlet 318
Le Roy. Sur le problème de Dirichlet et les fonctions harmoniques fondamentales attachées à une surface fermée 319
Ch. A. Noble. Lösung der Randwertaufgabe für eine ebene Randcurve mit stückweise stetig sich ändernder Tangente 320
Zaremba. Contribution à la théorie de la fonction de Green . . . 320
F. Lindemann. Analytische Fortsetzung derjenigen Functionen, welche das Innere eines Kegelschnitts conform auf die Halbebene abbilden 320
Larose. Démonstration du théorème de M. Vaschy sur une distribution quelconque de vecteur 320
E. Carvallo. Généralisation et extension à l'espace du théorème des résidus de Cauchy 320
E. Borel. Démonstration d'un théorème de M. Picard 321
E. Picard. Remarques sur la communication de M. Borel 321
E. Borel. Sur l'extension aux fonctions entières d'une propriété importante des polynômes 321
Hadamard. Sur les fonctions entières. (2 Noten) 321
W. Weiss. Zum Noether'schen Fundamentalsatze der Theorie der algebraischen Functionen 322
F. de Brun. Till teorien för algebraiska funktioner 322



Seite

K. Hensel. Grösster gemeinsamer Teiler aller durch eine ganze Function von n Veränderlichen darstellbaren Zahlen 322
K. Hensel. Ueber die Darstellung der Integrale erster Gattung durch ein Fundamentalsystem 322
K. Hensel. Reduction algebraischer Systeme auf kanonische Form 323
K. Fischer. Kanonische Systeme algebraischer Functionen einer Veränderlichen in einem Gattungsbereich dritter oder vierter Ordnung 323
L. Baur. Zur Theorie der algebraischen Functionen 323
M. Petrovitch. Sur les fonctions symétriques et périodiques des diverses déterminations d'une fonction algébrique 323
E. Vessiot. Remarques sur la théorie des fonctions algébriques . . 323
J. C. Marx. Over de ontbinding in priemfuncties van geheele transcendentale functies 324
P. Hoyer. Partialbruchzerlegung rationaler Functionen eines algebraischen Gebildes zweier Veränderlichen 324
P. Hoyer. Ueber Riemann'sche Flächen mit beschränkt veränderlichen Verzweigungspunkten 324
E. Ritter. Ueber Riemann'sche Formenscharen auf einem beliebigen algebraischen Gebilde 324
R. Fricke. Discontinuität gewisser Collineationsgruppen 326
R. Fricke. Ueber die Theorie der automorphen Modulgruppen . . 326
A. Astor. Sur le nombre des périodes d'une fonction uniforme . . 326
S. Lie. Theorie der Translationsflächen und Abel'sches Theorem . 326
S. Kempinski. Ueber Fuchs'sche Functionen zweier Variabeln . . 328
F. Bagnera. Sul teorema dell'esistenza delle funzioni Fuchsiane . 328
† Weitere Litteratur 328

Kapitel 2. Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen (einschliesslich der Gammafunctionen und der hypergeometrischen Reihen).

F. Mertens. Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π 329
M. Laporte. Simple contribution à l'étude des fonctions additives 330
A. Tagiuri. Somma delle potenze simili dei numeri naturali . . . 330
De Tilly. Sur les valeurs principales des radicaux 330
N. Nielsen. Om Definitioner for $\mathrm{Li}\,e^{-x}$ 330
W. Puchewicz. Aproximaciones en el cálculo logarítmico 331
†S. W. Holman. Computation rules and logarithms 331
E. León y Ortiz. Tablas logarítmicas de adición y sustracción . . 331
P. Barbarin. Définition géométrique des logarithmes 331
J. Brill. Functions derivable from the exponential function 331
P. Mansion. Teoría sucinta de las funciones hiperbólicas 331
R. F. Muirhead. On deducing the properties of the trigonometrical functions from their addition equations 331
P. Mansion. Sur une formule de Newton 332
A. A. Nyland. Over een bijzondere soort van geheele functiën . . 332
J. de Vries. Ueber eine gewisse Klasse ganzer Functionen 332
U. Bigler. Ueber die Isotimen und Isophasen einer Function . . . 332
†Fr. Rogel. Theorie der Euler'schen Functionen 333
M. Lerch. Verschiedenes über die Gammafunction 333
E. Ritter. Hypergeometrische Function mit einem Nebenpunkt . . 334
A. A. Markow. Ueber die Nullwerte der ganzen Functionen von Hermite und der Functionen von Lamé 334
J. Beaupain. Fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur . . . 334
J. Beaupain. Sur les fonctions hypergéométriques de seconde espèce et d'ordre supérieur 334

Seite

B. Elliptische Functionen.

Jules Tannery et Jules Molk. Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. II 335
C. Juel. Parameterbestimmung auf Curven 2. u. 3. O. Eine geometrische Einleitung in die logarithmischen und elliptischen Functionen 337
A. Seiffert. Ueber eine neue geometrische Einführung in die Theorie der elliptischen Functionen 337
O. Biermann. Zur Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische . 340
W. R. W. Roberts. On elliptic and hyperelliptic systems of differential equations 340
Matz, H. J. Woodall, N. Sarkar. Solution of question 9547 . . 341
R. Hargreaves. Expansion of elliptic integrals by zonal harmonics 341
A. G. Pszeborski. Ueber die Functionen eines Arguments, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen 341
†P. S. Nasimow. Halphen's „Traité des fonctions elliptiques" . . 342
J. C. Kluyver. Solution of a problem 342
J. de Vries. Over optellingstheorema's voor elliptische integralen 342
P. Stäckel. Das Additionstheorem der Function $\wp(u)$ 342
J. Hadamard. Une forme de l'intégrale de l'équation d'Euler . . . 342
G. Fontené. Sur l'addition des arguments dans les fonctions périodiques du second ordre 343
G. Fontené, Expression de la quantité $\wp(u_1+u_2+\cdots+u_{2n})$ . . . 343
Ch. Hermite. Sur une formule de M. Fontené 343
A. G. Greenhill. Transformation and division of elliptic functions 345
†J. Jack. Development of $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ 345
E. Lacour. Décomposition en facteurs de la fonction $\Theta[u^{(i)}(z)-G_i]$ 345
E. Pascal. Sopra due relazioni rimarchevoli fra i valori delle derivate delle funzioni ϑ ellittiche per argomento zero 346
E. B. Christoffel. Die Convergenz der Jacobi'schen ϑ-Reihe mit den Moduln Riemann's 347
P. Appell. Quelques exemples de séries doublement périodiques . 347
M. Krause. Zur Transformation der Thetafunctionen. V 348
F. Brioschi. La moltiplicazione complessa per $\sqrt{-23}$ delle funzioni ellittiche 348
B. Igel. Zur Theorie der elliptischen Functionen 348
A. Cayley. Vier Briefe über elliptische Modulfunctionen 349
H. Weber. Bemerkungen zu den vorstehenden Briefen 349
F. Brioschi. Sulle equazioni modulari 353
†J. Rougier. Sous-groupes de 11e classe du groupe modulaire . . 353
Ch. Hermite. Sur une extension du théorème de Laurent 353
X. Stouff. Sur une application des fonctions elliptiques 353
G. B. Mathews. The division of the lemniscate 354
K. Carda. Zur Quadratur des Ellipsoids 354
P. Patrassi. Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche . . 354

C. Hyperelliptische, Abel'sche und verwandte Functionen.

H. Stahl. Theorie der Abel'schen Functionen 355
W. A. Poort. Een bijzondere klasse van Abel'sche integralen . . 358
J. P. Dolbnia. Sur la réduction des intégrales abéliennes dépendant d'une équation algébrique binôme 358
J. P. Dolbnia. Reduction der von den Wurzeln der binomischen algebraischen Gleichungen abhängigen Abel'schen Integrale . . 358
†J. P. Dolbnia. Logarithmischer Ausdruck von $\int dx/R(x)$, wo $R(x)=\sqrt[4]{x^4+px^2+q}$ 359



Seite
†J. P. Dolbnia. Neuer Fall der Integration in Logarithmen . . . 359
J. P. Dolbnia. Aus der Theorie der Abel'schen Integrale 359
M. A. Tichomandritzky. Adjungirte Functionen dritter Art . . . 360
P. M. Pokrowsky. Die Grundlagen der Lehre von den transcendenten Functionen, welche ein Additionstheorem besitzen . . . 360
P. M. Pokrowsky. Additionstheorem der transcendenten Functionen 360
P. M. Pokrowsky. Functionen von zwei Argumenten, welche den Weierstrass'schen elliptischen Transcendenten analog sind . . 360
P. M. Pokrowsky. Fonctions ultraelliptiques à deux arguments . . 360
P. Epstein. Zur Lehre von den hyperelliptischen Integralen . . . 361
F. Brioschi. Relations différentielles entre les périodes des fonctions hyperelliptiques $p = 2$ 362
A. Tauber. Ueber das specielle Zweiteilungsproblem der hyperelliptischen Functionen 362
G. Bertolani. Sulle derivate logaritmiche di ordine superiore delle funzioni theta iperellittiche a due argumenti 363
E. Pascal. Sulla ricerca del secondo termine dello sviluppo in serie delle funzioni sigma abeliane pari di genere tre 363
E. Jahnke. Ueber ein allgemeines, aus Thetafunctionen von zwei Argumenten gebildetes Orthogonalsystem 363
F. Kötter. Eine Darstellung der Richtungscosinus zweier orthogonalen Coordinatensysteme durch Thetafunctionen zweier Argumente 363
W. Wirtinger. Zur Theorie der $2n$-fach periodischen Functionen . 364
H. Grönwall Några användningar af de $2n$-periodiska funktionerna 365

D. Kugel- und verwandte Functionen.

E. Beltrami. Sulla teoria delle funzioni sferiche 365
L. Gegenbauer. Notiz über die Kugelfunctionen 365
E. W. Hobson. On a type of spherical harmonics of unrestricted degree, order and argument 366
J. H. Graf. Ableitung der Formeln für die Bessel'schen Functionen, bei welchen das Argument eine Distanz darstellt . . . 366
L. Crelier. Sur quelques propriétés des fonctions Besséliennes . . 366
Nash, H. W. Curjel, Gopalachniar. Solution of question 11457 367
B. A. Smith. Table of Bessel's functions Y_0 and Y_1 367
Mathematical functions. Report of committee 368

Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Kapitel 1. Principien der Geometrie.

E. Study. Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie 369
G. Veronese. Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti e infinitesimi attuali 370
L. Bianchi. Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica 370
W. Kagan. Geometrisches System von Lobatschefsky 373
P. Nasimow. Definition der Ebene bei Lobatschefsky 373
W. Sikstel. Einige Folgerungen des XI. Axioms 373
P. Mansion. Sur une démonstration du postulatum d'Euclide . . . 374
†M. Frolow. Réponse aux observations de M. Mansion 374
P. Mansion. Premiers principes de la métagéométrie 374
P. Mansion. La géométrie non-euclidienne avant Lobatschefsky . . 374
A. Demoulin. La géométrie réglée par G. Koenigs 374
F. Daage. Sur la géométrie non-euclidienne 375

Seite
P. Mansion. Note 375
G. Lechalas. Identité des plans de Riemann et des sphères d'Euclide 375
P. Mansion. Sur la non-identité du plan riemannien et de la sphère euclidienne 375
P. Mansion. Une nouvelle forme de la relation entre les distances de cinq points en géométrie non-euclidienne 375
W. H. L. Janssen van Raay. Sur une formule de la géométrie non-euclidienne 375
K. Traub. Der verjüngte Magister Matheseos 376
Leray. Sur la nature de l'espace 376
E. Vicaire. Observations sur cette note 376
O. Stolz. Bemerkung zu einem früheren Aufsatze 376
F. Giudice. Comunicazione 376
G. Sforza. Comunicazione 376
Aubry. Lettre adressée à M. G. de Longchamps 377
Raffalli. Sur les commencements de la géométrie 377
A. Poulain. Sur une nouvelle définition des perpendiculaires . . . 377
O. Nestler. Geometrische Elemente bis zu den Parallelen 377
C. Burali-Forti. Il metodo del Grassmann nella Geometria proiettiva. Nota 1ª 377
E. Müller. Die Geometrie der Punktepaare und Kreise im Raume nach Grassmann'schen Principien 377
H. Vollprecht. Zur Uebertragung der Rechnungsarten auf die Geometrie 378
†Weitere Litteratur 378

Kapitel 2. Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs, Topologie).

A. Schoenflies. Ueber einen Satz aus der Analysis situs 379
W. Kapteyn. Over een vraagstuk uit de Analysis situs 380
A. Emch. A special class of connected surfaces 380
K. Zindler. Methode, aus Configurationen andere abzuleiten . . . 380
J. Feder. Die Configuration $(12_6, 16_3)$ und die zugehörige Gruppe von 2304 Collineationen und Correlationen 380
E. Bertini. Sulle configurazioni di Kummer più volte tetraedroidali . 381
E. Ciani. Sopra la configurazione di Kummer 381
V. Martinetti. Un osservazione relativa alla configurazione di Kummer 381
K. Spindeler. Zur Einführung in räumliche Configurationen 382
Cesàro. Des polyèdres superposables à leur image 382
L. Lévy. Sur la question 393 382
†T. Nüsslein. Ueber die ebenen Configurationen 9_3 382

Kapitel 3. Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

N. Bödige. Kanon der Planimetrie 382
K. Fink. Elementare systematische und darstellende Geometrie . . 383
K. Fink. Sammlung von Sätzen und Aufgaben zur Geometrie . . . 383
K. Fink und Auer. 10 Figurentafeln und 84 Uebungsblätter zur Geometrie 383
J. Lengauer. Die Grundlehren der Stereometrie 384
F. Meigen. Lehrbuch der Geometrie 384
F. Meigen. Lehrbuch der Trigonometrie 384
E. Rouché et Ch. de Comberousse. Leçons de géométrie. I. . 384
E. Rouché et Ch. de Comberousse. Solutions des exercices et problèmes 385
A. Sickenberger. Leitfaden der elementaren Mathematik. II. . . 385
H. M. Taylor. Euclid's elements of geometry. Books XI and XII . 385

Seite
H. D. Thompson. Elementary solid geometry and mensuration . . 386
C. A. Laisant. Recueil de problèmes de mathématiques. Géométrie du triangle 386
P. A. Nekrassow. Algebraische Methode der Auflösung der geometrischen Constructionsaufgaben 386
†Weitere Lehrbücher 387
L. Gérard. Équivalence de deux portions de droites 392
G. Riboni. Osservazioni circa una nota del Ciamberlini 392
C. Ciamberlini. Ancora sulla simmetria in alcune dimostrazioni della geometria 392
E. Guitel. Propriétés relatives aux polygones équivalents 392
R. F. Muirhead. On superposition by the act of dissection 392
†G. Biasi. I poligoni equivalenti 393
G. Leonhardt. Zwiespalt auf elementargeometrischem Gebiete . . 393
J. C. V. Hoffmann. Ueber den geometrischen Begriff „Figur“ . . 393
G. Frattini. Poligoni concavi e convessi 393
E. Cominotto. Una disposizione particolare dei triangoli simili . . 393
V. Jerabek. Sur les triangles semblables et homologiques 393
Aletrop. Sur un problème de la géométrie de la règle 393
†A. E. Rahusen. Sur une construction du centre des moindres carrés d'un système de droites 393
Sanjana. Question 12641 394
T. C. Simmons. Questions 8645 and 12864 394
K. Zahradník. Zum pythagoreischen Lehrsatze 394
V. Jelínek. Ueber das ebene Tangentenviereck 394
E. N. Barisien. Note relative à la distance du centre du cercle circonscrit à un triangle à son centre de gravité 394
M. Blasendorff. Ueber die Teilung des Kreisbogens 394
M. Koenig. Die geometrische Teilung des Winkels. II. 395
C. F. E. Björling. Eine approximative Trisectio anguli 395
†S. Wellisch. Das 2000jährige Problem der Trisection 395
H. Schubert. Veranschaulichung der Berechnung der Zahl π. . . . 395
†A. L. Duse. Quadratura del circolo 395
K. Bochow. Einheitliche Theorie der regelmässigen Vielecke . . . 396
E. Dolezal. Relationen bei regulären Polygonen 396
L. Gérard. Construction du polygone régulier de 17 côtés au moyen du seul compas 396
†H. Vogt. Résolution algébrique de l'équation $x^p-1=0$. 396
M. Stern. Ueber algebraische Beziehungen an einem symmetrischen Kreissechseck 397
G. Frattini. Una bella osservazione del De Paolis 397
J. J. Duran-Loriga. Ueber Radical-Kreise 397
J. J. Duran-Loriga. Sur les cercles radicaux 397
J. J. Duran-Loriga. Segunda nota sobre los circulos radicales . 398
A. B. Obejero. Sur les triangles équipotentiels 398
J. F. d'Avillez. Sobre algumas proposições de geometria 398
G. Bellacchi. Problema di geometria elementare 398
A. L. Candy. A general theorem relating to transversals 399
J. F. d'Avillez. Sur les puissances d'un triangle 399
R. F. Muirhead. On the number and nature of the solutions of the Apollonian contact problem 399
†K. Traub. Berechnung der Radien der acht Berührungskreise beim Apollonischen Problem 399
G. Bellacchi. 2ª nota sul problema del Malfatti 399
W. Godt. Ueber eine merkwürdige Kreisfigur 399
W. Godt. Ueber den Feuerbach'schen Kreis und eine Steiner'sche Curve vierter Ordnung dritter Klasse 400

Seite
A. Tissot. Sur les cercles bitangents aux coniques 400
J. F. d'Avillez. Exercices sur un triangle remarquable 400
R. F. Davis. Question 9484 400
C. E. Hillyer. Question 12801 401
H. Lieber. Isogonische und isodynamische Punkte des Dreiecks . 401
É. Lemoine. Mélanges sur la géométrie du triangle 401
É. Lemoine. Lettre à M. G. de Longchamps 401
É. Lemoine. Solution de la question 394 401
J. S. Mackay. Symmedians of a triangle and concomitant circles . 402
R. Tucker. Question 12798 402
G. Brocard. Centres de transversales angulaires égales 402
J. Neuberg. Note sur l'article précédent 402
Soons. Théorème de géométrie 402
B. Sollertinsky. Solution de la question 148 403
J. Neuberg. Question 7 403
D. E. Neue Geometrie des Dreiecks 403
J. Nager. Einige merkwürdige Punkte des Kreisvierecks 403
B. Sollertinsky. Note de géométrie 403
P. Sveschnikoff. Elementare Theorie der Ellipse 403
A. Lugli. Soluzioni della quistione 250 404
Barbarin. Triangle dont les bissectrices sont données 404
Raffalli. Démonstration d'un théorème élémentaire 404
W. Algenstaedt. Zur Determination der Elemente des Dreiecks . 404
L. G. Gascó. Diagramas mnemónicos de trigonometría 404
Ventura Reyes Prósper. Fórmulas trigonométricas de un ángulo igual á la suma ó diferencia de dos dados 405
A. Pleskot. Ueber einige goniometrische Formeln 405
J. E. A. Steggall. Note for the formula for $\tan(A+B)$ 405
E. M. Langley. Sur quelques identités trigonométriques 405
Lauvernay. Résolution de l'équation $a \sin x + b \cos x = c$ 405
É. Lemoine. Sur l'équation $a \sin x + b \cos x = c$ 405
Bernès. Comparaison des constructions relatives à l'équation $a \sin x + b \cos x = c$ 405
É. Lemoine. Lettre adressée à M. G. de Longchamps 405
†S. Catania. Sulla deduzione della relazione $a^2 = b^2 + c^2$ 406
E. Lucas. Formulas fundamentales de geometría tricircular y tetraesférica 406
W. Heymann. Drei algebraisch-geometrische Aufgaben 406
L. Euler. Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie. Hrsg. von E. Hammer 406
R. Gantzer. Analogien der ebenen und körperlichen Geometrie . . 406
F. Monetti. Il triangulo sferico 406
V. Jelínek. Ueber den Pyramidenstumpf 407
R. Bricard. Question de géométrie relative aux polyèdres 407
M. J. M. Hill. Volumes of certain species of tetrahedra 407
F. J. Volume des segments de sphère, d'ellipsoïde et d'hyperboloïdes 407
P. Barbarin. Application de la méthode de Gergonne à la sphère. Triangles sphériques et triangles circulaires plans 407
V. Sikstel. Théorèmes fondamentaux de la géométrie sphérique . 408
P. Mansion. Question 814 408
A. Emmerich. Stereometrische Gruppenaufgaben 408
W. Heymann. Stereometrische Paradoxa 408
†G. Modè. Proprietà del dodecaedro e dell' icosaedro 408

Kapitel 4. Darstellende Geometrie.

K. Rohn und E. Papperitz. Lehrbuch der darstellenden Geometrie 409
M. d'Ocagne. Géométrie descriptive et infinitésimale 411

Seite
M. d'Ocagne. Sur l'ombre propre des polyèdres 412
E. Brand. Un problème de projection 412
F. Schur. Ueber den Pohlke'schen Satz 412
J. Versluys. Hauptsätze der Normal-Axonometrie 413
G. Fontené. Cas remarquable de la projection gauche 413
Ch. Michel. Courbe d'ombre sur une surface du 4e ordre 413
R. de Saussure. Method of perspective by direct projection . . . 413
A. Boulanger. Sur la perspective des arcades 413
J. Mandl. Darstellung der scheinbaren Beleuchtung krummer Flächen 413
Raffally. Sur la surface du biais passé gauche 414
A. Beck. Schmiegungsebenen der Schnittcurve zweier Kegel . . . 414
J. Sobotka. Einige Constructionen bezüglich der Schnittcurven von Umdrehungsflächen mit Ebenen 415
Ed. Weyr. Ueber die Construction der Osculations-Hyperboloide an windschiefen Flächen 415
Fr. Prochazka. Zur Anwendung der Kinematik in der neueren und in der darstellenden Geometrie 415
Fr. Prochazka. Beitrag zur Photogrammetrie 416
G. J. Burch. On a method of drawing hyperbolas 416
G. J. Burch. Trazado de la hipérbola 416
F. L. O. Wadsworth. A note on Mr. Burch's method of drawing hyperbolas 416
W. R. Crane. A curvimeter 416
Bürklen. Verbesserter Zeichenwinkel 417
†Weitere Litteratur 417

Kapitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

J. Steiner. Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Hrsg. von A. J. von Oettingen 418
F. Amodeo. Appunti di geometria proiettiva 419
M. Pieri. Principii che reggono la geometria di posizione 420
M. Pasch. Zur projectiven Geometrie 420
F. Amodeo. Sulla introduzione alla geometria projettiva 420
A. Emch. Projective groups of perspective collineations in the plane, treated synthetically 424
E. O. Lovett. On the general projective transformation 425
A. Padoa. Di alcune proposizioni fundamentali relative al mutuo separarsi di coppie di punti 425
E. Ascione. Sopra alcune involuzioni dello spazio 425
A. Noyer et Ch. Michel. Sur l'involution généralisée 425
K. Döhlemann. Zur Massbestimmung in den einförmigen Grundgebilden 426
J. Thomae. Untersuchungen über zwei-zweideutige Verwandtschaften und einige Erzeugnisse derselben 426
Th. Schmid. Trilinear verwandte Felder als Raumbilder 429
P. Visalli. Sulle collinearità e correlazioni ordinarie ed eccezionali in due spazi a quattro dimensioni 430
M. Pieri. Un sistema di postulati per la geometria projettiva astratta degli iperspazi 431
†Weitere Litteratur 432

B. Besondere ebene Gebilde.

A. W. Velten. Eine neue Ableitung von harmonischen Eigenschaften des Vierecks 432

Seite
R. A. Roberts. Centres of similitude of certain pairs of circles . . 432
A. Droz-Farny. Concours d'agrégation de 1895 433
G. Brocard. Sur la transformation homographique des propriétés métriques des figures planes 433
A. Tissot. Polaire d'un point par rapport à une conique 433
A. Mannheim. Solution de la question 1674 433
A. Mannheim. Solution de la question 1641 433
J. Neuberg. Sur un système de coniques 434
B. Sporer. Ueber Kreise, welche einen Kegelschnitt doppelt berühren 434
V. Jerabek. Sur les coniques qui se touchent en deux points donnés 434
J. F. d'Avillez. Sobre um systema tri-tangente 434
C. J. Rueda. Estudio de un logar geométrico curioso 434
Stuyvaert. Propriété focale des coniques à centre 435
Th. Reye. Beweis einiger Sätze von Chasles über confocale Kegelschnitte 435
O. Gutsche. Neue Beweise und Ergänzungen zu Lehrsätzen Steiner's über Kegelschnitte 436
†Weitere Litteratur über Kegelschnitte 437
E. Goursat. Sur le théorème de Salmon 437
A. C. Dixon. A projective proof of the anharmonic property of tangents to a plane curve 437
T. Kierboe. Lineaer Konstruction af det niende Skaeringspunkt for 2 Kurver af 3die Orden gjennem 8 givne Punkter 437
Fr. London. Constructionen dritten und vierten Grades mittelst der geraden Linie und einer festen Curve dritter Ordnung 438
A. Droz-Farny. Solution de la question 490 438
E. Janisch. Construction des Osculationskreises der ebenen Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte 439
P. H. Schoute. Ueber eine gewisse Einhüllende 439
G. Loria. I poligoni di Steiner nelle cubiche razionali 439
W. Binder. Theorie der unicursalen Plancurven vierter bis dritter Ordnung in synthetischer Behandlung 439
C. Crone. Om Keglesnit, hvis Tangenters Skaeringspunkter med en Kurve af 4de Orden kunne bestemmes ved Passer og Lineal . 441
E. Ciani. La quartica di Caporali 441
A. Mannheim. Note à propos de la question 486 442
C. Küpper. Projective Erzeugung der Curven m^{ter} Ordnung C^m . . 443
M. de Franchis. Sulla curva luogo dei contatti d'ordine k delle curve d'un fascio colle curve d'un sistema lineare ∞^k 443

C. Besondere räumliche Gebilde.

O. Hermes. Verzeichnis der einfachsten Vielflache 444
O. Rupp. Zur synthetischen Theorie der Kreis- und Kugelsysteme 444
K. Th. Vahlen. Ueber Steiner'sche Kugelketten 445
H. Liebmann. Fläche zweiten Grades aus neun Punkten 445
J. Kleiber. Fläche zweiten Grades aus neun Punkten 446
W. Rulf. Gleichseitige Hyperbeln eines Kegels zweiten Grades, welche eine Hauptebene des letzteren zur Symmetrie-Ebene haben 446
K. Schober. Ueber die Construction der gleichseitig hyperbolischen Schnitte der Flächen zweiten Grades 446
Ch. Michel. Théorie géométrique des quadriques homofocales . . . 446
G. Kilbinger. Der Axencomplex der Rotationsflächen 2. O. 447
A. Mannheim. Détermination en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice 447
P. H. Schoute. Solutions des questions 430, 431, 436 447



Seite

J. Cardinaal. Sur quelques cas de cônes circonscrits à une quadrique 448
F. Deruyts. Sur certains groupes d'éléments communs à deux involutions 448
G. Kohn. Kubische Raumcurven, welche die Tangentenfläche einer kubischen Raumcurve in 4, 5 oder 6 Punkten berühren 448
J. Sobotka. Construction von Krümmungskugeln an Raumcurven . 448
A. Brambilla. Di taluni sistemi di quartiche gobbe razionali annesse ad una superficie cubica 448
E. Duporcq. Quelques propriétés des biquadriques gauches . . . 449
C. F. Geiser. Räumliches Sechseck und Kummer'sche Fläche . . 449
A. Mannheim. Sur les surfaces apsidales 449
R. Sturm. Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in systematischer Behandlung. III. 450
G. Fano. Lezioni di geometria della retta 451
†A. Calinon. La géométrie à deux dimensions des surfaces à courbure constante 451

D. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

A. Schoenflies. Ueber die Abbildung von Würfeln verschiedener Dimensionen auf einander 451
P. H. Schoute. Sur les types de crystaux du système régulier de l'espace à quatre dimensions 452
†P. H. Schoute. Quelques figures à $n+2$ inversions dans l'espace à n dimensions 452
P. H. Schoute. Het vierdimensionale prismoide 452
†F. Cannizzo. Rotazione nello spazio a cinque dimensioni 452

E. Abzählende Geometrie.

O. Zimmermann. Ordnung der Enveloppe gewisser ebenen Curvenreihen 453
M. Pieri. Sul problema degli spazi secanti 453
G. Loria. Sugli enti geometrici generati da forme fondamentali in corrispondenza algebrica 453
C. Segre. Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche 454
L. Berzolari. Sulle curve piane che in due dati fasci hanno un semplice o un doppio contatto oppure si osculano 455

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Kapitel 1. Lehrbücher, Coordinaten.

E. d'Ovidio. Geometria analitica 457
B. Niewenglowski. Cours de géométrie analytique. Tome III . . 459
G. Kohn. Die homogenen Coordinaten als Wurfcoordinaten 461
E. Study. Betrachtungen über Doppelverhältnisse 461
A. Libicky. Grundlagen der Grassmann'schen geometrischen Rechnungsweise 462
H. Grassmann. Punktrechnung und projective Geometrie 462
Beez. Zur Theorie der Vectoren und Quaternionen 463
Fr. Graefe. Strecken- und Punktrechnung 463
G. Peano. Saggio di calcolo geometrico 464
†Weitere Litteratur 465

Kapitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

W. Bouwman. De Plücker'sche grootheden der deviatie kromme . 466
Elgé. Point délicat dans la construction des courbes 466

Seite
P. G. Tait. Circles of curvature of a plane curve 466
G. de Longchamps. Deux problèmes de géométrie infinitésimale . 466
H. W. Curjel. Question 12796 467
†F. Montet. Esquisse d'une étude analytique des courbes 467
†T. S. Fiske. The length of a curved line 467

B. Theorie der algebraischen Curven.

H. B. Newson. The Hessian, Jacobian, Steinerian in geometry of one dimension 467
H. Burkhardt. Zur Theorie der linearen Scharen von Punktaggregaten auf algebraischen Curven 468
M. Haure. Recherches sur les points de Weierstrass d'une courbe plane algébrique 468
C. Küpper. Ueber k-gonale Curven C_p^n n^{ter} Ordnung vom Geschlechte p 469
C. Küpper. Beziehungen zwischen polygonalen und Raumcurven . 469
C. Küpper. Nachtrag zu den k-gonalen Curven 469
C. Küpper. Die ultraelliptischen Curven C_p^n, $p > 1$ 469
F. Amodeo. Curve k-gonali di 1ª e di 2ª specie. II. 470
F. Amodeo. Curve aggiunte e serie specializzate 471
F. Amodeo. Sistemi lineari di curve algebriche di genere massimo ad intersezioni variabili collineari 471
W. Weiss. Ueber die Curven, welche eine algebraische Curve an mehreren Stellen und in höherer Ordnung berühren 472
E. H. Moore. Tactical memoranda I—III 472
Miss C. A. Scott. Note on adjoint curves 473
F. Enriques. Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche 473
E. Vessiot. Sur l'étude d'une courbe autour d'un de ses points . 473
H. Suhle. Zur Theorie der reellen Curven einer rationalen Function n^{ten} Grades für complexe Variable 474
H. Oppenheimer. Doppelpunkte der algebraischen Curven 474
E. Fabry. Sur les courbes planes unicursales 475
B. Sporer. Ueber den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte zweier algebraischen Curven 475
H. Maschke. Six points lying in three ways in involution 475
J. Valyi. Ueber die mehrfachen Involutionen 476
N. Delaunay. Eigenschaften der projectiven Transformation . . . 476
G. Bagnera. Sul luogo dei contatti tripunti delle curve di un fascio con le curve di una rete 476
S. Mangeot. Étude analytique sur la symétrie 477
†H. Andoyer. Sur la construction de courbes algébriques 478
W. Köstlin. Singularitäten ebener algebraischer Curven 478
†G. F. Steiner. Katakaustiken algebraischer ebener Curven 478

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

Neuffer. Behandlung der geometrischen Oerter im Elementarunterricht der analytischen Geometrie 478
R. Krüger. Beiträge zum mathematischen Unterricht 478
J. Novotny. Geometrische Uebungen 478
E. Klein. Poläre Koordinater i elementär geometri 479
Raffalli. Construction du faisceau $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ 479
Elgé. Sur le faisceau isogonal 479
J. C. Medeiros. O ponto $\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$ relativamente aos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) 479

Seite
J. Neuberg, E. Duporcq. Solution de la question 7 479
R. Tucker. Properties of some groups of Wallace lines 479
J. E. A. Steggall. Envelope of the Simson line of a polygon . . . 480
J. J. Duran Loriga. Sur les cercles radicaux 480
Ampère. Discussion de l'équation des courbes du second degré . . 480
H. Lez. Foyers des sections coniques en coordonnées trilinéaires . 480
R. Gilbert. Sur les réseaux de coniques 480
Ch. Michel. Courbes unicursales du 2e et du 3e ordre 481
A. Salomon. Ueber orthoaxiale Kegelschnitte 481
Ch. Michel. École Centrale (1re Session 1895). Solution 481
A. Tissot. Question 324. Développement et solution 481
E. N. Barisien. Exercices sur l'ellipse et l'hyperbole 481
M. d'Ocagne. Segments de coniques limités à une normale . . . 482
M. d'Ocagne. Note au sujet de la question 470 482
W. J. C. Miller. Question 9119 482
T. Hayashi. Note on a geometrical theorem 483
A. Droz-Farny. Question 410 483
E. N. Barisien. Solution de la question 418 483
Sanjana. Question 12701 483
E. Duporcq. Concours général de math. spéciales 1896 483
E. N. Barisien, A. Droz-Farny. Question 501 484
Weill. Question 1498 484
A. Mannheim, E. N. Barisien. Solution de la question 1709 . . 484
A. Droz-Farny. Les cercles de Chasles 484
E. N. Barisien. Propriétés des cercles de Chasles 484
Lemaire. Question 1641 484
C. Grolleau. École Normale supérieure. Concours de 1895 . . . 485
M. d'Ocagne. Correspondance 485
M. d'Ocagne. Sur les cordes normales de la parabole 485
J. F. d'Avillez. Sobre a área de um triangulo parabolico 485
G. de Longchamps. Le problème de la duplication du cube . . . 485
†Weitere Litteratur 486

D. Andere specielle Curven.

W. Bunkofer. Arithmetische Functionen der 3 ersten Ordnungen . 486
G. Loria. I poligoni di Steiner nelle cubiche razionali 486
Ch. A. Scott. Note on equianharmonic cubics 486
W. Kapteyn. Het construeeren van krommen der derde klasse . . 487
P. H. Schoute. Over de ligging der enkelvoudige brandpunten eener circulaire kubische kromme van het eerste geslacht . . . 487
P. Serret. Sur une double série récurrente de points toujours homocycliques 487
P. Serret. Sur une classe de propositions analogues au théorème Miquel-Clifford 487
P. Serret. Sur l'emploi d'un cercle fixe, dérivé d'un groupe quelconque de sept tangentes d'une conique 487
A. Boutin, Welsch. Sur la question 409 488
J. Balitrand. Solution de la question 152 488
Elgé. Un théorème sur les cubiques circulaires 488
Cazamian. Question 414 488
Wickersheimer. Sur la strophoïde droite 489
A. Himstedt. Secanten und Tangenten des Folium Cartesii . . . 489
Éd. Collignon. Une remarque sur certains nombres 489
Elgé. Sur la courbe de Rolle 490
Reinh. Müller. Ueber die doppelpunktige Focalcurve 490
†Dumont. Sur la classification des cubiques planes 490
R. Gentry. On the forms of plane quartic curves 490

Seite

E. Bertini. Le tangenti multiple della Cayleyana di una quartica piana generale 490
H. Liebmann. Ueber die ebenen Curven 4. O. vom Geschlechte 1 490
J. de Vries. Over bipolaire coördinaten 491
J. de Vries. Over en betrekking tusschen een stelsel confocale ovalen van Descartes en een eenvlakkige hyperboloïde 491
J. de Vries. Recherches sur les coordonnées multipolaires 491
A. C. Dixon. Cartesian ovals 492
E. N. Barisien. Question 1635 492
R. Lachlan. On the double foci of a bicircular quartic and the nodal focal curves of a cyclide 492
Elgé. Sur les quartiques bicirculaires 492
P. H. Schoute. Quartiques à trois points doubles d'inflexion . . . 493
A. Wittstein. Notiz über das eigentliche Oval 493
A. Wittstein. Nachtrag 493
Elgé. Sur le folium double 493
Wickersheimer. Sur les conchoïdes 493
G. Leinekugel. Sur deux problèmes de géométrie que l'on peut avoir à résoudre dans un levé hydrographique 493
Matz, H. W. Curjel, Radhakrishnan. Solution of question 12978 494
A. Emch. Compound curves in railroad engineering 494
E. Lemoine, D. Biddle, H. J. Woodall. Solution of question 10434 494
H. Freitag. Untersuchung I. der Curve $(x/a)^{\frac{2}{3}} + (y/b)^{\frac{2}{3}} = 1$, II. der Fläche $(x/a)^{\frac{2}{3}} + (y/b)^{\frac{2}{3}} + (z/c)^{\frac{2}{3}} = 1$ 494
†E. Janisch. Ueber eine specielle Fusspunktcurve der Steiner'schen Hypocykloide 494
G. A. Gibson. Some properties of parabolic curves 494
Aubry. De l'usage des figures de l'espace pour la définition et la transformation de certaines courbes 495
P. Appell. Exercices sur les courbes de direction 495
A. Cabreira. Geometria das curvas trigonometricas 495
A. Cabreira. Sobre a geometria da espiral 496
G. Lazzeri. Sopra un problema di strategia navale 496
C. E. Wasteels. Aires et volumes relatifs à la chaînette 496
E. Lampe. Note on question 992 496

Kapitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

G. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces. IV . . 497
L. Bianchi. Vorlesungen über Differentialgeometrie 497
P. Stäckel. Beiträge zur Flächentheorie 497
E. Goursat. Sur les lignes asymptotiques 498
L. Raffy. Surfaces rapportées à un réseau conjugué azimutal . . . 498
X. Stouff. Sur les rapports entre la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre et la théorie des surfaces . . 499
X. Stouff. Sur une application des fonctions elliptiques 499
B. Chemnitzer. Coordinatentransformationen auf beliebiger Oberfläche in conjugirt-complexen Variabeln 499
A. C. Dixon. Method of discussing the plane sections of surfaces . 499
D. Egorow. Zur Theorie des Entsprechens der Flächen 500
R. Hoppe. Zur analytischen Curventheorie 500
A. zur Kammer. Zur Theorie der Curven in analytischer Behandlungsweise 500
A. Meder. Einige Arten singulärer Punkte von Raumcurven . . . 501
O. Staude. Sinn der Richtung, Krümmung und Windung einer Curve 501

Seite
S. Mangeot. Rapport des deux courbures d'une courbe gauche . . 501
A. Mannheim. Rapport des deux courbures d'une courbe gauche 501
L. Raffy. Signe de la torsion des courbes gauches 502
M. d'Ocagne. Signe de la torsion des courbes gauches 502
E. Wölffing. Krümmung der Raumcurven in singulären Punkten 502
J. Andrade. Sur les droites de contact des courbes gauches . . . 503
R. v. Lilienthal. Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenscharen 503
L. Lévy. Systèmes de surfaces triplement orthogonaux 504
A. Bassi. Sulla condizione necessaria e sufficiente affinchè una porzione di superficie sia convessa in ogni punto 505
A. Mannheim. Sur le paraboloïde des huit droites et les nappes de développées de surfaces 505
Ed. Weyr. Ueber das System der Orthogonalflächen 506
E. Blutel. Surfaces à lignes de courbure sphériques 506
P. Burgatti. Torsione geodetica delle linee sopra una superficie . 506
V. Kommerell. Neue Formel für die mittlere Krümmung 507
A. Calinon. Le théorème de Gauss sur la courbure 507
J. Craig. Surfaces à lignes de courbure isométriques 507
J. Weingarten. Sur la déformation des surfaces 508
A. Voss. Ueber infinitesimale Flächendeformationen 508
P. Staeckel. Sur la déformation des surfaces 509
Guichard. Sur la déformation des surfaces 509
P. Adam. Sur un problème de déformation 510
J. N. Hazzidakis. Biegung mit Erhaltung der Hauptkrümmungsradien 510
L. Bianchi. Nuove ricerche sulle superficie pseudosferiche 511
L. Bianchi. Sopra una classe di superficie collegate alle superficie pseudosferiche 513
†P. Massini. Sistemi di linee di una superficie lossodromici . . . 514

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

E. Picard. Sur deux invariants nouveaux dans la théorie générale des surfaces algébriques 514
L. Autonne. Sur une différentielle exacte 514
L. Berzolari. Sulle intersezioni di tre superficie algebriche . . . 514
C. Segre. Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche 515
E. Wölffing. Die singulären Punkte der Flächen 515
F. Gerbaldi. Un teorema sulle singolarità della jacobiana di quattro superficie algebriche 516
A. Levi. Sulle singolarità della jacobiana di quattro superficie . . 516
C. Hossfeld. Beiträge zur Theorie der Raumcurven 517
E. Fabry. Sur les courbes algébriques à torsion constante 517
F. Enriques. Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche 518
F. Enriques. Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche 518
G. Castelnuovo. Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica 522
G. Castelnuovo. Sulle superficie di genere 0 523
F. Enriques. Sui piani doppi di genere uno 523
G. Castelnuovo. Aggiunta ad una memoria del Sig. Enriques . 523
G. Castelnuovo et F. Enriques. Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques 524
†L. Autonne. Représentation des courbes gauches algébriques . . 525
S. Mangeot. Étude analytique sur la symétrie 525

Seite

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

F. Ferrari. Proprietà dei punti isobarici nello spazio 525
T. Craig. Solution of a system of equations 525
O. Staude. Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung . . . 526
R. Hoppe. Gleichseitig hyperbolischer Schnitt der Flächen 2. Grades 526
D. Sinzow. Ueber eine Eigenschaft der Flächen 2. Grades 527
H. Andoyer. Sur l'intersection de deux quadriques 527
A. Pellet. Mouvement d'une droite assujettie à quatre conditions . 527
A. F. Huisken. De doorsnijding eener drieassige ellipsoïde door een vlakkenbundel 527
F. Balitrand. Détermination des points d'inflexion dans le développement de la section plane d'un cône 527
J. S. Townsend. A problem in geometry 528
P. Lang. Krümmungsverhältnisse der drei Scharen von Flächen zweiten Grades, die mit einem Ellipsoide confocal sind 528
A. R. Forsyth. Geodesics on quadrics, not of revolution 528
A. R. Forsyth. Conjugate points on geodesics on an oblate spheroid 528
E. O. Lovett. Invariants of curves and surfaces of the second degree by the group of motions and the group of similitude . . 529
G. B. Mathews. A geometrical locus 529
†L. Gottscho. Miscellen aus den Curven und Flächen 2. O. . . . 529
†G. Lapointe. Extension d'une propriété de l'hyperbole équilatère 529
†G. Papelier. Note sur les équations linéaires 529
F. Dumont. Théorème sur la détermination d'une surface du troisième ordre générale par la hessienne 530
F. Dumont. Représentation de la surface cubique sur un plan . . . 530
A. Sucharda. Ueber die asymptotischen Curven gewisser Flächen dritter Ordnung mit gewöhnlichem Knotenpunkte 530
E. Bally. Cône de Chasles et cubique des normales 530
Elgé. Sur une génération par points de la cubique aux pieds des normales à une quadrique 531

D. Andere specielle Raumgebilde.

R. Nicodemi. Rigate gobbe di quarto grado nella congruenza delle normali ad una quadrica 531
P. H. Schoute. Over het oppervlak van Steiner 531
H. Weber. Darstellung der Fresnel'schen Wellenfläche durch elliptische Functionen 532
A. Mannheim. Propriété nouvelle de la surface de l'onde 532
G. Leinekugel. Surface remarquable du quatrième ordre 532
†W. Booth. On Hamilton's singular points and planes on Fresnel's wave surface 533
J. de Vries. Zur Geometrie der Ringfläche 533
R. Lachlan. On the double foci of a bicircular quartic 533
G. de Longchamps. École Polytechnique. Concours de 1896 . . 533
L. Heffter. Ueber Modellirung von Isogonalflächen 534
J. Schreiner. Kardioide, bei welcher die Ebenen des rollenden und des festen Kreises zu einander senkrecht bleiben 534
Buffone. Studio di un'elica sferica ed algebrica 534
J. Thomae. Ueber die durch die leuchtende Sonnenkugel und den Saturnring erzeugte Schattenfläche 535
G. Humbert. Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes du genre trois 535
L. Raffy. Sur deux classes de surfaces analogues aux surfaces tétraédrales 535
M. Falchi. Un particolare problema sulle superficie minime . . . 536



Seite
Guichard. Sur les surfaces minima non-euclidiennes 536
F. Sabinin. Ueber eine Fläche constanter negativer Krümmung . 537
P. Sweschnikow. Ueber eine Art von Flächen 537

E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

G. Fano. Sulle varietà algebriche dello spazio a quattro dimensioni 537
R. Banal. Sulle varietà a tre dimensioni con una curvatura nulla e due eguali 538
P. del Pezzo. Una trasformazione cremoniana fra spazi a quattro dimensioni 540
P. H. Schoute. Het vierdimensionale prismoïde 540
A. del Re. Sulla successiva proiezione di una varietà quadratica su sè stessa 540
X. Stouff. Généralisation de la formule de l'aire du triangle sphérique 541
E. J. Nanson. The content of the common self-conjugate n-gon of two n-ary quadrics 541
L. Berzolari. Sulle equazioni differenziali delle quadriche di uno spazio ad n dimensioni 541
G. Schlumberger. Ueber n-dimensionale lineare und quadratische Kugelsysteme 542

Kapitel 4. Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).

R. de Saussure. Representation of imaginary plane curves 542
K. Zindler. Neue Erzeugungsweise des linearen Complexes 542
G. Fano. Aggiunto alla nota: „Sulle congruenze di rette del terzo ordine prive di linea singolare“ 543
F. Rudio. Zur Theorie der Strahlensysteme, deren Brennflächen sich aus Flächen zweiten Grades zusammensetzen 543
G. Ricci. Sistemi di congruenze ortogonali in una varietà 543
E. v. Weber. Ueber Linienconnexe 544
R. de Saussure. Étude de géométrie cinématique réglée 544
R. de Saussure. Sur une géométrie de l'espace réglée 544
D. Sinzow. Theorie der Connexe im Raume 545

Kapitel 5. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

S. Lie. Geometrie der Berührungstransformationen Dargestellt von S. Lie und G. Scheffers. I 547
H. B. Newson. Continuous groups of projective transformations treated synthetically 556
H. B. Newson. Notes to the article on continuous groups 556
A. Emch. Projective groups of perspective collineations in the plane, treated synthetically 557
A. Emch. Involutoric transformation of the straight line 557
A. Emch. Involutoric collineation in the plane and in the space . . 557
Th. Reye. Ueber quadratische Transformationen und rationale Flächen mit Kegelschnittscharen 558
W. Massny. Ueber ebene Curven, die bei circularer Inversion sich selbst zugeordnet sind 559
K. Carda. Elementare Bestimmung der Punkttransformationen des Raumes, welche alle Flächeninhalte invariant lassen 560
P. del Pezzo. Le trasformazioni coniche dello spazio 560
P. Painlevé. Transformations biuniformes des surfaces algébriques 560



Seite

G. Fano. Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive in sè 561
G. Fano. Sui gruppi continui di trasformazioni Cremoniane del piano e sopra certi gruppi di trasformazioni projettive 561
G. Bohlmann. Continuirliche Gruppen quadratischer Transformationen 562
S. Kantor. Ueber die endlichen Gruppen von Correlationen 562
S. Kantor. Theorie der Transformationen im R_r, welche sich aus quadratischen zusammensetzen lassen 562

B. Conforme Abbildung und dergleichen.

U. Bigler. Conforme Abbildung der inneren Fläche eines Kreises in die innere Fläche eines regulären Vielecks 562
J. Pierpont. Note on C. S. Peirce's paper on „A quincuncial projection of the sphere" 562
F. Busse. Ueber eine punktweise eindeutige Beziehung zweier Flächenstücke 563
F. Busse. Ueber eine specielle conforme Abbildung der Flächen constanten Krümmungsmasses auf die Ebene 563
D. A. Gravé. Sur la construction des cartes géographiques 564
D. A. Gravé. Hauptaufgaben der mathematischen Kartenconstruction 565

Zehnter Abschnitt. Mechanik.

Kapitel 1. Allgemeines (Lehrbücher etc.).

P. Appell. Traité de mécanique rationnelle. II 566
W. J. Loudon. An elementary treatise on rigid dynamics 567
J. Massau. Cours de mécanique. Tome II. 568
V. Volterra. Lezioni di meccanica. Prime nozioni di cinematica . 569
W. Keck. Vorträge über Mechanik. I 569
P. Johannesson. Das Beharrungsgesetz 570
Benedict Friedlaender und Immanuel Friedlaender. Absolute oder relative Bewegung? 571
Clavenad. Masse: Capacité pour le mouvement 571
E. Vicaire. Nature et principes de la mécanique rationnelle . . . 571
E. Vicaire. Nécessité du mouvement absolu en mécanique 571
E. Vicaire. Observations sur une note de M. Mansion 571
P. Mansion. Réponse 571
E. Goedseels. Note 571
E. Vicaire. Observations critiques sur les „Leçons de Mécanique" de Kirchhoff 571
J. G. Mac Gregor. The hypotheses of abstract dynamics and the question of the number of the elastic constants 572
Leo Königsberger. Ueber die Principien der Mechanik 572
O. Hölder. Ueber die Principien von Hamilton und Maupertuis . 574
M. Radakovic. Ueber die analytische Darstellung des Zwanges eines materiellen Systemes in allgemeinen Coordinaten 575
†Weitere Litteratur 575

Kapitel 2. Kinematik.

F. P. Ruffini. Delle accelerazioni che nel moto di un sistema rigido con un punto fisso sono dirette a uno stesso punto 576
J. Sobotka. Eine Aufgabe aus der Geometrie der Bewegung . . . 577
B. Prochazka. Ueber Schnittpunkts-Trajectorien 577
J. Cardinaal. Construction de l'accélération du point de rencontre de deux tiges mobiles 577

Seite
R. Sée. Théorème de géométrie cinématique 578
R. Bricard. Sur un déplacement remarquable 578
V Rouquet. Cas particulier du mouvement à cinq conditions . . 578
V. Rouquet. Note sur le mouvement à cinq conditions 579
V. Jelínek. Ueber den rollenden Kegel 579
P. Somoff. Schraubenbewegungen eines starren Körpers, dessen Bedingungen durch Ungleichungen ausgedrückt werden 579
Sir Robert Ball. Note on a point in theoretical dynamics 580
J. Kleiber. Die Amsler'schen Flächensätze im Gebiete affin veränderlicher Systeme 580
J. Kleiber. Zur kinematischen Theorie der Gelenkmechanismen . . 580
T. A. Hearson. The kinematics of machines 581
J. J. Guest. Mechanism for describing conic sections 582
†A. Astor. Quelques applications de géométrie cinématique 582
†F. Masi. La teoria dei meccanismi 582
†J. J. Sylvester. Del plagiógrafo ó pantógrafo de inclinación . . 582
†Wittenbauer. Der Beschleunigungszustand kinematischer Ketten . 582
†Rodenberg. Der Beschleunigungszustand kinematischer Ketten . 582

Kapitel 3. Statik.

A. Statik fester Körper.

H. J. Hollender. Neue graphische Zusammensetzung von Kräften 583
A. Botelho. Estudo sobre os systemas de forças girantes 583
E. Isè. Composizione delle forze di 3° ordine 583
H. Dellac. Solution de la question 488 584
H. Dellac. Question 489 584
G. Bardelli. Coordinate obliquangole nella meccanica razionale . . 584
D. de Francesco. Sulla statica nello spazio a quattro dimensioni 584
B. Mayor. Sur les forces de l'espace et les conditions d'équilibre d'une classe de systèmes déformables 584
Fr. Schur. Ueber ebene einfache Fachwerke 585
N. Joukowsky. Gleichgewichtsbedingung eines festen Körpers, welcher sich mit seiner Unterfläche auf eine unbewegliche Ebene stützt 586
O. Fischer. Beiträge zur Muskelstatik. I: Ueber das Gleichgewicht zwischen Schwere und Muskeln am zweigliedrigen System 587
O. Fischer. Ueber Grundlagen und Ziele der Muskelmechanik . . 587
J. R. Ewald. Die Hebelwirkung des Fusses, wenn man sich auf die Zehen erhebt. 2. Mitteilung 587
L. Gensen. Zeichnerische Bestimmung von Schwerpunkten 588
L. Gensen. Seilzug durch drei gegebene Punkte nebst einigen Anwendungen auf den Dreigelenkbogen 588
A. Francke. Der steife Seilträger 589
E. Duporcq. Sur les centres de gravité des courbes parallèles . . 589
A. G. Greenhill. The spherical catenary 590
L. Lecornu. Sur l'équilibre d'une enveloppe ellipsoïdale 590
H. Engels. Untersuchungen über den Seitendruck der Erde 591
M. Koenen. Berechnung des Seiten- und Bodendrucks in Silozellen 592
Th. Hoech. Ueber Erddruck und Stützmauern 592
Zimmermann. Ueber Erddruck und Stützmauern 592
L. Brennecke. Ueber Erddruck und Stützmauern 592
Cremer. Ueber Erddruck und Stützmauern 593
H. Erdbelastung von Bauwerken 593
Sveistrup. Erdbelastung von Bauwerken 593
E. Mischpeter. Behandlung des Trägheitsmoments in der Schule . 593
A. Bantlin. Elementare Ableitung der Trägheitsmomente 594

Seite
Teichmann. Statische und Trägheitsmomente von Querschnitten . 595
Mohr. Beitrag zur Geometrie der Massen 595
†Weitere Litteratur 596

B. Hydrostatik.

†W. Briggs and G. H. Bryan. Elementary textbook of hydrostatics 596
†O. Hoppe. Elementares Lehrbuch der technischen Mechanik . . . 596
O. Flamm. Ueber die Stabilität von Schiffen 597
P. Duhem. Stabilité d'un navire qui porte du lest liquide 597
P. Duhem. De l'influence qu'un chargement liquide exerce sur la stabilité d'un navire 597
E. Guyou. Stabilité de l'équilibre des corps flottants 598
J. Leflaive. Étude de la stabilité des navires par la méthode des petits modèles 598
†J. Leflaive. Étude théorique sur la plongée des sous-marins . . 598
P. Pizzetti. Sopra un punto della teoria di Laplace relativa alla figura di equilibrio di una massa fluida rotante 598
K. Schwarzschild. Die Poincaré'sche Theorie des Gleichgewichtes einer homogenen rotirenden Flüssigkeitsmasse 598
S. Krüger. Ellipsoïdale evenwichtsvormen eener wentelende homogene vloeistofmassa 599
†P. Möller. Zur Berechnung der Schwimmdocks 599

Kapitel 4. Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

A. Mayer. Existenzbedingungen eines kinetischen Potentiales . . . 599
Ign. Schütz. Verhältnis des Princips der geradesten Bahn zum Princip der kleinsten Wirkung 601
R. de Saussure. Sur une mécanique réglée 601
F. Siacci. Sur une proposition de mécanique 601
F. Siacci. Sulla stabilità dell' equilibrio, e sopra una proposizione di Lagrange 601
A. Kneser. Zwei Sätze über Bewegungen in der Nähe labiler Gleichgewichtslagen 601
E. Herrmann. Bemerkungen über die verticale Componente der ablenkenden Kraft der Erdrotation 602
Nils Ekholm. Ueber die Grössenordnung der Kräfte, die verticale Beschleunigungen der Luft hervorrufen 602
E. Herrmann. Noch einmal der „Satz von der Erhaltung der Fläche" 602
M. Möller. Zum vorangehenden Artikel 602
J. D. Everett. On absolute and relative motion 602
„Cromerite". A mechanical problem 603
†E. Mortara. Osservazione sul principio delle aree 603
G. Susloff. Monocyklische Systeme von Helmholtz 603
T. Levi-Civita. Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche . 603
T. Levi-Civita. Sugli integrali algebrici delle equazioni dinamiche 604
G. Picciatti. Sulla trasformazione delle equazioni della dinamica . 605
G. di Pirro. Sulle trasformazioni delle equazioni della dinamica . . 605
G. di Pirro. Intégrales quadratiques des équations de la dynamique 606
P. Appell. Remarques sur la communication de M. di Pirro . . . 606
G. di Pirro. Integrali primi quadratici delle equazioni della meccanica 606
P. Painlevé. Transformations des équations de la dynamique . . . 607
P. Painlevé. Singularités des équations de la dynamique 607
P. Painlevé. Sur les singularités des équations de la dynamique et sur le problème des trois corps 608

Seite

H. Poincaré. Sur les solutions périodiques et le principe de la moindre action 608
T. Levi-Civita. Sul moto di un sistema di punti materiali soggetti a resistenze proporzionali alle rispettive velocità 608
E. J. Nanson. The period-equation of a constrained system oscillating about a position of equilibrium 609
P. Nekrassow. Einige dynamische Gleichungen, welche vermittelst der Methode complexer Grössen integrirt werden können . . . 609
A. Cabreira. Sobre as velocidades na espiral 610
P. Tait. Movimiento armónico 610
†R. S. Ball. On a form of the differential equations of dynamics . . 610
E. Borel. Remarque sur les problèmes de forces centrales 610
H. Püning. Herleitung des ersten und dritten Kepler'schen Gesetzes 610
F. O. Otto. Ein Attractionsproblem 610
C. Cailler. Mouvement d'une planète dans un milieu résistant . . 611
†A. Astor. Courbes unicursales sous l'influence d'une force centrale 611
†J. Richard. Sur le mouvement des planètes 611
†H. Franzen. Bewegung eines materiellen Punktes unter Einwirkung einer Newton'schen Centralkraft und der Erdschwere 611
D. Gravé. Sur le problème de trois corps 611
H. Poincaré. Sur la méthode de Bruns 612
H. Poincaré. Forme nouvelle des équations du problème des trois corps 612
H. Andoyer. Sur l'extension que l'on peut donner au théorème de Poisson, relatif à l'invariabilité des grands axes 612
A. G. Wythoff (Fräulein). Over de stabiliteit van elliptische banen, beschreven onder de werking van drie centrale krachten . . . 613
O. Hettwer. Zur Bewegung eines schweren Punktes auf einer krummen Linie von der Gleichung $r^m = a^m \cos m\vartheta$ 613
C. Seidemann. Ein mechanisches Doppelproblem 614
M. Petrovitsch. Remarques sur les équations de dynamique et sur le mouvement tautochrone 614
W. de Tannenberg. Équations du mouvement d'un point matériel sur une surface quand on tient compte du frottement 615
Hadamard. Une propriété des mouvements sur une surface 615
A. Razzaboni. Sul movimento d'un punto materiale sopra una superficie non levigata 615
G. Lippmann. Entretien du mouvement du pendule sans perturbations 616
H. Schubert. Elementare Ableitung einer genaueren Pendelformel . 616
G. Lorenzoni. L'effetto della flessione del pendolo sul tempo della sua oscillazione 616
G. von Grofe. Mathematisches Pendel von veränderlicher Länge 617
G. Peano. Sul pendolo di lunghezza variabile 617
L. Lecornu. Sur le pendule de longueur brusquement variable . . 618
Baisch. Eine Erweiterung des Satzes vom Reversionspendel . . . 618
A. de Saint-Germain. Note sur le pendule sphérique 618
M. Nordmann. Zur Behandlung innerer Kräfte im physikalischen Unterricht der Prima 619
T. Levi-Civita. Moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso 619
T. Levi-Civita. Sul moto dei sistemi con tre gradi di libertà . . 620
P. A. Nekrassoff. Recherches analytiques sur un cas de rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe 620
N. Joukowsky. A propos d'une communication de M. R. Liouville, sur la rotation des solides 621
R. Liouville. Sur la rotation des solides et le principe de Maxwell 621

Seite

Krishnachandra De, J. L. Kitchin, C. Bickerdike. Solution of question 12810 . . . 622
J. Hadamard. Stabilité des rotations dans le mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe . . . 622
F. Klein. Ueber die Bewegung des Kreisels . . . 622
F. Klein. Sur le mouvement d'un corps grave de révolution suspendu par un point de son axe . . . 622
G. Koenigs. Solutions périodiques du problème du mouvement d'un corps pesant quelconque, suspendu par un de ses points . . . 623
Legoux. Sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe 623
G. T. Walker. On a dynamical top . . . 623
M. Koppe. Zur Kreiselbewegung . . . 624
A. G. Greenhill. The associated dynamics of a top and of a body under no forces . . . 624
R. Marcolongo. Sur une propriété de deux mouvements à la Poinsot concordants . . . 624
Münter. Antwort auf die Kritik Seite 570 des vor. Jahrganges . . 624
Franke, Schmidt. Erwiderungen auf die Antwort des Dr. Münter 624
S. Tschaplygin. Ueber die Bewegung eines schweren Drehungskörpers auf einer horizontalen Fläche . . . 624
S. Tschaplygin. Mögliche Verallgemeinerung der Flächentheoreme mit Anwendung auf das Problem des Rollens der Kugeln . . . 625
L. Picart. Sur la rotation d'un corps variable . . . 626
E. et M. Fouché. Déplacement de l'axe de rotation d'un corps solide dont une partie est rendue momentanément mobile . . . 627
V. Volterra. Rotazione di un corpo in cui esistono sistemi policiclici 627
G. Peano. Sul moto del polo terrestre . . . 628
S. Newcomb. The influence of atmospheric and oceanic currents upon terrestrial latitudes . . . 628
Sir Robert Ball. Note on a point in theoretical dynamics . . . 629
A. S. Chessin. Motion of a homogeneous sphere on an inclined plane, taking into account the rotation of the Earth . . . 629
P. Appell. Sur l'emploi des équations de Lagrange dans la théorie du choc et des percussions . . . 630
L. Lecornu. Sur un mode nouveau de régulation des moteurs . . 630
H. Léauté. Remarques au sujet de la note précédente . . . 630
L. Lecornu. Sur la régulation des moteurs . . . 630
M. Osnos. Ermittelung der „Ueberschuss“-Arbeit bei Bestimmung des Ungleichförmigkeitsgrades von Maschinen mit Kurbelmechanismus . . . 630
Th. Beck. Historische Notizen XVIII. Leonardo da Vinci . . . 631
C. Cranz. Compendium der theoretischen äusseren Ballistik . . . 631
Fr. Ritter von Loessl. Die Luftwiderstands-Gesetze, der Fall durch die Luft und der Vogelflug . . . 633
F. Siacci. Sulla resistenza dell'aria dei projetti . . . 634
F. Chapel. Sur une nouvelle étude de balistique extérieure de M. Siacci . . . 634
Journée. Note sur la résistance de l'air aux petites vitesses . . . 637
J. M. Ingalls. Resistance of the air to the motion of oblong projectiles . . . 637
E. Oekinghaus. Die Hyperbel als ballistische Curve (Schluss) . . 638
E. Oekinghaus. Die ballistischen Leistungen des schweizerischen Gewehres Modell 1889 . . . 638
E. Oekinghaus. Schallgeschwindigkeit beim scharfen Schuss . . . 638
Freiherr von Zedlitz und Neukirch. Eine zweckmässige Umformung alter ballistischer Formeln . . . 639
P. Laurent. Note sur les fonctions secondaires de dérivation . . . 639



Seite
A. Sprung. Ablenkung der Geschosse durch die Erdrotation . . . 640
E. Oekinghaus. Erwiderung auf Dr. Sprung's Aufsatz betreffend „die Ablenkung der Geschosse durch die Erdrotation“ 640
v. Scheve. Aufstellung von Schusstafeln für Mörser und Haubitzen 640
A. Indra. Einrichtung und Gebrauch des Coordimeters 641
A. Michaut. Matériel de campagne pour l'artillerie suisse 641
A. Weigner. Zur Frage des zukünftigen Infanteriegewehrs 641
A. Weigner. Zur Frage des zukünftigen Feldgeschützes 642
† Weitere Litteratur 642

B. Hydrodynamik.

H. v. Helmholtz. Zwei hydrodynamische Abhandlungen. Hrsg. von A. Wangerin 643
W. M. Hicks. On bicyclic vortex aggregates 643
W. M. Hicks. On Hill's special vortex 643
R. Hargreaves. The continuity of pressure in vortex motion . . 643
R. Hargreaves. An ellipsoidal vortex 643
L. Silberstein. Entstehung von Wirbelbewegungen in einer reibungslosen Flüssigkeit 644
W. Wien. Cyklonartige Bewegungsformen 644
J. Brill. Form of the energy integral in the motion of an incompressible fluid 645
H. A. Lorentz. Eene algemeene stelling omtrent de beweging eener vloeistof met wrijving 645
B. Stankewitsch. Anwendung der Transformationsmethode vermittelst reciproker Radienvectoren 645
B. Stankewitsch. Ueber ein Problem der Hydrokinematik 646
Lord Rayleigh. Stability or instability of certain fluid motions . . 646
Lord Rayleigh. Propagation of waves upon the plane surface separating two portions of fluid of different vorticities 646
A. E. H. Love. Examples illustrating Lord Rayleigh's theory of the stability or instability of certain fluid motions 646
A. B. Basset. Stability of a frictionless liquid 646
J. Boussinesq. Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section . . 647
J. Boussinesq. Formules des pressions moyennes locales dans un fluide animé de mouvements tourbillonnants et tumultueux . . . 647
J. Boussinesq. Expression du frottement extérieur dans l'écoulement tumultueux d'un fluide 647
J. Boussinesq. Formules du coefficient des frottements intérieurs dans l'écoulement tumultueux graduellement varié des liquides . 647
J. Boussinesq. Lois générales du régime uniforme dans les lits à grande section 647
J. Boussinesq. Du régime uniforme dans les canaux rectangulaires larges et dans les tuyaux ou canaux à section circulaire 647
J. Boussinesq. Lois de deuxième approximation du régime uniforme dans les tuyaux circulaires 647
J. Jacob. Formel für die Ausflussgeschwindigkeit der Gase 648
Hégly. Sur le passage d'un écoulement par orifice à un écoulement par déversoir 648
A. Samuelson. Einige Gesetze des Widerstandes der Flüssigkeiten 648
C. Somigliana. Espressione della forza viva nel problema del moto di un corpo rigido in un fluido incompressibile illimitato . . . 648
R. Marcolongo. Sur un cas particulier du mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini 649
R. Liouville. Mouvement d'un solide dans un liquide indéfini . . 649
W. Stekloff. Mouvement d'un solide dans un liquide indéfini . . 649

Seite
W. Sutherland. High tensions in moving liquids 649
A. von der Fliet. Zur Frage der Wellentheorie 650
H. M. Macdonald. Waves in canals and on a sloping bank . . . 650
Kurz. Die Wasserwellen 651
Willy Wien. Ueber die auf einer schweren Flüssigkeit möglichen Wellen von sehr kleiner Höhe 651
P. Lebedew. Ponderomotorische Wirkung der Wellen auf Resonatoren. II. Hydrodynamische Oscillationsresonatoren 652
H. Poincaré. Sur l'équilibre et les mouvements des mers 652
G. H. Ling On the solution of a certain differential equation which presents itself in Laplace's kinetic theory of tides 653
A. Kriloff. Théorie du tangage sur une mer houleuse 653
M. d'Ocagne. Abaque de l'équation des marées diurnes et semidiurnes 653
A. Rateau. Sur la théorie des turbines, pompes et ventilateurs . . 654
A. Föppl. Vereinfachte Darstellung meiner Theorie der Laval'schen Turbinenwelle 654
J. Isaachsen. Wirkungen von Centrifugalkräften in Flüssigkeiten . 654
Gerhardt. Zur Berechnung von Windrädern 655
P. Girardville. Sur le vol des oiseaux 655
†Weitere Litteratur 655

Kapitel 5. Potentialtheorie.

W. Wirtinger. Ueber eine Eigenschaft des Potentials unter Annahme eines Green'schen Wirkungsgesetzes 656
C. Neumann. Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen 658
P. G. Tait. Note on centrobaric shells 658
E. Mathy. Expression des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur 658
E. Mathy. Calcul des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur 659
E. W. Hobson. Formulae for the potentials of ellipsoids, shells, and disks 659
E. J. Routh. Theorems on the attraction of ellipsoids for certain laws of force other than the inverse square 660
A. L. Dixon. The potential of cyclids 661
H. Züge. Zum Problem der Anziehung homogener Ringkörper . . 662
P. Pizzetti. Intorno alla determinazione teorica della gravità alla superficie terrestre 664
E. Lampe. Ueber Körper grösster Anziehung 664
F. Richarz und O. Krigar-Menzel. Gravitationsconstante und mittlere Dichtigkeit der Erde 665
C. Braun. Die Gravitationsconstante, die Masse und mittlere Dichte der Erde 665
R. v. Eötvös. Untersuchungen über Gravitation und Erdmagnetismus 665

Elfter Abschnitt. Mathematische Physik.

Kapitel 1. Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

A. Molecularphysik.

W. Voigt. Compendium der theoretischen Physik. I, II 666
O. Lehmann. Dr. Joh. Müller's Grundriss der Physik 672
R. Heger. Die Erhaltung der Arbeit 673
M. Kuhn. Unmittelbare und sinngemässe Aufstellung der „Energie“ als mechanischen Hauptbegriffes 674



Seite

Lothar Meyer. Die Atome und ihre Eigenschaften 674
L. Boltzmann. Unentbehrlichkeit der Atomistik in der Naturwissenschaft 675
Duport. Mémoire sur la constitution des atomes 675
Duport. Constitution des atomes et action de la matière sur la matière 675
P. Beck. Der Substanzbegriff in der Naturwissenschaft 676
A. Turner. Die strahlende Materie 677
Ch. Lagrange. Sur les équations du champ physique. III 677
Ch. Lagrange. Sur les équations du champ physique. IV 677
O. Foerster. Elasticitätscoefficienten und Wellenbewegungserscheinungen als Functionen der Moleculargewichte und specifischen Wärmen 678
A. Korn. Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik. I 678
A. Cornu. Les forces à distance et les ondulations 679
C. del Lungo. Sul meccanismo delle forze a distanza 679
H. Seeliger. Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz 679
E. Rethwisch. Die Bewegung im Weltenraum 680
R. Mewes. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwerkraftstrahlen . 680
Th. Schwartze. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwerkraft . . 681
A. Sinram. Kritik der Formel der Newton'schen Gravitationstheorie 681
P. Mallock. Experiments on fluid viscosity 682
H. Le Chatelier. Particularités des courbes de solubilité 682
A. Ponsot. L'influence de la pression dans les changements d'état 682
Lord Rayleigh. Theoretical considerations respecting the separation of gases by diffusion and similar processes 682
G. Jäger. Zur Theorie der Dissociation der Gase. II 683
†Weitere Litteratur 684

B. Elasticitätstheorie.

H. Poincaré. Sur l'équilibre d'un corps élastique 684
E. Cosserat et F. Cosserat. Sur la théorie de l'élasticité. I . . 684
P. Jaerisch. Zur Integration der Elasticitätsgleichungen isotroper Rotationskörper 685
O. Tedone. Sulla integrazione delle equazioni della elasticità . . . 685
C. Somigliana. Sulle deformazioni elastiche dei solidi cristallini . 685
C. Chree. The equilibrium of isotropic elastic solid shells of nearly spherical form 686
L. Lecornu. Sur l'équilibre d'élasticité d'un corps tournant . . . 686
R. Bredt. Kritische Bemerkungen zur Drehungselasticität 686
A. Föppl. Kritische Bemerkungen zur Drehungselasticität 686
S. S. Hough. The rotation of an elastic spheroid 687
J. Larmor. Period of the Earth's free Eulerian precession 687
C. Chree. Forced vibrations in isotropic elastic solid spheres . . . 687
G. Lauricella. Equazioni delle vibrazioni delle placche elastiche incastrate 688
G. Lauricella. Vibrazioni delle plastre elastiche incastrate 688
O. Tedone. Sulle vibrazioni dei corpi elastici 688
E. Le Roy. Sur le problème des membranes vibrantes 689
G. Rizzi. Intorno ai sistemi nodali delle membrane vibranti . . . 689
L. Tetmajer. Die Gesetze der Knickungsfestigkeit 689
R. Land. Einfache Ableitung der Euler'schen Knickformel 690
Z. Die Bezeichnung Widerstandsmoment 690
A. Föppl. Prüfung von Metallen auf ihre Härte 690
A. Föppl. Prüfung eines Satzes der Fachwerklehre durch den Versuch 690

Seite

M. Duplaix. Abaques des efforts tranchants et des moments de flexion développés dans les poutres à une travée 690
P. Toulon. Résistance des poutres droites à travées solidaires sur appuis élastiques 691
Ad. Francke. Träger auf elastischer Unterlage 691
A. Roth. Herleitung von Spannungen neu zu berechnender Träger aus alten berechneten 691
C. Guidi. Sul calcolo delle travi a parete piena 691
Zimmermann. Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last 691
Fr. Kreuter. Zur Bestimmung der Tragkraft von Pfählen 692
Bubendey. Die Tragfähigkeit gerammter Pfähle 692
A. Zschetzsche. Zur Berechnung der Stabkräfte in Bogenbrücken . 692
L. Gensen. Zur Berechnung der Stabkräfte in Bogenbrücken . . . 693
H. Beanspruchung statisch unbestimmter Tonnengewölbe 693
M. Duplaix. Sur la résistance des ponts sous le passage de convois périodiques 693
R. Heyn. Wechselbeziehungen zwischen Gewölben und Widerlagsmauern 693
A. Föppl. Die Berechnung von Röhren und anderen ringförmigen Körpern auf Druck in einer Durchmesserebene 694
Kirsch. Kritische Geschwindigkeit von Wellen mit grosser Umlaufszahl 694
A. Föppl. Kritische Geschwindigkeit von Wellen mit grosser Umlaufszahl 694
A. Zschetzsche. Berechnung von Mauerankern 694
L. Tsoucalas. Note sur de nouvelles tables pour le calcul de la résistance des canons frettés 694
†Weitere Litteratur 695

C. Capillarität.

J. Macé de Lépinay. Influence de la capillarité sur les pesées hydrostatiques 696
Brömel. Der Gleichgewichtszustand einer Flüssigkeit in einer verticalen capillaren konischen Röhre 696
†G. Van der Mensbrugghe. Note sur les nombreux effets de l'élasticité des fluides 697

Kapitel 2. Akustik und Optik.

A. Akustik.

H. Helmholtz. Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden (1859). Hrsg. von A. Wangerin 697
D. Thomson. Vibraciones y ondas sonoras 698
J. Mc Mahon. Notes on the expression for a velocity-potential in terms of functions of Laplace and Bessel 698
G. Jäger. Fortpflanzung des Schalles in bewegter Luft 699
Max Wien. Ueber die Periode, für welche die Amplitude einer erzwungenen Schwingung ein Maximum wird 699
P. Johannesson. Bemerkung zur Lehre von der Resonanz 699
E. Bouty. Les flammes sensibles et les lentilles acoustiques . . . 700
E. Bouty. Sur les flammes sensibles 700
P. Lebedew. Ponderomotorische Wirkung der Wellen auf Resonatoren. II 701
†Weitere Litteratur 701

B. Theoretische Optik.

†W. T. A. Emtage. Light 701

Seite

P. Duhem. Fragments d'un cours d'optique. III 702
O. Tedone. Sulla dimostrazione della formola che rappresenta analiticamente il principio di Huygens 702
G. Morera. Sull' espressione analitica del principio di Huygens . . 703
B. Brunhes. Sur le principe d'Huygens et sur quelques conséquences du théorème de Kirchhoff 703
B. W. Stankiewitsch. Zur Theorie der Lichtstrahlen 703
S. Lie. Infinitesimale Berührungstransformationen der Optik 703
G. Vert. Représentation graphique des ondes lumineuses 704
F. E. Neumann. Theorie der doppelten Strahlenbrechung. Hrsg. von A. Wangerin 704
P. Glan. Theoretische Untersuchungen über elastische Körper . . 704
P. Glan. Theoretische Untersuchungen über elastische Körper und Licht 704
P. Glan. Theoretische Untersuchungen über Licht 704
W. Voigt. Aenderung der Schwingungsform des Lichtes beim Fortschreiten in einem dispergirenden oder absorbirenden Mittel . . 705
Fabry. Passage de la lumière à travers une lame mince 706
J. Macé de Lépinay. Sur les changements de phase par diffraction 706
A. Sommerfeld. Mathematische Theorie der Diffraction 706
†A. Sommerfeld. Diffractionsprobleme in exacter Behandlung . . 711
W. Voigt. Fluorescenz und kinetische Gastheorie 711
Tabelle für die Wellenlänge der Spectren der Elemente 711
G. Jaumann. Longitudinales Licht 711
E. M. Lémeray. Interprétation des formules de Fresnel sur la réflexion et la réfraction vitreuses de la lumière polarisée 711
A. Hurion. Polarisation de la lumière diffusée par les milieux troubles 712
B. Brunhes. Condition de biréfringence d'un milieu et absorption cristalline 712
E. Carvallo. Absorption de la lumière par les milieux doués du pouvoir rotatoire 712
E. Carvallo. Absorption de la lumière par les cristaux 713
W. Voigt. Lage der Absorptionsbüschel in zweiaxigen pleochroitischen Krystallen 713
A. Cotton. Recherches sur l'absorption et la dispersion de la lumière par les milieux doués du pouvoir rotatoire 714
A. Cotton. Note sur l'emploi de la lame de Bravais 714
B. Hecht. Interferenzerscheinungen, welche Platten aus Zwillingskrystallen in convergentem polarisirten Lichte zeigen 714
Smoluchowski de Smolan. Recherches sur une loi de Clausius . 715
Smoluchowski de Smolan. Dépendance entre le rayonnement d'un corps et la nature du milieu environnant 715

C. Geometrische Optik.

H. v. Helmholtz. Handbuch der physiologischen Optik 715
F. Hausdorff. Infinitesimale Abbildungen der Optik 716
A. Cornu. Sur la caustique d'un arc de courbe réfléchissant les rayons émis par un point lumineux 717
G. Chrystal. Theory of the refraction of thin approximate axial pencils 717
W. T. A. Emtage. On the relation between the brightness of an object and that of its image 717
J. Larmor. Absolute minimum of optical deviation by a prism . . 718
A. Anderson. Maximum deviation of a ray of light by a prism . . 718
†P. Silow. Vereinfachung der Huygens'schen Construction für die Reflexion und Brechung der Lichtstrahlen 718

Seite

E. H. Barton. Graphical methods for finding the focal lengths of mirrors and lenses 718
O. J. Lodge. Elementary teaching concerning focal lengths 718
E. H. Barton. Elementary teaching concerning focal lengths . . . 718
E. H. Barton. Distancias focales de espejos y lentes 719
R. S. Cole. Graphical methods for lenses 719
R. S. Cole. Métodos gráficos relativos á las lentes 719
Lord Rayleigh. On the theory of optical images, with special reference to the microscope 719
G. Johnstone Stoney. Microscopic vision 719
P. Lugol. Aberrations dans les miroirs sphériques 720
v. Knebel. Ueber Kriegsdistanzmesser 720
M. Brillouin. Viseur stroboscopique 720
C. Ladd Franklin. The positions of the retinal images 721
E. T. Dixon. The position of the retinal images 721
Ch. Henry. Lois d'établissement et de persistance de la sensation lumineuse 721
†E. Götting. Scheinbarer Ort eines unter Wasser befindlichen leuchtenden Punktes 721

Kapitel 3. Elektricität und Magnetismus.

E. Neumann. Beiträge zur Elektrostatik 721
H. Pellat. Électrostatique non fondée sur les lois de Coulomb . . 722
Gouy. Rôle des milieux diélectriques en électrostatique 722
H. M. Macdonald. The electrical distribution induced on an infinite plane disc with a circular hole in it 722
W. Nernst. Ueber Berührungselektricität 722
Ch. Maurain. Les courants polyphasés et les champs tournants. . 723
R. Malagoli. Sugli spostamenti di fase che produce un voltametro percorso da correnti alternanti 723
N. D. Piltschikow. Einige Anwendungen des thermodynamischen Potentials auf die elektrochemische Mechanik 724
F. Kohlrausch. Ueber elektrolytische Verschiebungen in Lösungen und Lösungsgemischen 725
J. G. Mac Gregor. Conductivity of mixtures of electrolytes 725
P. Joubin. Dimensions des grandeurs électriques et magnétiques . 726
C. Limb. Mesure directe des forces électromotrices en unités absolues électromagnétiques 726
Böklen. Graphische Darstellung des Ohm'schen Gesetzes 726
A. Wassmuth. Ueber lineare Stromverzweigungen 727
Q. Majorana. Azione di un raggio luminoso, periodicamente interrotto, sul selenio 727
A. Heydweiler. Verwendung des Telephons zur Bestimmung von Dielektricitätsconstanten leitender Körper 727
P. Drude. Ueber den Begriff des dielektrischen Widerstandes . . . 727
F. Pockels. Die durch die Abhängigkeit der Dielektricitätsconstante von der Feldstärke bedingte optische Wirkung eines elektrischen Feldes 728
E. Wiechert. Ueber die Grundlagen der Elektrodynamik 728
E. Wiechert. Maxwell's Theorie der Elektrodynamik 728
C. Neumann. Ueber die elektrodynamischen Elementarwirkungen . 728
P. Duhem. Sur la propagation des actions électrodynamiques . . . 729
Lord Kelvin. Velocity of propagation of electrostatic force . . . 730
J. W. Gibbs. Velocity of propagation of electrostatic force . . . 730
G. F. Searle. On problems in electric convection 730
H. A. Lorentz. Over het theorema van Poynting 731
P. van Mourik. Bijdrage tot de theorie van de vector-potentiaal . 731



Seite

E. G. Gallop. The electric and magnetic images of a multiple point in a sphere 731
F. Hasenoehrl. Ein mechanisches Polycykel als Analogon der Inductionswirkungen beliebig vieler Kreisströme 731
W. B. Morton. Electromagnetic theory of moving charges 733
Max Wien. Einheitsrollen der Selbstinduction 733
O. Singer. Wechselseitige Induction zweier auf eine Kugelschale gleichmässig gewickelter Windungslagen 733
F. Kolaček. Ueber elektrische Oscillationen in einer leitenden und polarisationsfähigen Kugel 734
M. Planck. Ueber elektrische Schwingungen, welche durch Resonanz erregt und durch Strahlung gedämpft werden 734
Ad. Blümcke. Bemerkung zu Oberbeck: „Ueber den Verlauf der elektrischen Schwingungen bei den Tesla'schen Versuchen“ . . 735
A. Eckström. Om stående elektriska vågor i metalltrådar 736
K. Domalip und F. Kolaček. Studien über elektrische Resonanz 736
A. Busch. Ueber oscillatorische Condensatorentladungen 737
J. Larmor. A dynamical theory of the electric and luminiferous medium. Part. II. Theory of electrons 737
G. F. Fitzgerald. On the longitudinal component in light 738
O. Wiedeburg. Der Interferentialrefractor für elektrische Wellen 738
R. Reiff. Neue Deutung der magnetischen Drehung der Polarisationsebene 739
C. H. Wind. Eene studie over de theorie der magneto-optische verschijnselen in verband met het Hall-effect 739
H. Bagard. Phénomène de Hall dans les liquides 739
J. Lemoine. Vérification de la loi de Kerr. Mesures absolues . . 739
A. Garbasso. Sopra un punto della teoria dei raggi catodici . . . 740
J. J. Thomson. Longitudinal electric waves, and Röntgen's X-rays 740
Stokes. On the nature of the Röntgen rays 740
R. Swyngedauw. Différence d'action de la lumière ultra-violette sur les potentiels explosifs statique et dynamique 741
G. Jaumann. Réponse aux observations de M. H. Poincaré sur la théorie des rayons cathodiques 741
H. Poincaré. Observations au sujet d'une communication de M. Jaumann 741
G. Jaumann. Déviation électrostatique des rayons cathodiques . . 741
H. Poincaré. Observations au sujet d'une communication de M. Jaumann 741
A. A. Michelson. The theory of the X-rays 742
G. Sagnac. Illusions qui accompagnent la formation des pénombres. Applications aux rayons X 742
C. Maltézos. Sur quelques propriétés des rayons X traversant des milieux pondérables 742
C. Maltézos. Sur les rayons X 742
C. Maltézos. Sur les rayons limites ($X=0$) 742
P. Beck. Theorie des remanenten Magnetismus von Föppl 743
Alfons Kohn. Versuche über magnetisch weiche und harte Körper 743
P. Beck. Bermerkungen zu Kohn über magnetisch weiche und harte Körper 744
L. H. Siertsema. Over de onbestaanbaarheid van diamagnetische stoffe volgens Duhem 744
B. Rosing. On the possibility of explaining the phenomena of magnetism by the hypothesis of participation of matter 744
A. Kurz. Kraftwirkung eines Magnets auf einen anderen 744
A. Kurz. Potentielle Energie eines Magnets 744
A. Kurz. Potential einer magnetischen Kugel 744

Seite
A. Kurz. Die magnetische Induction 744
A. Kurz. Solenoid, Ring- und Kugelspirale 744
H. Nagaoka. Aussenwirkung magnetisirter Rotationsellipsoide . . 744
H. Veillon. Magnetisirung des Stahles durch die oscillatorische Entladung der Leydener Flasche 745
J. Klemenčič. Energieverbrauch bei der Magnetisirung durch oscillatorische Condensatorentladungen 745
Willy Wien. Wirkung eines rechteckig gespannten Strombandes auf eine Spule mit kreisförmigem Querschnitt 745
H. Diesselhorst. Potential von Kreisströmen, mit einer Anwendung auf das Helmholtz'sche Elektrodynamometer 746
J. V. Jones. On the magnetic field due to an elliptical current . . 747
A. H. Bucherer. Nachtrag zu: Die Wirkung des Magnetismus auf die elektromotorische Kraft 747
L. Houllevigue. De l'influence de l'aimantation sur les phénomènes thermo-électriques 749
A. Campetti. Moto di un dielettrico in un campo magnetico . . . 749
Vaschy. Erreurs admises comme vérités en électromagnétisme . . 749
Vaschy. Méthodes de calcul en électromagnétisme 749
A. Schuster. On electric currents induced by rotating magnets . . 750
Adolf Schmidt. Neue Berechnung des erdmagnetischen Potentials 750
A. Schmidt, Gotha. Verteilung des erdmagnetischen Potentials . . 753
A. V. Bäcklund. En undersökning inom theorien för de elektriska strömmarne 754
Chree. Comparison and reduction of magnetic observations 754
F. H. Bigelow, A. Schmidt, Gotha. On the best form for the components of systems of deflecting forces 754
†Weitere Litteratur 755

Kapitel 4. Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

†E. Mach. Die Principien der Wärmelehre 756
L. Boltzmann. Ein Wort der Mathematik an die Energetik . . . 756
M. Planck. Gegen die neuere Energetik 757
G. Helm. Zur Energetik 758
W. Ostwald. Zur Energetik 758
W. Ostwald. Die Ueberwindung des wissenschaftlichen Materialismus 759
L. Boltzmann. Zur Energetik 759
E. Zermelo. Ein Satz der Dynamik und die mechanische Wärmetheorie 759
L. Boltzmann. Entgegnung auf die wärmetheoretischen Betrachtungen von E. Zermelo 760
E. Zermelo. Ueber mechanische Erklärungen irreversibler Vorgänge 760
G. K. Suslow. Die Helmholtz'schen Monocykeln 761
G. Darzens. Sur l'entropie moléculaire 761
†E. Ariès. Chaleur et énergie 762
P. Duhem. Sur les déformations permanentes et l'hystérésis . . . 762
†R. Pauli. Der erste und zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie 763
E. H. Amagat. Loi des états correspondants de Van der Waals . 763
C. Raveau. Vérification du théorème des états correspondants . . 763
G. Jäger. Zur Theorie der Zustandsgleichung der Gase 764
A. Kurz. Adiabatische Ausdehnung realer Gase 764
Th. Preston. Continuity of isothermal transformation from the liquid to the gaseous state 764

Seite

J. P. Kuenen. Invloed van de zwaartekracht op de kritische verschijnselen van enkelvoudige stoffen en van mengsels 765
Experiments for improving the construction of practical standards for electrical measurements 765
C. Dieterici. Abhängigkeit der specifischen Wärme des Wassers von der Temperatur 766
E. H. Amagat. Sur les variations du rapport des deux chaleurs spécifiques des gaz 766
E. H. Amagat. Sur les chaleurs spécifiques des gaz et les propriétés des isothermes 766
E. H. Amagat. Sur les variations du rapport des deux chaleurs spécifiques des gaz avec la température et la pression 766
O. Tumlirz. Die Erstarrungswärme in Lösungen 767
O. Tumlirz. Ueber die Verdampfungswärme von Lösungen 768
J. P. van der Waals. Over kenmerken ter beslissing over den loop van de plooipuntslijn voor en mengsel van twee stoffen . 769
M. Margules. Zusammensetzung gesättigter Dämpfe von Mischungen 769
L. Houllevigue. Chaleur de vaporisation et dimensions moléculaires 769
A. Ponsot. Tension de vapeur d'un corps comprimé par un gaz qu'il dissout 770
A. Kurz. Erwärmung flüssiger und fester Körper durch Druck . . 770
W. Sutherland. Thermal transpiration and radiometer motion . . 770
A. Fontana. Correzioni del peso dei corpi nell'aria 770
Rateau. Sur une loi relative à la vapeur d'eau 771
N. R. v. Wuich. Beitrag zur Theorie der Gasspannungsmesser . . 771
†Weitere Litteratur 772

B. Gastheorie.

J. Bertrand. Sur la théorie des gaz 772
J. Bertrand. Seconde note sur la théorie des gaz 772
J. Bertrand. Sur la théorie des gaz 772
L. Boltzmann. Sur la théorie des gaz 772
J. Bertrand. Réponse aux lettres de M. Boltzmann 772
C. del Lungo. Sopra la teoria cinetica dei gas 773
S. H. Burbury. On Boltzmann's law of the equality of mean kinetic energy for each degree of freedom 773
S. H. Burbury. On the stationary motion of a system of equal elastic spheres in a field of no forces 774
†S. H. Burbury. Application of the kinetic theory to dense gases . 774
H. A. Lorentz. Over the entropie eener gasmassa 774
L. Boltzmann. Ueber die Berechnung der Abweichungen der Gase vom Boyle-Charles'schen Gesetz 774
G. Jäger. Gasdruckformel mit Berücksichtigung des Molecularvolumens 775
G. Jäger. Einfluss des Molecularvolumens auf die mittlere Weglänge der Gasmolekeln 776
H. Benndorf. Weiterführung der Annäherungsrechnung in der Maxwell'schen Gastheorie 777
W. Voigt. Einige kinetische Betrachtungen im Zusammenhang mit der Theorie der Verdampfung und verwandter Vorgänge 777

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

W. Voigt. Eine neue Methode zur Untersuchung der Wärmeleitung in Krystallen I 779
G. Somigliana. Sul problema della temperatura nell'ellissoide . . 779
H. A. Lorentz. Over het evenwicht der warmtestraling bij dubbelbrekende lichamen 779

Seite

W. Wien. Energieverteilung im Emissionsspectrum eines schwarzen Körpers . . . 780
Smoluchowski de Smolan. Recherches sur une loi de Clausius au point de vue d'une théorie générale de la radiation 780
Smoluchowski de Smolan. Recherches sur la dépendance entre le rayonnement d'un corps et la nature du milieu environnant . . 780
A. Indra. Bestimmung der Temperatur einer veränderlichen Wärmequelle in einer bestimmt gegebenen Zeit 781

Zwölfter Abschnitt. Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Kapitel 1. Geodäsie.

W. Jordan. Handbuch der Vermessungskunde III 783
E. Hegemann. Uebungsbuch für die Anwendung der Ausgleichungsrechnung auf die praktische Geometrie 783
P. Uhlich. Die Berechnung des mittleren Fehlers von Richtungsbeobachtungen bei vollen Sätzen 784
A. Nagel. Grundlehren der Methode der kleinsten Quadrate 784
R. von Kövesligethy. Ueber eine neue Methode der Morphometrie der Erdoberfläche 784
P. Pizzetti. Osservazioni intorno alla Nota del prof. Nobile: „Abbreviazione del calcolo di una linea geodetica“ etc. 785
N. Jadanza. Influenza dell' errore di verticalità della stadia sulla misura delle distanze e sulle altezze 785
Fr. W. Schulze. Queraxige rechtwinklige sphärische Coordinaten . 785
W. Jordan. Queraxige Coordinaten 785
W. Jordan. Conforme Abbildung 785
W. Jordan. Conforme Kegelprojection 786
O. Koll. Soldner'sche oder Gauss'sche Coordinaten 786
Fr. W. Schulze. Bemerkungen zu Jordan: über queraxige Coordinaten 786
W. Jordan. Congruente oder conforme Coordinaten 786
R. Vogeler. Berechnung einer geodätischen Linie aus geographischen Coordinaten und conformen, ebenen Coordinaten 786
W. Jordan. Der mittlere Verzerrungsfehler 786
R. Vogeler. Vergleichung der mecklenburgischen conformen Kegelprojection mit der congruenten Soldner'schen Projection . . . 786
O. Koll. Soldner'sche oder Gauss'sche Coordinaten 786
J. H. Franke. Die Conformität in Bayern 786
Steiff. Zur Wahl der Art und Lage des Coordinatensystems einer Landesvermessung 786
O. Koll. Soldner'sche oder Gauss'sche Coordinaten 786
W. Jordan. Bemerkungen zu vorstehendem Aufsatz 786
F. R. Helmert. Berichtigung zu S. 473/474 786
E. Hammer und W. Jordan. Gesamtverzerrung von Coordinaten . 786
R. Vogeler. Vergleichung der mecklenburgischen conformen Kegelprojection mit der Soldner'schen Projection 786
L. Krüger. Anschluss eines secundären Dreiecksnetzes an ein Hauptnetz 787
A. Börsch und L. Krüger. Die europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite von Greenwich bis Warschau. II 788
Ch. Lallemand. Sur l'erreur de réfraction dans le nivellement . . 789
Ch. Lallemand. Erreurs systématiques dans les nivellements de précision 790
Ch. Lallemand. Sur la stabilité des piquets employés comme repères provisoires dans les nivellements de précision 790
P. Schreiber. Die Schreiber'schen barometrischen Höhenformeln . 791
†Weitere Litteratur 791

Seite

Kapitel 2. Astronomie.

Astronomischer Kalender für 1897 von der K. K. Sternwarte 792
F. J. Studnička. Astronomische Causerien 792
C. E. Mumberg. Grundtraek af Astronomien 792
P. Harzer. Einfluss der Schwere auf Kreise astronomischer Instrumente 792
A. Saporetti. Determinazione delle differenze fra i tempi medii ed i veri solari 793
C. Hillebrand. Einfluss der Elasticität auf die Schwankungen der Polhöhe 793
Ph. Albrecht. Bewegung des Nordpols in den Jahren 1890-95 . . 793
R. Spitaler. Die Ursache der Breitenschwankungen 793
H. W. Goodwin. Azimuth tables for the higher declinations . . . 794
Astronomical papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac. Vols. V, VI, VII 794
E. W. Brown. On the application of the principal function to the solution of Delaunay's canonical system of equations 794
O. Stone. On the symmetrical form of the differential equations of planetary motions 795
G. W. Hill. Convergence of the series used in perturbations . . . 795
H. Poincaré. Divergence des séries de la mécanique céleste . . . 795
H. Poincaré. Divergence des séries trigonométriques 795
M. Hamy. Sur le développement approché de la fonction perturbatrice dans le cas des inégalités d'ordre élevé 795
A. Féraud. Sur la valeur approchée des coefficients des termes d'ordre élevé dans la fonction perturbatrice 796
C. V. L. Charlier. Ueber die trigonometrischen Entwickelungen in der Störungstheorie 796
C.V.L. Charlier. Methoden zum Tabuliren der Störungen der kleinsten Planeten 797
R. von Kövesligethy. Störungen im Vielkörperproblem 797
K. G. Olsson. Berechnung der Planetenstörungen im Falle einer genäherten Commensurabilität der mittleren Bewegungen . . . 797
†K. G. Olsson. Ueber eine neue Form der Störungen höherer Ordnung in Hansen's Theorie für die kleinen Planeten 797
†K. G. Olsson. Ueber die Integration der Ungleichheiten langer Periode in der Planetentheorie 797
†K. G. Olsson. Zur Methode, Planetenstörungen gruppenweise zu berechnen 798
†K. G. Olsson. Formeln für eine erste Verbesserung des kleinen Divisors in Commensurabilitätsfällen 798
M. Brendel. Ueber die Lücken im Systeme der kleinen Planeten . 798
M. Brendel. Bemerkungen zu Weiler: „Die Störungen der Planeten für den Fall, dass die mittlere Bewegung etc.“ 798
P. Harzer. Bemerkung zu Weiler in A. N. 3312 798
A. Weiler. Die Störungen der Planeten sind Functionen des Winkels, welchen die Ebenen der Bahnen mit einander bilden 798
H. Ludendorff. Tafel zur Berechnung der Störungsfunction für die äussersten kleinen Planeten 799
G. Ravené. Sulle perturbazioni prodotte dai piccoli pianeti 799
H. C. Plummer. A graphical method of solving Kepler's equation 799
E. W. Brown. Expressions for the elliptic coordinates of a moving point to the seventh order of small quantities 799
E. J. Stone. Note on Professor Brown's Note 799
O. Backlund. Sur l'intégration de l'équation différentielle du rayon vecteur d'un certain groupe des petites planètes 800

Seite

H. Gyldén. Olika methoder att bestämma de horistika termerna i den differentialekvation etc. 800
P. Harzer. Ueber eine allgemeine Methode der Bahnbestimmung . 800
H. Paetsch. Ueber die Unsicherheit einer Bahnbestimmung der kleinen Planeten aus vier Beobachtungen. 800
H. J. Zwiers. Neue Methode zur Bestimmung von Doppelsternbahnen 801
J. J. Lee. Theory of the determination, by means of a single spectroscopic observation, of the absolute dimension, masses and parallaxes of stellar systems 801
R. Lehmann-Filhés. Ueber den Artikel von Lee in Astr. Nachr. 3314 801
E. Strömgren. Berechnung der Bahn des Kometen 1890 II 801
E. Pasquier. Solutions multiples du problème des comètes . . . 802
K. Schwarzschild. Stabilität der Bewegung eines durch Jupiter gefangenen Kometen 802
G. Ravené. Ueber die Masse der Planetoiden 802
E. W. Brown. Introductory treatise on the lunar theory 802
L. de Ball. Einfluss der Aenderung der Ekliptik auf die Mondbahn 803
P. H. Cowell. Inclinational terms in the Moon's coordinates . . . 803
E. v. Haerdtl. Säcularacceleration des Mondes 803
R. Foa. Movimenti del piano instantaneo dell' orbite lunare 803
A. Antoniazzi. Equazioni di condizione per le occultazioni osservate a Padova nel 1894 e nel 1895 803
J. v. Hepperger. Helligkeit des verfinsterten Mondes 804
H. Buchholz. Die Laplace'sche und die Salmon'sche Schattentheorie und das Saturnring-Schattenproblem 804
Observations méridiennes de la planète Mars pendant 1892 804
J. Unterweger. Ueber zwei trigonometrische Reihen für Sonnenflecken, Kometen und Klimaschwankungen. Vorläufige Mitt. . . 805
F. Goldscheider. Ueber die Gauss'sche Osterformel. I 805
M. Hamburger. Ableitung der Gauss'schen Formel zur Bestimmung des jüdischen Osterfestes 805
†Weitere Litteratur 805

Kapitel 3. Mathematische Geographie und Meteorologie.

S. Günther. Handbuch der Geophysik. II. Aufl. Band I 807
A. Klingatsch. Zur Bestimmung des mittleren Halbmessers der Erde 808
Ch. Davison. Straining of the Earth resulting from secular cooling 809
Seismological investigation. — Report of Committee 809
R. v. Kövesligethy. Neue geometrische Theorie der seismischen Erscheinungen 810
Ch. Davison. On the diurnal periodicity of earthquakes 810
Th. Sloudski. On the rotation of the Earth 810
H. H. Howorth. Sir Robert Ball and „The cause of an ice age" . 810
H. H. Howorth. The astronomical theory of the glacial period . . 810
H. H. Howorth. Dr. Ball's two letters on the ice age 810
G. H. Darwin. The astronomical theory of the glacial period . . . 810
R. S. Ball. The cause of an ice age 810
A. R. Wallace. The cause of an ice age 810
A. R. Wallace. The astronomical theory of a glacial period . . . 810
E. P. Culverwell. The astronomical theory of the ice age 810
O. Fisher. The cause of an ice age 810
L. de Marchi. The temperature of air and the problem of an ice age 811
R. Hargreaves. Distribution of solar radiation on the surface of the Earth 811

Seite

Report of Committee. The effect of wind and atmospheric pressure on the tides 811
E. Hermann. The motions of the atmosphere 812
E. Oekinghaus. Zur Theorie der Anticyklonen 812
M. Möller. Die zur Erzeugung eines Wirbels erforderliche motorische Kraft 813
W. Köppen. Wirkungen der verticalen Componente der ablenkenden Kraft der Erdrotation 813
Paul Schreiber. Untersuchungen über einige Gesetzmässigkeiten in der Folge jährlicher Niederschlagsmengen 813
A. Tilp. Wiener Bodentemperaturen in den Jahren 1878 bis 1894 . 813
E. Leyst. Zur Frage über Spiegelung des Regenbogens 813
H. Ekama. Eine seltene Form des Halo 814
†Weitere Litteratur 814

Anhang.

E. Cesaro. Lezioni di geometria intrinseca 815
W. F. Osgood. A geometric proof of a fundamental theorem concerning unicursal curves 816
R. A. Roberts. On the locus of the foci of conics having double contact with two fixed conics 816
F. Morley. Common tangents of two similar cycloidal curves . . . 817
H. S. White. Numerically regular reticulations upon surfaces of deficiency higher than 1 817
O. Th. Bürklen. Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik 818
P. Treutlein. Vierstellige Logarithmen 818
E. Schultz. Vierstellige mathematische Tabellen 816
S. W. Holman. Computation rules and logarithms 819
†B. Esmarch. Die Kunst des Stabrechnens 819
F. W. Lanchester. The radial cursor 820
L. Torres. Machines algébriques 820
M. d'Ocagne. Principes de la machine à résoudre les équations de M. Leonardo Torres 820
Lamotte. Planimètre de M. Petersen 821
B. Person. Zur Bestimmung des Umfanges und der Fläche des Kreises mit Hülfe des Zirkels und Lineals 821
†Weitere Litteratur 821

Verzeichnis

der Herren, welche für den siebenundzwanzigsten Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate.)

A.S. Herr Prof. A. Sommerfeld, Clausthal.
Bdn. „ Dr. Brodén, Lund.
Bdt. „ Prof. Burkhardt, Zürich.
Bm. „ Prof. v. Braunmühl, München.
Bö. „ Prof. Börsch, Potsdam.
Br. „ Dr. Brix, Berlin.
Dml. „ Dr. Demoulin, Gent.
Dn. „ Prof. Dickstein, Warschau.
Dz. „ Prof. Dziobek, Charlottenburg.
E. „ Prof. Eneström, Stockholm.
E.K. „ Prof. E. Kötter, Aachen.
El. „ Prof. Engel, Leipzig.
F. „ Dr. Faerber, Berlin.
F.K. „ Prof. F. Kötter, Berlin.
F.L. „ Dr. F. Lampe, Berlin.
Fr. „ Prof. Fricke, Braunschweig.
Gbs. „ Prof. Gibson, Glasgow.
Ghr. „ Prof. Goldhammer, Kasan.
Glr. „ Prof. Glaisher, Cambridge.
Gt. „ Dr. Güntsche, Berlin.
Gz. „ Dr. Gutzmer, Halle a. S.
H. „ Prof. Hoppe, Berlin.
Hae. „ Dr. Haentzschel, Berlin.
Hau. „ Prof. Haussner, Giessen.
Hk. „ Prof. Hauck, Berlin.
Hr. „ Prof. Hamburger, Berlin.
Hz. „ Prof. Hurwitz, Zürich.
Jhk. „ Dr. Jahnke, Berlin.
Jk. „ Prof. Joukovsky, Moskau.
Js. „ Prof. Jolles, Halensee.
Kr. „ Prof. Krazer, Strassburg i. E.
La. „ Prof. Loria, Genua.
Lg. „ Direct. Lange, Berlin.
Lh. Herr Prof. Lerch, Freiburg, Schweiz.
Lp. „ Prof. Lampe, Berlin.
M. „ Prof. F. Müller, Loschwitz.
Mi. „ Direct. Michaelis, Berlin.
Mk. „ Prof. Minkowski, Zürich.
Mn. „ Prof. Mansion, Gent.
Mo. „ Dr. Molenbroek, Haag.
My. „ Prof. F. Meyer, Königsberg i. Pr.
Mz. „ Prof. Maynz, Ludwigslust.
R.M. „ Dr. R. Müller, Berlin.
Rn. „ Oberl. Riens, Berlin.
Sbt. „ Dr. Siebert, Gross-Lichterfelde.
Schg. „ Prof. Schlegel, Hagen.
Scht. „ Prof. Schubert, Hamburg.
Sda. „ Prof. Sucharda, Prag.
Sfs. „ Prof. Schönflies, Göttingen.
Sh. „ Dr. Schafheitlin, Charlottenburg.
Si. „ Dr. Sintzow, Kasan.
St. „ Prof. Stäckel, Kiel.
Stz. „ Dr. Steinitz, Charlottenburg.
T. „ Prof. Toeplitz, Breslau.
Tn. „ Direct. Treutlein, Karlsruhe.
Tx. „ Prof. Teixeira, Porto.
V. „ Dr. Valentiner, Kopenhagen.
Vi. „ Prof. Vivanti, Messina.
Wae. „ Prof. Waelsch, Brünn.
Wbg. „ Dr. Wallenberg, Berlin.
Wi. „ Prof. A. Wassilieff, Kasan.
Wn. „ Prof. Wangerin, Halle a. S.
Wz. „ Prof. Weltzien, Zehlendorf.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Professor Dr. Lampe, Berlin W., Kurfürstenstr. 139.

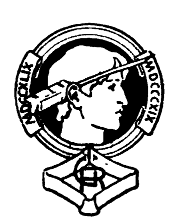
Jahrbuch
über die
Fortschritte der Mathematik

begründet
von
Carl Ohrtmann.

Im Verein mit anderen Mathematikern
und unter besonderer Mitwirkung der Herren
Felix Müller und **Albert Wangerin**

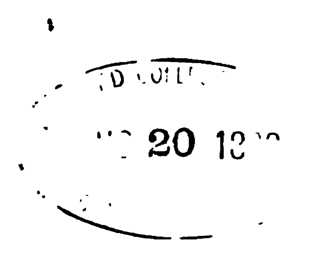
herausgegeben
von
Emil Lampe.

Band XXVII.
Jahrgang 1896.
(In 3 Heften.)
Heft 1.



Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1898.

Bogen 1 bis 23.



Erster Abschnitt.
Geschichte und Philosophie.
Kapitel 1.
Geschichte.

A. Biographisch-Litterarisches.

G. LORIA. Un'opera recente sulla storia delle matematiche elementari. Periodico di Mat. **11**, 1-13.

Zuerst wird die mathematisch-historische Geschichtsschreibung bei M. Cantor und bei Zeuthen sehr treffend gekennzeichnet, sodann folgt eine genauere Schilderung des Inhalts und der Darstellungsart von Zeuthen's Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter (vergl. F. d. M. **26**, 2, 1895). Endlich wird eine Uebersetzung des § 14 dieses Werks über „Euklid's geometrische Voraussetzungen“ (S. 115-131 der deutschen Ausgabe) für die italienischen Leser gegeben. Lp.

G. A. GIBSON. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. III. Band. Edinb. M. S. Proc. **14**, 27 S.

Eine ausführliche Analyse des Cantor'schen Werkes. M.

DAVID E. SMITH. History of modern mathematics. London: Chapman and Hall. [Nature **54**, 435.]

Abdruck des letzten Capitels aus Merriman's Higher Mathematics, über welches Werk in Abschnitt VI, Kapitel 1 berichtet wird. Lp.

F. CAJORI. A history of elementary mathematics. With hints on methods of teaching. New York: Macmillan. VIII + 304 S. 12mo.

Eine eingehende Besprechung dieses Werkes von David Eugene Smith findet sich in „The School Review“ **5**, 184-188. M.

G. FANO. Uno sguardo alla storia della matematica. Discorso. Atti e Memorie della R. Accademia Virgiliana di Mantova. 1895-96, 3-34.

La.

J. L. HEIBERG. Den graeske Mathematiks Overleverings historie. Bull. Ac. Copenh. 1896, 77-93.

M. STEINSCHNEIDER. Die Mathematik bei den Juden. Bibl. Math. (2) **10**, 33-42, 77-83, 109-114.

Fortsetzung der im Jahrgange 1893 begonnenen Reihe von Artikeln (vergl. F. d. M. **25**, 4, 1893/94; **26**, 8, 1895). Hier werden das XII. und ein Teil des XIII. Jahrhunderts behandelt; die hervorragendsten jüdischen Mathematiker des XII. Jahrhunderts sind Abraham bar Chijja (um 1116), Verf. vieler astronomischer Werke, Abraham ibn Esra († 1167), dessen „Sefer ha-Mispar“ neuerdings (1895) herausgegeben worden ist, und der bekannte Uebersetzer Johannes Hispalensis. Unter den von Steinschneider erwähnten jüdischen Gelehrten des XIII. Jahrhunderts haben sich viele ausschliesslich mit der Kalenderkunde beschäftigt; unter den Uebrigen verdienen Jehuda ben Salomo Kohen, Moses ibn Tibbon und Isak ibn Sid (Redacteur der alfonsinischen astronomischen Tafeln) besonders genannt zu werden. E.

W. W. BOBYNIN. Abriss der Geschichte der mathematischen Wissenschaften im Occident. Phys. math. Wiss. **8**, 111-122. (Russisch.)

Enthält zwei Skizzen: 1) Ueber die ursprünglichen Quellen des mathematischen Wissens im Mittelalter und 2) über die aufbewahrende Thätigkeit der mittelalterlichen Klöster. Wi.

G. ENESTRÖM. Questions 56-61. Remarque sur la question 34.
H. SUTER. Bemerkung zur Anfrage 60. Bibl. Math. (2) **10**, 31-32, 64, 96, 120.

Anfragen über verschiedene Punkte der Geschichte der Mathematik (vergl. F. d. M. **26**, 3, 1895).

56) Ueber die von Johan de Witt 1671 herausgegebene Schrift: „Waerdye van lyf-renten naer proportie van los-renten“.
57) Ueber den italienischen Verf. A. Menabeno.
58) Ueber ein von Leibniz 1713 herausgegebenes Flugblatt.
59) Ueber die Vorgeschichte der Additions- und Subtractions - Logarithmen.
60) Ueber den angeblichen arabischen Ursprung der Benennung „Regula cecis“.
61) Ueber das Erscheinen arabischer Ziffern auf Münzen.

Suter bemerkt, dass „cecis“ vielleicht mit dem Wort „sekîs“ (Anteil) oder mit dem Wort „seqî“ (Zutrinkengeben) identisch ist.

34) Ueber eine mathematisch - historische Preisfrage der Madrider Akademie. E.

J. H. GRAF. Notizen zur Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften in der Schweiz. Berner Naturf. Ges. Mitt. 1896, 287-292.

Nach einem kurzen Rückblicke auf die von dem Verf. einzeln behandelten Professoren der Mathematik an der bernischen Hochschule Niklaus Blauner von Bern, Johann Georg Tralles von Hamburg, Johann Friedrich Trechsel von Burgdorf und Ludwig Schläfli von Burgdorf werden kurze Notizen verschiedener Art gegeben und zuletzt drei Briefe von Tralles aus den Jahren 1797, 1800, 1803 abgedruckt. Lp.

SERENI Antinoensis opuscula. Edidit et latine interpretatus est J. L. HEIBERG. Lipsiae: B. G. Teubner. XIX + 303 S.

Seit 1710 ist keine Ausgabe des Serenus mehr erschienen — die Arbeit Heiberg's verdient also grossen Dank. Der Text wird in der Hauptsache gegeben nach zwei Vatikanhandschriften (aus dem 12. bis 13. Jahrhundert) und nach einer Pariser Handschrift (No. 2342 aus dem 14. Jahrhundert); 13 weitere Handschriften werden nach ihrer Stellung und Bedeutung gewürdigt. Eine Uebersichtstabelle verdeutlicht den Unterschied zwischen der Halley'schen alten und der Heiberg'schen neuen Zählung der Sätze. Als Heimat des Verf. wird (zufolge einer Conjectur) Antinoeia oder Antinoupolis in Aegypten genannt, seine Lebenszeit ins 4. Jahrhundert verlegt. Tn.

J. L. HEIBERG. Euclidis optica, opticorum recensio Theonis, Catoptrica, cum scholiis antiquis, vol. VII der Ausgabe Euclidis opera omnia ed. Heiberg et Menge. Bibl. Script. Graec. et Roman. Teubneriana. Leipzig 1895. LV + 362 S.

Auf die Ausgabe der Elemente und der Data (s. F. d. M. **15**, 2, 1883; **16**, 6, 1884; **18**, 4, 1886; **20**, 4, 1888; **26**, 6, 1895) folgt nun die der optischen Schriften, nämlich die Optik selbst (S. 1-123), die Scholien dazu (S. 123-143), dann Theon's Bearbeitung der Optik (S. 143-249) und die Scholien dazu (S. 249 - 285), endlich die Katoptrik (S. 285 - 345) und auch deren Scholien (S. 345 - 362); den Werken selbst ist stets die lateinische Uebersetzung beigefügt. Für die beiden Werke hält sich der Herausgeber an die Wiener Handschrift aus dem 12. Jahrhundert, betreffs der Uebersetzung an die Dresdener des 14. Jahrhunderts. Grosses geschichtliches Interesse gewähren die Untersuchungen der Prolegomena, welche zunächst die Handschriften und deren Beziehungen besprechen (p. I-XXIX), dann die Schicksale der Optik (bis p. XLIII) und der Katoptrik behandeln. Tn.

M. CURTZE. Zur Geschichte der Uebersetzungen der Elementa im Mittelalter. Bibl. Math. (2) **10**, 1-3.

Bekanntlich hat Heiberg in seinen „Beiträgen zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter" (Zeitschr. für Math. **35**, 1890: Hist. Abt. 86-98; F. d. M. **22**, 8, 1890) Fragmente einer alten, direct aus dem Griechischen geflossenen lateinischen Uebersetzung des Euklid zusammengestellt. Curtze hat das Glück gehabt, noch einige solche Fragmente zu entdecken, und teilt dieselben hier mit. Sie umfassen die 18 Defi-

nitionen des 5. Buches und finden sich in dem Cod. lat. Monac. 13084, welcher aus dem 10. Jahrhundert herrührt. E.

APOLLONIUS of Perga. Treatise on conic sections. Edited in modern notation, with introductions including an essay on the earlier history of the subject, by T. L. HEATH. Cambridge: At the University Press. CLXX + 254 S. (1896).

ARCHIMEDES. The works of Archimedes. Edited in modern notation, with introductory chapter, by T. L. HEATH. Cambridge: At the University Press. CLXXXVI + 326 S. (1897).

Diese Ausgaben der Werke der beiden grössten Mathematiker des Altertums werden der wachsenden Zahl der Freunde der griechischen Mathematik sehr willkommen sein. Die einleitenden Kapitel enthalten eine recht vollständige Uebersicht über die ausgedehnte Litteratur bezüglich der Gegenstände der Schriften; bei der Einteilung und Anordnung des zur Verfügung stehenden Stoffes ist der Herausgeber durchaus nicht ein blosser Abschreiber, sondern er schaltet darüber mit der Leichtigkeit und dem Geschicke eines Sachverständigen. Selbstverständlich mussten die Zeuthen'schen Forschungen in reichlichem Masse herangezogen werden, und an manchen Stellen sind die von dem dänischen Gelehrten aufgestellten Regeln ziemlich genau befolgt worden. Die Mannigfaltigkeit des Lebenswerkes von Archimedes verlangt von dem Herausgeber einen höheren Kraftaufwand in der Ausnutzung der Hülfsmittel. Doch hat sich Heath der Aufgabe gewachsen gezeigt. Die Behandlung des Stoffes scheint uns noch selbständiger zu sein, obgleich sie schwerlich klarer als in der Einleitung zu Apollonius sein konnte. Die beiden Einleitungen stellen einen sehr schätzbaren Bericht über die griechische höhere Mathematik dar, und das Kapitel über „Arithmetik bei Archimedes" ist eine der besten Darstellungen, welche uns über den etwas verwickelten Gegenstand zu Gesichte gekommen ist.

In der Vorrede zum Apollonius äussert sich der Herausgeber dahin, dass die wahre Schwierigkeit mit der constructiven Arbeit des Umschreibens des Buches begann, weil darin eingeschlossen lag die Einführung einer neuen und gleichmässigen Bezeichnung, die knappere Fassung mancher Sätze, die Vereinigung zweier oder mehrerer zu einem, einige geringe Umstellungen zum Behufe des Zusammenbringens verwandter Sätze in Fällen, wo ihre Trennung mehr eine Sache des Zufalls als der Absicht war, und dergleichen mehr. Das Ergebnis besteht nun darin, dass ohne Weglassung von irgend etwas Wesentlichem oder Wichtigem der Umfang des Werkes um beträchtlich mehr als die Hälfte verringert, die Zahl der einzelnen Sätze in entsprechendem Masse vermindert ist.

Ein ähnlicher Plan ist bei der Behandlung des Archimedes inne gehalten, und in beiden Fällen zeugt nach unsrer Meinung die Ausführung von grosser Einsicht und Geschicklichkeit. Wenn auch diese Ausgaben den der Geschichte der Mathematik Beflissenen natürlich nicht

von dem Nachlesen der Werke in ihrer Urform entbinden können, so werden sie sicherlich seine Anstrengungen erleichtern helfen, und sie dürften sich ungemein wertvoll bei der Aufschliessung der reichen Mine der griechischen Mathematik für viele erweisen, denen dieselbe jetzt ein verschlossenes Mysterium ist. Gbs. (Lp.)

W. T. Lynn. Claudius Ptolemy and his work. Nature **53,** 488-490.

Eine Skizze zur Würdigung des berühmten alten Astronomen und Geographen, dessen Werke einzeln besprochen werden. Beim Almagest werden die Verdienste Halma's (1755 - 1828), des Verf's. der französischen Uebersetzung (1813 - 1816), besonders hervorgehoben. „Im ganzen kann man sagen, dass Ptolemaeus eher ein Sammler und bündiger Bearbeiter der wissenschaftliehen Thatsachen und Methoden als ein origineller Entdecker oder Forscher gewesen ist.“ Lp.

H. Suter. Die Araber als Vermittler der Wissenschaften in deren Uebergang vom Orient in den Occident. Aarau. 31 S. 8° (1895).

G. Eneström. Le commentaire de Jakob Ziegler sur la „Saphea“ de Zarkali. Bibl. Math. (2) **10,** 53-54.

Günther berichtet in seiner Monographie „Jakob Ziegler, ein bayerischer Geograph und Mathematiker“ (1896) über einen Commentar Ziegler's zur „Saphea“ des Zarkali, und bemerkt, er habe diesen Commentar nicht auffinden können. Eneström macht darauf aufmerksam, dass der Commentar sich handschriftlich in Wien findet, und dass er ein paar Mal von Steinschneider erwähnt worden ist. E.

S. Günther. Jakob Ziegler, ein Bayerischer Geograph und Mathematiker. Ansbach. 64 S. gr. 8°.

R. Daublebsky v. Sterneck. Zur Vervollständigung der Ausgaben der Schrift des Jordanus Nemorarius: „Tractatus de numeris datis“. Monatsh. f. Math. **7,** 165-179.

Nach einer Wiener Handschrift wird hier die bis jetzt noch nicht veröffentlichte zweite Hälfte des Werkes von Jordanus zum Abdruck gebracht; auch werden einige Abweichungen vom bisher gedruckten Text zur öffentlichen Kenntnis gebracht. Tn.

M. Steinschneider. Johannes Anglicus und sein Quadrant. Bibl. Math. (2) **10,** 102-104.

Mit Bezugnahme auf eine gelegentliche Bemerkung von Curtze in der Bibl. Math. 1896, S. 72, spricht Steinschneider die Vermutung aus, dass der Erfinder des „Quadrans vetus“ wahrscheinlich Johannes Anglicus hiesse und nur durch Verwechselung den Namen Robertus

Anglicus bekommen habe; dass er vor 1300 gelebt habe, sei sicher, aber etwas Näheres über seine Lebensumstände dürfte noch nicht bekannt sein. E.

M. CURTZE. Ueber Johann von Gemunden. Bibl. Math. (2) **10**, 4.

M. STEINSCHNEIDER. Bemerkung zur Bibl. Math. 1896, S. 4. Bibl. Math. (2) **10**, 96.

Curtze verzeichnet fünf Handschriften, wo Johann von Gemunden unter dem Namen „Johannes Schindel de Gamundia" vorkommt, und eine Handschrift, wo er „Johannes de Gemunden Suevus" genannt ist. Die Annahme, dass Johann von Gemunden eigentlich Schindel hiess, und dass er aus Schwäbisch-Gmund war, gewinnt hierdurch an Wahrscheinlichkeit.

In Bezug hierauf bemerkt Steinschneider, dass, nach einer hebräischen Uebersetzung, Johann von Gemunden aus Gmund „in Niederdeutschland" war, was wahrscheinlich Schwäbisch-Gmund bedeute. E.

V. VIANELLO. Luca Pacioli nella storia della ragioneria; con documenti inediti. Messina. 174 S. 8°.

C. P. KHEIL. Ueber einige ältere Bearbeitungen des Buchhaltungstractates von Luca Pacioli. Prag. VIII + 128 S. gr. 8°.

LUCA PACIOLI. Divina proportione. Die Lehre vom goldenen Schnitt. Nach der Venezianischen Ausgabe vom Jahre 1509 neu herausgegeben, übersetzt und erläutert von C. WINTERBERG. Wien. VI + 367 S. 8°.

A. VON BRAUNMÜHL. Nicolaus Copernicus. Biograph. Blätter. **2**, Heft 4. 12 S. 8°.

Eine für das gebildete Publicum geschriebene Biographie des grossen Reformators der Astronomie. Nachdem ein Bild von dem Leben des berühmten Astronomen auf dem Hintergrunde seiner Zeit in ansprechender Weise gezeichnet worden ist, werden jene Weltanschauungen, welche vor Copernicus die Wissenschaft beherrschten, klar geschildert und der Einfluss der grossartigen Entdeckung des Copernicus nicht nur auf die Astronomie, sondern auf die ganze geistige Kultur des Menschengeschlechts in helles Licht gesetzt. M.

R. Accademia Peloritana. Commemorazione del 4° centenario di Francesco Maurolico. MDCCCXCIV. Messina: D'Amico. 1896. VI u. 252 S. 8°.

Dieser Band enthält die folgenden Schriften: Francesco Maurolico nella vita e negli scritti per G. Macri (p. 1 - 198). — Ricordi inediti di F. M. illustrati dal Barone Giuseppe Arenaprimo di Montechiaro (p. 199 - 230). — A. F. M. pel suo IV centenario. Lirica di Tommaso Cannizzaro (p. 233 - 239). — Iscrizioni latine del Comm.

Diego Vitrioli con versione italiana del Prof. Gioacchino Chinigo (p. 241 - 249). Vi.

P. Bernhardt. Philipp Melanchthon als Mathematiker und Physiker. Neue (Umschlag-) Ausgabe. Wittenberg (1865): P. Wunschmann. VI + 74 S. 8°.

Fontès. Pierre Forcadel, lecteur du roy ès mathématiques (1560-1573). 2ᵉ suite. Toulouse Mém. (9) **8**, 361-382.

Ueber die ersten beiden Mitteilungen, Pierre Forcadel betreffend, ist im vorigen Jahrgange S. 11-12 berichtet worden. Ein Rechenbuch in vier Büchern vom Jahre 1565 giebt dem Verf. Anlass zu seinem neuen Aufsatze. Zwei Exemplare desselben hat er einsehen können, das eine in Bordeaux, das andere in Carcassonne, beide jedoch unvollständig. Der Titel ist: Arithmétique entière et abrégée de Pierre Forcadel. Lecteur du roy ès mathématiques. Paris 1565. Aus dem dritten Buche ist eine algebraische Aufgabe als einzige vorkommende erwähnt. Die Widmungen der einzelnen Bücher geben gewisse Aufschlüsse über das Leben von Forcadel. In den Noten und Beweisstücken (S. 372-381) sind manche interessante Notizen enthalten. Lp.

F. Ritter. Viète. Notice sur sa vie et ses oeuvres Paris. 102 S. 8° (1895).

Vergl. F. d. M. **24**, 8, 1892.

Galileo Galilei. Le opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspicii di Sua Maestà il Re d'Italia. Vol. VI. Firenze: Barbera. 662 S. 4°.

Der grösste Teil dieses Bandes der Werke Galilei's umfasst astronomische Schriften. Nach einer sorgfältigen Untersuchung des Herausgebers (A. Favaro) zur Erklärung des Grundes und der Art von Galilei's Beschäftigung mit der Lehre von den Kometen finden wir zuerst den Wiederabdruck des Werkchens von Pater Horaz Grassi „De tribus cometis anno MDCXVIII disputatio astronomica“ (Romae, MDCXIX) und dann den des „Discorso delle comete di Mario Guiducci“ (Firenze, 1619), wo Ideen Galilei's auseinandergesetzt und angewandt werden; und den der Replik „Lotharii Sarsii Sigensani (= Horatii Grassi Salonensis) Libra astronomica ac philosophica qua Galilaei Galilaei opiniones de cometis etc.“ (Perusiae, MDCXIX), mit Randschriften von Galileo. Darnach finden wir eine neue polemische Schrift, nämlich die „Lettera al M. R. P. Tarquinio Galluzzi della Compagnia di Giesù di Mario Guiducci“ (Firenze, 1620) und endlich „Il Saggiatore nel quale con bilancia esquisita e giusta si ponderano le cose contenute nella Libra astronomica e filosofica di Lotario Sarsi Sigensano“ (Firenze, 1623). Diese lange, durch die Kometen des Jahres 1618 entzündete Polemik schliesst mit dem Werkchen von Grassi „Ratio ponderum librae

et simbellae" (Lutetiae Parisiorum, 1626), welches hier mit Randschriften von Galileo wieder abgedruckt wird. Die Reihe der in diesem Bande enthaltenen astronomischen Schriften endet mit der „Lettera a Francesco Ingoli in risposta alla Disputatio de situ et quiete terrae", geschrieben von Galilei im Jahre 1624.

Die „Scritture concernenti il quesito in proposito della stima d'un cavallo", auf die man dann stösst, sind eine Sammlung von Briefen, welche sich auf folgende Aufgaben beziehen: Ein Pferd hat als wahren Wert 100 Scudi, von einem ersten wird es auf 1000 Scudi geschätzt, von einem anderen auf 10. Wer hat besser geschätzt? wer hat die geringere Uebertreibung begangen?

Der in Rede stehende Band enthält endlich einige „Scritture attinenti all'idraulica", geschrieben von Galileo auf Veranlassung der zufolge der Einladung des Grossherzogs von Toscana gemachten Studien zur Verhinderung der zu häufigen Ueberschwemmungen des Stromes Bisenzio.

Aus dem Gesagten erhellt, wie reich der Inhalt des neuen Bandes der Sammlung ist. In Bezug auf die Ausstattung selbst können wir nur das wiederholen, was wir bei ähnlichen Gelegenheiten geschrieben haben.

La.

A. Favaro. Per la edizione nazionale delle Opere di Galileo Galilei sotto gli auspicii di S. M. il Re d'Italia. Indice cronologico del carteggio Galileano. Firenze: Barbera. 101 S.

Ein neues Nebenproduct der grossen Unternehmung von Favaro. Dieser unermüdliche Gelehrte hat schon 4065 Nummern des Briefwechsels Galilei's gesammelt und macht durch die gegenwärtige Veröffentlichung bekannt, welche Briefe in demselben enthalten sind. Ferner ladet er alle Fachgenossen ein, die möglichen Irrtümer und die eventuellen Lücken seines Verzeichnisses ihm anzuzeigen. La.

A. Favaro. Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. Ven. Ist. Atti (7) **7**, 411-465.

In Fortsetzung seiner früheren Veröffentlichung bietet hier der Verf., was sich über zwei weitere Männer, über ihr Leben und ihr Thun auffinden liess: über Ottavio Pisani (1575 - 1640?), der sich mit Astronomie, auch mit Anfertigung von Fernröhren und von Weltkarten beschäftigte, und über Girolamo Magagnati, einen Verfertiger von besonders gefärbten Glaswaren. Tn.

A. Carli e A. Favaro. Bibliografia Galileiana 1568-1895 raccolta ed illustrata. (2108 opere disposte in ordine cronologico). Roma. 512 S. 8°.

S. Günther. Biographien Kepler's und Galilei's. 22ster Band der Geisteshelden, Herausgeber A. Bettelheim. Berlin: Hofmann und Co. VII + 233 S. 8°.



B. GIBSON. La Géométrie de Descartes au point de vue de sa méthode. Rev. de métaphysique et de morale **4**, 386-398.

J. BERTHET. La méthode de Descartes avant le discours. Ebenda 399-414.

P. NATORP. Le développement de la pensée de Descartes depuis les „regulae“ jusqu'aux „méditations“. Ebenda 416-432.

A. HANNEQUIN. La preuve ontologique cartésienne défendue contre la critique de Leibniz. Ebenda 433-458.

H. SCHWARZ. Les recherches de Descartes sur la connaissance du monde extérieur. Ebenda 459-477.

P. TANNERY. Descartes physicien. Ebenda 478-488.

D. J. KORTEWEG. Descartes et les manuscrits de Snellius d'après quelques documents nouveaux. Ebenda 489-501.

É. BOUTROUX. Du rapport de la morale à la science dans la philosophie de Descartes. Ebenda 502-511.

V. BROCHARD. Le traité des passions de Descartes et l'éthique de Spinoza. Ebenda 512-516.

G. LANSON. L'influence de la philosophie cartésienne sur la littérature française. Ebenda 517-550.

M. BLONDEL. Le christianisme de Descartes. Ebenda 551-567.

F. TOCCO. Descartes jugé par Vico. Ebenda 568-572.

CH. ADAM. Correspondance de Descartes. Autographes et copies manuscrites. Ebenda 573-583.

Alle diese Aufsätze bilden zusammen die Festnummer der Revue de métaphysique et de morale (Bd. **4**, No. 4) zur Feier des Troisième centenaire de la naissance de Descartes. Lp.

FERMAT. Oeuvres de Fermat. Publiés par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry sous les auspices du Ministère de l'instruction publique. Tome troisième. Traductions par M. PAUL TANNERY: 1°. Des écrits et fragments latins de Fermat; 2°. de l'Inventum novum de Jacques de Billy; 3° du Commercium epistolicum de Wallis. Paris: Gauthier-Villars et Fils. XVI + 611 S. 4°.

Als Ergänzung für die beiden ersten Bände der gesammelten Werke Fermat's gedacht, bringt der vorliegende letzte Band die französischen Uebersetzungen aller lateinischen Schriften des ersten Bandes, ebenso der lateinisch geschriebenen Briefe Fermat's aus dem zweiten Bande. Etwa die Hälfte (S. 323 - 398 und 399 - 610) wird durch die Uebersetzungen zweier Werke eingenommen, welche zu Fermat in naher Beziehung stehen, nämlich des Inventum novum von Jacques de Billy und des Commercium epistolicum von Wallis.

Man könnte meinen, dass eine solche Uebersetzung überflüssig sei, weil, wer sich zu einem Studium des Fermat entschliesse, auch so viel

Latein wissen müsse, um ihn in der Originalsprache zu lesen, wie etwa Gauss und Jacobi. Ganz so verhält sich die Sache bei Fermat aber doch nicht. Seine Sprache und Bezeichnungsweise stehen uns so fern, dass der heutige Leser oft genug auf recht lästige Schwierigkeiten stösst, welche in der vorliegenden Uebersetzung vorsichtig beseitigt sind. Natürlich befand sich der Uebersetzer in einer schwierigen Lage: einerseits wollte er die Sprechweise seines Autors möglichst getreu wiedergeben, andererseits dem heutigen Leser das Verständnis der Schriften möglichst erleichtern. In dem Vorwort setzt der kenntnisreiche Paul Tannery die Grundsätze auseinander, welche er beobachtet hat, nachdem ihm die Möglichkeit geraubt war, den Urtext und die Uebersetzung neben einander zum Abdruck zu bringen. Bei den Fermat'schen Schriften hat er möglichsten Anschluss an dessen Ausdrucksweise angestrebt, die Bezeichnungen aber den jetzt üblichen angepasst. In den beiden nicht von Fermat herrührenden Bestandteilen hat er dagegen auch die Sprache frei umgestaltet, so dass sie der jetzt gebräuchlichen entspricht. Die Zugänglichkeit des Inhaltes ist, wie Ref. bestätigen muss, durch diese Bearbeitung ungemein erleichtert; man versteht ohne langes Nachsinnen sofort, was Fermat gewollt hat, und deshalb dürfte dieser Ergänzungsband bei vielen den Vorzug vor den beiden ersten erhalten. In Bezug auf das Inventum novum vom Pater de Billy möge hier die bezügliche Stelle des Vorwortes Platz finden: „Das Inventum novum hat jedenfalls eine sachliche Wichtigkeit: es bringt auf sehr eingehende Weise jenen ganzen Teil der arithmetischen Untersuchungen Fermat's zur Kenntnis, welcher seine Zeitgenossen am meisten interessirte, während derselbe heute fast ganz vernachlässigt wird. Das Inventum ist also eine um so wesentlichere Ergänzung der Fermat'schen Werke, als es den Schlüssel zu den Anmerkungen zum Diophant liefert und die Lösung mehrerer wirklich schweren Aufgaben in Zahlen giebt“. Wir fügen deshalb auch die Uebersetzung des vollständigen Titels hinzu: „Neue Entdeckungen in der Wissenschaft der Analysis, gesammelt durch den hochwürdigen Pater Jacques de Billy, Priester der Gesellschaft Jesu, aus manchen Briefen, die zu verschiedenen Zeiten an ihn gesandt sind von Herrn Pierre de Fermat, Rat am Parlamente von Toulouse“. Lp.

D. J. Korteweg. Das Geburtsjahr von Johannes Hudde. Schlömilch Z. **41,** Hl. A. 22-23.

Das Geburtsjahr Hudde's ist nicht 1623, wie der Verf. in seiner Schrift „Ueber die Blütezeit der mathematischen Wissenschaften in den Niederlanden“, Amsterdam 1894, angegeben hatte, sondern das Jahr 1628. Ob Hudde in Leiden studirt hat, bleibt eine offene Frage. M.

J. Bosscha. Christian Huygens. Darboux Bull. (2) **20,** 33-64.

Ist die Wiedergabe einer Rede, die bei der 200sten Wiederkehr von Huygens' Todestag gehalten wurde. Sie behandelt sein reiches wissenschaftliches Leben, hauptsächlich auf Grund der neuen grossen Ausgabe

seiner Werke. Hervorzuheben ist, dass das Gesetz vom Stosse der Körper für Huygens in Anspruch genommen (S. 45) und dass ein grosser Teil von Papin's Leistung ebenfalls Huygens gutgeschrieben wird (S. 56). Tn.

J. G. Hagen. Index operum Leonardi Euleri. Berolini: Felix L. Dames. VIII + 80 S. 8°.

Viele Mathematiker, besonders diejenigen, welche sich mit der Geschichte und Litteratur der Mathematik beschäftigen, mögen das Verlangen nach einer Gesamtausgabe der Werke Leonhard Euler's ausgedrückt haben. Der Herstellung einer solchen stand einmal der Umstand entgegen, dass Euler drei Ländern Europas angehört hat, der Schweiz, Russland und Deutschland; dann aber auch die ungeheure Anzahl seiner Schriften. Von diesen seinen Werken sind bisher zwar mehrere Verzeichnisse erschienen, aber keines derselben ist vollständig. Deshalb ist dieser neue und vollständige Index, in dem zugleich die Titel sorgfältig revidirt sind, sowie das Jahr, in dem die Schriften erschienen, genau angegeben ist, eine sehr dankenswerte Arbeit. Hagen teilt die Werke Euler's in vier Serien: Opera Mathematica, Opera Physica, Opera Astronomica, Opera Varii Argumenti. Möge der Zweck des Index, einer Gesamtausgabe der Werke Euler's den Weg zu bahnen, sich bald erfüllen. M.

H. Simon. Vandermonde's Vornamen. Schlömilch Z. **41**, Hl. A. 83-85.

Unter den sechs verschiedenen Vorname-Angaben wird als die höchst wahrscheinlich richtige Alexandre Théophile ermittelt. Vandermonde lebte von 1735-1796. Tn.

A. Cornu. Les travaux de Fresnel en optique. Annuaire Bur. Long. 1896. B. 35 S.

Aus der Festschrift für die Hundertjahrfeier der École Polytechnique abgedruckt, entwirft dieser Aufsatz ein sympathisch gezeichnetes Bild des jung gestorbenen (10. Mai 1788 bis 17. Juli 1827) genialen Physikers und schildert die Entstehung seiner rasch sich folgenden Entdeckungen. Lp.

E. Hess. J. F. C. Hessel. Zur Säcularfeier seines Geburtstages (27. April 1796). Neues Jahrb. f. Miner. 1896. **2**, 107-122.

Johann Friedrich Christian Hessel's Verdienste sind erst nach seinem Tode von Mineralogen und Mathematikern allseitig gewürdigt worden. Seine mineralogische Hauptarbeit (Artikel „Krystall" in Gehler's physikalischem Wörterbuche) enthält die von ihm gemachte Entdeckung des Einteilungsprincips der Krystalle. Auf seine Verdienste bezüglich der zuerst von ihm aufgestellten 32, durch ihre Symmetrie von einander verschiedenen Krystallklassen hat A. Schönflies (Krystallsysteme und Krystallstructur, Leipzig 1891) gebührend aufmerksam ge-

macht. Der hundertste Geburtstag Hessel's gab dem Verf. Veranlassung, vorliegenden Lebensgang zu veröffentlichen. J. F. C. Hessel wurde am 27. April 1796 zu Nürnberg geboren, wurde 1821 ausserordentlicher und 1825 ordentlicher Professor der Mineralogie und Technologie zu Marburg; er starb am 3. Juni 1872 zu Marburg. Der Biographie folgt ein Verzeichnis der selbständig erschienenen Schriften Hessel's und derjenigen Zeitschriften, in denen seine zahlreichen Abhandlungen und Mitteilungen veröffentlicht sind. Mit einer kurzen Würdigung der Thätigkeit und der Leistungen Hessel's auf seinem eigentlichen Hauptgebiete, der Gestaltenlehre und der Krystallkunde, schliesst der interessante Aufsatz. M.

P. Dupuy. La vie d'Evariste Galois. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **13**, 197-266. Mit dem Bildnis Galois'.

Dupuy hat keine Mühe gescheut, das Dunkel, welches bisher über den Schicksalen des genialen und unglücklichen jungen Gelehrten schwebte, zu zerstreuen. Die Darstellung wirft nicht nur ein helles Licht auf den Charakter und die Abenteuer Evariste Galois', sondern auch auf Personen, Zustände und Einrichtungen seiner Zeit, besonders auf die Geschichte der Revolution von 1830. Evariste Galois wurde am 25. October 1811 zu Bourg-la-Reine geboren und bezog 1823 das Collège Louis-le-Grand, wo er sich mit Eifer auf das Studium der höheren Mathematik warf. In das Jahr 1829 fallen seine wichtigen Entdeckungen aus der Theorie der algebraischen Gleichungen; mit demselben Jahre beginnen aber auch seine seelischen und körperlichen Leiden. 1830 wurde er als élève in die École préparatoire aufgenommen, die spätere École normale. Die Umstände, welche seine Ausstossung aus dieser Schule herbeiführten, werden eingehend geschildert, ebenso seine Gefangennahme und das Duell, in dem er tödlich verwundet wurde. Er starb am 31. Mai 1832. M.

J. Boyer. Le mathématicien franc-comtois François Joseph Servois, ancien conservateur du musée d'artillerie, d'après des documents inédits (1767-1847). Paris: Gauthier-Villars et Fils. 26 S. 8°. (Mém. Soc. d'Émul. Doubs).

J. Scheiner. Johann Christian Doppler und das Doppler'sche Princip. Himmel und Erde. **8**. [Poske Z. **9**, 248-249.]

Der Verf. teilt nach einem Nekrolog von Strötter im Almanach der Wiener Akademie und nach Angaben von Savarik und Koristka einiges Nähere über die Lebensumstände und die Arbeiten des Begründers des „Doppler'schen Princips“ mit (geb. den 29. November 1803 in Salzburg, gest. 17. März 1853 in Wien). In Wien ausgebildet, war er 1835-1850 Lehrer in Prag, als er 1843 in den Prager Abhandlungen seinen berühmten Satz aufstellte. Von 1850 bis zu seinem Tode war er Professor der Physik an der Wiener Universität. Lp.

S. Dickstein. Hoene Wronski. Sein Leben und seine Werke. Krakau. IV + 368 S. 8°. (Polnisch.)

Nachdem der Verf. schon seit längerer Zeit einzelne Aufsätze über Hoene Wronski veröffentlicht hat, liefert er jetzt eine ausführliche Lebensbeschreibung, ausgestattet mit dem Bildnisse des polnischen, nach Frankreich übergesiedelten Mathematikers. Die mit vielen Anmerkungen versehene Liste der gedruckten Schriften (S. 248-275) umfasst 107 Nummern, von denen in der nach Gruppen aufgestellten systematischen Uebersicht (S. 276ff.) 28 der Mathematik zugerechnet sind. Lp.

S. Dickstein. Sur les découvertes mathématiques de Wronski. Bibl. Math. (2) **10**, 5-12.

Schluss der im Jahrgange 1892 der Bibl. Math. begonnenen Reihe von Notizen über Wronski's wissenschaftliche Leistungen (vergl. F. d. M. **24**, 19, 1892; **25**, 25, 1893/94). Diese letzte Notiz beschäftigt sich mit Wronski's Arbeiten über Integration von Differential- und Differenzengleichungen, „systematische“ Lösung von algebraischen Gleichungen Vertauschung von Veränderlichen, Differentialquotienten höherer Ordnungen, und zuletzt mit der Rechnung mit sogenannten „Graden und Gradulen“, einer neuen von Wronski aufgefundenen Infinitesimalrechnung, wo man $d\log y : \log y\, dx$ statt $dy : dx$ benutzt. E.

---

de Jonquières. Sur une lettre de Gauss, du mois de juin 1805. C. R. **122**, 829-830.

Der Brief ist an Delisle, Professor der Mathematik am Lyceum zu Orleans gerichtet, der sich erboten hatte, eine Uebersetzung der Disquisitiones arithmeticae herzustellen, die auch zwei Jahre später zu Paris erschienen ist. M.

---

de Jonquières. Berichtigung zweier Druckfehler in Band II von Gauss' Werken. Gött. Nachr. 1896, 365.

Die Zeilen 17 u. 18 S. 210 dieses Bandes müssen lauten:

$$5(5\cdot3)\equiv(5\cdot0)^4-2(5\cdot0)^3-6(5\cdot0)^2+2(5\cdot0)-10,$$
$$5(5\cdot4)\equiv-2(5\cdot0)^4+4(5\cdot0)^3+17(5\cdot0)^2-14(5\cdot0)-10.$$

Lp.

A. Cauchy. Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. Publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices de M. le Ministre de l'instruction publique. (1) **9**. Paris: Gauthier-Villars et Fils. IV + 510 S. 4°.

Der vorliegende Band **9** der ersten Serie, welche die in den Schriften der Pariser Akademie veröffentlichten Arbeiten bringen soll, führt den Abdruck der in den Comptes Rendus erschienenen Aufsätze, der in Bd. **4** (1884) begonnen ist, von No. 277 dieser Abhandlungen (C. R. **20**, 3. Febr. 1845) bis No. 319 (**21**, 29. Decbr. 1845) weiter; also ein starker Quartband, der noch nicht das ganze Jahr der C. R. für 1845 auszugsweise

enthält (vergl. den Bericht über Bd. **8** in F. d. M. **25**, 27, 1893/94). Von den 43 Nummern werden die meisten, nämlich 29, als zur Analysis gehörig bezeichnet, und die Nummern 300 bis 317 vom 15. Septbr. 1845 an (S. 277-505 des Bandes) beziehen sich alle auf die Theorie der Substitutionen. Nach der ersten dieser Noten ist Cauchy, der sich schon dreissig Jahre früher mit derartigen Forschungen beschäftigt hatte, damals durch eine Abhandlung von Bertrand, über welche er in No. 309 berichtet, veranlasst worden, diese Untersuchungen wieder aufzunehmen. Unter den übrigen Arbeiten, welche im gegenwärtigen Bande stehen, erwähnen wir neben einigen über die Entwickelungen von Functionen in Reihen diejenigen über die Annäherungen der Functionen von sehr grossen Zahlen, ferner eine Anzahl der Astronomie zugerechneter Aufsätze, hervorgerufen durch den Bericht Cauchy's über eine Abhandlung von Leverrier betreffs der Berechnung der Störungen des Planeten Pallas; endlich auch mehrere Arbeiten aus der Mechanik und Geometrie, sowie einen Aufsatz allgemeinen Inhalts über den Wert der mathematischen Forschung für andere Wissenschaften. Lp.

Compte rendu du bureau local du Comité Lobatchefskij. 1893-1895. Kasan. 25 S.

Die Enthüllung des Lobatschefskij-Denkmals in Kasan am 1./13. September 1896 (mit einem Bildnisse des Denkmals). Kasan. 18 S. (Russisch.) Wi.

A. W. Wassiliew. Die Bedeutung von N. I. Lobatschefskij für die Kaiserliche Universität Kasan. Rede gehalten bei der Enthüllung des Denkmals von Lobatschefskij. Kasan. 20 S. (Russisch.)

Die internationale Sammlung, welche auf die Initiative der physiko-mathematischen Gesellschaft in Kasan veranstaltet wurde zu dem Zwecke, eine Lobatschefskij-Stiftung zu gründen, hat im ganzen 9071 Rb. ergeben. Aus dieser Summe wurde ein Grundkapital des Lobatschefskij-Preises im Betrage von 6000 Rb. abgetrennt, und die übrige Summe diente mit der von der Stadt Kasan gespendeten Summe zur Errichtung eines Lobatschefskij-Denkmals in dem nach ihm benannten Garten vor dem Gebäude der Universität. Die Enthüllung dieses Denkmals fand am 13. (1.) September 1896 statt. Die zahlreichen Adressen und Telegramme, welche bei dieser Gelegenheit der Universität Kasan und ihrer physiko-mathematischen Gesellschaft übersandt wurden, zeugen von der Teilnahme, die dieses Fest in der mathematischen Welt gefunden hat. Die Rede, welche bei dieser Gelegenheit vom Prof. Wassiliew gehalten wurde, betont die Bedeutung der Arbeiten von Lobatschefskij für die Geometrie und die Philosophie und hat auch den Zweck, Lobatschefskij's Streben für die Volksaufklärung als ein Vorbild für die kommenden Generationen der Lehrer und Schüler der Universität Kasan aufzustellen. Wi.

A. Vassilief. Éloge historique de Nicolas I. Lobatchevsky, prononcé dans la séance solennelle de l'université impériale de Kasan, le 22 octobre 1893. Traduit du russe par Mlle. A. Fichtenholtz. Paris: Hermann. 40 S. 8°.

Ed. Weyr. Die Feier des hundertsten Geburtstages von N. I. Lobatschefskij an der kaiserlichen Universität in Kasan. Casopis **25**, 1-38. (Böhmisch.)

Enthält im Auszuge eine Uebersetzung der beiden Festreden, welche anlässlich der oben angeführten, am 22., 23. und 24. October 1893 an der Kasan'schen Universität veranstalteten Feier von den Professoren F. M. Suvorov und A. W. Wassiliew über Lobatschefskij als Mathematiker gehalten wurden und in der diesbezüglichen Festschrift abgedruckt sind (vergl. F. d. M. **25**, 25 ff., 1893/94. Sda.

F. Bützberger. Zum hundertsten Geburtstage Jakob Steiner's. Hoffmann Z. **27**, 161-171.

Auf einem Estrich der Bibliothek der naturforschenden Gesellschaft zu Bern wurden die verloren geglaubten Manuscripte Steiner's von Graf aufgefunden, unter ihnen das lange gesuchte Werk: „Theorie des Berührens und Schneidens der Kreise in der Ebene, der Kugeln im Raum und der Kreise auf der Kugeloberfläche in einem systematischen Entwickelungsgange dargestellt“ (1826). Der Verf. des vorliegenden Aufsatzes war mit der Ordnung und Aufstellung dieser Manuscripte betraut worden und erstattet zur hundertjährigen Wiederkehr des Geburtstages von Steiner (18. März 1796) einen Bericht über die Schüler- und Studienhefte aus den Jahren 1814 bis 1821, aus denen der Bildungsgang des grossen Geometers sich zusammensetzen lässt. Der kurze Lebenslauf Steiner's nach einem Entwurfe desselben vom 3. März 1827 wird demnächst durch eine in Vorbereitung begriffene Bearbeitung der Lehrerzeit Steiner's in Berlin (1821-1834) mehrere Berichtigungen erfahren. Lp.

J. H. Graf. Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli. Bern: K. J. Wyss. 208 S. 8°. (Aus Mitt. Naturf. Ges. Bern.)

Aus Prof. Schläfli's Nachlass werden hier 53 Briefe veröffentlicht, die aus der Zeit vom August 1848 bis Mai 1856 stammen. Es sind 22 Briefe von Steiner an Schläfli, 29 von letzterem an Steiner und zwei Briefe von Steiner an Prof. Ris in Bern. Neben verhältnismässig wenig Persönlichem enthalten die Briefe fast nur Mathematisches, gegenseitige Mitteilungen von Forschungsergebnissen und Aufforderungen zu weiteren Studien. Zur Behandlung kommen hauptsächlich die Theorie der Curven dritten und vierten Grades und der allgemeinen Raumcurven, ferner die Elimination bei Gleichungen, die Theorie der orthogonalen Flächen und manches andere. Bewundernswert ist die Fülle intensivster

Arbeit, deren Ergebnisse, freilich gar oft nur abgerissen, gegenseitig mitgeteilt werden. Tn.

JULIUS PLÜCKER's gesammelte physikalische Abhandlungen. Herausgegeben von Fr. Pockels. Leipzig: B. G. Teubner. XVIII u. 834 S. gr. 8° nebst 9 Tafeln.

Als Gegentitel führt dieser Band auch die Bezeichnung: „Julius Plücker's gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Im Auftrag der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegeben von A. Schoenflies und Fr. Pockels. In zwei Bänden. Zweiter Band. Physikalische Abhandlungen.“ Ueber den ersten Band vergleiche man S. 20-21 des vorigen Jahrgangs der F. d. M. In den zweiten Band sind die Schriften physikalischen Inhalts von Plücker aufgenommen worden, mit Ausnahme einiger kurzen Artikel, die neben ausführlichen Abhandlungen über denselben Gegenstand überflüssig schienen, oder die kein Interesse bieten. Die Arbeiten, welche sich in der ersten Zeit von Plücker's physikalischer Thätigkeit vorwiegend auf das magnetische Verhalten verschiedenartiger Körper, sodann auf die bei elektrischen Entladungen durch Geissler'sche Röhren auftretenden Lichterscheinungen bezogen, sind nach diesen beiden Gebieten in zwei grosse Gruppen zusammengefasst und innerhalb derselben gemäss der zeitlichen Folge gestellt worden. Ein dritter Abschnitt enthält die übrigen physikalischen Aufsätze über verschiedene Gegenstände in chronologischer Folge. Offenbare kleine Versehen von Plücker sind vom Herausgeber berichtigt, wo es nötig war, mit einem bezüglichen Hinweise unter dem Texte. Irrtümer in theoretischer Hinsicht sind in Anmerkungen am Schlusse des Bandes (S. 813-834) besprochen worden. Numerische Fehler bei errechneten Zahlen sind unter Beisetzung der Plücker'schen Werte corrigirt worden. Ueber die Bedeutung der physikalischen Arbeiten Plücker's hat E. Riecke S. XI-XVIII einen lesenswerten Beitrag geliefert, dessen Schluss wir hier hersetzen, weil derselbe die Rechtfertigung der Herausgabe des vorliegenden Bandes enthält:

„Von den physikalischen Arbeiten Plücker's ist eine so tiefe und so vielseitige Wirkung nicht ausgegangen, wie von seinen mathematischen. Immer aber werden sie in der Entwickelung der Wissenschaft eine bedeutende und dauernde Stelle einnehmen, und das Bild seiner wissenschaftlichen Persönlichkeit würde ohne sie ein sehr unvollständiges bleiben. In einer Zeit, in der die messende und mathematische Richtung in der Physik in Deutschland in Wilhelm Weber und Franz Neumann zwei Vertreter vom ersten Rang gefunden hatte, ist es Plücker, der, von Beobachtung zu Beobachtung eilend, das Feld der Erscheinungen in der Weise Faraday's zu erweitern sucht. In welchem Umfange ihm dies gelungen, davon legen seine Werke ein bleibendes Zeugnis ab.“

Lp.

N. REICHESBERG. Der berühmte Statistiker Quetelet. Sein Leben und sein Wirken. Bern. Zs. Schweiz. Statist. (1896). 142 S. gr. 8°.

HERMANN GRASSMANN's gesammelte mathematische und physikalische Werke. Ersten Bandes zweiter Teil: Die Ausdehnungslehre von 1862. In Gemeinschaft mit Hermann Grassmann dem Jüngeren herausgegeben von Friedrich Engel. Leipzig: B. G. Teubner. VIII u. 511 S. gr. 8°.

Bezüglich der Ausgabe der gesammelten Werke von Grassmann verweisen wir auf die Anzeige des ersten Teiles des ersten Bandes in F. d. M. **25**, 27-29, 1893/94. Der Titel der mit A_2 gewöhnlich bezeichneten Ausdehnungslehre von 1862 ist: „Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strenger Form bearbeitet von Hermann Grassmann, Professor am Gymnasium zu Stettin.“ Während an der Herausgabe der A_1 Study mitbeteiligt war, hat jetzt Grassmann's Sohn Hermann sich mit Fr. Engel in die Mühe der Arbeit geteilt. Ausser den von Engel geschriebenen Vorbemerkungen (S. V-VII) sind nach dem Abdrucke der A_2, welcher gemäss denselben philologischen Grundsätzen wie bei A_1 bewirkt ist, zu erwähnen: das Verzeichnis der wichtigsten Stellen, an denen die vorliegende Ausgabe der A_2 von dem Texte der Originalausgabe abweicht (S. 384-396); die Anmerkungen zur Ausdehnungslehre von 1862 (S. 397-495), unter ihnen als letzte die Darstellung der Grassmann'schen Untersuchungen über das Pfaff'sche Problem in der Sprache der gewöhnlichen Analysis von Fr. Engel (S. 482-495); das Sachregister zur Ausdehnungslehre von 1862 (S. 496-506) und endlich die Berichtigungen und Nachträge zum ersten Bande. Für die nahezu hundert Seiten umfassenden Anmerkungen wird der Leser den Herausgebern sehr dankbar sein. Beim Durchsehen derselben erkennt man, mit welcher Hingebung und Sachkenntnis die Ausgabe bearbeitet ist. Zum Verständnisse des Werkes werden dieselben, besonders aber mehrere grössere Ausführungen von H. Grassmann d. J., erheblich beitragen.

Lp.

K. LASSWITZ. Gustav Theodor Fechner. Stuttgart: VIII+207 S. 8°.

L. LORENZ. Oeuvres scientifiques. Revues et annotées par H. VALENTINER. Publiés aux frais de la fondation Carlsberg. Tome premier. Premier fascicule. Copenhague: Lehmann & Stage. 210 S. gr. 4°.

Die Werke des dänischen Gelehrten L. Lorenz sollen in zwei Bänden erscheinen. Der erste Band enthält die Abhandlungen aus der Theorie des Lichtes und wird in zwei Heften ausgegeben. Der zweite Band soll die übrigen physikalischen Arbeiten bringen und ausserdem die Schriften aus der reinen Mathematik. Die Ausgabe erscheint in französischer Sprache, während die Aufsätze, welche im ersten Hefte stehen, in Poggendorff's Annalen deutsch veröffentlicht sind.

Die Titel derselben lauten:

Détermination de la direction des vibrations de l'éther lumineux par la polarisation de la lumière diffractée (1-27; Pogg. Ann. **111**, 315-328, 1860).

Sur la réflexion de la lumière à la surface de séparation de deux milieux transparents et isotropes (29-57; Pogg. Ann. **111**, 460-473).

Détermination de la direction des vibrations de l'éther par la réflexion et par la réfraction de la lumière (59-84; Pogg. Ann. **114**, 238-250).

Sur la théorie de la lumière (85-136; Pogg. Ann. **118**, 111-145, 1863).

Sur la théorie de la lumière (137-170; Pogg. Ann. **121**, 579-600).

Sur l'identité des vibrations de la lumière et des courants électriques (171-210; Pogg. Ann. **131**, 243-263, 1867).

Den einzelnen Abhandlungen hat der Herausgeber eine Reihe von oft recht eingehenden Anmerkungen folgen lassen. Lp.

H. Valentiner. **Remarques sur les mémoires contenus dans le premier fascicule des „Oeuvres scientifiques" de L. Lorenz publiées aux frais de la fondation Carlsberg.** Bull. de l'Ac. Copenhague 1896, 440-445.

Was Valentiner in den zerstreuten Noten, die er den einzelnen Abhandlungen der von ihm besorgten Ausgabe der Werke von Lorenz hinzugefügt hat, ausführlich begründet, fasst er hier in einem kurzen Aufsatze zusammen. Trotz aller Kritik kommt er jedoch zu dem Schlusse: „Wie dem auch sei, so werden nach meiner Ansicht die Lorenz'schen fundamentalen Gleichungen ihren Wert behalten; er hat nämlich vollständig bewiesen, dass man zweckmässig die Theorie der Molecularkräfte, die ganz hypothetisch sind, durch die einfachere Theorie von der Form und Lagerung der Molekeln ersetzen kann." Lp.

S. Kowalewska. **Jugenderinnerungen. Aus dem Russischen von Louise Flachs-Fokschaneanu.** Berlin: S. Fischer. VIII + 205 S. 8°.

G. B. Airy. **Autobiography of Sir George Biddle Airy, honorary fellow of Trinity College, Cambridge, astronomer royal from 1836 to 1881. Edited by W. Airy. With portrait.** Cambridge: University Press. XII + 414 S. 8°.

John Couch Adams. **The scientific papers of J. C. A. Vol. I. Edited by William Grylls Adams; with a memoir by J. W. L. Glaisher.** Cambridge: University Press. LIV + 502 S. 4°.

Dieser Band enthält alle Originalarbeiten, welche Adams († 1892) zu seinen Lebzeiten veröffentlicht hat; dieselben bestehen aus 50 astronomischen Aufsätzen und 11 Artikeln über die reine Mathematik. Der Band enthält auch eine Abhandlung aus der Feder von Glaisher und ein Bildnis von Adams aus seiner späteren Lebenszeit. In der Vorrede wird angegeben, dass eine Menge nicht veröffentlichter Arbeiten in unfertigem Zustande über die Legendre'schen und Laplace'schen Coefficienten, sowie über den Erdmagnetismus sich im Nachlasse befinden, und

es wird die Hoffnung ausgesprochen, dass ein beträchtlicher Teil dieser Arbeiten binnen kurzem in eine für die Veröffentlichung geeignete Gestalt gebracht werden wird, so dass eine Fortsetzung der gesammelten Schriften zu erhoffen ist. Gbs. (Lp.)

K. A. Andreiew, P. A. Nekrassow und N. E. Joukowsky. Das Leben und die wissenschaftliche Thätigkeit von W. G. Imschenetzky. Mosk. Math. Samml. **18**, 347-467. (Russisch.)

W. G. Imschenetzky, geboren am 16. (4.) Januar 1832, hat seine mathematische Bildung auf der Universität Kasan erhalten und wurde dort im Jahre 1865 Docent der reinen Mathematik. Im Jahre 1868 zum Professor ernannt, blieb er in Kasan bis 1871, in welchem Jahre er in Charkow die Professur der Mechanik übernahm. Im Jahre 1882 erfolgte seine Wahl zum ordentlichen Akademiker der kaiserlichen Akademie von St. Petersburg. W. G. Imschenetzky starb am 5. Juni (26. Mai) 1892. Die anziehende Persönlichkeit und das edle geistige Wesen von Imschenetzky sind in der interessanten und mit Wärme geschriebenen Biographie von Andreiew gezeichnet. Nekrassow und Joukowsky geben die Würdigung seiner Arbeiten auf den Gebieten der reinen Mathematik und der Mechanik. Seine beiden klassischen Monographien über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung wurden von Houël ins Französische übersetzt und im „Archiv der Mathematik und Physik“ (Bde. **50** und **54**) veröffentlicht; ausserdem ist seine Monographie über die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung als Anhang in Maser's Ausgabe der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung von Mansion veröffentlicht. Die anderen Arbeiten von Imschenetzky, deren vollständige Liste 44 Nummern umfasst, bezogen sich auf verschiedene Zweige der reinen Mathematik und Mechanik. (Bernoulli'sche Functionen, geometrische Darstellung der elliptischen Functionen, die Auffindung der rationalen Integrale der linearen Differentialgleichungen, Bertrand's Aufgabe über die Bestimmung der Kraft, unter deren Wirkung ein Punkt einen Kegelschnitt beschreibt u. s. w.) Wi.

H. H. Turner. A. C. Pritchard, late Savilian professor of astronomy in the university of Oxford. Memoirs of his life, with an account of his astronomical work. London. 380 S. 8°.

H. Hertz. Miscellaneous papers. With an introduction by P. Lenard. Authorized English translation by D. E. Jones and G. A. Schott. London and New York: Macmillan. XVI + 340 S. 8°.

P. Mansion. Notice sur les travaux mathématiques de Eugène-Charles Catalan. Sep. aus Annuaire de l'Ac. de Belg. 62 S. 8°.

Die mit dem Bildnisse Catalan's (30. Mai 1814 — 14. Februar 1894) geschmückte Schrift ist in ihren ersten zehn Abschnitten eine

Ueberarbeitung der Festrede, welche Mansion 1884 hielt, als Catalan seinen Lehrstuhl in Lüttich aufgab und ihm zu Ehren eine Feier veranstaltet wurde (vgl. F. d. M. **17**, 21, 1885). Abschnitt XI (S. 48-50) berichtet über dieses Fest, Abschnitt XII (S. 51-57) bespricht die mathematischen Arbeiten Catalan's aus seinen letzten zehn Lebensjahren. Ein Epilog (S. 57-60) lässt sich über den Wert aller Arbeiten des verstorbenen bedeutenden Mathematikers, sowie über die liebenswürdigen Eigenschaften des heimgegangenen Menschen aus, der das Glück hatte, an der Seite einer geliebten Gattin, deren drei Tage vor seinem Heimgange erfolgten Tod man ihm verheimlichte, ein langes arbeitsvolles und befriedigtes Dasein zu vollenden. Lp.

E. Kusch. **C. G. J. Jacobi und Helmholtz auf dem Gymnasium. Beitrag zur Geschichte des Victoria-Gymnasiums.** Pr. (No. 83) Victoria-Gymn. Potsdam. 43 S. 8°; Hoffmann Z. **27**, 623-626.

Ein pietätvolles Erinnerungsblatt an die beiden grossen Gelehrten, welche ihre Vorbildung auf dem Victoria-Gymnasium zu Potsdam genossen. Jacobi verliess die Anstalt nach $4^1/_2$ jährigem Besuche Ostern 1821 mit dem Zeugnis der Reife, Helmholtz war von Ostern 1830 bis Michaelis 1838 Schüler des Gymnasiums. Bei beiden regte schon in früher Jugend der Genius die Schwingen, und beide lenkten frühzeitig die Augen ihrer Lehrer und Mitschüler auf sich. Die in vorliegender Schrift mit grossem Fleisse aus verstaubten Akten gesammelten Erinnerungen enthalten viele interessante Einzelheiten. Unter anderem wird nachgewiesen, dass das harte Urteil, welches Lejeune Dirichlet über den mathematischen Lehrer Jacobi's, Heinrich Bauer, gefällt hat, durchaus ungerecht ist. Ein Blick auf das mathematische Pensum der Prima vom Jahre 1819 macht es sogar wahrscheinlich, dass Jacobi durch den Unterricht in der Schule auf seine Untersuchungen über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades geführt worden ist. M.

A. P. Grusintzew. **Hermann von Helmholtz in seinen letzten Werken.** Chark. Ges. (2) **5**, 16-59.

Bericht über die Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen und über die elektromagnetische Theorie der Dispersion des Lichtes, welche von Helmholtz in den Jahren 1892-93 gegeben wurden. Wi.

J. S. Epstein. **Hermann von Helmholtz als Mensch und Gelehrter.** Deutsche Verlags-Anstalt. 92 S. 8°. (Aus „Deutsche Revue“.)

Ed. Weyr. **P. L. Tschebyscheff.** Časopis **25**, 38-41. (Böhmisch.)

Die mit Zustimmung des Autors, Prof. A. W. Wassiljew, verfasste wortgetreue Uebersetzung seines, in dem Kasan'schen Boten vom 29. December 1894 über den heimgegangenen grossen Mathematiker Tschebyscheff veröffentlichten Aufsatzes. Sda.

A. Cayley. Collected mathematical papers. Vol. **11, 12, 13.** Cambridge: University Press. XVI + 643 S. (1896), XVI + 656 S. (1897), XVI + 560 S. (1897).

Mit Ausnahme des für das ganze Werk noch anzufertigenden Registers ist die Veröffentlichung der Cayley'schen Schriften mit der Erscheinung dieser von Forsyth herausgegebenen drei Bände abgeschlossen. Der elfte Band enthält 93 Aufsätze unter den Nummern 706 bis 798, grösstenteils aus den Jahren 1878 bis 1883 (mit Ausnahme einer Reihe von Artikeln für die Encyclopaedia Britannica zwischen den Jahren 1878 und 1888). Als Titelblatt ist eine von A. G. Dew-Smith aus dem Trinity College herrührende Reproduction einer Photographie Cayley's beigegeben, welche jener im Jahre 1885 angefertigt hat. Band **12** besteht aus 89 Abhandlungen unter den Nummern 799 bis 887, hauptsächlich aus den Jahren 1883 bis 1889; der Band **13** endlich enthält 80 Abhandlungen unter den Nummern 888 bis 967, meistenteils aus den Jahren 1889 bis zu dem Todesjahre 1895.

Lp.

---

de Bernardières. Notice sur la vie et les travaux du contre-amiral Fleuriais. Annuaire Bur. Long. 1896. C. 17 S.

Georges Fleuriais, geboren 1840 in Paris, auf der École Navale gebildet, activer Soldat im östreichischen Kriege 1859, ebenso im mexikanischen, kehrte als Marineoffizier 1865 nach Frankreich zurück und widmete sich nun wissenschaftlichen Studien; machte auf einer Reise um die Welt 1867-70 sehr genaue Ortsbestimmungen, für welche Arbeiten er das Offizierkreuz der Ehrenlegion erhielt. Von da an war er an allen Kämpfen seines Vaterlandes beteiligt und stieg 1892 bis zum Range eines Contre-Admirals; er starb am 3. Juni 1895. Seine wissenschaftlichen Arbeiten betreffen hauptsächlich Aufgaben der Schiffahrt. Doch war er auch Leiter der Expeditionen zur Beobachtung des Venusdurchganges 1874 zu Peking, 1882 zu Santa-Cruz in Patagonien. Die Akademie in Paris zeichnete ihn zweimal durch Erteilung des Lalande-Preises aus.

Lp.

W. E. Plummer. Obituary notice of Dr. John Russell Hind, F. R. S. Nature **53,** 201-202.

Ursprünglich Ingenieur, wurde Hind der meteorologischen und magnetischen Abteilung der königlichen Sternwarte 1840 überwiesen und wurde 1853 Leiter des Nautical Almanac. Gestorben 25. October 1895.

Lp.

F. Tisserand. Notice sur les travaux de M. Hind. C. R. **122,** 17-18.

Ueber die astronomischen Entdeckungen des kürzlich verstorbenen Gelehrten, der seit 1851 correspondirendes Mitglied der Pariser Akademie war.

M.

H. GYLDÉN. Hans Masal. Vierteljahrschr. Astr. Ges. **31**, 163-167.

Geb. 20. October 1866 zu Meran, studirte in Berlin, Stockholm und München, gest. 24. Mai 1895 in Felsberg bei Darmstadt. Als Schüler Gyldén's bildete er dessen Methoden in der Störungstheorie selbständig weiter und hat darüber mehrere Arbeiten veröffentlicht.

Lp.

M. KRAUSE. Gustav Ferdinand Mehler †. Hoffmann Z. **27**, 392-395.

Geb. 13. December 1835 in Schönlanke, besuchte 1847-1852 das Gymnasium zu Bromberg, studirte in Breslau und Berlin, war Mitglied des Schellbach'schen Seminars vom 1. April 1858 an, Lehrer am Gymnasium zu Fraustadt seit Ostern 1859, an der Realschule St. Johann in Danzig Ostern 1863, in Elbing seit Michael 1868 am Gymnasium, zum doctor honoris causa von Breslau 1868 ernannt, gest. 13. Juli 1895. Der Aufsatz giebt eine Würdigung der Veröffentlichungen und am Schlusse die Liste der wissenschaftlichen Arbeiten. Lp.

A. WANGERIN. F. E. Neumann. Leopoldina **32**, 51-54, 63-66.

Bearbeitung des Nekrologs aus dem Jahresbericht **4** der Deutschen Mathematiker-Vereinigung; vergl. F. d. M. **26**, 37, 1895. Lp.

G. GERLAND. Ernst Ludwig August v. Rebeur-Paschwitz. Leopoldina **32**, 14-17.

E. v. Rebeur Paschwitz, geb. 9. August 1861 zu Frankfurt a. O., studirte in Leipzig, Genf und Berlin bis 1883, war Assistent der Sternwarte in Karlsruhe 1884-1887, besuchte als Lungenkranker 1888 Görbersdorf, habilitirte sich 1889 in Halle, ging 1889-91 nach Teneriffa, arbeitete trotz vieler Krankheiten am Horizontalpendel und starb am 1. October 1895 in Merseburg. Die Liste seiner Schriften umfasst 26 Nummern.

Lp.

J. H. GRAF. Ludwig Schläfli (1814 bis 1895). Mit dem Portrait und dem Facsimile Schläfli's. Bern: K. J. Wyss. 86 S. 8°; Berner Mitt. 1896, 120-203.

In Bezug auf die Daten über das Leben Schläfli's vergleiche man den Bericht in F. d. M. **26**, 39, 1895. Die vorliegende Schrift aus der Feder des Schülers und Nachfolgers Schläfli's an der Universität zu Bern trägt auf dem Titel noch den Zusatz: „Zum Andenken an die Errichtung des Grabmonumentes Schläfli's und an die Beisetzung der sterblichen Reste Jakob Steiner's anlässlich der hundertjährigen Feier des Geburtstages des Letzteren am 18. März 1896.“ Der Verf. zeichnet zuerst ein sympathisches Lebensbild, berichtet dann über den Briefwechsel Schläfli's unter alphabetischer Aufzählung der Correspondenten (S. 30 bis 36), fügt den Nachruf Brioschi's im Abdruck hinzu, über den im Vorjahre berichtet ist, giebt unter 70 Nummern die Liste der gedruckten Schriften (S. 40-45), unter 303 Nummern das Verzeichnis der nachge-

lassenen Manuscripte mathematischen Inhalts (S. 46-59), endlich 4 + 50 Titel von Manuscripten naturwissenschaftlichen, sowie theologisch-sprachlichen Inhaltes. In einem Anhange werden S. 62-86 die von Schläfli gehaltenen Vorlesungen (1847-1891) aufgeführt, daneben dann auch noch die übrigen an der Hochschule zu Bern während dieser Zeit von anderen Lehrern gelesenen mathematischen Collegien. Lp.

E. Lampe. Nachruf für Professor Dr. Julius Worpitzky. Hoffmann Z. **27**, 153-156.

Abdruck aus den Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin; vergl. F. d. M. **26**, 40, 1895.

E. Stracciati. Adolfo Bartoli. Nuovo Cimento (4) **4**, 211-224.

Nekrolog dieses Physikers und Verzeichnis seiner Werke. Adolfo Bartoli wurde am 19. März 1851 geboren, war seit 1874 Professor der Physik am Ateneo zu Bologna, am technischen Institut zu Arezzo, an der Universität zu Sassari, am Istituto tecnico zu Florenz, an der Universität zu Catania und seit 1893 an der Universität zu Pavia. Hier starb er unerwartet am 18. Juli 1896. Seine Arbeiten betreffen insbesondere die Optik, Elektricität, Wärmelehre und Elektrochemie. M.

Dr. T. Nekrolog Brockmann. Hoffmann Z. **27**, 395-397.

Geb. 21. März 1836 in Münster i. W., studirte in Münster und Berlin, der Reihe nach Lehrer in Münster, Essen, Cleve (1867-1885), lebte dann pensionirt, gest. am 8. Mai 1896; war litterarisch thätig auf dem Gebiete der Schulmathematik. Lp.

Obituary notice of Charles Chambers. Nature **53**, 516, 561.

Geb. in Leeds (Yorkshire) 30. Mai 1834, von 1865 bis 1885 Leiter der Staatssternwarte in Bombay, dann Director der Colàba Sternwarte daselbst bis zu seinem Tode 1896. Lp.

Professor Dr. Moritz Wilhelm Drobisch †. Hoffmann Z. **27**, 626-631.

Geb. 16. August 1802, gest. 30. September 1896, 72 Jahre Lehrer der Universität zu Leipzig, von 1827 an ordentlicher Professor der Mathematik, seit 1842 Inhaber des Lehrstuhls für systematische Philosophie, hielt bis in die sechziger Jahre hinein mathematische Vorlesungen; seine Hauptthätigkeit liegt auf dem Gebiete der Philosophie und Pädagogik. Lp.

M. Heinze. Gedächtnisrede auf M. W. Drobisch. Leipz. Ber. **48**, 1896, 695-719.

Die Verdienste des „alten Drobisch" (1802-96), der während 72 Jahren der Leipziger Universität angehörte, fast 70 Jahre als ordentlicher Professor, werden hier gewürdigt, wenn auch nicht eingehend;

besondere Erwähnung erfahren seine Beziehungen zu Herbart. Leider werden Drobisch's Verdienste um die Geschichte der Mathematik nicht erwähnt. Tn.

A. Gray. Armand Hippolyte Louis Fizeau. Nature **54,** 523-524.

A. Cornu. Discours prononcé aux funérailles de M. Hippolyte Fizeau. Annuaire du Bur. des Long. 1897. G. 4 S.

Geb. 1819, gest. 18. September 1896; allgemein bekannt durch seine optischen Arbeiten. Vergl. auch Leopoldina **32,** 182. Lp.

P. Mansion et J. Neuberg. J. Graindorge. Mathesis (2) **6,** 48.

Geboren zu Lüttich am 9. August 1843, ist Graindorge ebenda als Professor der Universität (seit 1876) am 23. Januar 1896 gestorben. Man verdankt ihm eine Abhandlung über die Integration der partiellen Differentialgleichungen der beiden ersten Ordnungen (1872) und eine Arbeit über die Integration der Differentialgleichungen der Dynamik (1871, zweite Auflage 1890). Mn. (Lp.)

O. Callandreau. Notice sur M. Hugo Gyldén. C. R. **123,** 771-772.

H. Gyldén wurde am 29. Mai 1841 zu Helsingfors geboren und starb am 9. November 1896 als Astronom der königlich schwedischen Akademie und Director des Observatoriums zu Stockholm. Seine wissenschaftlichen Untersuchungen betrafen hauptsächlich die Theorie der Störungen. Von seinem Hauptwerke Traité des orbites absolues des huit planètes principales ist bis jetzt nur der erste Band erschienen; die beiden anderen Bände sind in Vorbereitung. (Vergl. Nature **55,** 158.) M.

H. Kreutz. Carl Nicolaus Adalbert Krueger. Vierteljahrschr. Astr. Ges. **31,** 167-175.

Obituary notice of Dr. Adalbert Krüger. Nature **54,** 14.

Geb. 3. December 1832 zu Marienburg in Westpreussen, auf den Gymnasien zu Elbing und Wittenberg vorgebildet, studirte Krueger in Berlin und Bonn, promovirte 1854 bei Argelander, nachdem er schon 1853 zweiter Gehülfe der Bonner Sternwarte geworden war, wurde erster Assistent 1859, Privatdocent 1860, ordentlicher Professor und Director der Sternwarte zu Helsingfors 1862, Director der Sternwarte in Gotha 1876, in Kiel 1880, gest. 21. April 1896. Aus dem englischen Nekrolog führen wir die Stelle über seine Thätigkeit als Herausgeber der Astronomischen Nachrichten an. „In dem Masse wie der Drang der Beobachter mit ihrer Zahl im Laufe der Zeit zugenommen hat, erkannte Krueger die Notwendigkeit von schleunigeren Mitteln der Kundgebung, und indem er seinen mannigfachen Pflichten die der Verwaltung des Bureau central des dépêches astronomiques hinzufügte, hat er noch weitere Ansprüche auf unsere Dankbarkeit wegen der Leichtigkeit und Sicherheit

erworben, mit welchen astronomische Nachrichten über die ganze Erde geschickt und für diejenigen nutzbar gemacht werden, welche das von ihm ersonnene System benutzen. . . . Seine Laufbahn wird durch eine Thatkraft und einen Fleiss gekennzeichnet, auf die Schiller's Worte angewandt werden dürfen: Beschäftigung, die nie ermattet, die langsam wirkt, doch nie zerstört." Lp.

E. Millosevich. Aurelio Lugli †. Periodico di Mat. **11**, 77-80.

Kurze Biographie von Aurelio Lugli. Geboren zu Modena am 6. December 1853, studirte er auf der Universität seiner Vaterstadt und auf der Scuola normale von Pisa, promovirte 1876 und war dann Lehrer zuerst in Pisa, Catanzaro und Rom (seit 1877), zuletzt Professor am R. Istituto tecnico Leonardo da Vinci, ausserdem seit 1879 Assistent im Centralamt für Meteorologie. Seit der Gründung des Periodico di Mat. von dem Leiter Besso in die Redaction dieser Zeitschrift aufgenommen, war er seit dem Abgange Besso's der alleinige Herausgeber, bis er plötzlich nach kurzem Krankenlager am 27. Mai 1896 starb. Die Liste seiner Veröffentlichungen weist 13 Schriften aus der elementaren Mathematik, 7 aus der Meteorologie auf. Lp.

Dr. Bernhard Minnigerode †. Hoffmann Z. **27**, 631.

Geb. 1837 in Darmstadt, Privatdocent in Göttingen 1866, ausserordentlicher Professor ebenda 1874, 1885 ordentlicher Professor in Greifswald, gest. 1896, den 15. August. Vergl. Leopoldina **32**, 143-144. Lp.

A. W. Phillips. Hubert Anson Newton. American M. S. Bull. **3**, 169-173.

W. E. P. Obituary notice of Hubert A. Newton. Nature **54**, 394.

Geb. zu Sherburne, N. Y., 19. März 1830, gest. zu New Haven 12. August 1896. Im Alter von 23 Jahren bereits Hülfslehrer am Yale College, wo er vorgebildet war, studirte er noch ein Jahr in Paris unter Chasles, wurde dann 1855 Professor der Mathematik zu Yale, hatte später ausserdem die Stellung eines Sekretärs der Yale Sternwarte und damit thatsächlich die Leitung derselben. Seine erste Veröffentlichung über das Gyroskop datirt von 1857; bald nachher erschien von ihm eine geometrische Abhandlung, in welcher er dem Anscheine nach zuerst das Princip der reciproken Radien auf das Apollonische Berührungsproblem angewandt hat. In den folgenden Jahren auf geometrischem Gebiete thätig, wandte er sich danach mit Vorliebe den astronomischen Beobachtungen zu. Das grösste Verdienst erwarb er sich um die Theorie der Meteorsteine, Sternschnuppen und Kometen, wo sich seine Arbeiten mit denen von Schiaparelli begegneten. Bei seinem Tode war er Vicepräsident der Amerikanischen mathematischen Gesellschaft. Lp.

H. Künssberg. Zum Andenken an Ludwig Ofterdinger. Bibl. Math. (2) **10**, 50-52.

Biographische Notiz über Ofterdinger (1810-1896), mit Verzeichnis seiner mathematisch-historischen Abhandlungen und Würdigung seiner Verdienste um die Geschichte der griechischen Mathematik. E.

Maurice Lévy. Notice sur Amé-Henry Resal. C. R. **123**, 435-440; Journ. de Math. (5) **2**, 455-460.

Mit A.-H. Resal ist einer der tüchtigsten Pfleger der angewandten und der reinen Mathematik dahingeschieden und zugleich der fruchtbarste Schüler Poncelet's. Resal wurde 1853 Ingénieur des Mines zu Besançon, 1855 Professor an der Facultät daselbst; hier erschien seine Cinématique pure, 1865 sein Traité de Mécanique céleste. 1872 wurde Resal Professor der analytischen Mechanik an der Polytechnischen Schule, zugleich begann er seinen Traité de Mécanique générale, 1873 wurde er Mitglied der Académie des Sciences. 1888 erschien sein Traité de Physique mathématique; bei der Bearbeitung der zweiten Auflage seiner Mécanique générale überraschte ihn der Tod, am 22. August 1896. M.

C. Jordan. Henry Resal. Journ. de Math. (5) **2**, 453.

In der kurzen Note wird der Hingebung gedacht, mit welcher Henry Resal von 1875 bis 1885 die Redaction des Liouville'schen Journals geführt hat. M.

C. Cailler. Henri Resal (1828-1896). Rev. gén. des sc. **7**, 893-894.

W. E. P. François Félix Tisserand. Nature **54**, 628.

Geb. 13. Januar 1845, gest. 20. October 1896 als Director der Pariser Sternwarte. Hauptwerk: Traité de mécanique céleste in vier Bänden. Vergl. Leopoldina **32**, 184-185. Lp.

A. Cornu. Félix Tisserand. C. R. **123**, 623-625.

Mitteilung von dem am 20. October 1896 erfolgten Tode des Directors des Observatoriums zu Paris, Félix Tisserand. M.

H. Poincaré. La vie et les travaux de F. Tisserand. Rev. gén. des sc. **7**, 1230-1233.

H. H. G.-A. Obituary notice of General J. T. Walker. Nature **53**, 469-470.

Geb. 1826, dem britischen Ingenieur-Corps zugeteilt 1844, gehörte der Abteilung für das Vermessungswesen in Indien an seit 1852, Leiter desselben von 1861 bis 1883; als solcher veröffentlichte er die ersten neun Bände des zwanzigbändigen Werkes: Account of the operations of the great trigonometrical survey of India. Gest. 16. Februar 1896. Lp.



Zur Erinnerung an Dr. Christian Wiener. Karlsruhe. 24 S.

Die dem Andenken des liebenswürdigen und allseitig verehrten Karlsruher Gelehrten gewidmete anonyme Schrift schildert kurz seinen Lebenslauf. Geb. 7. December 1826 zu Darmstadt, studirte er in Giessen, wurde 1848 Lehrer in Darmstadt, habilitirte sich 1851 in Giessen, wurde 1852 als Professor nach Karlsruhe berufen und starb in dieser Stellung nach 44 Jahren am 31. Juli 1896. Der Aufsatz zeichnet seine wissenschaftliche Bedeutung als Mathematiker, Physiker und Philosoph. Die Liste der von ihm veröffentlichten Arbeiten auf S. 15-24 ist eingeteilt in A. Mathematik (Mechanik, synthetische Geometrie, Darstellende Geometrie, Modelle, Geometria situs, Flächentheorie, Geodäsie, Transformationstheorie, Analysis); B. Physik (Molecularphysik, Lichttheorie, Meteorologie); C. Philosophie; D. Verschiedenes. Vergl. auch Leopoldina **32**, 136-137.

Lp.

A. Gray. Lord Kelvin. Nature **54**, 151-152.

A. Gray. Lord Kelvin's jubilee. Nature **54**, 173-181, 199.

Der erste Artikel lenkt die Aufmerksamkeit auf die Feier zu Ehren des fünfzigjährigen Jubiläums Lord Kelvin's als Professor der Physik in Glasgow, der zweite beschreibt das stattgefundene Fest. Lp.

E. H. Moore, O. Bolza, H. Maschke, H. S. White. Mathematical papers read at the international mathematical congress held in connection with the world's Columbian exposition, Chicago, 1893. Edited by the committee of the congress. New York: The Macmillan Company. XVI + 411 S. [American M. S. Bull. **2**, 327-329.].

Der Band ist der Redaction nicht zugegangen. Einzelne der Beisteuernden haben jedoch Sonderabzüge ihrer Aufsätze eingesandt; über diese ist nach Massgabe des Einlieferungstermins schon in früheren Jahrgängen des Jahrbuchs unter dem Namen der Verfasser berichtet worden. Ueber die sonstigen Beiträge konnten Referate nicht beschafft werden.

Lp.

F. Rudio. Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Unter Mitwirkung der Herren A. Heim, A. Lang, herausgegeben von F. Rudio. Einundvierzigster Jahrgang. 1896. Jubelband. Erster Teil. Zürich: Fäsi & Beer. X + 273 S. gr. 8°.

Der Band trägt auch den zweiten Titel: „Festschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 1746-1896. Den Teilnehmern der in Zürich vom 2. bis 5. August 1896 tagenden 79. Jahresversammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft gewidmet.“ Der erste Teil, über den wir hier berichten, bringt eine Geschichte der Gesellschaft, der zweite besteht aus 35 wissenschaftlichen Abhandlungen, die von Mitgliedern verfasst sind und, soweit sie mathematischen Inhalt haben, an geeigneter Stelle des Jahrbuchs besprochen werden. Die Ausstattung des

mit Bildnissen geschmückten Werkes ist eine dem festlichen Zwecke entsprechende. Auf den reichen Inhalt des ersten Bandes können wir nicht gut eingehen, weil zu viele Einzelheiten erwähnt werden müssten. Ein sehr sorgfältig gearbeitetes alphabetisches Namenregister lässt jede im Buche genannte Person leicht finden, und die mit grossem Fleisse gesammelten Nachrichten über die hervorragenderen Mitglieder der Gesellschaft können dem Geschichtsschreiber ungemein nützlich sein. Lp.

Die Feier des fünfundzwanzigjährigen Jubiläums der Moskauer Mathematischen Gesellschaft. Mosk. Math. Samml. **18,** I-XLII. (Russisch.)

Im Jahre 1867 gegründet, ist die Moskauer Mathematische Gesellschaft die älteste und bedeutendste unter ihren russischen Schwestern. Besonders grosse Dienste hat sie der russischen Wissenschaft durch die Herausgabe der Zeitschrift „Mathematische Sammlung“ (Mathematitscheskoi Sbornik) geleistet, von der bis 1898 neunzehn Bände erschienen sind, und die wegen ihrer streng wissenschaftlichen Haltung mit den besten mathematischen Zeitschriften den Vergleich nicht zu scheuen braucht. Danach ist es begreiflich, dass die Feier des fünfundzwanzigjährigen Bestehens der Gesellschaft am 9. (21.) Januar 1894 während der neunten Versammlung der russischen Naturforscher und Aerzte eine sympathische Teilnahme bei allen russischen Universitäten und Hochschulen hervorgerufen hat, wie die dem Artikel beigegebenen zahlreichen Adressen und Telegramme bezeugen. Ausserdem steht in dem Aufsatze die einleitende Rede des Vorsitzenden der Gesellschaft N. W. Bugaiew und der Vortrag von Joukowsky: „Ueber die geometrische Interpretation in der theoretischen Mechanik“. Wi.

R. Bettazzi. Bollettino dell'Associazione Mathesis fra gli insegnanti di matematica delle scuole medie. Periodico di Mat. **11,** 161-172, 198-204.

Unter dem Namen „Mathesis“ hat sich in Italien eine Gesellschaft von Mittelschullehrern zur Förderung des mathematischen Unterrichts gebildet. Die beiden ersten Nummern der Gesellschaftsschrift sind im Periodico di Mat. als Teile desselben erschienen; im folgenden Jahre (1897) sind die Nummern III und IV dagegen selbständig ausgegeben. Die dem Berichtsjahre angehörenden Nummern geben Nachrichten über die Entstehung der Gesellschaft, ihre Satzungen und dergleichen mehr. Lp.

Il Pitagora. Giornale di Matematica per gli alunni delle Scuole secondarie. Anno **2,** Avellino.

Diese kleine Zeitschrift hat unter der thätigen Leitung von Prof. Fazzari fortgefahren, ihr bescheidenes, aber nützliches Programm zu verwirklichen, das bei der Gründung aufgestellt wurde (vgl. F. d. M. **26,** 44, 1895). Der **2.** Band enthält, ausser einem Résumé der Kapitel über

die ionische und die Pythagoreische Schule aus dem Werke des Ref. über „Le scienze esatte nell' antica Grecia", historische Aufsätze über die Numeration und die Mathematik der Lateiner, über den Gnomon, den Abacus, die Salaminische Tafel, die alte Metrologie und die nicht-euklidische Geometrie, wie auch einen über den sogenannten Kravatteknoten, wo Prof. de Luca-Emma bemerkt, dass mit dieser Frage sich zuerst Urbano d'Aviso beschäftigte in seinem „Trattato sulla sfera", gedruckt in Rom 1682. Neue Paradoxen (besitzen sie wirklich didaktische Nützlichkeit?) und neue (vorgeschlagene oder aufgelöste) Aufgaben schmücken den Band, zu dem die Professoren Brambilla, Amaldi, Murer, u. s. w. auch wissenschaftliche Beiträge gaben, indem sie neue oder alte Fragen unter neuen Gesichtspunkten behandelten. La.

G. Eneström. Note bibliographique sur les femmes dans les sciences exactes. Bibl. Math. (2) **10**, 73-76.

Enthält eine Anzahl von Zusätzen und Berichtigungen zum Artikel von G. Valentin: „Die Frauen in den exacten Wissenschaften" (Bibl. Math. 1895, 65-76; F. d. M. **25**, 4, 1895). Erwähnt sind Schriften von oder über 24 Frauen, von welchen etwa die Hälfte im Aufsatze von Valentin nicht genannt ist. E.

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

H. G. Zeuthen. Om den historiske Udvikling af Mathematiken som exakt Videnskab indtil Udgangen af det 18de Aarhundrede. Kjöbenhavn 1896. 90 S. (Festschrift der Universität bei Gelegenheit des Geburtstages seiner Majestät des Königs.)

Ueber die geschichtliche Entwickelung der Mathematik als exacte Wissenschaft bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts. Diese Schrift enthält in populärer und sehr übersichtlicher Darstellung die Anschauungen Zeuthen's über die geschichtliche Entwickelung der Mathematik, indem namentlich gezeigt wird, in welcher Weise wechselseitig die Bestrebungen, Neues zu erfinden, und die Bestrebungen, das schon Gefundene auf absolut sicherer Grundlage festzustellen, immer neue Fortschritte der Mathematik hervorgerufen haben. V.

G. Vailati. Sull' importanza delle ricerche relative alla storia delle scienze. Torino: R. Frassati e Co. 22 S. 8°.

Der Verf. giebt hier die Einführung zu einem Lehrgang über die Geschichte der Mechanik, durch Beispiele belegte Ansichten über die Wichtigkeit geschichtlicher Betrachtung der Wissenschaftsentwickelung. Tn.

W. Hellmann. Ueber die Anfänge des mathematischen Unterrichts an den Erfurter evangelischen Schulen im 16. und 17. Jahrhundert und bis etwa 1774. II. Pr. (No. 275) Realsch. Erfurt. 16 S. 4°.

Der erste Teil hatte vorzugsweise den Rechenunterricht bis 1660 behandelt. Jetzt kommen die fortwährend wechselnden, meist geringwertigen Gestaltungen des mathematischen Unterrichts während des 17. und 18. Jahrhunderts zur Darstellung, mehrfach klargestellt durch Benutzung von Akten des Erfurter Ratsarchivs. Interessant sind die Seitenblicke auf die zähe Lebensdauer des Ptolemäischen Systems und der Astrologie. Tn.

F. Lindemann. Zur Geschichte der Polyeder und der Zahlzeichen. Münch. Ber. **26**, 1896, 625-758.

Hier wird erneut die Aufmerksamkeit hingelenkt auf die 29 bekannten alten bronzenen halbregelmässigen Körper, die fast alle nicht aus dem griechisch-römischen, sondern, wie es scheint, aus dem keltischen Kulturgebiet (aus der sogenannten La Tène-Zeit) stammen. Die mathematisch-geschichtliche Betrachtung behandelt die Formen als solche und die auf ihnen sich findenden Zeichen, wohl Zahlzeichen. Durch weitausholende Betrachtungen über die Zusammenhänge europäischer, insbesondere römisch-etruskischer mit morgenländischer Kultur werden die Zahlzeichen der Bronzekörper einerseits mit den römischen und mit denen der Boetiushandschrift, andererseits mit den ägyptischen und den babylonischen in Verbindung gebracht und gedeutet. Hierbei ergiebt sich dem Verf. auch das, dass Pythagoras nicht selbst das Ikosaeder und das Dodekaeder aufgefunden, sondern dass er diese und das Pentagrammzeichen durch die Gallier kennen gelernt habe, und dass er sich wahrscheinlich bei seinen Rechnungen ägyptischer Ziffern bedient habe. Tn.

H. v. Jacobs. Das Volk der „Sieben-Zähler". Rückschlüsse aus der Form der „Arabischen Ziffern" auf ihre Herkunft. Berlin. V + 45 S. gr. 8°.

Aubry. Essai historique sur la théorie des équations. J. de Math. spéc. (4) **5**, 222-224, 254-259.

Fortsetzung zu Bd. **3** und **4** derselben Zeitschrift (vgl. F. d. M. **25**, 75, 1893/94 und **26**, 49, 1895). Die beiden hier hinzugefügten Noten sind betitelt: V. Ueber eine von Moivre häufig benutzte Beziehung (betreffs der Zerlegung von $x^{2m}-2x^m\cos\varphi+1$ in reelle trinomische Factoren zweiten Grades). VI. Auflösung der Gleichung mit Hülfe recurrirender Reihen (Euler, Lagrange, Fourier). Lp.

M. Curtze. Ueber die sogenannte Regel Ta Yen in Europa. Schlömilch Z. **41**, Hl. A. 81-82.

Enthält den Nachweis, dass die Ta-yen-Regel der Chinesen auch dem Leonardo von Pisa bekannt war (opp. I, 304, Z. 6-29); ob er sie den Arabern oder Früheren entlehnte, muss vorerst unentschieden bleiben. Tn.

Chrn. Frdr. Müller. Henricus Grammateus und sein Algorismus de integris. Pr. Zwickau. Gebr. Thost. 33 S. gr. 4°.

G. Wertheim. Die Arithmetik des Elia Misrachi. 2. verb. Aufl. Braunschweig: F. Vieweg u. Sohn. 68 S. 8°.

Vgl. F. d. M. **25**, 58, 1893/94. Die Zusätze der 2. Auflage sind im wesentlichen beigefügte mathematische Erläuterungen. Tn.

G. Brambilla. Saggio di storia della ragioneria presso i popoli antichi. Milano: Boriglione. 50 S. 8°.

V. Bobynin. Esquisse de l'histoire du calcul fractionnaire. Bibl. Math. (2) **10**, 97-101.

Bobynin unterscheidet drei Entwickelungsstufen der Bruchrechnung. Zuerst kannte man die Brüche nur als Grössen, deren Mass niedrigerer Ordnung als das der gewöhnlichen Grössen war, also concrete Brüche; später erhielt man hieraus durch Abstraction Stammbrüche, und zuletzt erfand man Brüche, deren Zähler grösser als die Einheit war. E.

W. W. Bobynin. Die ursprüngliche Entwickelung der Operationen mit den Zahlen. Phys.-math. Wiss. **8**, 97-110. (Russisch.)

V. V. Bobynin. Extraction des racines carrées dans la Grèce antique. Schlömilch Z. **41**, Hl. A. 193-211.

Die viel behandelte Aufgabe erfährt hier eine neue Behandlung. Diese schliesst sich streng an die Benutzung der Gnomon-Betrachtung an und unterscheidet die beiden Fälle, dass die immer weiteren Annäherungen an den richtigen Wert stets durch Addition oder stets durch Subtraction von neu gefundenen Ergänzungen gefunden werden; ein wichtiges Moment bietet eine gewisse Freiheit in der Wahl von Hülfszahlen. Die vom Verf. errechneten Werte stimmen genau mit der Ueberlieferung. Tn.

Mathieu. Méthodes de division en usage à la fin du siècle dernier. J. de Math. élém. (4) **5**, 97-101.

Aus dem Werke L'Arithmétique en sa perfection, par F. Le Gendre, Limoges 1781, werden die verschiedenen Methoden für die Division einer mehrziffrigen ganzen Zahl durch eine andere mitgeteilt, unterschieden als französisches, spanisches, italienisches Verfahren; das heutige „Ergänzungsverfahren" wird mit jenen Methoden am Schlusse verglichen. Lp.

E. Netto. Ueber die arithmetisch-algebraischen Tendenzen Leopold Kronecker's. Chicago Congress Math. papers. 243-252.

Die wissenschaftliche Grundüberzeugung Kronecker's, die Ziel und Richtung seiner Arbeiten bestimmte, ist, dass Algebra und Analysis sich „arithmetisiren", d. h. ausschliesslich auf den Begriff der positiven ganzen Zahlen begründen lassen müssen. Die negativen, gebrochenen, imaginären, irrationalen Zahlen entfernt er aus der Algebra, indem er die Gleichungen durch Congruenzen nach einem Modul oder einem Modulsystem ersetzt. Auf diese Weise sucht er die algebraischen Sätze in Form von Identitäten darzustellen, in diesem Streben noch unterstützt durch die ausgiebige Verwendung unbestimmter Grössen. Das Wesen der Existenz reeller Wurzeln einer algebraischen Gleichung besteht in dem Vorhandensein gewisser Intervalle, in denen die Function nur einmal ihr Vorzeichen wechselt. Ihm genügen nicht Definitionen, die eine nur logische Evidenz besitzen; er stellt vielmehr die Forderung, dass sich in jedem einzelnen Falle durch eine endliche Anzahl ausführbarer Operationen entscheiden lassen muss, ob der definirte Begriff zutrifft oder nicht. Namentlich in seinen letzten Lebensjahren hat er als Ziel nicht nur der Mathematik, sondern jeder wissenschaftlichen Forschung die Aufgabe hingestellt, Aequivalenzen aufzusuchen und ihre Invarianten zu ermitteln. F.

Fr. Meyer. Ueber den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie. Polnische Uebersetzung von S. Dickstein. Prace mat. fiz. **7**, 15-41.

Uebersetzung der Einleitung und des ersten Teils der in F. d. M. **24**, 45, 1892 angezeigten Schrift. Dn.

Fr. Meyer. Rapport sur les progrès de la théorie des invariants projectifs. Deuxième partie (suite et fin). Darboux Bull. (2) **20**, 139-151.

Fr. Meyer. Rapporto sullo stato presente della teoria degli invarianti (continuazione). Batt. G. **34**, 290-353.

Kewitsch. Die Basis der Bürgi'schen Logarithmen ist e, der Neper'schen $1/e$. Ein Mahnruf an die Mathematiker. Hoffmann Z. **27**, 321-333.

Kewitsch. Bemerkungen zu meinem Aufsatze: Die Basis der Bürgi'schen und Neper'schen Logarithmen, nebst einigem anderen. Ebenda 577-579.

In dem zweiten Artikel erkennt der Verf. die Priorität der von ihm vertretenen Ansicht der Programmabhandlung von Koppe aus dem Jahre 1893 zu (F. d. M. **25**, 122, 1893/94). Nach der hübschen Anzeige, die P. Tannery in Darboux Bull. (2), **20**, 81-85 von der 1895 bei

Hermann in Paris erschienenen phototypischen Nachbildung der Mirifici logarithmorum canonis descriptio von Neper gegeben hat, ist der genaue Sachverhalt, der sich mit der Kewitsch'schen Behauptung nicht ganz deckt, u. a. schon 1835 von Biot im Journal des Savants richtig dargestellt worden. Besonders ist betont, dass man es unterlassen soll, die Ausdrücke hyperbolischer oder natürlicher Logarithmus und Neper'scher Logarithmus als gleichbedeutend zu gebrauchen. Lp.

J. Cohn. Geschichte des Unendlichkeitsproblems im abendländischen Denken bis Kant. Leipzig. VII + 261 S. 8°.

E. Tischer. Ueber die Begründung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz. Pr. (No. 551) Nicolaigymn. Leipzig. 46 S. 4°.

Nach einem Rückblick auf die höhere Mathematik der Alten, insbesondere auf die Art und die Begründung der Exhaustionsverfahren von Euklid und Archimed (bis S. 12) geht der Verf. über zu einer kritischen Betrachtung zunächst von Newton's Fundamentirung der Infinitesimalrechnung. Er findet sie unklar, schwankend, also unzulänglich; dagegen schreibt er der Leibniz'schen Grundlegung, die später ausführlich besprochen werden soll, grössere Klarheit zu und stellt sie hoch über die Newton'sche Gedankenfolge. Gleichwohl glaubt der Verf. Newton gegen schiefe Beurteilungen durch Weissenborn und Cantor in Schutz nehmen zu müssen. Tn.

G. Loria. Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche. Seconda edizione accresciuta ed interamente rifatta. Torino: Carlo Clausen. XX + 346 S. gr. 8°.

Die erste Auflage dieser Schrift aus dem Jahre 1887 (F. d. M. **19**, 29, 1887) umfasste 52 Quartseiten, die vorliegende neue 346 Seiten; es ist also klar, dass die letztere „vermehrt und gänzlich umgearbeitet" ist. Der Verf. setzt trotzdem in der Einleitung das Vorwort der ersten Auflage an die Spitze, und wir können nichts Besseres in dieser Anzeige thun, als dieselben Worte hier wiederholen: „Die Fortschritte der Wissenschaft im allgemeinen und der Mathematik im besonderen waren in letzter Zeit so beträchtlich, sie folgen sich stetig noch weiter in so schneller und unaufhaltsamer Weise, dass das Bedürfnis sich lebhaft fühlbar macht, auf den schon zurückgelegten Weg einen Rückblick zu werfen, der den Neulingen es ermöglicht, leichter in ihre Mysterien einzudringen, den Vorgeschrittenen aber, mit grösserer Sicherheit zu beurteilen, welcher Art die Probleme sind, deren Lösung dringlicher ist. Der Wunsch, dieses Bedürfnis betreffs der Geometrie zu befriedigen, wenigstens in allem, was den höheren Teil unserer positiven Kenntnisse angeht, da, wie Pascal sagt, tout ce qui passe la géométrie, nous surpasse, bewog mich diese historische Monographie zu schreiben. Möge diese unvollständige Skizze eine ihres Zweckes würdige Schrift veranlassen; möge diese

dürftige Chronik eine Vorläuferin der Geschichte der Geometrie unseres Jahrhunderts sein!" Von einer dürftigen Chronik angesichts des gegenwärtigen Bandes zu sprechen, dürfte jetzt der Thatsache nicht entsprechen. Mit ungewöhnlichem Fleisse und grosser Umsicht ist die Litteratur der einzelnen Zweige, in welche die Geometrie zerlegt ist, zusammengetragen. Und obschon es richtig ist, was manche Kritiken hervorgehoben haben, dass gewisse wichtige Arbeiten nicht angeführt sind, die Citate zuweilen der Genauigkeit ermangeln, so ist der Reichtum des Gebotenen so gross, dass jeder, der das Werk zu Rate zieht, viel Belehrung durch dasselbe erhält. Die Titel der einzelnen Kapitel lauten: I. Rückblick auf den Ursprung und die Entwickelung der Geometrie bis gegen 1850. II. Theorie der ebenen algebraischen Curven. III. Theorie der algebraischen Oberflächen. IV. Theorie der algebraischen Curven doppelter Krümmung. V. Differentialgeometrie. VI. Untersuchungen über die Gestalt der Curven, der Oberflächen und anderer geometrischer Gebilde. Analysis situs. Configurationen. VII. Liniengeometrie im Raume. VIII. Verwandtschaften, Abbildungen, Transformationen. IX. Abzählende Geometrie. X. Nichteuklidische Geometrie. XI. Geometrie der Räume mit beliebig vielen Dimensionen. XII. Nachwort. — Alphabetisches Namenverzeichnis. In jedem Kapitel werden die Grundbegriffe in knapper Form gegeben, und dann wird die bezügliche Bibliographie unter Beigebung erläuternder Bemerkungen hinzugefügt. Die Abgrenzung des Stoffes wird im Nachworte gerechtfertigt, wo die nicht berücksichtigten Zweige, wie die vectorielle Geometrie, die kinematische Geometrie, kurz in ihren Hauptvertretern erwähnt werden. Lp.

P. Stäckel. **Ein Brief von Gauss an Gerling.** Gött. Nachr. 1896, 40-43.

Der hier veröffentlichte Brief von Gauss an Gerling mit dem Poststempel vom 3. Februar 1844 ist von Interesse für die Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. Er zeigt u. a., dass Gauss im Besitze aller, auch der russisch geschriebenen Abhandlungen Lobatschewskij's über imaginäre Geometrie gewesen ist. M.

J. Bolyai. **The science absolute of space, independent of the truth or falsity of Euclid's axiom XI (which can never be decided a priori). Translated from the Latin by G. B. Halsted. 4th edition.** Austin. Halsted. XXX + 72 S. 12mo.

F. Klein. **L'oeuvre géométrique de Sophus Lie.** Nouv. Ann. (3) **15**, 1-20.

Uebersetzt aus dem Evanston Colloquium; vergl. F. d. M. **25**, 52-53, 1893/94.

Aubry. **Notice historique sur la géométrie de la mesure.** J. de Math. élém. (4) **5**, 173-176, 201-204, 227-231, 248-251, 271-277.

Die Einleitung construirt ziemlich willkürlich den Ursprung der geo-

metrischen Forschung. Die Geometrie des Masses, soweit sie der Verf. bespricht, ist nach ihm zuerst nach der Methode der Exhaustion, darauf nach derjenigen der Indivisibilia behandelt worden. Die vorliegende Reihe von Artikeln, welche im nächsten Jahrgange fortgesetzt wird, bezieht sich auf das erst genannte Verfahren und setzt dasselbe in seinem Vorkommen bei Eudoxus und Euklid, sowie bei Archimed auseinander. Lp.

H. G. Zeuthen. Die geometrische Construction als „Existenzbeweis" in der antiken Geometrie. Math. Ann. **47**, 222-228.

Am berühmten 11. euklidischen Axiom und an der Benutzungsart der Kegelschnitte wird dargethan, dass „die Construction mit dem dazu gehörigen Beweis für ihre Richtigkeit dazu diente, die Existenz dessen, was construirt werden sollte, sicher zu stellen." Tn.

Epaphroditus et Vitruvius. Traités d'arpentage et de géométrie. Nouveau texte, publié d'après le manuscrit latin 13084 de la bibliothèque royale de Munich par V. Mortet. Avec introduction par P. Tannery. Paris: Gauthier-Villars et Fils. IV + 44 S. 4°.

M. Kutta. Geometrie mit constanter Zirkelöffnung im Altertum. Bibl. Math. (2) **10**, 16.

M. Cantor hat in seinen „Vorlesungen" aus einer Stelle des Pappus geschlossen, dass schon die Griechen die Geometrie mit fester Zirkelöffnung kannten; aber Kutta zeigt, dass die betreffende Stelle sich wahrscheinlich auf eine Art von Abtragung einer constanten Strecke, etwa wie bei der Konchoide, bezieht. E.

Ambros Sturm. Das delische Problem. Pr. k. k. Ober-Gymn. der Benedictiner zu Seitenstetten. I. 1895, II. 1896, III. 1897.

I. Behandlung des Problems in der Platonischen Zeit. II. Behandlung des Problems in der Alexandrinischen Zeit. III. Behandlung des Problems bei den Indern, Arabern und den christlichen Völkern des Abendlandes bis Descartes und Newton. Ausführliches Referat im nächsten Bande. M.

H. Adam. Calcul de Mons. DesCartes ou Introduction à sa Géométrie. Darboux Bull. (2) **20**, 221-248.

Descartes erwähnt in seinem Briefwechsel wiederholt ein mit seiner Zustimmung verfasstes Werk, das zur Einführung in seine „Geometrie" von 1637 diene. Dieses Werk fand sich handschriftlich in Hannover und wird hier abgedruckt. Die nötigen geschichtlichen Erläuterungen sind beigefügt. Tn.

D. Kikuchi. Ajima's method of finding the length of an arc of a circle. Tokio Math. Ges. **7**, 114-117.

Fortsetzung der Mitteilungen aus der Geschichte der Mathematik in Japan; s. F. d. M. **26**, 55 u. 56, 1895. Naomaru Ajima blühte in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts; er war der erste japanische Mathematiker, welcher die Methode der Ordinaten einführte. Seine Berechnung der Länge eines Kreisbogens beruht ebenfalls (l. c. 55) auf der Methode der eingeschriebenen Rechtecke. Er findet

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \cdots = F(1, 1, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}).$$

M.

D. Kikuchi. **Sul metodo dell'antica scuola giapponnese per determinare l'area del cerchio.** Periodico di Mat. **11**, 23-25.

Uebersetzt aus Tokio Math. Ges. **7**, vergl. F. d. M. **26**, 55, 1895.

A. Schülke. **Zur Decimalteilung des Winkels.** Hoffmann Z. **27**, 339-344.

Zur Verteidigung der Decimalteilung des Winkels, die der Verf. in einem Vortrage (F. d. M. **26**, 99, 1895) empfohlen, in seiner vierstelligen Tafel durchgeführt hat, giebt er hier eine kurze historische Uebersicht über die Sexagesimalrechnung und den in neuester Zeit allmählich ausgeführten Uebergang zur Decimalteilung. Lp.

A. von Braunmühl. **Beitrag zur Geschichte der prosthaphäretischen Methode in der Trigonometrie.** Bibl. Math. (2) **10**, 105-108.

Bekanntlich diente die prosthaphäretische Methode dazu, die Multiplication zweier Zahlen durch Addition zu ersetzen, und als Erfinder derselben hat man gewöhnlich Paul Wittich (um 1580) angegeben. A. v. Braunmühl bemerkt, dass eine Spur dieser Methode sich bereits bei Ibn Junis († 1008) findet, und zeigt, dass sie schon am Anfange des 16. Jahrhunderts von Johannes Werner verwendet wurde. E.

V. Schlegel. **Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren.** Schlömilch Z. **41**, Hl. A. 1-21, 41-59.

Erst fünfzig Jahre nach dem Erscheinen von Hermann Grassmann's Ausdehnungslehre (Leipzig, 1844) beschloss die Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, eine Gesamtausgabe der mathematischen und physikalischen Werke Grassmann's zu veranstalten. Jetzt dürfte auch eine zusammenfassende und orientirende Uebersicht über die Entwickelung und Ausbreitung der Ausdehnungslehre, wie sie V. Schlegel im Vorliegenden darbietet, den Mathematikern willkommen sein. Die Ausdehnungslehre ist ein consequent ausgebildetes System von Rechnungsoperationen, welches allen auf Geometrie und Mechanik bezüglichen Untersuchungen die einfachste, weil naturgemässe, analytische Grundlage liefert. Sie hat sich, besonders in den letzten 25 Jahren als mächtiger

Hebel der Forschung erwiesen und nach verschiedenen Richtungen hin anregend und befruchtend gewirkt. Die Entwickelung der Grassmann'schen Methoden und ihr Zusammenhang mit den verschiedensten Zweigen der reinen und angewandten Mathematik wird hier von berufenster Feder dargestellt und durch gewissenhafte Litteraturangaben erläutert. M.

V. SCHLEGEL. Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren. Ins Polnische übersetzt von S. Dickstein. Warschau 1896. 51 S. 8⁰.

E. VIGARIÉ. La bibliographie de la géométrie du triangle. Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24,** 50-63; Mathesis, Suppl. III.

Als Ergänzung und Fortsetzung der von Lemoine 1885 und von ihm selbst 1889 gegebenen Verzeichnisse der Schriften zur Dreiecksgeometrie liefert der Verf. zuerst Nachträge zu den früheren Verzeichnissen A vor 1873, B von 1873 bis 1889, endlich neu für jedes der Jahre von 1889 bis 1895. Durch Vergleichung der Titel dieser letzten Jahre mit den im Jahrbuch berücksichtigten Aufsätzen konnte Referent sehr viele Lücken entdecken. Offenbar hat der Verf. das Jahrbuch nicht zu Rate gezogen. Im übrigen kann man ja über die in dieses Verzeichnis aufzunehmenden Schriften verschiedener Ansicht sein, weil der Begriff der Dreiecksgeometrie kein scharf begrenzter ist. Neben den aufgeführten Arbeiten mussten jedoch noch manche andere eingestellt werden. Lp.

R. T. GLAZEBROOK. James Clerk Maxwell and modern physics. London: Cassell. VI + 224 S. 8⁰.

E. GOLDBECK. Kepler's Lehre von der Gravitation. Ein Beitrag zur Geschichte der mechanischen Weltanschauung. Halle: M. Niemeyer. 52 S. 8⁰. Abhandlungen zur Philosophie und ihrer Geschichte. Hrsg. von B. Erdmann. Heft 6. [Poske Zs. **9,** 195-196.]

Nach der Anzeige in Poske's Zs. ist bei Kepler die Vorstellung von der anziehenden Kraft der Erde auf den Mond, des Mondes auf die Oceane bei der Erzeugung der Gezeiten, der Sonne auf die Planeten vorhanden, ja sogar Gedanken über die Abhängigkeit der von den Körpern ausgehenden Anziehungskräfte mit der Entfernung (das Gesetz $1/r$ wird vorgezogen). Lp.

M. CURTZE. Ein Beitrag zur Geschichte der Physik im 14. Jahrhundert. Bibl. Math. (2) **10,** 43-49.

Curtze veröffentlicht hier einen kleinen Aufsatz aus dem 14. Jahrhundert, der im Cod. Dresd. Db. 86 sich befindet und „De insidentibus aquae" betitelt ist. Der Aufsatz behandelt die Weise, nach welcher man unter Zuhülfenahme des specifischen Gewichtes ermitteln kann, wie viel

von verschiedenen Substanzen in einer aus denselben gemischten Masse sich befindet; er enthält zehn Sätze, von welchen jedoch die zwei letzten dem Fragmente „De gravi et levi“ Euklid's angehören und mit den übrigen keinen unmittelbaren Zusammenhang haben. E.

D. J. Korteweg. **Descartes et les manuscrits de Snellius d'après quelques documents nouveaux.** Rev. de métaphys. **4**, 13 S.; Nieuw Archief (2) **3**, 57-71.

Diese Documente beziehen sich auf die Entdeckung des Gesetzes der Refraction des Lichtes. Zur betreffenden Frage vergleiche man den Artikel von P. Kramer, Schlömilch Z. **27**, Suppl. p. 235, 1882, und P. van Geer, Notice sur la vie et les travaux de Willebrord Snellius, Arch. Néerl. **18**, 1883. Ein Teil der Documente wurde von Korteweg bereits 1887 in den Verslagen en mededeelingen der K. Ac. van Wet. Afd. Nat. Deel (3) **4**, und in den Archives Néerl. **22**[3] veröffentlicht. Hauptsächlich auf das Zeugnis von Chr. Huygens stützen sich die Zweifel an der Originalität der Entdeckung Descartes'. Der Verf. gelangt durch sorgfältige Prüfung des vorliegenden Materials zur Aufstellung der Thesen: 1) Vor der von Golius im Jahre 1632 gemachten Entdeckung des Snellius'schen Manuscriptes waren die Snellius'schen Arbeiten über das Brechungsgesetz, oder wenigstens das von ihm daraus abgeleitete Resultat, einigen Personen unbekannt, welche in der besten Lage zur Kenntnisnahme sich befanden. 2) Das Brechungsgesetz war diesen selben Personen lange vor der Auffindung des Snellius'schen Manuscriptes bekannt. Sie schrieben es dem Descartes zu. 3) Descartes hat von der Entdeckung der Snellius'schen Manuscripte vor der Veröffentlichung seiner „Dioptrik“ Kenntnis gehabt. M.

N. Jadanza. **Per la storia del cannocchiale.** Torino Mem. (2) **46**, 253-280.

Der Verf. will zeigen (S. 277), dass die Fernröhre, mit denen Huygens seine Saturnentdeckungen machte, in theoretischer Beziehung nichts Neues waren, dass Huygens weder zuerst noch allein mit planconvexen Linsen arbeitete, dass Campani zuerst die Thatsache des Achromatismus im Dreilinsen-Ocular beobachtete, und dass das negative Ocular das von Huygens heissen sollte, getrennt von dem, das den Namen Campani's zu tragen hat. Auch habe Huygens zuerst Diaphragmen verwendet. Tn.

W. LeConte Stevens. **Recent progress in optics.** Nature **53**, 233-238.

Rede vor der American Association for the advancement of science zu Springfield im August 1895. Die einzelnen Teile des Vortrags behandeln: die Lichtwellen als Normalmasse für die Länge, Phosphorescenz, Phosphorescenz und Photographie, stehende Lichtwellen, farbige Photographie, das ultra-rote Spectrum, das sichtbare Spectrum, polarisirtes Licht, die physiologische Optik. Lp.

M. Curtze. Ueber die im Mittelalter zur Feldmessung benutzten Instrumente. Bibl. Math. (2) **10,** 65-72.

Enthält eine ausführliche Beschreibung und Vergleichung der drei im Mittelalter zur Feldmessung benutzten Instrumente: Astrolabium, Quadrans, Quadratum geometricum. Curtze hebt hervor, dass das Astrolabium und das Quadratum geometricum auf demselben Principe beruhen, dass aber das dritte Instrument principiell von den beiden anderen verschieden ist, ungefähr wie das Copernicanische Weltsystem von dem Ptolemäischen. Zuletzt giebt Curtze einige historische Notizen über die Ausdrücke „umbra recta“ (Cotangens) und „umbra versa“ (Tangens). E.

H. Suter. Nochmals der Jakobsstab. Bibl. Math. (2) **10,** 13-15.

In der Bibl. Math. 1895, S. 13-18 (vgl. F. d. M. **26,** 67-68, 1895), stellte Suter als wahrscheinlich hin, dass der sog. Stab des Tusi mit dem Jakobsstab identisch sei. Inzwischen hat Carra de Vaux in dem „Journal asiatique“ einen Aufsatz veröffentlicht, aus welchem erhellt, dass diese Vermutung nicht richtig war. Es zeigt sich nämlich, dass der Stab des Tusi eine ganz andere Einrichtung wie der Jakobsstab hatte. E.

O. Zanotti Bianco. Per la storia della teoria delle superficie geoidiche. Torino Atti **31,** 1022-1038.

Nach einem Rückblick auf die Geschichte des Geoid-Begriffes wird gezeigt, dass der von Helmert (1885) nach Bruns (1878) benannte Satz über den Abstand eines Geoidpunktes vom zugeordneten Sphäroid gleichen Potentials schon von Pratt, dem Diakon von Calcutta, aufgestellt wurde (1859), dass er also der „Satz von Pratt“ oder wenigstens „von Pratt und Bruns“ heissen müsste. Tn.

G. W. Hill. Remarks on the progress of celestial mechanics since the middle of the century. American M. S. Bull. **2,** 125-136.

Die Rede, welche der Verf. als Vorsitzender der amerikanischen mathematischen Gesellschaft in der letzten Decembersitzung des Jahres 1895 gehalten hat, erörtert die Fortschritte der Himmelsmechanik durch die Arbeiten von Delaunay, Gyldén und Poincaré. Lp.

K. Zelbr. Das Problem der kürzesten Dämmerung. Schlömilch Z. **41,** Hl. A. 121-145, 153-179.

Giebt eine geschichtliche Studie über das mit der Entwickelungsgeschichte der Mathematik in Zusammenhang stehende Problem: es werden hier behandelt die Lösungen von Nonius (1542), Joh. Bernoulli (1693 und Davies 1833), l'Hôpital (1696), Kies (1752), Lambert (1760), Euler (1765), d'Alembert (1782), v. Fuss (1784), d'Arrest (1857), Delambre (1814-20), Monge (1806), Liagre (1857) und

ihrer Nachfolger. Die Lösungsmethoden sind geometrische (auch darstellend-geometrische) und analytische (sowie rein trigonometrische).
Tn.

W. von Boole. Arithmometer von P. Tschebyschew. Moskau. Phys. Sect. **7**, 12-22. (Russisch.)

W. von Boole. Die Rechenmaschinen der russischen Erfinder. Moskau. Phys. Sect. **8**, 33-38.

Die Artikel enthalten die Beschreibungen der Rechenmaschine von Tschebyschew, deren einziges Exemplar sich im Conservatoire des arts et métiers in Paris befindet, und der Maschinen für das Rechnen, die von Kummer (im Jahre 1847) und Bouniakofsky (1867) erfunden sind. Wi.

Weitere Litteratur.

Abu Hamid Al-Gazzali. Abhandlung (astronomischen und philosophischen Inhalts). Hebräischer und arabischer Text, mit deutscher Uebersetzung und Erklärungen. 2 Teile. Frankfurt a. M.

G. Albert. Die Platonische Zahl und einige Conjecturen zu Platon sowie zu Lukrez. Wien. 8°.

Aratus. A literal translation of the astronomy and meteorology of Aratus, with some bibliographical remarks, by C. L. Prince. Lewes. 4° (1895).

W. Brennand. Hindu astronomy. London. XIV + 329 S. 8°.

G. M. Columba. Eratostene e la misura del meridiano terrestre. Palermo: Clausen. 72 S. 8°.

R. Sewell and S. B. Dikshit. The Indian calendar, with tables for the conversion of Hindu and Muhammadan into A. D. dates, and vice versâ. With tables of eclipses, visible in India, by Dr. R. Schram, of Vienna. London: Swan Sonnenschein and Co. XII + 169 + CXXXVI S. [Nature **54**, 219-220.]

Capitel 2.
Philosophie und Pädagogik.

A. Philosophie.

K. Gimler. Der Festpunkt des Denkens. Lissa i. P.: F. Ebbecke. 22 S. 8°.

Aus willkürlich gewählten Ausgängen entwickelt Gimler einen zwischen idealistischer und realistischer Färbung schwankenden, dem Fechner'schen ähnlichen Pantheismus: Nicht nur Menschen, Tiere und Pflanzen, sondern auch die Erde mit dem Monde, das Planetensystem, das Sonnensystem sind Lebewesen, und da das Gesamtbild des Bestehenden im Denkenden zu suchen

ist, so ist das sich selbst gleiche, unveränderliche, allgegenwärtige Lebewesen das Bewusstsein, das, insofern es die Einzelwesen zugleich trennt und verbindet, Gleichgewicht ist. Weil nun die notwendig existirende Grundwahrheit das Bewusstsein ist, der Begriff der Lebewesen als Bewusstseinswert ein rein mathematischer ist, es nichts als Lebewesen giebt, und wir nur die Verhältnisse, in denen diese zu einander stehen, ermitteln können, so ist die Anordnung der Lebewesen der Festpunkt des Denkens. Mi.

E. v. Schmidt. Zum Begriff und Sitz der Seele. Freiburg i. Br. 35 S. 8°.

Die Seele ist die den Organismus entwickelnde und beherrschende Lebenskraft, also ererbtes Lebensbedürfnis. Ihr Sitz ist an der hinteren Spitze des verlängerten Marks oder an der oberen Grenze des Uebergangsstücks zum Rückenmark in grosser Nähe des Flourens'schen nœud vital. In zwei Anhängen tritt v. Schmidt für den Gedanken Giordano Bruno's, dass der Sternenhimmel in systematischer Gliederung unendlich sei, und für die Beweisbarkeit des 11. Axioms Euklid's ein. Die von ihm gegebene Erklärung von Parallelen als Geraden, die, „wenn auch von verschiedenen Punkten aus, gleiche Richtung haben", dürfte unhaltbar sein, da der vorausgehende Satz: „Wenn zwei gerade Linien eine dritte gerade unter gleichen Winkeln schneiden, so sind sie zu derselben gleich gerichtet, müssen also überhaupt, wenn auch von verschiedenen Punkten aus, gleiche Richtung haben", als Lehrsatz nicht bewiesen, als Definition aber ein Missbrauch des Begriffes „Gleich" ist. Von gleichen Richtungen kann ohne Beweis füglich nur bei zusammenfallenden Geraden gesprochen werden. Mi.

J. Unbehaun. Versuch einer philosophischen Selectionstheorie. Jena: G. Fischer. 150 S. 8°.

Unbehaun versucht, Darwin's und Spencer's Gedankenkreise verbindend, die für die evolutionistische Philosophie wichtige Frage zu beantworten, wie Vervollkommnung durch Selection, welche von den entstehenden Formen nur die existenzfähigen und zweckmässigen erhält, die übrigen vernichtet, erreicht werden kann. Er ergänzt die vorhandene naturwissenschaftliche durch eine abstracte philosophische Theorie, die einer mathematischen Formulirung fähig ist, und zeigt, welche Geltung diese Theorie in der organischen Natur besitzt. Mi.

W. Wundt. Ueber naiven und kritischen Realismus. Wundt Philos. Studien. 12, 307-408.

In dem Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik können wir über diesen interessanten Artikel nicht eingehend berichten, sondern wollen nur auf die Berührungspunkte hinweisen, welche sich in ihm mit der mathematischen Denkweise vorfinden. „Als Realismus gilt die unverfälschte, durch keinerlei Vorurteile und willkürliche Constructionen

getrübte Erkenntnis der in der Erfahrungswelt enthaltenen concreten Wirklichkeit." „Der naive Realismus soll nur der Ausgangspunkt sein, von dem aus man allmählich zu einem nicht bloss das naive Gemüt, sondern auch die gereifte Reflexion befriedigenden kritischen Realismus gelangen möchte."

Erster Artikel. Einleitung. I. Die immanente Philosophie. 1. Allgemeiner Standpunkt. 2. Immanenz und Transcendenz. *a.* Doppelte Bedeutung der Transcendenz. *b.* Die Transcendenz des Objectes und der naive Realismus. *c.* Das Argument von der Verdoppelung der Objecte. *d.* Der Begriff der Wahrheit. *e.* Der angebliche Dualismus der positiven Wissenschaften. 3. Die Lehre von der Subjectivität der Empfindungen. *a.* Der Standpunkt der immanenten Philosophie. *b.* Der naturwissenschaftliche Standpunkt. *c.* Geschichtliche Zeugnisse für die Anschauungen des naiven Realismus. *d.* Die naturwissenschaftliche Erkenntnis seit Galilei. *e.* Die materialistische Hypothese. *f.* Die Anschauungsformen und der Empfindungsinhalt. 4. Subject und Object. *a.* Der empirische Beweis für eine objective Wirklichkeit. *b.* Die logische Begründung der objectiven Wirklichkeit. *c.* Die immanente Philosophie und der Berkeley'sche Idealismus. 5. Aprioristische Elemente der immanenten Erkenntnistheorie. *a.* Aprioristische Elemente der Begriffslehre. *b.* Die Apriorität des Ich. 6. Identität und Causalität. 7. Die Aussenwelt als Bewusstseinsinhalt. 8. Psychologie und Naturwissenschaft. Lp.

G. Loria. **Matematica. Articolo estratto dal Dizionario illustrato di Pedagogia, diretto da A. Martinazzoli e L. Credaro.** Mantova: G. Mondovi. Sonderdr. 31 S. kl. 8°.

Nach der Erklärung des Wortes „Mathematik" erwähnt der Verf. ältere und neuere Versuche, die mathematischen Disciplinen zu systematisiren. Es folgt eine kurze historische Skizze, in der die Hauptvertreter der Mathematik von den ältesten Zeiten bis in die Gegenwart genannt werden. Alsdann spricht der Verf. über die Bedeutung der mathematischen Wissenschaften für die Kultur und wendet sich dann dem mathematischen Unterrichte zu. Nach einer Skizzirung dieses Unterrichts in Italien, auf den Gymnasien, in den Lyceen, in den technischen Schulen und auf den Universitäten, werden Vorschläge zu notwendigen Reformen gemacht. U. a. verlangt der Verf. auf der Universität Vorlesungen über mathematische Didaktik, einen kritischen Cursus über die mathematischen Principien und Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. M.

H. Scheffler. **Das Wesen der Mathematik und der Aufbau der Welterkenntnis auf mathematischer Grundlage.** Braunschweig: Friedr. Wagner's Hofbuchhdl. 8°.

Erster Teil: Die Mathematik. VIII u. 409 S. (1895).

Zweiter Teil: Das Weltsystem. VIII u. 462 S. (1896).

H. Scheffler. **Die Grundfesten der Welt. Als Anhang: Selbstkritik.** Braunschweig: Friedr. Wagner's Hofbuchhdl. VI + 258 S. 8°.

Bei der Anzeige des Werkes: „Die Aequivalenz der Naturkräfte und das Energiegesetz als Weltgesetz“ von demselben Verf. (F. d. M. **25**, 1536, 1893/94) hatte sich Ref. einer grossen Zurückhaltung befleissigt, weil das in dem Buche sich kund gebende ernste Ringen eines greisen Gelehrten nach Klarheit über irdische und ausserirdische Dinge ihm Achtung abnötigte und die rührende Widmung an die verstorbene Tochter das Gemüt des Lesers bewegte. Trotzdem wurde die Unzulänglichkeit des entwickelten Systems und der äusserliche Schematismus in der Behandlung nach der Fünfteilung aller Gebiete hervorgehoben, die Isolirung des Verf. auf einem selbstgewählten Standpunkte als Grund mancher paradoxen Ansichten angeführt. Wie den „Beiträgen zur Theorie der Gleichungen“ und den „Beiträgen zur Zahlentheorie“ von demselben Verf. im Jahrbuche (Bd. **23**, 74, 1891) Mangel an wissenschaftlicher Strenge und Gründlichkeit vorgeworfen ist, so kann man auch gegen die vorliegenden Werke gleichen Tadel aussprechen. Der Verf. lebt in seiner Gedankenwelt und fordert, dass alle übrigen Gelehrten sich ihm anbequemen sollen. So erklärt er den Satz für falsch, dass eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades genau n, also nicht mehr als n Wurzeln habe. Dieser Satz beruhe auf einem Irrtum, welcher einer schwachen Stunde unseres grossen Mathematikers Gauss sein Dasein verdanke. Da aber ausser den complexen Grössen auch noch die polyplexen Grössen des Verf. existirten, so sei durch jenen Satz die Gleichung fälschlich auf zweidimensionale Gebilde eingeschränkt worden. Dieses eine Beispiel genügt wohl. Obgleich also der Wert der Schriften in Frage steht, will Ref. den Pflichten eines Berichterstatters nachkommen und für denjenigen, welcher die Bücher nicht einsieht, mit den Worten des Verf. in der Selbstkritik (S. 257-258 des letzten Werkes) den Inhalt angeben.

„Im ersten Teile (des ersten Werkes) habe ich das System der Mathematik nach den dabei in Betracht kommenden Reichen und Gebieten und nach den diesen Reichen und Gebieten zukommenden Grundeigenschaften, Grundprocessen, Grundprincipien, Apobasen und Grundsätzen mit thunlichster Vollständigkeit entwickelt, um, gestützt auf die hierdurch gewonnenen Grundlagen, im zweiten Teile die Erkenntnis des Natur- und des allgemeinen Weltsystems aufzubauen und die Einheitlichkeit dieses Systems in allen Reichen und Gebieten zu begründen. Diese Schrift soll also die Uebereinstimmung der im Aetherreiche, im Mineralreiche, im Pflanzenreiche und im animalischen Reiche liegenden Grundgesetze nachweisen und für die absolute Welt verallgemeinern. Ein solcher Nachweis erfordert die Scheidung jedes dieser Naturreiche in seine subordinirten Specialreiche und coordinirten Gebiete. Für das animalische Reich bedingt dies die Scheidung nach den auf verschiedener geistiger Dimensität stehenden Wesen und für jede dieser Dimensitäten, insbesondere für die oberste Dimensität, welcher der Mensch angehört, eine Scheidung der Geisteskraft in physische oder sensuelle, in anschauliche oder mathematische, in begriffliche oder logische und in alles umfassende oder philosophische Vermögen. Dass die Erweiterung der in dem Wirklichkeits- oder Nervensysteme liegenden erkennbaren Systeme auf das unerkennbare

System der absoluten Welt nicht ohne Zuhülfenahme von Hypothesen möglich ist, leuchtet ein: ich habe mich aber bemüht, aus diesen Hypothesen die Willkürlichkeit zu verbannen und rationelle Voraussetzungen dafür an die Stelle zu setzen. Ich meine hierdurch den Glauben an Gott, an Unsterblichkeit und an eine höhere Welt auf Grundlagen gestellt zu haben, welchen der rationelle Denker die Anerkennung nicht versagen kann. Dabei habe ich mich genötigt gesehen, zahlreiche Irrtümer in den heutigen Wissenschaften aufzudecken und in No. 160 zusammenzustellen. Am Ende dieser Nummer habe ich die Angriffe, welche Schröder gegen den Anhang zum dritten Teile der Naturgesetze in Betreff des sogenannten Logikcalculs gerichtet hat, als völlig unbegründet und auf eigenem Irrtum beruhend zurückgewiesen.

Die letzte Schrift enthält eine kurz gefasste Zusammenstellung der Hauptergebnisse meiner früheren Schriften mit wesentlichen Zusätzen und Einbesserungen; sie ist bestimmt, einen leicht fasslichen Ueberblick über das Weltsystem zu geben. Im Anhange führe ich meine früheren Schriften an, weil die letzte damit im Zusammenhange steht und vielfach darauf Bezug nimmt. Ausserdem habe ich die vorstehende Selbstkritik in den Anhang der letzteren Schrift gesetzt, um damit einige von mir begangene Irrtümer aufzuklären und zu beseitigen." Lp.

H. Schotten. Ueber die Grenze zwischen Philosophie und Mathematik mit besonderer Berücksichtigung der modernen Raumtheorien. Hoffmann Z. **27,** 462-464.

Vortrag, gehalten zu Cassel in der Versammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik, a. a. O. nur im Auszuge abgedruckt; erörtert die Bedeutung der Metageometrie. Lp.

F. Klein. Sullo spirito aritmetico nella matematica. Traduzione del prof. S. Pincherle. Palermo Rend. **10,** 107-117.

Uebersetzung der von Klein am 2. November 1895 zu Göttingen gehaltenen Rede, in welcher die modernen Richtungen der Mathematik besprochen werden, und die Forderung streng logisch-arithmetischer Behandlung der Probleme in Rücksicht auf die grundlegende Bedeutung der Anschauung eingeschränkt wird. Mi.

F. Klein. The arithmetizing of mathematics. American M. S. Bull. **2,** 241-249.

Die englische Uebersetzung dieser Rede, über welche in F. d. M. **26,** 467, 1895 berichtet ist, stammt von Isabel Maddison. Lp.

F. Klein. Ueber Arithmetisirung der Mathematik. Hoffmann Z. **27,** 143-149.

Abdruck aus Gött. Nachr.; vergl. F. d. M. **26,** 467, 1895.

K. Strecker. **Logische Uebungen. 1. Heft.** Essen: G. D. Baedeker. 61 S. 8°.

Strecker, welcher strenge Logik im geometrischen Unterricht verlangt, giebt eine Darstellung der Elemente der Planimetrie einschliesslich der Dreieckslehre. Seine Ziele sind: Genaue Anpassung des sprachlichen Ausdrucks an den Gedanken durch stärkere Heranziehung der specifisch geistigen Verstandesthätigkeit, durch lückenloses Fortschreiten des Gedankenganges, durch Aneinanderhaltung der geistigen und sinnlichen Erkenntniselemente, durch genügende Berücksichtigung der Obersätze für die Fassung der Untersätze und für die Anordnung der sinnfälligen Zeichen. Er trennt beim Beweise consequent den allgemeinen logischen Schlussgang von den als Beispiel bezeichneten Ableitungen aus einer gegebenen Figur. Die Schrift zeigt aber viel Pedanterie im kleinen und Unklarheiten im grossen und giebt einfache Dinge auf umständliche Weise. Beispielsweise braucht Strecker zum Beweise des vierten Congruenzsatzes mehr als drei Druckseiten. Der Grundsatz: „Wenn zwei Grössen einer dritten gleich sind, so sind sie auch unter sich gleich", erscheint ihm ungenau, da „zwei Meter und drei Meter gleich fünf Meter sind, ohne unter sich gleich zu sein". Es soll gesagt werden: „Zwei Grössen, von denen jede derselben der dritten Grösse gleich ist, sind auch unter sich gleich". Die Behandlung der Parallelentheorie dagegen ist ganz veraltet und nimmt nicht die geringste Rücksicht auf die Untersuchung über das 11. Axiom Euklid's. Mi.

G. Frege. **Ueber die Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene.** Leipz. Ber. **48,** 1896, 361-378.

Die wesentlichen Unterschiede der von Frege und Peano begründeten Begriffsschriften sind durch die verschiedenen Zwecke bedingt, welche von den beiden Autoren in den Vordergrund gestellt werden. Die Frege'sche Schrift soll vor allem den Bedürfnissen der strengen Logik dienen, die Peano'sche eine abgekürzte, international verständliche Ausdrucksweise erzielen. Jene will die der Wortsprache anhaftenden Mängel an logischer Schärfe durch systematischen Aufbau einer neuen Ausdrucksform vermeiden, diese eine Art von Begriffs-Stenographie darstellen. Die logischen Verbesserungen der Ausdrucksweise sind hiernach bei Frege die Hauptsache, bei Peano verschiedentlich auftretende Nebenerscheinungen, bedingt durch rationelle Einführung neuer Zeichen. Frege ist hiernach in der Lage, in der Peano'schen Schrift eine ganze Reihe logischer Mängel nachzuweisen, wozu u. a. mehrfache Erklärungen desselben Zeichens gehören, andererseits aber auch in wichtigen Punkten seine eigenen Neuerungen durch die Peano'schen Anschauungen bestätigt zu finden. — Im Zusammenhange mit diesen vergleichenden Studien, die übrigens nicht erschöpfend sein sollen, sondern nur eine Reihe von Beispielen betreffen, giebt die Arbeit allerlei beachtenswerte Hinweise, z. B. auf die eigentliche, selbst von Autoritäten wie Schröder verkannte Stellung der particulär bejahenden Urteile, auf

den Unterschied zwischen „Sinn“ und „Bedeutung“ eines Satzes, u. s. w. Als ein der Uebersichtlichkeit zu Gute kommender Vorteil der Frege'schen Schrift wird ihre zweidimensionale Erstreckung (nach Analogie der Tabellen), im Gegensatz zu der Einzeiligkeit der Peano'schen, hervorgehoben. Vergl. über die Frege'sche Schrift das Referat in F. d. M. **11**, 48, 1879. Schg.

A. Nagy. Alcuni teoremi intorno alle funzioni logiche. Revue de Math. **6**, 21-23.

Nach Vorausschickung zweier Hülfssätze wird bewiesen, dass es zur Ausführung einer beliebigen Operation (G) an einer entwickelten Function (F) genügt, sie an den Coefficienten dieser Function auszuführen. Der Satz wird auf beliebige Operationen mit logischen Functionen ausgedehnt. Aus beiden Sätzen ergeben sich die in Schröder's „Vorlesungen über die Algebra der Logik“ No. 45 stehenden Sätze als Folgerungen. Schg.

P. Poretsky. La loi des racines en logique. Revue de Math. **6**, 5-8.

Reducirt man die logische Gleichung $f(a, b, c, d, \ldots) = 0$, welche $n+1$ Grössen enthält, auf die Form: $Ga + Ha_0 = 0$, worin G und H Functionen der n übrigen Grössen sind, so ist die Gesamtsumme der verschiedenen Wurzeln $= 2^m$, wenn m die Anzahl der verschiedenen Elemente der Function $G_0 H_0 = e^{(1)} + e^{(2)} + e^{(3)} + \cdots + e^{(m)}$ bezeichnet. — Nimmt man $\Sigma(e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(m)})$ als den Ausdruck für alle 2^m Klassen, die aus den Elementen gebildet werden können, so ist die Formel $a = G_0 H + \Sigma(e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(m)})$ das Gesetz logischer Gleichungen. Mi.

L. L. Conant. The number concept: its origin and development. New York and London: Macmillan and Co. 218 S. [Nature **54**, 145-146.]

Nach der Anzeige von A. C. Haddon in der Nature ein Werk, welches die bei den verschiedenen Völkern der Erde in Gebrauch gewesenen und noch gebräuchlichen Zahlensysteme behandelt. Lp.

W. Killing. Ueber transfinite Zahlen. Math. Ann. **48**, 425-432.

Erörterungen über die von G. Cantor, Veronese und Levi-Civita eingeführten Verallgemeinerungen des Zahlbegriffs. Der Verf. führt insbesondere die schon früher von ihm erhobenen Bedenken gegen die Veronese'schen Zahlen weiter aus. Hz.

K. Goebel. Die Zahl und das Unendlichkleine. Leipzig: G. Fock. 47 S. 8°.

Ausgehend von dem Gedanken, dass das Eine und Viele nur als Beziehungen der Natur und des Geistes zu einander existiren und ein

Ausdruck für die durch diese Wechselbeziehung verursachten Discretionen sind, dass die Zahl das Schema des Gesetzes der Specialität sei, die Eins aus dem Setzen eines Allgemeinen in einem Besonderen ohne Wiederholung, das Vielfache oder die Zahlenreihe aus den Wiederholungen und deren Zusammenfassung zu einer Vorstellung hervorgehe, bespricht Goebel die Probleme der Rechnungsoperationen und das Wesen der negativen, gebrochenen, Irrational- und Imaginärzahlen, letzteres im Anschluss an Döhring, wobei auffälligerweise die Logarithmirung als Umkehrung der Potenzirung ganz übergangen ist. Hierauf erörtert Goebel den Begriff des Unendlichkleinen im Anschluss an die Zenonischen Aporien, Kepler, Galilei, Fermat, Newton und die Bewegungsprobleme, um zu beweisen, dass die unendlich kleinen Grössen ebenso wie die endlichen reine Zahlenwerte sind, die aus der Eins entstehen, und dass die Rechnung mit ihnen ganz dieselbe ist, wie mit endlichen Grössen. Mi.

W. P. Ermakow. Worin besteht das Wesen der Algebra? St. Petersb. Päd. Samml. 1896. Hlb. **1**, 458-467. (Russisch.)

Die Arithmetik lehrt die Ausführung der Operationen an den Zahlen. Das Hauptwesen der Algebra besteht in der Bildung und Vereinfachung der Formeln. Diese Definitionen stimmen mit den Definitionen überein, welche A. Comte im Bande **1** seiner „Philosophie positive“ für den „calcul arithmétique“ und „calcul algébrique“ gegeben hat. Wi.

Z. G. de Galdeano. Las modernas generalizaciones expresadas por el álgebra simbólica, las geometrias no-euclídeas y el concepto de hiper-espacio. Madrid: J. M. Cruzado. 142 S. kl. 8°.

Unter einem historischen und philosophischen Gesichtspunkte stellt dieses Büchlein einige noch näher zu bezeichnende Fragen dar. In dem ersten Kapitel steht eine knappe Darlegung des neueren Entwickelungsganges der mathematischen Theorien als Einleitung für die folgenden Kapitel. In dem zweiten Kapitel werden die verschiedenen Methoden der Vectoranalysis und besonders die Grassmann'schen Methoden betrachtet. Das dritte Kapitel ist der symbolischen Algebra und vornehmlich der Theorie der Grössen mit n Einheiten gewidmet. In dem vierten Kapitel beschäftigt sich der Verf. mit den Verallgemeinerungen der Geometrie durch die Einführung des Imaginären. In dem fünften Kapitel werden hauptsächlich die Lie'schen Arbeiten über die Substitutionsgruppen in der Geometrie betrachtet. Die Kapitel VI und VII sind für die Geschichte und die ersten Principien der nichteuklidischen und der n-dimensionalen Geometrie bestimmt. Tx. (Lp.)

J. C. V. Hoffmann. Die Erzeugung der mathematischen Fläche und des mathematischen Körpers mittelst Multiplication von Strecken. Hoffmann Z. **27**, 344-347.

Kommt im Grunde auf die bekannte Erzeugung einer Linie durch Bewegung eines Punktes, einer Fläche durch Bewegung einer Linie, eines Körpers durch Bewegung einer Fläche hinaus; alles Uebrige ist strittig.
Lp.

W. DYCK. Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. Festrede gehalten am 14. November 1896. Münch. Abh. 38 S. 4°.

Die Disposition dieses Festvortrags ist die folgende: 1. Einleitung. 2. Einführung der Potentialfunction in der Attractionstheorie. Laplace-Poisson'sche Gleichung. 3. Die Probleme der Wärmetheorie. 4. Physikalische Analogien. 5. Beziehungen der Attractionstheorie zur Hydrodynamik und Elektrodynamik. 7. Untersuchungen zur Functionentheorie. Conforme Abbildung. 8. Allgemeine partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der mathematischen Physik. 9. Randwertaufgaben. Existenztheoreme. 10. Stellung der exact-mathematischen Untersuchungen zu den physikalischen Problemen. Schluss. Dieser vom Verf. selbst aufgestellten Inhaltsübersicht sind auf S. 27-38 zahlreiche litterarische Notizen hinzugefügt zur Uebersicht über die wichtigsten hierher gehörigen Untersuchungen. Lp.

Weitere Litteratur.

L. SCHÖNGUT. Ueber Kant's mathematische Hypothese. Reichenberg. 52 S. 8°.

P. VOLKMANN. Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart. Allgemein wissenschaftliche Vorträge. Leipzig: Teubner. XII u. 181 S. 8°.

J. M. C. DUHAMEL. Des méthodes dans les sciences de raisonnement. 3e édition. Partie II: Application des méthodes à la science des nombres et à la science de l'étendue. Paris: Gauthier-Villars et Fils.

F. DAUGE. Cours de méthodologie mathématique. 2me édition, revue et augmentée. Gand. X + 525 S. gr. 8°; vergl. das Referat S. 49.

H. POINCARÉ. Sur la nature du raisonnement mathématique. Rev. de métaphys. 2, 371-384 (1894).

G. LÉCHALAS. Nature du raisonnement mathématique. Rev. de métaphys. 2, 709-718 (1894).

É. LE ROY et G. VINCENT. Sur la méthode mathématique. Rev. de métaphys. 2, 505-530, 676-708 (1894).

E. CUGNIN. Notions fondamentales des sciences mathématiques. Rev. scientif. (4) 6, 193-203, 264-275.

CH. RIQUIER. Les axiomes mathématiques. Rev. de métaphys. 3, 269-284.

O. ATMANSPACHER. Die Grundlagen unserer Herrschaft über die Zahlen. Leipzig: Dürr'sche Buchhdlg. III + 52 S. 8°.

G. B. HALSTED. The essence of number. Texas Ac. of sc. 1896, 61-63.

G. DANDOLO. Intorno al numero; discussioni psicologiche. Padova: Draghi. 85 S. 8°.

F. ÉVELLIN. La divisibilité dans la grandeur. Grandeur et nombre. Rev. de métaphys. **2**, 120-152 (1894).

CH. RIQUIER. De l'idée du nombre, considérée comme fondement des sciences mathématiques. Rev. de métaphys. **1**, 346-368 (1893).

E. BALLUE. Le nombre entier considéré comme fondement de l'analyse mathématique. Rev. de métaphys. **2**, 317-328 (1894).

G. FREGE. Le nombre entier. Rev. de métaphys. **3**, 73-78 (1895).

E. LE ROY et G. VINCENT. Sur l'idée de nombre. Rev. de métaphys. **4**, 738-755.

R. VOLPI e E. G. ZOCCOLI. Di un'applicazione della teoria dei gruppi del Cantor al problema gnoseologico. Modena: Moneti. 15 S. 8°. (Questioni di mat. puntata I.)

P. TANNERY. Sur le concept du transfini. Rev. de métaphys. **2**, 465-472.

H. POINCARÉ. Le continu mathématique. Rev. de métaphys. **1**, 26-34 (1893).

L. COUTURAT. De l'infini mathématique. Paris: Felix Alcan. XXIV + 668 S. 8°. [Darboux Bull. (2) **21**, 199-203.]

G. LÉCHALAS. Étude sur l'espace et le temps. Paris: Alcan. 206 S. 18mo.

CH. H. JUDD. Ueber Raumwahrnehmungen im Gebiete des Tastsinnes. Wundt Philos. Studien **12**, 409-463.

Zur Physiologie gehörig. Lp.

A. THIÉRY. Ueber geometrisch-optische Täuschungen. Wundt Philos. Studien **12**, 67-126.

In das Gebiet der physiologischen Optik gehörig. Lp.

H. BOUASSE. De la nature des explications des phénomènes naturels dans les sciences expérimentales. Rev. de métaphys. **2**, 299-316 (1894).

H. POINCARÉ. Le mécanisme et l'expérience. Rev. de métaphys. **1**, 534-537 (1893); **2**, 197-198 (1894).

G. LÉCHALAS. Note sur la réversibilité du monde matériel. Rev. de métaphys. **2**, 191-197 (1894).

K. F. WILBY. Der Dualismus in der Materie. Eine neue Theorie der physikalischen Erscheinungen. Zürich: E. Speidel. 111 S. 8°.

B. Pädagogik.

F. DAUGE. Cours de méthodologie mathématique. Deuxième édition revue et augmentée. Gand: Hoste. Paris: Gauthier-Villars et Fils. X + 525 S. 8°.

Eine eingehende Anzeige der ersten Auflage von Mansion ist in Mathesis **3**, 149-156 erschienen (F. d. M. **15**, 40, 1883). Die Angabe der bei der zweiten Ausgabe vorgenommenen Aenderungen und Verbesserungen befindet sich in Mathesis (2) **6**, 269-272. Mn. (Lp.)

F. KLEIN. Die Anforderungen der Ingenieure und die Ausbildung der mathematischen Lehramtscandidaten. Hoffmann Z. **27**, 305-310.

Der mathematische Unterricht auf der Universität hat zwischen der theoretischen Wissenschaft und allem, was das moderne Leben bewegt, eine wirkliche Beziehung herzustellen. Es ist daher gegen ein facultatives viersemestriges Studium der Lehramtscandidaten auf der technischen Hochschule nichts einzuwenden; aber die Forderung, dass die späteren Mathematiker der Hochschule einen vollen Ingenieurcursus durchmachen sollen, ist eine übertriebene. Mi.

G. Holzmüller. Ueber die Beziehungen des mathematischen Unterrichts zum Ingenieurwesen und zur Ingenieurerziehung. Hoffmann Z. **27**, 468-480, 535-547; auch sep. Leipzig: B. G. Teubner. 28 S. 8°.

B. Schwalbe. Ueber die Beziehungen des mathematischen Unterrichts zur Ingenieur-Erziehung. Unterrichtsblätter für Math. u. Naturw. **2**, 65-74.

Beide Abhandlungen sind Referate für die Versammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik zu Elberfeld (26. Mai 1896). Holzmüller vertritt, als Director einer Fachschule, der Gewerbeschule zu Hagen, mehr den Standpunkt energischer und frühzeitiger Fachausbildung. Schwalbe dagegen, als Director eines Realgymnasiums, macht auf die Gefahren der einseitigen Forderungen von Fachunterricht aufmerksam, weil dadurch eine Zersplitterung, eine Zerstörung unserer bewährten Schuleinrichtungen herbeigeführt werden würde; er mahnt also zur Wahrung des historischen Zusammenhanges, zur Aufrechthaltung des allgemein bildenden Charakters unserer deutschen Mittelschulen. Beiden Vorträgen gemeinsam ist die Forderung einer praktischeren Ausbildung der Lehrer, die Empfehlung des Studiums auf technischen Hochschulen während einiger Semester für die Fächer der Mathematik und Naturwissenschaften, damit die Kenntnisse der technischen Anwendungen beim Unterrichte verwertet werden können. Lp.

Report of Committee. On the establishment of a national physical laboratory. — With an appendix on the Physikalisch technische Reichsanstalt. Brit. Ass. Rep. 1896, 82-86.

Der Bericht zählt zuerst kurz die gegenwärtigen leicht zugänglichen Veranstaltungen auf seitens der Regierung, der Lehranstalten und der Privatgesellschaften zur Unterstützung der Forschung in Grossbritannien, abgesehen von der directen Beihülfe, welche die Zweige der Regierung für ihre eigenen Zwecke fortdauernd leisten. Es wird darauf hingewiesen, dass die Gelegenheiten, welche die Laboratorien der Universitäten und der Universitätscollegien für die Untersuchung bieten, bedeutend beschränkt werden durch die weiten Anforderungen, die gewöhnlich an den Professor und an das Personal für den mehr elementaren Unterricht gestellt werden; ferner auch, dass keine vernünftige Schätzung für die wesentliche Verbindung zwischen der Forschung und der ganzen wissenschaftlichen Erziehung besteht, wie dies anderswo anerkannt wird. Der Ausschuss spricht es aus, dass er hofft, die jetzt in den Lehranstalten

betriebene Forschung werde sich tüchtig ausdehnen; er würde ernstlich jede Scheidung zwischen dem höheren Unterricht und der Forschung beklagen. Nach Andeutung gewisser Forschungstypen, die nach allgemeinem Zugeständnisse ausserhalb der einem Einzelnen oder einer grossen Lehranstalt möglichen Leistungen liegen, geht der Ausschuss dazu über, die Functionen zu betrachten, welche einem Reichslaboratorium zufallen würden, sowie das System, welches zu seiner Kontrolle und Verwaltung anzunehmen wäre. Gbs. (Lp.)

D. E. Smith. Sex in mathematics. Hoffmann Z. **27**, 234-237.

Statistische Angaben über Prüfungsergebnisse bei Knaben und Mädchen auf englischen „Normalschulen". „Im allgemeinen kann man, nach den 20000 hier betrachteten Prüfungen urteilend, sagen, dass die Knaben einen höheren Standpunkt erreichen, dass mehr von ihnen die Prüfungen bestehen, und dass sie den grössten Vorsprung im Rechnen und in der Geometrie gewinnen, sich in der Algebra bloss behaupten oder auch nachstehen. Wenn Mädchen in Raumvorstellungen bei Erlangung des ersten Grades sich auszeichnen, scheinen sie ihre Ueberlegenheit zu verlieren oder bei der Verknüpfung jener Begriffe mit logischer Beweisführung verhältnismässig weniger erfolgreich zu sein, wenn sie die weibliche Reife erlangen." Lp.

P. Treutlein. Der Lehrplan für den mathematischen Unterricht des badischen Realgymnasiums. Pr. (No. 634) Realgymn. Karlsruhe. 31 S. 4°.

Treutlein kritisirt den mathematischen Lehrplan der badischen Realgymnasien, der in erster Form 1868, in zweiter 1879 und in dritter 1887 aufgestellt ist und keine Rücksicht auf die Schüler nimmt, welche nicht zur Reifeprüfung vordringen, vielmehr den Lehrstoff im Anschluss an die Inhaltsübersicht des vierbändigen Lehrbuchs von J. H. T. Müller in wissenschaftlich-systematischem Aufbau giebt. Da die Anordnung des Stoffes in diesem Plane vielfach verkehrt und undurchführbar ist, Veraltetes beibehalten, Wichtiges fortgelassen ist, fordert Treutlein Reform des Planes für Realgymnasien wie Gymnasien nach dem österreichischen Muster, das für den geometrischen Unterricht das Gepräge der Zweistufigkeit trägt, wie dasselbe bereits für die badischen Oberrealschulen seit dem 27. März 1895 zu Grunde gelegt ist. Mi.

Hubert Müller. Die Lehrpläne von 1892 und die mathematische Lehrweise in Preussen. Mit besonderer Beziehung auf die Schriften des Director Holzmüller in Hagen. Metz: G. Scriba. 60 S. 8°.

H. Müller findet in einer Kritik des Holzmüller'schen Lehrbuches, dass dasselbe den eigenen Forderungen des Verf. nicht entspricht. Die Propädeutik, die als Abhandlung in einer Zeitschrift zu loben wäre, ist als Lehrbuch in der Hand des Schülers zu verwerfen, da sie den

Gebrauch des Transporteurs ausschliesst, den Winkelbegriff zu spät, die Parallelentheorie zu früh giebt und die Schüler mit unnötigen Lehrsätzen und Beweisen und überflüssiger Systematik belästigt. Die Planimetrie wiederholt trotz der entgegengesetzten Erklärungen Holzmüller's doch nur das alte dogmatische System mit einigen Einschaltungen. Die Arithmetik zeigt wenig Abweichung vom Hergebrachten, ist aber nicht so einfach und übersichtlich wie andere Lehrbücher. Die Stereometrie für Untersecunda ist in ihrem grundlegenden Teile zweckmässig eingerichtet, zeigt aber in der Flächen- und Körperberechnung viel lästige Systematik. Das ganze Buch legt Schülern und Lehrern einen geistigen Zwang auf, der die Freude am Unterricht beeinträchtigt. Das Verdienst der Holzmüller'schen Arbeit erscheint also nicht so gross, dass er zu den herben Vorwürfen berechtigt wäre, die er den preussischen Lehrern zu machen gewohnt ist, und er selbst steckt tief in der Systematik, die er durch Methodik ersetzt wissen will. Mi.

J. Kleiber. Aphorismen zum Aufgaben-Repertorium. Hoffmann Z. **27**, 1-15, 81-95.

Bemerkungen über die an den Beweis eines Satzes, an die Lösung einer Aufgabe zu stellenden Anforderungen, erläutert an einzelnen bekannten Beispielen. Der Aufsatz ist anregend geschrieben und steht auf einer höheren Stufe als viele von den an derselben Stelle veröffentlichten Betrachtungen. Lp.

K. Israel-Holtzwart. Vorschlag zu einer Vervollständigung der intuitiven mathematischen Darstellungsmittel. Frankfurt a. M.: Enz u. Rudolph. 20 S. 4°.

Die Mathematik ist die Wissenschaft von der Construction der Begriffe. Die mathematische Construction ist eine doppelte: eine ostensive oder eine symbolische. Die Evidenz der Arithmetik ist durch den Gebrauch der intuitiven Zeichen in ähnlicher Weise begründet, wie die der reinen Geometrie durch die Anwendung ostensiver Darstellungsmittel. Eine vollkommen entwickelte intuitive Zeichensprache der Arithmetik setzt voraus, dass für sämtliche grundlegenden Begriffe besondere Symbole eingeführt sind. Es giebt nun nicht bloss zahlreiche Einzelfälle, sondern weite Anwendungsgebiete, welche von Begriffen beherrscht werden, für die besondere intuitive Zeichen noch nicht allgemein gebräuchlich sind. Im Vorliegenden wird dies nachgewiesen an zwei Begriffen, dem des „Quotus“ und dem des „Restes“, welche dem allgemeineren Begriffe der „Zahlencongruenz“ anhaften. Sie erfordern wegen ihrer weitgehenden Bedeutung eine umfassendere theoretische Behandlung und, Hand in Hand damit, eine zweckmässigere intuitivere Darstellung. Eine solche wird in dem vorliegenden Aufsatze gegeben. M.

R. Nelson. Methodische Bemerkungen zum Unterricht in der Arithmetik. Pr. (No. 278) Guericke-Schule, Magdeburg. 16 S. 4°.

Das noch immer nicht ganz überwundene Vorurteil des Hauses gegen die Schulmathematik kann durch Sorgfalt im Anfangsunterrichte der Arithmetik überwunden werden. Lehrsätze und Uebungen müssen beständig mit einander verbunden, im Aufbau des Systems und in der Steigerung der Schwierigkeiten der Aufgaben muss methodisch vorgegangen werden. Der allgemeine Zahlbegriff und die Grundoperationen mit ihm setzen Vorübungen zum Verständnis voraus. Mehr Gewicht ist auf die Anwendung der Lehrsätze, als auf die Beweise zu legen. Bei der Anwendung darf nichts Mechanisches mit unterlaufen; aus der Aufgabe muss vielmehr die Regel hervorgehen. Der Schüler muss allmählich zum logischen Denken und zur Selbstthätigkeit geführt werden, und hierdurch dem mathematischen Unterricht ein Erfolg entstehen, wie er kaum in einem anderen Lehrfache möglich ist. Mi.

M. Löwe. Das Zahlenrechnen an der sächsischen Realschule. Pr. 1. Realschule Leipzig. 10 S. 4°.

Löwe fordert für die Realschule, trotzdem dieselbe keine Fachschule ist, Anlehnung des Rechenunterrichts an das praktische Leben, da der grössere Teil der Realschüler in den Kaufmanns- oder Gewerbestand übergeht. Auf der ersten Leipziger Realschule wird dementsprechend in allen Klassen Rechenunterricht erteilt und in den beiden ersten Klassen die Discont-, Termin-, Effecten-, Wechsel-, Waren- und Geldrechnung gelehrt. — Für die preussischen, insbesondere die Berliner Realschulen ist die Forderung Löwe's bei der jetzigen Organisation nicht durchführbar. Mi.

E. W. G. Schulze. Erster Lehrgang des geometrischen Unterrichtes in Quarta. Pr. Gymn. Meseritz. IV + 50 S. 8°. Mit 3 Fig.-Taf.

Die Art, wie E. W. G. Schulze das Quartanerpensum in der Geometrie im Anschluss an v. Bensemann (Lehrb. d. ebenen Geom. 1892), Scheidemantel (Pr. d. Gymn. zu Tilsit, 1893) und Schwering und Krimphoff (Anfangsgr. d. Geom. 1894) behandeln will, ist im allgemeinen empfehlenswert. In der Absicht, die Schüler möglichst früh und anschaulich zu solchen Einsichten zu führen, aus denen sich Constructionen ableiten lassen, giebt Schulze, nach einer kurzen Einleitung über Körper, Linien, Flächen und Punkte, die Grundgesetze der geraden Linie und Ebene, die Begriffe der geometrischen Figur, besonders des Dreiecks, des Kreises und des Winkels. Nachdem Neben- und Scheitelwinkel erledigt sind, geht er sofort zu den ersten Sätzen vom Lot und zu dem Begriff der Parallelen über, giebt aber hier nur die Sätze von Loten auf derselben Geraden und von Linien mit gleichem Abstande. Hieran schliessen sich die Sätze von den Dreieckswinkeln, von dem Mittellot im gleichschenkligen Dreieck und auf Sehnen, von den Tangenten und den winkelhalbirenden Geraden. Die ausführliche Parallelentheorie verweist Schulze dagegen hinter die Dreieckslehre als einleitenden Teil in den Abschnitt von den Parallelogrammen. Er macht bei den Beweisen der

Lehrsätze von den Methoden der Umklappung, Drehung und Parallelverschiebung allenthalben Gebrauch und nimmt dadurch der Elementargeometrie ihre starre Form. Gegen mehrere Beweise wird freilich auch Einwand erhoben werden können. So ist der Satz § 7, 24: „Ein Dreieck kann nur hohle Winkel haben“, überhaupt nicht bewiesen, und die beiden ersten Beweise von Lehrsatz § 10, 5: „Von einem Punkte A aus lässt sich auf eine Gerade MN nur ein Lot fällen“, sind unzureichend, der erste, weil er auf § 7, 24 beruht, der zweite, weil er nicht beweist, dass der Winkel AXA' kein gestreckter sein kann. Auch der Beweis des Satzes von der Winkelsumme im Dreieck ist nicht einwandsfrei, da die Summe der beiden Dreieckswinkel, welche gleich dem Nebenwinkel des dritten sein soll, nicht unmittelbar auf einem Kreise als Summe zweier Kreisbogen gegeben ist. Es fehlen überhaupt in § 5 und 7 Sätze über die Addition und Subtraction von Kreisbogen und Centriwinkeln. Doch ist im allgemeinen die Behandlung und Anordnung des recht schwierigen Pensums eine passende und dem Verständnis der Quartaner entsprechende.

Mi.

Ed. Weber. Der geometrische Lern- und Uebungsstoff der Obertertia, die Ableitung der sieben niederen Rechnungsarten und die Entwickelung des Zahlenbegriffs in der elementaren Arithmetik. Pr. (No. 70) Gymn. Kottbus. 33 S. 4°. Mit 5 Fig.-Taf.

An eine kurze Uebersicht über den Lehrstoff der Obertertia schliesst Weber eine Ableitung der sieben Rechnungsarten und eine kurze Grundlegung der Algebra an. Er unterscheidet nicht benannte und unbenannte Zahlen und stellt das Gesetz der Commutation in gleicher Weise für die Addition und Multiplication auf, so dass für ihn ein Unterschied zwischen Teilen und Messen nicht besteht, und er behauptet, es gäbe von der Multiplication nur eine Umkehrung. Mi.

G. Degenhardt. Praktische Geometrie auf dem Gymnasium. Pr. (No. 395) Kaiser-Friedr.-Gymn. Frankfurt a. M. 30 S. 4°. Mit 4 Fig.-Taf.

Degenhardt giebt eine der Pensenverteilung des amtlichen Lehrplans angepasste Zusammenstellung von Aufgaben der Feldmesskunde. Auf der ersten Stufe, wo nur einfache Apparate, wie Senkel, Messlatten, Ohmann's Feldwinkelmesser, verwandt werden, soll das Markiren und Messen von geraden Linien, Loten, Parallelen und Winkeln die Grundlage der Aufgaben bilden. Auf der zweiten Stufe, wo der Storchschnabel, der Messtisch und die Nivellirungslatte zur Anwendung kommen, treten Proportionalitätsaufgaben, Flächenmessungen, trigonometrische, Nivellirungsaufgaben, Messtischaufnahmen und Zeichnungen von Plänen im verjüngten Massstabe hinzu. Auf der dritten Stufe soll die Verwertung der eigentlichen Feldmessapparate und die Belehrung über die Landesvermessung erfolgen und der physikalische Unterricht mit dem mathematischen zusammenwirken. — In angemessener Beschränkung, die Degenhardt übrigens selbst (S. 5) empfiehlt, dürften derartige Uebungen

den geometrischen Unterricht recht fördern; doch darf die allgemeine Theorie nie darunter leiden, und nie vergessen werden, dass unsere höheren Lehranstalten keine Fachschulen sind. Mi.

G. HOLZMÜLLER. Ueber die Tragweite der Formel $\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^p = \frac{1}{p+1}$. Hoffmann Z. **27**, 241-252.

Es handelt sich in dem Aufsatze nicht bloss um die im Titel genannte Formel, sondern überhaupt um solche elementaren Methoden (die graphisch gedeutet werden), durch welche auf Mittelschulen Ersatz für die Infinitesimalrechnung geschaffen werden kann. Dass Schellbach diese Mittel in umfangreichster Weise bei seinem Unterricht benutzt hat, wie dies aus den unter seiner Aufsicht von seinen Seminaristen nach den Lehrstunden bearbeiteten Büchern allbekannt ist, soll zur Erinnerung an den grossen Meister des Unterrichts hier nur für das jüngere Geschlecht von Lehrern erwähnt werden. Lp.

Report of Committee. The teaching of science in elementary schools. Brit. Ass. Rep. 1896, 268-272.

Ein interessanter Bericht über den Unterricht in Gegenständen der exacten Wissenschaften auf Elementarschulen. Gbs. (Lp.)

NORRENBERG. Zur indirecten Beweisführung. Hoffmann Z. **27**, 23-24.

Gegen diesen Beweis auf der unteren Stufe des Unterrichts. Lp.

WEBER. Logik und Sprachrichtigkeit im mathematischen Unterricht. Hoffmann Z. **27**, 417-425.

Einzelne didaktische Bemerkungen. Lp.

VON DER HEYDEN. Das Rechenlineal, ein an höheren Lehranstalten einzuführendes Unterrichtsmittel. Hoffmann Z. **27**, 568-576.

Abdruck des Artikels aus Hoffmann Z. **3**, 336-346; vergl. F. d. M. **4**, 605, 1872.

A. R. HORNBROOK. Laboratory methods of teaching mathematics in secondary schools. New York: American Book Co. 16 S. 8°.

J. A. McLELLAN and J. DEWEY. The psychology of number and its applications to the methods of teaching arithmetic. (International education series, No. 23.) New York: Appleton. XII + 310 S. 8°.

J. LARMOR. On the geometrical method. Math. Gazette 1896, 1-8.

Zweiter Abschnitt.

Algebra.

Kapitel 1.

Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besondere algebraische und transcendente Gleichungen.)

H. WEBER. Lehrbuch der Algebra. In zwei Bänden. 2. Band. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn. XIV + 796 S. 8°.

Die Bedeutung des Werkes, welche schon bei Besprechung des ersten Bandes (cf. F. d. M. **26**, 102, 1895) gewürdigt worden ist, tritt naturgemäss noch viel mehr im zweiten Bande hervor, der die Behandlung aller in das Gebiet gehörigen Fragen und Probleme bis zu den Forschungsergebnissen der letzten Jahre führt.

Das erste Buch beginnt mit einer ganz allgemeinen Theorie der endlichen Gruppen, untersucht dann ihrer Wichtigkeit wegen insbesondere die Abel'schen Gruppen (in denen bei der Composition das commutative Gesetz gilt) und wendet die für diese gefundenen Sätze auf die Kreisteilungstheorie an. Für die wirkliche Bildung aller einfachen Gruppen, ein bisher nur zum Teil gelöstes Problem, erweisen sich die Sätze von Sylow (Math. Ann. Bd. 5) und Frobenius (Berliner Sitzungsberichte vom 4. Mai 1893) von grosser Wichtigkeit.

Im zweiten Buche werden als wirksames Mittel zur Bildung von Gruppen die linearen Substitutionen und ihre Invarianten der Untersuchung unterworfen. Den wichtigsten speciellen Fall derselben bilden die gebrochenen linearen Substitutionen. Die Lösung der Aufgabe, alle endlichen Gruppen linearer gebrochener Substitutionen zu finden (wodurch auch alle endlichen Gruppen der mit ihnen isomorphen orthogonalen ternären Substitutionen und der binären linearen Substitutionen von der Determinante 1 bestimmt sind) führt zu den Polyeder-Gruppen, die zunächst als die einzig mögliche Lösung und sodann als wirklich existirend nachgewiesen werden. Aus den linearen Substitutionen lassen sich die aus der Theorie der elliptischen Functionen stammenden Congruenz-

Gruppen ableiten, die es ermöglichen, ganze Reihen von einfachen Gruppen zu bilden.

Im dritten Buche werden die Resultate der allgemeinen Gruppentheorie auf die Galois'sche Gruppe einer Gleichung angewandt. Es ergiebt sich zunächst, dass die Grade der Partialresolventen (Indices einer Compositionsreihe der Gruppe der Gleichung), deren Wurzeln behufs Lösung der Gleichung successive adjungirt werden müssen, in ihrer Gesamtheit unveränderlich, also wahre Invarianten der Gleichung sind. Besteht diese Indexreihe der Gruppe einer irreductiblen Gleichung aus lauter Primzahlen, so ist die Gleichung metacyklisch (durch Radicale lösbar). Die Untersuchung von metacyklischen Gleichungen beliebigen Grades lässt sich auf die solcher metacyklischen Gleichungen zurückführen, deren Grad eine Primzahlpotenz ist. Als Beispiele für die Anwendung der algebraischen Theorien auf die Geometrie werden die beiden Probleme der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung und der Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung ausführlich behandelt. Im nächsten Abschnitte beginnt die allgemeine Theorie der Gleichungen fünften Grades mit dem Beweise des von Kronecker zuerst ausgesprochenen Satzes, dass eine allgemeine Gleichung von höherem als dem vierten Grade keine rationalen Resolventen mit nur einem Parameter besitzt. Alsdann folgt die Zurückführung der Auflösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades mittelst einer accessorischen Quadratwurzel auf das Ikosaeder-Problem und die Lösung der Ikosaeder-Gleichung durch elliptische Functionen und hypergeometrische Reihen. Als ein Beispiel für eine ternäre lineare Substitutionsgruppe wird darnach die vom Grade 168 und ihre Beziehung zu den Gleichungen siebenten Grades behandelt.

Das vierte Buch ist der Theorie der algebraischen Zahlen gewidmet. Da sich die für rationale Zahlen geltenden arithmetischen Grundgesetze bekanntlich nicht ohne weiteres auf algebraische Körper übertragen lassen, haben verschiedene Mathematiker (Kummer, Dedekind, Kronecker) in verschiedener Weise eine Erweiterung des Rechenmaterials vorgenommen.

Zwischen diesen Theorien sucht H. Weber einen Zusammenhang herzustellen durch Einführung des Begriffes „Functional" (ganze oder gebrochene Function von beliebig vielen Veränderlichen, deren Coefficienten Zahlen eines algebraischen Körpers sind, bei denen es nicht auf die Variabeln, sondern nur auf die Coefficientensysteme ankommt). Die noch besonders definirten „ganzen Functionale" (zu denen als Specialfall auch die ganzen algebraischen Zahlen gehören) unterliegen ähnlichen Gesetzen der Teilbarkeit wie die ganzen rationalen Zahlen. So ergiebt sich das Resultat, dass sich die ganzen algebraischen Zahlen eines Körpers in derselben Weise wie die ganzen rationalen Zahlen in Primfactoren zerlegen lassen, welche freilich im allgemeinen nicht mehr Zahlen, sondern Functionale sind. Der folgende Abschnitt behandelt die Beziehungen unter den verschiedenen Grössen eines algebraischen Körpers, Basis des Körpers, die dem Kronecker'schen Fundamentalsystem entsprechende Minimalbasis, die Basen der Functionale, leitet eine Reihe von Sätzen

her, die elementaren Sätzen der rationalen Zahlentheorie analog sind, definirt die Aequivalenz zweier Functionale eines Körpers und dementsprechend die Klasseneinteilung. Für den Satz, dass die Klassenanzahl eines Körpers eine endliche sei, wird der von Minkowski gegebene Beweis entwickelt, aus welchem sich gleichzeitig ergiebt, dass ausser dem Körper der rationalen Zahlen kein anderer Körper existirt, dessen Körperdiscriminante ± 1 wäre. Im Anschluss an eine Arbeit Hensel's wird sodann die Aufgabe gelöst, jede beliebig gegebene natürliche Primzahl in ihre Primfactoren wirklich zu zerlegen. Setzt man an Stelle des absoluten Rationalitätsbereiches einen beliebigen algebraischen Körper, so ergeben sich für die Theorie eines solchen Zahlkörpers, dessen Elemente Wurzeln algebraischer Gleichungen mit Coefficienten sind, die dem ersten Zahlkörper angehören, gewisse Modificationen, welche unter Berücksichtigung der Arbeiten von Dedekind und Hilbert auseinandergesetzt werden. Die Ergebnisse der allgemeinen Theorie der algebraischen Zahlen werden nunmehr specialisirt 1) für algebraische Körper zweiter Ordnung, 2) für die Kreisteilungskörper. Aus einer langen Reihe von Entwickelungen, zu denen namentlich auch die Bestimmung der Klassenanzahl eines algebraischen Körpers gehört, resultirt der allgemeine Satz, dass alle im absoluten Rationalitätsbereich Abel'schen Körper Kreisteilungskörper sind, ein Satz, der die grosse Bedeutung der Kreisteilungskörper zeigt. — Schliesslich wird noch die Existenz nicht-algebraischer Zahlen nachgewiesen und der Beweis für die Transcendenz der Zahlen e und π mitgeteilt. F.

E. Netto. Vorlesungen über Algebra. In zwei Bänden. Band 1. Leipzig: B. G. Teubner. X + 388 S. gr. 8°.

Nachdem einige Jahrzehnte hindurch der seiner Zeit vortreffliche, aber jetzt nicht mehr dem Fortschritte der Wissenschaft entsprechende „Cours d'algèbre“ von Serret die einzige umfassende Einführung in die Theorie der algebraischen Gleichungen gewesen ist, sind kurz hinter einander zwei neue, für das Studium der höheren Algebra epochemachende Werke, nämlich die von Netto und Weber, erschienen.

Das Netto'sche Lehrbuch, dessen erster Band in diesem Jahre vorliegt, will sich im wesentlichen auf die Algebra der Gleichungen beschränken; es beabsichtigt nicht, auf die Behandlung der algebraischen Formen und die Substitutionen- und Gruppentheorie einzugehen.

Der erste Band bringt nach einer kurzen Theorie der complexen Grössen im ersten Abschnitt die Untersuchungen der ganzen Functionen und die allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Gleichungen (Wurzelexistenz, symmetrische Functionen, Transformation, Resultanten, Discriminanten, quadratische Formen), im zweiten Abschnitte die Trennung und näherungsweise Berechnung der Wurzeln und im dritten Abschnitt die algebraische Auflösung der Gleichungen bis zum vierten Grade und der Kreisteilungsgleichungen. Der zweite Band soll diesen letzten Abschnitt fortsetzen und die Theorie der Elimination enthalten.

Indem der Verf. die Lehre von den Determinanten und die Ele-

mente der Zahlentheorie voraussetzt, greift er jede einschlägige Frage bei den Elementen an, um aber sogleich zu einer erschöpfenden, die neueren Ergebnisse und Methoden völlig berücksichtigenden und verarbeitenden Behandlung des Stoffes überzugehen, wie es nur jemand zu thun vermag, der diesen Teil der Wissenschaft durch eigene Arbeiten bereichert hat. F.

H. B. LÜBSEN. Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 24. Aufl. Leipzig. VI + 261 S.

L. MATTHIESSEN. Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Zweite wohlfeile Titel-Ausgabe. Leipzig: B. G. Teubner. XVI + 1001 S. 8°.

ALEX. MCAULAY. „Octonions". Lond. R. S. Proc. **59**, 169-181 (Abstract).

Octonion bedeutet dasselbe wie Clifford's Biquaternion, d. h. eine Quaternion, deren vier Componenten gewöhnliche complexe Zahlen sind. Eine Octonion hängt daher von acht reellen Parametern ab. Man rechnet damit nach denselben Regeln, wie mit einer gewöhnlichen Quaternion.

Soviel aus dem Auszuge ersichtlich ist, stehen die Octonionen zu der Mechanik des frei beweglichen starren Körpers in derselben Beziehung, wie die Quaternionen zu der Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt. Insbesondere bedeutet, unter Q das Symbol einer Octonion verstanden, die Operation $Q(\ )Q^{-1}$ eine Schraubung, entsprechend der Operation $q(\ )q^{-1}$, welche, wenn q eine Quaternion ist, eine Drehung um einen festen Punkt bedeutet. A. S.

S. KIMURA. On the nabla of quaternions. Annals of Math. **10**, 127-155.

Mc Aulay hat in seinen Untersuchungen über lineare Vectorfunctionen als Argument ϱ des Operationssymbols ${}_{\varrho}\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$ die Vectorsumme $\varrho = ix + jy + kz$ benutzt. Kimura dehnt diese Untersuchungen auf den Fall aus, wo das Argument eine vollständige Quaternion $q = t + \varrho$, und das Symbol ${}_{q}\nabla = \frac{\partial}{\partial t} + {}_{\varrho}\nabla$ ist. Hierzu kommt noch das weitere Symbol ${}_{Kq}\nabla = \frac{\partial}{\partial t} - {}_{\varrho}\nabla$. Auf dieser Grundlage wird eine grosse Anzahl von Transformationen vorgenommen, die teilweise zu äusserst einfachen Ausdrücken für geometrische und physikalische Beziehungen führen. Beispiele liefern die Euler'schen Gleichungen, eine Gleichung der Hydrodynamik, die Bedingungen für orthogonale Flächensysteme und der Satz, dass drei Flächen, die einander in ihren Krümmungslinien schneiden, constante Winkel mit einander bilden. Schg.

A. S. Hathaway. A primer of quaternions. New York: Macmillan. XIII + 113 S. 12mo.

C. Galopin-Schaub. Premières notions du calcul des quaternions. Bâle. XII + 63 S.

J. B. Shaw. Development of some useful quaternion expressions, with applications to geometry of three and four dimensions. American Assoc. Proc. **44**, 21.

A. L. Baker. Algebraic symbols. American J. **18**, 62-73.

Der Verf. beginnt mit rein logischen Definitionen der fundamentalen Operationszeichen $+$, $-$, $\times$, $:$, $\sqrt{\ }$, $\sqrt{-}$, die indessen so allgemein gehalten sind, dass sie als Grundlage einer präcisen mathematischen Beweisführung nicht eben geeignet erscheinen.

Wir greifen folgenden „ersten Beweisgang" heraus: „$\sqrt{-}$ muss das Symbol einer Operation sein, deren zweimalige Anwendung die Operation „$-$" bewirkt. Die einzige Interpretation einer solchen Operation ist die Drehung einer Geraden um einen rechten Winkel. Dies führt zu der Argand'schen Darstellung und zur Theorie der complexen Functionen, nicht als eine Uebereinkunft, sondern als logische Consequenz."

Dass damit der Gegenstand erledigt sei, wird schwerlich jemand zugeben.

Auf ähnliche Weise gelangt der Verf. zur Aufstellung des Moivre'schen Satzes und zur Multiplication von Vectoren im Raume. My.

C. Burali-Forti. Le classi finite. Torino Atti **32**, 34-52.

Diese nach Anleitung der Cantor'schen Ideen verfasste Arbeit setzt sich als Zweck vor, den Zahlbegriff aus den alleinigen Begriffen von Klasse und ein-eindeutiger Correspondenz ganz streng abzuleiten. Dazu bedient er sich des Hülfsmittels der seit kurzem in Italien verbreiteten mathematischen Logik. Die Abhandlung besteht aus einer Einleitung und vier Paragraphen, die zusammen über 60 Definitionen und Sätze enthalten. Als Definition der „unendlichen Klasse" wird die bekannte Dedekind'sche angenommen. Eine Klasse ist „endlich", wenn sie nicht unendlich ist. Die „Cardinalzahl" einer Klasse ist der dieser Klasse und allen derselben äquivalenten Klassen gemeinschaftliche Begriff; mit andern Worten, zwei äquivalente Klassen haben dieselbe Cardinalzahl und umgekehrt. Die natürlichen Zahlen sind die Cardinalzahlen der endlichen Klassen.

Es möge bemerkt werden, dass der Verf. einige Bedenken gegen den Dedekind'schen Beweis von der Existenz unendlicher Klassen zu haben scheint, so dass er sich genötigt sieht, die Existenz solcher Klassen ausdrücklich als eine Hypothesis zu setzen. Vi.

R. Bettazzi. Sulla catena di un ente in un gruppo. Torino Atti **31,** 446-456.

Der Verf. unterwirft die von Dedekind (cf. F. d. M. **20,** 49, 1888) einer rein logischen Entwickelung der Zahlengesetze zu Grunde gelegten Begriffe einer weiteren Ausgestaltung und gelangt so insbesondere zu einem, wie es scheint, kürzeren Beweise des Satzes von der vollständigen Induction.

Von zwei Systemen A, S von Elementen heisst nach Dedekind A ein „Teil" von S, wenn jedes Element von A auch Element von S ist; und zwar ein „echter" Teil, wenn A verschieden von S ist. Durch eine „Abbildung" φ von S wird jedem Element s von S ein bestimmtes Ding $s' = \varphi(s)$ zugeordnet, das „Bild" von s; irgend ein Teil T von S geht dabei über in ein System $T' = \varphi(T)$, das Bild von T. Abbildungen lassen sich zusammensetzen (oder multipliciren): das Product befolgt das associative Gesetz. Entsprechen verschiedenen Elementen a, b von S stets verschiedene Bilder $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$, so heisst die Abbildung φ von S „ähnlich": umgekehrt geht dann S' durch die „umgekehrte" ähnliche Abbildung $\bar{\varphi}$ wieder in S über; zwei Systeme sind selbst ähnlich, wenn sie durch eine ähnliche Abbildung in einander übergehen. Ist S einem echten Teile seiner selbst ähnlich, so heisst S „unendlich" (nach Bettazzi „entwickelbar"), andernfalls endlich. $\varphi(S)$ wird insbesondere zu einer Abbildung des Systems S „in sich selbst", wenn $\varphi(S) = S'$ ein Teil von S ist. Ist K ein solcher Teil von S, dass K' ein Teil von K ist, so heisst K eine „Kette", und das ist der fundamentale Begriff, der die wichtige Abbildung eines Systems in sich selbst beherrscht. Die Untersuchungen des Verf. drehen sich daher wesentlich um die Specification des Kettenbegriffs; es werden „begrenzte" und „unbegrenzte", „offene" und „geschlossene" Ketten unterschieden. Fällt K' mit K zusammen, so wird die Kette zu einem „Cyklus". Es werden Kriterien für die Endlichkeit resp. Unendlichkeit von Ketten aufgestellt; es wird untersucht, wann ein Teil einer Kette ein Cyklus sein kann; es werden die mehreren Ketten gemeinsamen Systeme betrachtet, u. a.

Endlich werden noch einige Begriffe verwertet, die G. Cantor in der Theorie der Mengen eingeführt hat. So entsteht der Begriff eines „bez. einer Abbildung φ wohl geordneten Systems": derartige Systeme zeichnen sich durch besonders charakteristische Eigenschaften aus.

Ein weiteres Eingehen in den Gegenstand erscheint hier bei seiner Abstractheit ungeeignet. My.

R. Bettazzi. Fondamenti per una teoria generale dei gruppi. Periodico di Mat. **11,** 81-96, 112-142, 173-182.

Zunächst geben wir den Inhalt einer Fussnote wieder (S. 83): Ich gebrauche hier das Wort „gruppo" statt des anderen „classe", welches gleichwohl von vielen angewandt wird (s. „Formulaire de mathématiques", herausgegeben von der Rivista di Mat. Torino 1895), und zwar weil gruppo die erste Benennung ist, mit der in italienischer Sprache die „Menge" von Cantor bezeichnet wurde (Dini, „Fondamenti per la teoria

delle funzioni di variabili reali". Pisa, 1878), und weil ich das Wort „classe" in meiner „Teoria delle grandezze" (Pisa, 1880) mit anderer Bedeutung gebrauche. In französischer Sprache ist das entsprechende übliche Wort „ensemble". Dedekind bedient sich des Wortes „System" in: „Was sind und was sollen die Zahlen?"

Der Verf. findet, dass bei seinen Vorgängern Dedekind, Cantor, Veronese, Biasi und Burali-Forti die Begriffe der „endlichen" und der „unendlichen" Menge nicht hinreichend einfach und scharf definirt sind, und bezeichnet es als den Hauptzweck der Arbeit, die Unterscheidung zwischen den endlichen und den unendlichen Mengen zu geben. Er stellt zuerst selbständig den Begriff der endlichen Menge auf, damit man sich desselben bedienen kann (was bei dem ersten Unterrichte der Mathematik das Wichtigste sei), auch ohne auf den der unendlichen Menge zurückzugreifen. Dies geschieht auf dem Grunde des Begriffes der Ordnung. Dann wird als unendliche Menge eine solche definirt, welche nicht endlich ist, oder, was nach dem Beweise dasselbe ist, diejenige, welche grössere Mächtigkeit besitzt als irgend eine endliche Menge. — Im übrigen besitzt die Arbeit viele Berührungspunkte mit der Abhandlung „Sulla catena di un ente in un gruppo" aus Torino Atti, über welche im vorangehenden Referate von anderer Seite berichtet ist. Die Darstellung ist sorgfältig gegliedert, und wir müssen uns nun darauf beschränken, die Disposition des Ganzen hier wiederzugeben.

Kap. 1. Die Mengen. Kap. 2. Correspondenz zwischen den Mengen. Kap. 3. Mächtigkeit der Mengen. Kap. 4. Entwickelbare Gruppen („Entwickelbar" heisst eine Menge, die einem eigentlichen Teile von ihr äquivalent ist; nach Dedekind heissen diese Mengen „unendlich"). Kap. 5. Kette eines Elementes. Kap. 6. Ordnung der Mengen. Kap. 7. Kette in den wohl geordneten Mengen. Inductionsprincip. Kap. 8. Einfache Mengen. Kap. 9. Endliche Mengen. Kap. 10. Einfach entwickelbare Mengen. Kap. 11. Composition der einfachen Mengen. Kap. 12. Mächtigkeit der einfachen Gruppen. Kap. 13. Mengen, deren Elemente endliche Teile von einfachen Gruppen sind. Kap. 14. Unendliche Gruppen. Kap. 15. Einige bei den Mengen gebräuchliche Redewendungen. Kap. 16. Beispiele von Mengen. Lp.

R. Bettazzi. Gruppi finiti ed infiniti di enti. Torino Atti **31**, 506-512.

Die hier gegebene Definition einer „endlichen Gruppe" gründet sich auf frühere Untersuchungen des Verf's. (siehe: Sulla catena di un ente in un gruppo, Torino Atti **31**, 446; Bericht oben S. 61). Es folgen einige Theoreme über endliche Gruppen. Vi.

Volpi e Zoccoli. Dell'applicazione della teoria del Cantor al problema gnoseologico. Modena: Moneti. Vi.

D. Hilbert. Ein neuer Beweis des Kronecker'schen Fundamentalsatzes über Abel'sche Zahlkörper. Gött. Nachr. 1896, 29-39.

Bezeichnet man Zahlkörper, die durch Einheitswurzeln bestimmt sind, als Kreiskörper, so hat bekanntlich Kronecker 1853 den fundamentalen Satz aufgestellt, dass alle Abel'schen Zahlkörper im Gebiete der rationalen Zahlen Kreiskörper sind.

Der Verf. giebt einen rein arithmetischen Beweis, der nicht, wie bei H. Weber (cf. F. d. M. **18**, 55, 1886) die Kummer'sche Zerlegung der Lagrange'schen Resolvente in Primideale, noch die transcendenten Dirichlet'schen Methoden erfordert, sondern nur auf den allgemeinen Begriffsbildungen beruht, die der Verf. 1894 (cf. F. d. M. **25**, 305, 1893/94) dargelegt hat.

Der Abel'sche Körper heisse „cyklisch", wenn seine Gruppe aus den Potenzen einer einzigen Substitution besteht. Es wird dann zunächst eine Reihe von Hülfssätzen über cyklische Körper entwickelt, die auf deren Unterkörper Bezug haben.

Da sich ein Abel'scher Körper aus cyklischen Körpern L zusammensetzen lässt, deren Grade die Potenzen einer Primzahl sind, so ist zu zeigen, dass ein jeder solcher Körper L ein Kreiskörper ist.

Ausser den angedeuteten Hülfssätzen kommt hierbei wesentlich ein Satz von Minkowski in Betracht, wonach jede Discriminante Primzahlen als Factoren enthalten muss.

Aus dem Beweise geht zugleich hervor, wie man alle Abel'schen Körper von gegebener Gruppe und Discriminante aufstellen kann.

My.

N. H. Abel. Memorias sobre las ecuaciones algébricas. Traducidas del Alemán por L. G. Gascó. I y II. Sobre la impossibilidad de la resolución algébrica de las ecuaciones. Valencia. 38 S. 8°.

Eine spanische Uebersetzung der Abel'schen Abhandlungen über die Unmöglichkeit der algebraischen Auflösung der Gleichungen vom höheren Grade als dem vierten, als Beilage zu dem neu gegründeten Archivo de Matemáticas puras y aplicadas veröffentlicht. Unter dem Titel Biblioteca matemática sollen solche klassischen Arbeiten in Zukunft den spanischen Lesern zugänglich gemacht werden. Tx. (Lp.)

J. Pierpont. On the Ruffini-Abelian theorem. American M. S. Bull. **2**, 200-221.

Der Ruffini'sche Versuch, die algebraische Unauflösbarkeit der Gleichungen von höherem Grade als dem vierten zu beweisen, ist „höchst interessant und schätzbar, aber nicht beweiskräftig". An dem Abel'schen Beweise findet der Verf. den substitutionentheoretischen Teil zu weitschweifig, den algebraischen ohne Grund mit einer Klassificirung der Functionen nach Ordnung und Grad bepackt, wobei ausserdem ein den sonstigen Gang nicht beeinflussender Fehler untergelaufen ist. Einen strengen und directen Beweis findet man dagegen bei Kronecker (Berl. Ber.; F. d. M. **11**, 59, 1879), wo jedoch eine zu genaue Bekanntschaft

mit dem Abel'schen Beweise vorausgesetzt sei; auch meint der Verf., Kronecker habe durch zu engen Anschluss an den substitutionentheoretischen Teil des Abel'schen Beweises nicht die einfachste Gestalt des Nachweises erreicht. Daher unternimmt Pierpont die Darstellung des Beweises für das Ruffini-Abel'sche Theorem in directer und abgeschlossener Form für solche Leser, die sich nicht speciell mit der höheren Algebra beschäftigt haben, und hat zu diesem Zwecke im § 8 ein erläuterndes Beispiel völlig durchgeführt. Ausser diesem Beweise giebt er noch zwei andere. Der eine ist eine Modification der Ruffini'schen Form, der andere die Kronecker'sche Modification der Abel'schen. Die drei Beweisformen haben ihren, im wesentlichen von Abel herrührenden algebraischen Teil gemeinschaftlich, während der substitutionentheoretische nach dem Grade der Verwickelung wächst. Auf die Darstellung in Weber's Lehrbuch der Algebra (1895) ist nicht Bezug genommen. Lp.

E. Netto. Ueber die Irreductibilität ganzzahliger ganzer Functionen. Math. Ann. **48**, 81-88.

Nach anderer Richtung als früher (vgl. F. d. M. **26**, 116, 1895) verallgemeinert der Verf. in der vorliegenden Arbeit das Eisenstein'sche Theorem. Aus dem Inhalt der Arbeit wollen wir als Repräsentanten der beiden Reihen abgeleiteter Sätze nur die beiden folgenden anführen:

1) „Ein Polynom von der Gestalt $z^n+\gamma_1 p z^{n-1}+\cdots+\gamma_{n-k-1} p . z^{k+1} +\gamma_{n-k} p^2 z^k+\gamma_{n-k+1} p^2 z^{k-1}+\cdots+\gamma_n^0 p^2$, in welchem γ_n^0 eine gegen die Primzahl p teilerfremde ganze Zahl bedeutet und $n > 2k$ ist, besitzt keinen Teiler von geringerem als dem $(k+1)^{\text{ten}}$ Grade".

2) „Wenn im Polynom $z^n+c_1 z^{n-1}+c_2 z^{n-2}+\cdots+c_{n-1} z+c_n$ alle Coefficienten c_λ durch p teilbar sind, c_{n-1} aber durch keine höhere Potenz von p als die erste, dann ist es entweder irreductibel, oder es zerfällt in der Weise, dass es einen Factor des Grades 1 und einen anderen irreductiblen Factor des Grades $(n-1)$ besitzt". F.

G. Kreuzberg. Ein Beweis für die Zerlegbarkeit rationaler ganzer Functionen einer Veränderlichen mit reellen Coefficienten in reelle Factoren ersten und zweiten Grades. Diss. Bonn. 32 S. 8°.

G. Cordone. Sopra una classe d'equazioni risolubili algebricamente. Palermo Rend. **10**, 161-176.

Wenn eine Wurzel einer irreductiblen Gleichung n^{ten} Grades eine rationale Function einer anderen Wurzel derselben Gleichung ist, so lassen sich bekanntlich die sämtlichen Wurzeln in eine Anzahl (ν) Gruppen ordnen, deren jede gleich viel $(n:\nu)$ Glieder enthält, von der Art, dass jedes Glied einer Gruppe dieselbe rationale Function des vorhergehenden Gliedes ist und die Glieder aller Gruppen aus den Anfangsgliedern in derselben Weise entstehen. Die Gleichungen ν^{ten} Grades, denen die Wurzeln einer Gruppe genügen, sind algebraisch auflösbar,

ihre Coefficienten hängen aber von einer Gleichung des Grades $n:\nu$ ab, die im allgemeinen nicht algebraisch auflösbar ist.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich nun damit, die Bedingungen aufzusuchen, denen die Wurzeln der gegebenen Gleichung genügen müssen, damit auch die Wurzeln dieser Resolvente des Grades $n:\nu$ in ähnlicher Weise in Gruppen zerfallen, ihre Auflösung also von derjenigen einer neuen Resolvente abhängt, deren Grad ein Teiler von $n:\nu$ ist, damit ferner auch diese zweite Resolvente in derselben Art weiter zurückgeführt werden kann auf eine Gleichung von noch niedrigerem Grade u. s. w., bis man schliesslich auf eine direct auflösbare Resolvente gelangt.

F.

L. Gegenbauer. Zwei allgemeine Sätze über Sturm'sche Ketten. Amst. Sitz.-Ber. **5**, 185-193.

Wenn die ganze Function $f_n(x)$ der Gleichung genügt: $f_n(x) + (a_n x + b_n) f_{n-1}(x) + c_n f_{n-2}(x) = 0$, und ihre Derivirte einer Gleichung derselben Form, so bilden, abgesehen von gewissen Coefficienten, $f_n(x)$, $f'_n(x)$, $f'_{n-1}(x)$, ... und $f_n(x)$, $f_{n-1}(x)$, $f_{n-2}(x)$, ... zwei Sturm'sche Ketten, wenn die Wurzeln einer gewissen quadratischen Gleichung ausserhalb des von den Nullwerten der $f_n(x)$ gebildeten Intervalles liegen. Diese allgemeinen Sätze enthalten die unten referirten Sätze von J. de Vries als Specialfälle.

Mo.

J. de Vries. Ueber gewisse Sturm'sche Ketten. Nieuw Archief (2) **3**, 40-52.

Für die Function $V_n(y) = [(y+\sqrt{y^2-4})^n + (y-\sqrt{y^2-4})^n]:2^n$ werden zwei Sturm'sche Ketten gebildet aus den Functionen V_n, V_{n-1}, V_{n-2}, ..., V_0, bezw. V_n, V'_n, V'_{n-1}, ..., V'_1. Aehnliche Ketten für drei verwandte Functionen. Lineare Differentialgleichungen für diese vier Functionen.

Mo.

E. Borel. Sur le théorème de Descartes. Darboux Bull. (2) **20**, 327-328.

Der Satz von Descartes giebt bekanntlich eine obere Grenze für die Anzahl der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung. In der vorliegenden Note wird gezeigt, wie die von Null verschiedenen Coefficienten der Gleichung zu wählen sind, damit das Maximum wirklich erreicht werde.

F.

E. Baudran. Solution de la question 286. J. de Math. spéc. (4) **5**, 19-20.

Die Gleichung

$$Ax^m + \binom{m}{1} Bx^{m-1} + \binom{m}{2} Ax^{m-2} + \binom{m}{3} Bx^{m-3} + f_{m-4}(x) = 0,$$

wo $f_{m-4}(x)$ ein ganzes Polynom $(m-4)^{\text{ten}}$ Grades bezeichnet, hat mindestens zwei imaginäre Wurzeln (Satz von G. de Longchamps).

Lp.

GUITTON. Solution de la question 95. J. de Math. spéc. (4) **5**, 46-47.

Wenn die Gleichung $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ lauter reelle Wurzeln von demselben Vorzeichen hat, so sind alle Wurzeln der Gleichung $a_0+a_1x\cos(\varphi+\theta)+\cdots+a_nx^n\cos(\varphi+n\theta)=0$ reell (Satz von Laguerre). Lp.

H. VOGT. Résolution algébrique de l'équation binôme $x^p-1=0$ dans le cas où p est un nombre premier. Application à l'inscription des polygones réguliers de p côtés. Rev. de Math. spéc. **6**, 417-425.

S. GIERMANN. Einige Anwendungen der Binomialgleichungen $z^n-1=0$ und $z^n+1=0$. Spaczinsky's Bote. 226 (Russisch). Wi.

V. MOLLAME. Le equazioni cubiche con radici reali per le quali la formola cardanica diviene algebricamente reale, ed il „casus irreductibilis". Nota II. Napoli: Tip. dell'Accademia Reale delle Scienze fisiche e matematiche. 20 S. 4°.

Nachdem der Verfasser seinen früheren (Sul casus irreductibilis dell'equazione cubica, Napoli Rend. (2) **4**, 167-171; F. d. M. **22**, 112, 1890) Beweis von der Unaufhebbarkeit des casus irreductibilis wiedergegeben hat, sucht er die allgemeinste Form der kubischen Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln auf, für welche auf algebraischem Wege die cardanische Formel auf reelle Form gebracht werden kann. Die gesuchte Form ist: $x^3-3\lambda^2(\mu^2+1)x+2\lambda^3(\mu^3-3\mu)=0$, wo λ, μ zwei unabhängige reelle Constanten darstellen. Ist $x^3+px+q=0$ eine kubische Gleichung, welche die besprochene Eigenschaft besitzt, und bezeichnet Δ ihre Discriminante (d. i. $\Delta=-27q^2-4p^3$), so ist die kubische Hülfsgleichung $(3z^2-1):(z^3-3z)=(\Delta:3)^{\frac{1}{2}}:3q$ reductibel, und umgekehrt.

Es ist nicht klar, worauf die Bezeichnung Nota II sich bezieht; vielleicht soll die vorliegende Note als eine Fortsetzung der oben angeführten gelten. Vi.

M. SEPP. Zur Auflösung der kubischen Gleichungen. Hoffmann Z. **27**, 253-256.

Die aufzulösende Gleichung sei (1) $f(x)=x^3+px^2+qx+r=0$.

Sind nun ξ_1 und ξ_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $f'(x)=0$, so gewinnt der Verf. die Lösung der kubischen Gleichung (1) in der Form: $x=-\frac{1}{3}p-\{\frac{1}{4}[f(\xi_1)+f(\xi_2)]+\sqrt{f(\xi_1)f(\xi_2)}\}^{\frac{1}{3}}-\{\frac{1}{4}[f(\xi_1)+f(\xi_2)]-\sqrt{f(\xi_1)f(\xi_2)}\}^{\frac{1}{3}}$, wo man $f(\xi_1)$ und $f(\xi_2)$ setzen kann:

$$f(\xi_1)=r-\tfrac{1}{3}pq+\tfrac{2}{27}p^3+2\{\tfrac{1}{9}p^2-\tfrac{1}{3}q\}^{\frac{1}{3}},$$
$$f(\xi_2)=r-\tfrac{1}{3}pq+\tfrac{2}{27}p^3-2\{\tfrac{1}{9}p^2-\tfrac{1}{3}q\}^{\frac{1}{3}}.$$

Lp.

W. Heymann. Didaktische Bemerkungen zur kubischen Gleichung. Schlömilch Z. **41**, 58-62.

Beim ersten Unterrichte wird die reducirte kubische Gleichung gewöhnlich so aufgelöst, dass man die Unbekannte als Summe zweier neuen Grössen darstellt und so die gegebene Gleichung durch ein System zweier (quadratischen) Gleichungen ersetzt. Das Unbefriedigende dieser Methode will Heymann vermeiden, indem er umgekehrt von dem System der beiden quadratischen Gleichungen ausgeht und dann mittelst einer Identität, deren Verwendung nach Meinung des Ref. dem Schüler aber auch wieder unmotivirt erscheinen wird, die Gleichung aufstellt, welcher die Summe der beiden Unbekannten genügt, und so zur reducirten Form der kubischen Gleichung gelangt.

Eine andere Bemerkung bezieht sich auf solche, zur Lösung stereometrischer Aufgaben dienende kubische Gleichungen, deren sämtlichen Wurzeln, selbst wenn sie reell sind, nicht eine geometrische Bedeutung zukommt. F.

E. Humbert. Invariant de la forme cubique. Application à la résolution de l'équation du troisième degré. (Leçon d'agrégation.) Rev. de Math. spéc. **6**, 370-374.

J. Girod. Sur la résolution de l'équation du troisième degré par des formules trigonométriques. Rev. de Math. spéc. **6**, 300-302.

Ch. H. Kummell. To express the roots of the solvable quantics as symmetrical functions of homologues. American J. **18**, 74-94.

Der Verf. entwickelt eine grosse Reihe von Formeln für die Auflösung der Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades mit einer Unbekannten. Diese Formeln, von denen einige neu sein dürften, mögen für den Unterricht nicht ohne Nutzen sein. Es seien die vorgelegten Gleichungen: $0=ax^2+2bx+c$, $0=ax^3+3bx^2+3cx+d$, $0=ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e$.

Nun setzt der Verf. successive (wie schon andere vor ihm): $0=ax+b+b'$, $0=ax+b+b'+b''$, $0=ax+b+b'+b''+b'''$ und bestimmt die Hülfsgrössen b so, dass die vorgegebenen Gleichungen zu reducirten werden, wobei verschiedentlich die Einführung von Hülfswinkeln nötig wird. Die biquadratische Gleichung lässt mehrere Behandlungen zu.

Worauf der Verf. Wert zu legen scheint, mag an dem Fall der kubischen Gleichung gezeigt werden. Indem er die Lösung der vorgelegten Gleichung der der reciproken (welche die Bestimmung zweier zu den b', b'' analogen Hülfsgrössen c', c'' erfordert) gegenüberstellt, gelangt er zu folgenden Relationen: $b'b''=b^2-ac$, $b''b=b'^2-ac$, $bb'=b''^2-ac''$, $bc+b'c'+b''c''=ad$, $bc'+b'c''+b''c=0$, $bc''+b'c+b''c'=0$, $c'c=c''^2-b''d$, $cc''=c'^2-b'd$, $c''c'=c^2-bd$.

Am Schlusse macht der Verf. darauf aufmerksam, welche „interessanten“ Zusammenhänge zwischen seinen Bildungen und den In- und Covarianten der zugehörigen binären Formen bestehen.

Sicher haben die Formeln des Verf. ein elegantes Aussehen; es ist nur zu bedauern, dass diese Eleganz eine rein äusserliche ist: auf den inneren Connex mit der Gruppentheorie einerseits, mit der Invariantentheorie andererseits fällt kein Licht. Im übrigen citirt der Verf. nur Euler und sich.

Wie sich der innere Zusammenhang der Auflösungsformeln mit der Invariantentheorie bei ausgiebiger Benutzung der modernen Hülfsmittel gestaltet, hat E. Study dargelegt (cf. F. d. M. **26**, 143, 1895).

My.

F. Hack. Beiträge zur Anwendung der Gruppentheorie auf kubische und biquadratische Gleichungen. Diss. Tübingen. 36 S. 8° (1895).

R. Hoppe. Bezirke der drei Wurzelformen der Gleichung vierten Grades. Hoppe Arch. (2) **14**, 398-404.

Durch eine lineare Transformation wird die allgemeine Gleichung vierten Grades auf die Form $x^4+ax^2+x+b=0$ gebracht, die nur noch zwei Parameter enthält. Die Gesamtheit der durch diese Form dargestellten Gleichungen kann demnach durch die sämtlichen Punkte einer Ebene repräsentirt werden.

Die drei Gebiete, welche den Gleichungen mit 0, 2, 4 reellen Wurzeln entsprechen, werden durch eine aus zwei Zweigen bestehende Curve getrennt, welche in der Arbeit näher discutirt wird. F.

F. Giudice. Sull'equazione di 5° grado. Torino Mem. (2) **46**, 31-64.

Der Verfasser betrachtet jede Auflösungsmethode einer algebraischen Gleichung des fünften Grades als die Identificirung derselben oder einer ihrer Transformirten mit einer algebraisch auflösbaren Gleichung desselben Grades. Natürlich wird eine solche Identificirung nur durch Einführung transcendenter Irrationalitäten möglich werden. Darnach stellt er vier Typen von algebraisch auflösbaren Gleichungen auf, welche die Nummern (35'), (36), (37), (39) tragen, ebenso vier Transformirte der allgemeinen Gleichung des fünften Grades, d. i. der Gleichung, bei welcher das Glied mit x^4 fehlt (31), und die von Klein (Vorlesungen über das Ikosaeder. Leipzig: Teubner, 1884) als Hauptgleichung (22), Diagonalgleichung (34) und Bring'sche Gleichung (32) bezeichneten Typen. Die Identificirung von (35'), (36), (37) und (39) mit (31) bezw. (22), (34) und (32) bringt auch viele Auflösungsmethoden, von denen die erste auf die Malfatti'sche Resolvente führt (vgl. darüber: F. Giudice, Sulla risolvente di Malfatti, Torino Atti **27**, 817-826; F. d. M. **24**, 97, 1892), die zweite und die dritte mit den zwei von Klein a. a. O. dargelegten Methoden zusammenfallen. Vgl.: F. Giudice, Sulla soluzione dell'equa-

zione algebrica di 5° grado con l'aggiunta dell'irrazionalità icosaedrale, Torino Atti **28,** 664-683; F. d. M. **25,** 156, 1893/94. Vi.

G. Vivanti. Ueber die Ikosaederirrationalität. Monatsh. f. Math. **7,** 69-72.

Die allgemeine Gleichung eines Grades $n > 5$ wird nach Adjunction der Wurzel einer Ikosaedergleichung noch nicht algebraisch lösbar. Fr.

F. Brioschi. Sur l'équation Jacobienne du sixième degré. Quart. J. **28,** 382-384.

In dem Aufsatze „On the Jacobian sextic equation" (cf. F. d. M. **13,** 362, 1881) hat Cayley die Invariantenrelation angegeben, die bestehen muss, wenn die Gleichung sechsten Grades eine Jacobi'sche (Multiplicator-Gleichung) sein soll. In der vorliegenden Note vereinfacht Brioschi diese Bedingungsgleichung durch Einführung zweier anderen Invarianten. Diese selben Invarianten führt er sodann in die von Joubert angegebene Transformation der Gleichung sechsten Grades ein und leitet durch diese Transformation in eleganter Weise aus der Jacobi'schen Gleichung sechsten Grades die von ihm selbst schon 1858 angegebene bekannte Resolvente fünften Grades ab. Schliesslich charakterisirt er durch je zwei Beziehungen zwischen Invarianten die beiden Fälle, in welchen die Jacobi'sche Gleichung durch elliptische Functionen lösbar ist. F.

G. Frattini. Di un'equazione del 6° grado risolubile per radicali. Periodico di Mat. **11,** 106-107.

Jede Gleichung sechsten Grades kann in die Form gebracht werden: $P_3^2+P_1^2+P_0=0$, wo P_3, P_1, P_0 Polynome in x vom Grade bezw. 3, 1, 0 sind. Ist $P_0=0$, so folgt $P_3=\pm iP_1$; daher ist x durch Wurzelzeichen darstellbar. Lp.

G. Frattini. Intorno a una proprietà dell'equazione di sesto grado. Periodico di Mat. **11,** 142-145.

Wenn die Summe dreier Wurzeln einer Gleichung sechsten Grades gleich der Summe der drei übrigen ist, so ist die Gleichung durch Wurzeln auflösbar. Die Gleichung ist dann nämlich auf die Form $P_3^2-P_1^2=0$ zurückzuführen (vergl. das vorige Referat). — Durch Nachbildung des Beweises für die Gleichung zehnten Grades ergiebt sich, dass, wenn bei einer solchen die Summe von fünf ihrer Wurzeln und die Summe der Combinationen derselben zu je zweien bezw. gleich der Summe der fünf anderen und ihrer Combinationen zu je zweien ist, die Gleichung in zwei Factoren fünften Grades zerlegbar ist, sich also durch elliptische Functionen auflösen lässt. Lp.

E. M. Lémeray. Sur la convergence des substitutions uniformes. C. R. **128**, 793-794.

Sei $f^k(x) = f(f^{k-1}(x))$; sei a eine Wurzel der Gleichung $f(x) - x = 0$ [so ist zu lesen statt $f(x-x)$]; sei $|f'(a)| = 1$. Es wird untersucht, wie x gewählt werden muss, damit $\lim_{k=\infty} f^k(x) = a$ wird. Bdt.

K. Scheele. Ueber die Auflösung algebraischer Gleichungen durch unendliche Reihen. Pr. (No. 546) Wettiner Gymn. Dresden. 29 S. 4°.

Die Arbeit beschäftigt sich mit Reihenentwickelungen für die Wurzeln algebraischer Gleichungen, deren Coefficienten von mehreren Variabeln abhängen, also mit einem Thema, das schon Heymann in seiner Arbeit: „Transcendente Auflösung der allgemeinen algebraischen Gleichungen n^{ten} Grades" behandelt hat. Den Ausführungen zu Grunde gelegt wird die Gleichung in der Form $z_1 x^{n_1} + z_2 x^{n_2} + \cdots + z_m x^{n_m} - x + 1 = 0$, worin die z complexe Variabeln und die Exponenten n rationale Zahlen bedeuten. Mit Hülfe eines von Weierstrass bewiesenen Satzes (Abhandlungen aus der Functionenlehre, Seite 107) werden für die Wurzeln der Gleichung Reihen abgeleitet, die nach Potenzen der z, bezw. nach Potenzen algebraischer Functionen der z fortschreiten, und Bereiche angegeben, in denen die Reihen convergiren. Specialisirt werden die Resultate für trinomische Gleichungen, deren wahre Convergenzbezirke sich bestimmen lassen. Als wesentlichen Teil seiner Arbeit bezeichnet der Verf. sodann selbst die Aufgabe: „Aus bestehenden Reihenentwickelungen durch lineare Substitutionen neue Reihen abzuleiten und zu untersuchen, unter welchen Bedingungen diese neuen Reihen die Wurzeln der vorgelegten Gleichung darstellen". F.

N. W. Bugaiew. Die Methode der successiven Annäherungen in ihrer Anwendung auf die numerische Auflösung der algebraischen Gleichungen. Mosk. Math. Samml. **18**, 289-337. (Russisch.)

N. W. Bugaiew. Die Methode der successiven Annäherungen und ihre Anwendung auf die Entwickelung der Functionen in stetige Reihen. Mosk. Math. Samml. **18**, 471-507. (Russisch.)

N. W. Bugaiew. Die Methode der successiven Annäherungen und ihre Anwendung auf die Ableitung der Theoreme von Taylor und Lagrange in einer modificirten Form. Mosk. Math. Samml. **18**, 586-598. (Russisch.)

N. W. Bugaiew. Die Methode der successiven Annäherungen und ihre Anwendung auf die Integration der Differentialgleichungen. Mosk. Math. Samml. **19**, 1-44. (Russisch.)

Der Verf. giebt in einer Reihe von interessanten Abhandlungen die allgemeine Theorie der Methode der successiven Annäherungen nebst ihren vielfachen Anwendungen. Es sei die wahre Grösse einer Unbekannten α und die erste Annäherung α_1, so dass $\alpha = \alpha_1 + \omega_1$. Wenn

man in irgend einer Weise einen anderen Ausdruck für α in der Form $\alpha = f(\alpha_1) + \psi(\omega_1)$ erhält, so ist $\alpha_2 = f(\alpha_1)$ die zweite Annäherung und $\omega_2 = \psi(\omega_1)$ der zweite Fehler. Falls $|\psi(\omega_1)| < |(\omega_1)|$ für jede Grösse von ω_1 und die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sich der Grenze α nähern, hat man für α eine stetige Reihe: $\alpha = \lim ffff \ldots f(\alpha_1) = f^{\infty}(\alpha_1)$. Die Function $f(\alpha_1)$ ist der „Schlüssel" der stetigen Reihe.

Diese allgemeinen Betrachtungen werden von dem Verf. successive angewandt: 1) auf die Auflösung der numerischen Gleichungen, 2) auf die Entwickelung der Functionen in stetige Reihen, 3) auf die Ableitung der Theoreme von Taylor und Lagrange und 4) auf die Integration der Differentialgleichungen.

I. Um die Methode des Verf. für den Fall der Auflösung der numerischen algebraischen Gleichungen zu erklären, nehmen wir das von ihm ausführlich behandelte Beispiel der Ausziehung der Kubikwurzel aus einer Zahl N. Es sei α die erste Annäherung von $\sqrt[3]{N}$ und ω_1 der erste Fehler. Wenn wir die zweite der Gleichungen: $(\alpha - \alpha_1)^2 = \omega_1^2$, $(\alpha - \alpha_1)^3 = \omega_1^3$ mit der Gleichung $\alpha^3 - N = 0$ combiniren, so haben wir: $\alpha^2 - 2\alpha\alpha_1 + \alpha_1^2 = \omega_1^2$, $-3\alpha_1\alpha^2 + 3\alpha_1^2\alpha + N - \alpha_1^3 = \omega_1^3$. Diese zwei Gleichungen geben, nach α und α^2 aufgelöst, für α den Wert: $\alpha = \frac{N + 2\alpha_1^3}{3\alpha_1^2} + \omega_2$. Die Function $\frac{N + 2\alpha_1^3}{3\alpha_1^2}$ ist die Annäherungsformel zweiter Ordnung. Wenn man aber die Gleichung $\alpha^3 - N = 0$ mit den Gleichungen: $(\alpha - \alpha_1)^3 = \omega_1^3$, $(\alpha - \alpha_1)^4 = \omega_1^4$ combinirt, so erhält man: $\alpha = \frac{\alpha_1^4 + 2\alpha_1 N}{N} = \omega_3$ (die Annäherungsformel dritter Ordnung) u. s. w. Die eingehende Untersuchung dieser Formeln zeigt, dass, wenn man gewissen Bedingungen genügt, die Annäherung sehr rasch fortgehen kann. Die Methode von Newton hat eine grosse Analogie mit der angegebenen Methode; sie kann in demselben Sinne modificirt werden und giebt dann neben der gewöhnlichen Newton'schen Annäherungsformel: $\alpha_2 = \alpha_1 - f(\alpha_1) : f'(\alpha_1)$, die eine Annäherungsformel zweiter Ordnung ist, auch die Annäherungsformeln höherer Ordnung.

II. Die zweite Abhandlung behandelt die Entwickelung der Functionen von x in stetige Reihen von der Form $f(x, f(x, f(x, \ldots)$ oder nach abgekürzter Bezeichnung $|f(x, \alpha_1)|$. So ist z. B. $\log(x) = |\alpha_1 - 1 + x : e^{\alpha_1}|$. Der Verf. zeigt, dass die stetigen Reihen in vielen Fällen mit Vorteil die gewöhnlichen Potenzreihen ersetzen können und auch in solchen Fällen anwendbar sind, wo das Taylor'sche Theorem versagt, z. B. für die Function x^x. Es ergiebt sich, dass auch die Functionen, welche den simultanen Gleichungen genügen, sich nach dieser Methode in stetige Reihe entwickeln lassen.

III. Die Methode der successiven Annäherungen giebt auch die Theoreme von Taylor und Lagrange in einer neuen Form. Wenn $\phi(\alpha)$ die inverse Function von $\psi(\alpha)$ bezeichnet, so hat man z. B. das Theorem von Taylor in der Form:

$$\psi(x+h) = \psi(x)+h\psi'(x)+\cdots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}\psi^{(n)}(x)$$
$$-\frac{\phi\left(\psi(x)+h\psi'(x)+\cdots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}\psi^{(n)}(x)\right)-(x+h)}{\phi'\left(\psi(x)+h\psi'(x)+\cdots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}\psi^{(n)}(x)\right)}+R,$$

wo das Restglied R eine Grösse von der Ordnung h^{2n+2} ist.

IV. Auch auf die Integration der Differentialgleichungen kann man dieselbe Methode anwenden; dabei kann die Methode zwei Formen annehmen, je nachdem man die Entwickelung des Integrals nach aufsteigenden oder absteigenden Potenzen der Veränderlichen sucht. In dem Falle eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung geht die Methode von Bugaiew in die Methode über, welche von Picard in seinem Existenzbeweise der Integrale angewandt ist (Traité d'Analyse **2**, 301). Wi.

C. A. Laisant. Sur les méthodes d'approximation dans les équations algébriques. Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24**, 220-233.

Der Aufsatz enthält eine Anzahl von Bemerkungen über die Newton'sche Näherungsmethode und über die Methode der proportionalen Interpolation (regula falsae), sowie ihre zweckmässige Verknüpfung zur Berechnung reeller Wurzeln von Gleichungen mit reellen Coefficienten, ferner über die durch interpolirende Parabeln zweiter und dritter Ordnung erreichbaren Annäherungen, endlich über die Anwendung der erstgenannten beiden Methoden auf die Ermittelung der Zahlenwerte complexer Wurzeln von Gleichungen mit complexen Coefficienten. Lp.

E. Carvallo. Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes. Paris: Nony. 32 S.

E. M. Lémeray. Sur les racines de l'équation $x = a^x$. Nouv. Ann. (3) **15**, 548-556.

Die reellen Wurzeln der Gleichung $x = a^x$ werden als Grenzwerte der Ausdrücke dargestellt:

$$a^{a^{\cdot^{\cdot^{a^e}}}},\quad a^{a^{\cdot^{\cdot^{a^{1:e}}}}},\quad \underset{(a)}{\log}\,\underset{(a)}{\log}\ldots\underset{(a)}{\log} e,\quad \underset{(a)}{\log}\,\underset{(a)}{\log}\ldots\underset{(a)}{\log}(1:e).$$

F.

B. Mlodziewsky. Der Apparat von Prof. Mehmke für die Auflösung der Gleichungen höherer Grade. Mosk. Phys. Sect. **8**, 36-38. (Russisch.)

Eine einfache Erklärung der Theorie des Apparats von Professor Mehmke für die Auflösung der Gleichungen von der Form $\lambda^n+a\lambda^2+b\lambda+c = 0$. Wi.

W. H. O. MADSEN. Grafisk Lösning af Ligninger. Nyt Tidss. for Math. 7 B, 25-27.

In der Gleichung $x^n + ax + b = 0$ werden a und b als laufende Coordinaten betrachtet. Die Gleichung stellt alsdann eine Gerade dar, und falls man die Einhüllungscurve dieser Geraden zeichnet, wird die Gleichung gelöst, indem man die Richtungscoefficienten der Tangenten bestimmt. V.

M. D'OCAGNE. Sur les équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés. C. R. **123,** 988-990.

M. D'OCAGNE. Théorème relatif aux abaques. S. M. F. Bull. **24,** 98.

M. D'OCAGNE. Sur l'emploi des systèmes réguliers de points cotés pour la représentation des équations. C. R. **123,** 1254-1255.

M. D'OCAGNE. Sur la représentation monographique des équations du second degré à trois variables. S. M. F. Bull. **24,** 81-84.

Bei den graphischen Methoden von d'Ocagne zur Auflösung von Gleichungen handelt es sich bekanntlich darum, eine Gleichung zwischen drei Variabeln α_1, α_2, α_3 als Resultante von drei Gleichungen darzustellen, deren jede zwei Coordinaten (Punkt- oder Liniencoordinaten) und je eine der drei Variabeln als Parameter enthält. Die ersten beiden Arbeiten geben die Bedingung dafür, dass eine Gleichung von der Form $A\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + B_1\alpha_2\alpha_3 + B_2\alpha_3\alpha_1 + B_3\alpha_1\alpha_2 + C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + C_3\alpha_3 + D = 0$ durch drei lineare Systeme isoplether Punkte dargestellt werden kann. Die dritte Arbeit teilt die Bedingungen mit, unter denen diese Systeme durch eine lineare Transformation sich in „reguläre" (solche, bei welchen die gleichen Parameterdifferenzen entsprechenden Punkte auf der sie tragenden Geraden regulär angeordnet sind) verwandeln lassen. Die ausführliche Herleitung dieser Bedingung soll in einer künftigen Publication erfolgen. In der vierten Arbeit wird gezeigt, dass die allgemeinste Gleichung zweiten Grades zwischen drei Veränderlichen sich dann und nur dann durch einen aus einem System von Kreisen und zwei Systemen von parallelen Geraden gebildeten Abakus darstellen lässt, wenn die Gleichung, in welcher man die Veränderlichen als cartesische Coordinaten auffasst, eine Fläche definirt, die durch wenigstens eine der Coordinatenebenen in einer Ellipse geschnitten wird. F.

A. HURWITZ. Sur les conditions sous lesquelles une équation n'admet que des racines à partie réelle négative. Nouv. Ann. (3) **15,** 108-126.

Aus Math. Ann. **46,** 273-284; F. d. M. **26,** 119, 1895.

A. GAY. Les machines de M. Torres à résoudre les équations. Rev. gén. des sc. **7,** 684-688.

Kapitel 2.

Theorie der Formen (Invariantentheorie).

A. Capelli. Sopra un principio generale di aritmetica ed una nuova deduzione del teorema di Hilbert. Napoli Rend. (3) **2**, 198-208.

A. Capelli. Estensione del teorema di Hilbert al caso di polinomi con infiniti termini. Napoli Rend. (3) **2**, 231-234.

Der Hilbert'sche Satz (cf. F. d. M. **22**, 133, 1890) fliesst hier aus einem allgemeineren Principe. Es bedeute X irgend eine der unendlich vielen Lösungen der ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die ein gewisses Problem zulässt; ferner seien $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ etc. arithmetische Functionen der x, die für alle hier in Betracht kommenden Werte der x je einen bestimmten ganzen positiven Wert annehmen. Zwei Systeme gehören derselben „Klasse" an, wenn $\varphi(X') = \varphi(X)$, $\psi(X') = \psi(X)$ etc.; die Klasse X' heisst dagegen „enthalten" in der Klasse X, wenn $\varphi(X') \leqq \varphi(X)$, $\psi(X') \leqq \psi(X)$ etc. und hier wenigstens einmal das Kleiner-Zeichen gilt. Dann sagt das genannte Princip aus, „dass die Anzahl der Klassen, die keine andere Klasse mehr enthalten, eine endliche ist".

Der Beweis wird auf den einfacheren Fall zurückgeführt, wo die Functionen $\varphi, \psi, \ldots$ mit den Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ selbst übereinstimmen. Ein System X der x, das kein anderes mehr enthält, heisst ein „primäres". Dann ist also zu zeigen, dass die primären Systeme von (ganzen, positiven) Werten der x, die einem vorgelegten Probleme genügen, nur in endlicher Anzahl existiren.

Der Nachweis gründet sich auf ein arithmetisches Anordnungsprincip, ähnlich einem von Gordan beim Beweise des Hilbert'schen Satzes (cf. F. d. M. **25**, 175, 1893) benutzten. Danach lässt sich, wenn eine Reihe ganzer Functionen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ in bestimmter Folge vorliegt, eine weitere ganze Function φ mit Bezug auf diese Folge auf eine erste, zweite, ..., letzte „reducirte" Gestalt bringen.

In der zweiten Arbeit zeigt der Verf., wie der Hilbert'sche Satz auf Polynome mit unendlich vielen Gliedern ausgedehnt werden kann. Das Product zweier solchen Polynome f, φ lässt sich rein formal definiren, ohne auf die Convergenz von f, φ Rücksicht zu nehmen. Auch dann kann man alle Formen F der unbegrenzten Reihe $f_1, f_2, f_3, \ldots$ auf den Typus $F = f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2 + \cdots + f_k\varphi_k$ bringen, wo k ein bestimmbarer endlicher Index ist. Der Beweis basirt wiederum auf dem Begriff des reducirten Polynoms. My.

F. Brioschi. Sopra un teorema del sig. Hilbert. Palermo Rend. **10**, 153-157.

Hilbert hatte (cf. F. d. M. **18**, 96, 1886) ein invariantentheore-

tisches Kriterium dafür aufgestellt, dass eine binäre Form f_n von der Ordnung $n = \mu\nu$ die volle (μ^{te}) Potenz einer anderen Form φ_ν sei. Das Kriterium bestand im identischen Verschwinden einer invarianten Form C_ν.

Der Verf. gelangt zu einigen neuen Eigenschaften der C_ν, indem er sie gleichzeitig als invariante Bildungen der φ_ν auffasst, und irgend ein (verschwindendes) C_ν aus (nicht verschwindenden) $C_\lambda (\lambda < \nu)$ aufbaut. My.

E. B. Elliott. **Note on the linear factors of a quartic.** Messenger (2) **25**, 170-173.

Ein wohlbekannter Satz Cayley's besagt, dass, wenn u, H bezw. eine Form vierter Ordnung und ihre Hessiana bedeuten, und wenn c_1, c_2, c_3 die Wurzeln der Gleichung $4c^3 - Ic + J = 0$ sind, dann $(c_2 - c_3)\sqrt{c_1 u - H} + (c_3 - c_1)\sqrt{c_2 u - H} + (c_1 - c_2)\sqrt{c_3 u - H}$ das Quadrat eines linearen Factors von u ist, multiplicirt mit einer Function der Coefficienten. Der Aufsatz giebt einen einfachen Beweis dieses Satzes. Glr. (Lp.)

F. Brioschi. **Il risultante di due forme binarie biquadratiche e la relazione fra gli invarianti simultanei di esse (Lettera ad E. d'Ovidio).** Torino Atti **31**, 441-446.

Es handelt sich um die bereits von Bertini, d'Ovidio und v. Gall untersuchte Relation (Syzygie) zwischen den Invarianten zweier Binärformen φ, ψ vierter Ordnung, sowie um die damit eng verknüpfte Darstellung der Resultante R von φ, ψ durch die Invarianten. Der Verf. behandelt die Aufgabe auf einem neuen Wege, indem er von seinem Satze (cf. F. d. M. **26**, 115, 1895) Gebrauch macht, dass, wenn überhaupt zwei Binärformen φ_x, ψ_x eine Wurzel y gemein haben, so dass also $\varphi_x = (x-y)\alpha_x$, $\psi_x = (x-y)\beta_x$, die Invarianten von φ, ψ durch invariante Bildungen von α, β ausgedrückt werden können. Führt man das hier mit Hülfe von Formeln, die v. Gall (cf. F. d. M. **20**, 128, 1888) für zwei kubische Formen α, β angegeben hatte, aus, so gelangt man nach geeigneten Eliminationen schliesslich verhältnismässig schnell zu zwei Endgleichungen; die linke Seite der ersteren ist gerade die Resultante, durch Invarianten von φ, ψ ausgedrückt, während die andere die gesuchte Syzygie liefert, die sich nunmehr definitiv als vom sechsten Grade herausstellt. My.

E. Waelsch. **Ueber die Lamé'schen Polynome zweiter Ordnung einer Form fünfter Ordnung.** Wien. Ber. **105**, 741-748.

Sei a eine binäre Form fünfter Ordnung, c eine lineare, φ eine unbekannte binäre Form, so ist $(a\varphi)_2 + c\varphi = 0$ die Lamé'sche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit fünf singulären Punkten (Wurzelpunkten von a). Soll φ von der zweiten Ordnung sein, so giebt es sechs zugehörige Linearformen $c^{(i)}$, und entsprechend sechs Formen $\varphi^{(i)}$. Es

wird auf einfachem, symbolischem Wege gezeigt, dass das Product Φ der φ nichts anderes ist, als die Hermite'sche Schwesterform u_4 von a (entsprechend u_{n-1} für eine Form a n^{ter} Ordnung). Das Product t der c wird auf geometrischem Wege gebildet, so dass aus der Realität der c auf die Realität der φ geschlossen werden kann.

Das gemeinte geometrische Verfahren beruht darauf, dass a durch fünf Punkte einer kubischen Raumcurve C_3 repräsentirt wird, irgend eine Covariante m^{ter} Ordnung von a durch weitere m Punkte auf C_3. Diese Construction wird für alle C_3, die durch die fünf Punkte a gehen, wiederholt: die so entstehende Fläche ist das Bild der Covariante.

Die sechs Formen φ geben hier zu sechs Bisecanten von C_3 Veranlassung, welche auf einer Fläche dritter Ordnung liegen, die als Träger der ganzen Abbildung fungirt. Vgl. noch F. d. M. **24**, 763, 1892; **26**, 150, 1895. My.

J. Hammond. On the a, b, c form of the binary quintic. Lond. M. S. Proc. **27**, 392-402.

Nach Sylvester lässt sich eine binäre Form fünfter Ordnung f in die kanonische Gestalt bringen: $f = AX^5 + BY^5 + CZ^5$; $X + Y + Z = 0$. X, Y, Z sind die Wurzeln der (geeignet linear transformirten) Canonizante. Führt man die Wurzeln x, y der quadratischen Covariante der Canonizante als neue Variabeln in f ein, so nimmt f eine „typische“ Gestalt an; $f(a, b, c) = (a, b, c, a, b, c)(x, y)^5$, wo die a, b, c vermöge der dritten Einheitswurzeln ein durchsichtiges Aussehen gewinnen. Die Determinante $K = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ darf man gleich der Einheit annehmen; ihre drei Unterdeterminanten seien a', b', c'. Dann steht der Form $f(a, b, c)$ die „conjugirte“ Form $f'(a', b', c')$ in der Weise gleichberechtigt gegenüber, dass auch ihre Determinante K' gleich Eins wird, die Canonizante und die schiefe Invariante je identisch ausfallen.

Durch Heranziehung der conjugirten Form f gelingt es, die 23 Concomitanten von f in einer verhältnismässig einfachen Gestalt hinzuschreiben, indem man die Covarianten (2,2) und (3,3) als Ausgangspunkt nimmt.

Die inneren Gründe für den Dualismus zwischen f und f' und dessen Wirkung werden nicht angeführt. My.

E. B. Elliott. An exhibition of the completeness of the systems of four and five irreducible invariants of the binary quintic and the binary sextic. Messenger (2) **26**, 105-118.

Eine Invariante der binären Form $(a_0, a_1, \ldots, a_p)(x, y)^p$ ist bekanntlich ein Gradient (eine rationale, ganze, homogene, isobare Function) in den Coefficienten, dessen Grad i und Gewicht w mit p durch die Beziehung $ip = 2w$ zusammenhängen, und welcher durch den Differential-

operator $a_0 \frac{\partial}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial}{\partial a_2} + \cdots + p a_{p-1} \frac{\partial}{\partial a_p}$ zum Verschwinden gebracht wird. Eine Folge dieses Verschwindens ist die wohl bekannte Eigenschaft, dass die Terme in einer Invariante (falls solche da sind), welche frei von $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ sind, den Annihilator $(k+1)a_k \frac{\partial}{\partial a_{k+1}} + \cdots + p a_{p-1} \frac{\partial}{\partial a_p}$ haben. In der vorliegenden Arbeit, welche sich besonders mit den Fällen $k = 2$, $p = 4, 5, 6$ beschäftigt, macht der Verf. von der Umkehrung des Satzes Gebrauch: Die gradienten Lösungen von $\left(3a_2 \frac{\partial}{\partial a_1} + \cdots + p a_{p-1} \frac{\partial}{\partial a_p}\right) u = 0$, deren Grad und Gewicht die Beziehung $ip = 2w$ einzeln für die Werte 4, 5, 6 von p befriedigen, welche die von a_0, a_1 freien Teile in Invarianten der Form vierten, fünften, sechsten Grades bezw. sind, bestehen genau aus 1) allen denjenigen von geradem Gewicht und höherem Grade als dem ersten und 2) denen von ungeradem Gewichte, welche keine sowohl von a_{p-1} als auch von a_p freien Terme enthalten. Glr. (Lp.)

R. Alagna. Le relazioni irreduttibili fra gl'invarianti d'una forma qualunque d'ottavo ordine. Palermo Rend. **10**, 41-74.

In einer früheren Arbeit (cf. F. d. M. **24**, 123, 1892) hatte der Verf. Relationen zwischen den Invarianten einer binären Form f achter Ordnung aufgestellt, wobei es aber zweifelhaft blieb, ob es nicht noch Relationen von geringerem Grade gebe. Hammond hatte in einem Briefe an den Verf. aus Sylvester'schen Abzählungsprincipien gefolgert, dass zwischen den Invarianten der f_8 fünf fundamentale Relationen von den resp. Geraden 16, 17, 18, 19, 20, von denen drei als unabhängig betrachtet werden könnten, existiren müssten.

Diese Angabe bestätigt der Verf. mit Hülfe seiner früheren Formeln durch wirkliche Berechnung nach den bekannten Vorschriften der Symbolik. Die langen Endformeln herzusetzen, erscheint unthunlich. My.

H. Vogt. Réduction simultanée de deux formes quadratiques de trois variables à des formes canoniques. Application à l'étude d'un système de deux coniques. Nouv. Ann. (3) **15**, 441-469.

Das vielfach behandelte Titelproblem wird hier im Anschluss an eine bekannte Arbeit von Darboux (cf. F. d. M. **6**, 68, 1874) behandelt. Während aber Darboux das Problem ganz allgemein, unter Berücksichtigung aller Ausnahmefälle löst und demzufolge langwieriger Entwickelungen benötigt, zeigt der Verf., dass bei der Beschränkung auf zwei ternäre quadratische Formen schon ein einziges der Darboux'schen Principien hinreicht, um die vorliegende Frage, zugleich mit einigen verwandter Natur, zur Erledigung zu bringen. My.

Boulanger. Sur certains invariants relatifs au groupe de Hesse. C. R. **122**, 178-180.

Die sogenannte „Hesse'sche", dem ternären Gebiete ($u, v, w = 1$) angehörige Gruppe von 216 Substitutionen führt zu zwei fundamentalen Functionen x, y, vom Grade Null in u, v, w, die absolute Invarianten der Gruppe sind.

Nun hat Painlevé 1887 (cf. F. d. M. **19**, 336, 1887) darauf hingewiesen, dass zu jeder endlichen linearen Gruppe in zwei (nicht homogenen) Variabeln u, v vier Invarianten J, I, M, N gehören, die eine analoge Rolle spielen, wie die Schwarz'sche Function für Gruppen einer Variabeln. Als Resultat längerer Rechnungen teilt der Verf. hier die expliciten Ausdrücke der gemeinten vier Invarianten der Hesse'schen Gruppe als rationaler Functionen in x, y mit. Das Ergebnis erlaubt die vollständige algebraische Integration eines gewissen Systems partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung. My.

S. Pincherle. Le operazioni distributive e le omografie. Lomb. Ist. Rend. (2) **29**, 397-405.

Eine homogene lineare Transformation bei n Variabeln lässt sich durch cogrediente Substitutionen stets auf eine solche Form bringen, dass die Variabeln in mehrere völlig getrennte Gruppen zerfallen, und dass die Variabeln der einzelnen Gruppe eine Transformation der Gestalt $A(\omega) = z_1\omega$, $A(\omega^{(1)}) = \omega + z_1\omega^{(1)}$, $A(\omega^{(2)}) = \omega^{(1)} + z_1\omega^{(2)}$, ..., $A(\omega^{(\nu-1)}) = \omega^{(\nu-2)} + z_1\omega^{(\nu-1)}$ erfahren. Dabei bedeuten ω, $\omega^{(1)}$, ..., $\omega^{(\nu-1)}$ die ursprünglichen Variabeln, $A(\omega)$, $A(\omega^{(1)})$, ..., $A(\omega^{(\nu-1)})$ die transformirten. Diesen vielfach behandelten wichtigen Satz beweist der Verf. in der vorliegenden Arbeit, indem er den allgemeinen Begriff der distributiven Operation dabei zu Grunde legt. Hz.

H. B. Newson. On a remarkable covariant of a system of quantics. American M. S. Bull. **2**, 272-275.

Der Verf. führt seine Betrachtungen an drei homogenen Formen U, V, W von den Graden m, n, p in drei Variabeln x, y, z durch. Er nennt Cremoniana von U, V, W den Ort des Punktes, dessen erste Polaren in Bezug auf U, V, W einen gemeinschaftlichen Punkt haben. (Der Ort dieser gemeinschaftlichen Punkte ist die Jacobiana.) Die Cremoniana von U, V, W ist auch der Ort des Schnittpunktes der Polarlinien für die Punkte auf der Jacobiana. Die Eingehüllte aller Geraden, welche entsprechende Punkte auf der Jacobiana und Cremoniana verbinden, nennt der Verf. die Hyper-Cayleyana. Die Plücker'schen Zahlen dieser drei Curven werden kurz besprochen. Lp.

D. B. Mair. An algebrically complete system of quaternariants. Cambr. Trans. **16**, 1-13.

Im Anschluss an Forsyth, welcher (vgl. F. d. M. **21**, 118, 1889)

die für die Concomitanten der quaternären Formen charakteristischen partiellen Differentialgleichungen aufgestellt hat, berechnet Verf. durch symbolische Lösung dieser Differentialgleichungen das vollständige System der Concomitanten für einige specielle Fälle quaternärer Formen, nämlich für eine kubische sowie für ein System von zwei und drei quadratischen Formen. A. S.

G. Frobenius. Zur Theorie der Scharen bilinearer Formen. Zürich. Naturf. Ges. **41**, 2. Teil. 20-23.

Seien $P=\Sigma p_{ik}x_iy_k$, $Q=\Sigma q_{ik}x_iy_k$ zwei Bilinearformen von n Variabelnpaaren $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$; p_{ik} und p_{ki}, q_{ik} und q_{ki} conjugirt complex. Bei den beiden Determinanten $|p_{ik}|$, $|q_{ik}|$ wird nur von der ersteren das Nicht-Verschwinden vorausgesetzt. Endlich soll Q nicht negativ sein, falls x_i und y_i conjugirt complex sind. Weierstrass hat den Verf. auf die merkwürdige Erscheinung hingewiesen, dass in der Entwickelung $(Q-rP)^{-1}=Ar^{-a}+Br^{-a+1}+\cdots$ $(A\neq 0)$ nicht $a>2$ sein könne. Der Verf. beweist dies — durch geeignete Zusammensetzung und Differentiation nach r — nach einer von ihm im Journ. für Math. Bd. **84** entwickelten (von Weierstrass 1858 vorgezeichneten) Methode (cf. F. d. M. **9**, 85, 1877).

Der zweite Punkt der Note ist der Aufklärung eines Paradoxons gewidmet. Der Verf. hatte im Journ. f. Math. Bd. **86** (cf. F. d. M. **10**, 79, 1878) als Kriterium für die Aequivalenz von zwei Scharen von Bilinearformen das Verschwinden einer Determinante vom Grade $2n^2$ angegeben, das also scheinbar nur eine Bedingung repräsentirt, während es eigentlich n Bedingungen sein müssten. Der Widerspruch löst sich dadurch, dass eine Schar von Bilinearformen immer eine Substitution in sich selbst zulässt, deren Coefficienten mindesten n arbitäre Constanten enthalten. Daher verschwinden auch alle Unterdeterminanten der gemeinten Determinante von den Graden $2n^2-1$, $2n^2-2, \ldots,$ $2n^2-n+1$. My.

G. Frobenius. Ueber die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen. Berl. Ber. 1896, 7-16.

Für die ausgedehnten Untersuchungen Kronecker's über die Aequivalenz von bilinearen Formen aus den Jahren 1874 und 1890-1891 (cf. F. d. M. **6**, 71, 75, 1874; **22**, 169, 1890; **23**, 128, 1891) giebt der Verf. durch eine einfache Ueberlegung Ersatz.

Liegen zwei Scharen von Bilinearformen vor: $A=uA_1+vA_2$, $B=uB_1+vB_2$ in zwei Reihen von je m Variabeln, und sind A und B symmetrisch, oder A_1 und B_1 symmetrisch, A_2 und B_2 alternirend, oder endlich A und B alternirend, so hatten Weierstrass, Kronecker, Frobenius eine beschränktere Art von Aequivalenz untersucht, indem beide Reihen von Variabeln den nämlichen (congruenten) Substitutionen unterworfen werden. Die für die Aequivalenz im weiteren Sinne — wenn beide Variabelnreihen verschiedenen Substitutionen unterliegen —

notwendigen Bedingungen sind selbstredend auch für die engere Art von Aequivalenz erforderlich, aber sie reichen merkwürdiger Weise auch hin. Die Ueberlegungen des Verf. lassen den inneren Grund dieser Erscheinung hervortreten.

Es seien zwei Substitutionen P, Q bekannt, die eine symmetrische (alternirende) Form A wieder in eine ebensolche B transformiren, so wird aus P und Q eine Substitution R abgeleitet, die, auf beide Reihen von Variabeln angewandt, A in B überführt, und von A und B unabhängig ist.

Als Hülfsmittel dient ein Satz über Teilbarkeit ganzer Functionen, der durch Partialbruchzerlegung gewonnen wird; ist nämlich $\psi(x)$ eine ganze Function vom Grade m, so lässt sich eine ganze Function $\chi(x)$ vom Grade $m-1$ so bestimmen, dass $\chi^2(x)-x$ durch $\psi(x)$ teilbar wird.

Ist nun $\psi(U)=0$ die Gleichung niedrigsten Grades, der eine bilineare Form U (von nicht verschwindender Determinante) genügt, so wird $\chi^2(U)=U$: eine derartige Function $\chi(U)=U^{\frac{1}{2}}$ erfreut sich ausgezeichneter Eigenschaften. $U^{-\frac{1}{2}}$ lässt sich als ganze Function von U darstellen. In ähnlicher Weise lässt sich jede algebraische oder transcendente Function von U definiren, die sich in der Umgebung der Nullwerte von $\psi(x)$ regulär verhält.

Bedeutet P' die zu P conjugirte Form, so bestimmt sich die oben erwähnte Form R durch die Gleichung: $R=(P'Q^{-1})^{\frac{1}{2}}Q$; man hat dann $R'AR=B$. Daraus folgt der bekannte Hauptsatz, dass das Kriterium für die cogrediente Aequivalenz von A und B geliefert wird durch die Aequivalenz der Formenscharen $uA+vA'$ und $uB+vB'$.

My.

G. Landsberg. Ueber Fundamentalsysteme und bilineare Formen. J. für Math. **116**, 331-349.

Frobenius hat (cf. F. d. M. **10**, 79, 1878) zwei Scharen bilinearer Formen mit gleichen Elementarteilern auf rationalem Wege in einander (durch lineare Substitutionen) übergeführt. Das geschieht zunächst durch eine Substitution, deren Coefficienten noch ganze Functionen des Parameters der Schar sind: hinterher wird der Parameter durch eine gewisse Reduction entfernt. Der Verf. zeigt, dass der erste Schritt bei geeigneter Auffassung bereits den zweiten in sich enthält, wobei zugleich die Gesamtheit der überführenden Substitutionen auf rationalem Wege gewonnen wird.

Charakteristisch für die Methode des Verf. ist sein Ausgangspunkt, der Begriff des „Fundamentalsystems ganzer Functionen"; d. s. n ganze Functionen $u_i(z)$ von einem Grade $<n$ (mit einer nicht verschwindenden Coefficientendeterminante), die jede weitere solche Function u auf eine und nur eine Weise in die Form zu setzen erlauben: (1) $u=x_1u_1+x_2u_2+\cdots+x_nu_n$, wo die x von z unabhängig sind. Die u_i bilden dann zugleich ein „Fundamentalsystem für den Modul $F(z)$", wo (2) $F(z)=z^n+c_1z^{n-1}+c_2z^{n-2}+\cdots+c_n$ und die c beliebig sind,

d. h. es existirt die Congruenz: (3) $u \equiv x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n$ (mod. $F(z)$).

Aus den von Newton und Lagrange angegebenen Interpolationsmethoden ergiebt sich: Sind $u_1, u_2, \ldots, u_n$; $v_1, v_2, \ldots, v_m$ Fundamentalsysteme für zwei Moduln $P(z)$, $Q(z)$ von den Graden n, m, dann bilden für den Modul PQ die (4) $u_1, \ldots, u_n, Pv_1, \ldots, Pv_m$ stets ein Fundamentalsystem, dagegen die (5) $Qu_1, \ldots, Qu_n, Pv_1, \ldots, Pv_m$ dann, und nur dann, wenn P und Q keinen gemeinsamen Teiler haben. Hieraus folgt sofort, dass als Resultante von P, Q zu definiren ist die Determinante $|p_{ik}|$ des Gleichungssystems: (6) $Qu_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} u_k$ (mod. P), die von der Wahl der Fundamentalsysteme (u), (v) unabhängig ist. Die Verbindung der Fundamentalsysteme mit den bilinearen Formen wird hergestellt, sobald man, was nur auf eine Weise möglich ist, die Producte zu_i linear und homogen mod. F mit constanten Coefficienten a_{ik} darstellt: jedem Fundamentalsystem mod. F entspricht so eine einzige bilineare Form A mit den nämlichen Coefficienten a_{ik}.

Die Transformationen von bilinearen Formen werden hierdurch auf die von Fundamentalsystemen zurückgeführt. My.

A. Voss. Ueber die cogrediente Transformation der bilinearen Formen in sich selbst. Münch. Ber. **26**, 1896, 1-23.

F. Lindemann. Ueber die linearen Transformationen einer quadratischen Mannigfaltigkeit in sich. Münch. Ber. **26**, 1896, 31-66.

In seiner Bearbeitung der Clebsch'schen Vorlesungen über Raumgeometrie (cf. F. d. M. **23**, 703, 1891) hat Lindemann ein durch geometrische Ueberlegungen gestütztes Verfahren angegeben, alle (eigentlichen und uneigentlichen) linearen Transformationen einer quadratischen Form von drei und vier homogenen Variabeln in sich zu bestimmen, das dann kürzlich von Loewy (vergl. das Referat unten S. 83) auf den Fall von n Variabeln erweitert wurde. Voss wendet gegen die Loewy'sche Behandlung ein, dass sie weder die Anzahl der willkürlichen Parameter, noch die Analogie mit den Cayley'schen Formeln erkennen lasse, und schlägt einen directen Weg ein, der beide Uebelstände vermeidet, und auch die Ausdehnung auf die cogrediente Transformation einer bilinearen Form in sich zulässt.

Lindemann ist in der Lage, die Loewy'schen Formeln so umzugestalten, dass die Voss'schen Endresultate daraus hervorgehen.

Es wird nützlich sein, das Princip der Lindemann'schen Methode in Kürze zu recapituliren.

Eine quaternäre Form $f = \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k$ soll durch eine Substitution (1) $\xi_i = c_{i1} x_1 + c_{i2} x_2 + \cdots + c_{in} x_n$ in sich übergeführt werden. Auf der Verbindungslinie von x und ξ greife man ein Paar bez. $f = 0$ conjugirter Pole t, τ heraus, so dass (2) $x_i = xt_i + \lambda\tau_i$, $\xi_i = xt_i - \lambda\tau_i$. Die Aufgabe ist, die Coordinaten t_i und τ_i durch solche linearen Glei-

chungen zu verbinden, dass die daraus folgenden Gleichungen (1) f in sich transformiren. Führt man statt t seine Polarebene u ein, so wird man am einfachsten u und τ mittels der Verwandtschaft eines linearen Complexes in Beziehung setzen; dann werden die x_i und ξ_i lineare homogene Verbindungen der u_i, aus denen die letzteren zu eliminiren sind. Für die Behandlung der Ausnahmefälle wird die Hinzuziehung von linearen Hülfstransformationen mit verschwindender Determinante erforderlich.

Voss bringt diese Ueberlegungen in eine rein algebraische Form und erhält die linearen Relationen zwischen den t_i und τ_i durch das Verschwinden von Unterdeterminanten einer charakteristischen Function.

Lindemann gelangt unter Beibehaltung seines Weges und bei sorgfältiger Untersuchung der Ausnahmefälle zu demselben Ziel, indem er insbesondere nachweist, wie sich die formal verschiedenen Kriterien für die Ausnahmefälle in einander umformen lassen.

Der Formelreichtum ist zu gross, um hier ein näheres Eingehen zu ermöglichen. My.

A. Voss. Ueber die Anzahl der cogredienten und adjungirten Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst. Münch. Ber. **26**, 1896, 211-272.

A. Voss. Symmetrische und alternirende Lösungen der Gleichung $SX = XS'$. Münch. Ber. **26**, 1896, 273-281.

Der Verf. hat früher die cogredienten Transformationen U (mit Ausschluss gewisser singulärer) untersucht (cf. F. d. M. **21**, 126, 1889 und den vorangehenden Bericht), die eine bilineare Form S von nicht verschwindender Determinante in sich überführen. Das Problem kam zurück auf die Auflösung des Systems linearer Gleichungen (1) $SY+S'Y' = 0$; die Anzahl P der linear unabhängigen Lösungen von (1) liefert die Anzahl der Parameter des Problems.

Den obigen Transformationen U wird jetzt eine andere Klasse von Transformationen zugeordnet, die „adjungirten“, die durch die Gleichung (2) $(U')^{-1}SU = S$ definirt sind, d. h. es sind die Lösungen des Systems (3) $SY-S'Y' = 0$. Die Anzahl Q der Lösungen von (3) ist wiederum die Anzahl der Parameter.

Die allgemeine Bestimmung der Anzahlen P und Q scheint schwierig zu sein. Sind aber im besonderen die zu den Wurzeln $\varrho = \pm 1$ der charakteristischen Function $(S+\varrho S')$ gehörigen Elementarteiler alle einfach, so lassen sich P und Q angeben; es wird nämlich $P+Q = N$, $P-Q = \nu-\mu$, wo N die Zahl der mit der „antisymmetrischen“ Form $(S')^{-1}S$ vertauschbaren Formen bezeichnet, μ die Anzahl der Wurzeln -1, ν die der Wurzeln $+1$ der charakteristischen Function. Und zwar sind zu der Bestimmung nur rationale Operationen erforderlich. Aus der Gleichung (1) wird eine andere $SX+X'S = 0$ abgeleitet, für die stets ein vollständiges System von N Lösungen existirt, welches aus lauter alternirenden und symmetrischen Formen zusammengesetzt ist, die sich auch direct bestimmen lassen. Die beiderlei Anzahlen sind P, Q selbst.

Es giebt aber auch ein System von unabhängigen Lösungen von $SX+X'S=0$, in welchem jede Form das Product einer symmetrischen Form mit einer alternirenden ist, und ein analoger Satz besteht für die der Gleichung (3) correspondirende: $SX-X'S=0$, nur dass hier gleichartige Formen zu multipliciren sind.

Durch die ganze weitere Entwickelung zieht sich stets derselbe Grundgedanke, das Problem auf die Untersuchung von alternirenden und symmetrischen Formen zu reduciren. Die Anzahlen dieser Formen werden in der zweiten Arbeit auch für die einfachere Gleichung $SX=XS'$ bestimmt. My.

G. Sforza. Sulle forme bilineari simili (fine). Batt. G. **34**, 252-277.

Die Abhandlung bildet den Schluss derjenigen Arbeiten, über welche F. d. M. **25**, 189, 1894; **26**, 145, 1895 berichtet ist. Eine bilineare Form $T(x_i, u_i)$ repräsentirt zwei „transponirte" Substitutionen, nämlich einmal der x_i in die $\partial T:\partial u_i$, andererseits der u_i in die $\partial T:\partial x_i$. T sei links collinear zu einer Einheit M, rechts collinear zu einer Einheit N. T, N, M seien von gleichem Range. Die Bedingungen $T^{-1}T=N$, $TT^{-1}=M$ bestimmen die „Reciproke" T^{-1} von T bez. M, N.

Zwei Formen P, Q werden jetzt als „äquivalent collinear zu zwei Einheiten M, N desselben Ranges" definirt, wenn P in Q (und umgekehrt Q in P) durch zwei bez. M, N reciproke Substitutionen übergeht: P ist dann collinear zu der einen der beiden Einheiten M, N und Q zu der anderen.

Zwei solche Formen P, Q heissen endlich „ähnlich" bez. M, N, wenn sie bez. M, N die nämlichen charakteristischen Polynome besitzen; das Kriterium dafür drückt sich einfach dahin aus, dass P und Q bez. der Fundamentaleinheit $E=\Sigma u_i x_i$ ähnlich sind, lässt sich aber noch in verschiedene andere brauchbare Formen bringen.

Kennt man die charakteristischen Polynome zweier ähnlichen Formen P, Q, so kann man die Gesamtheit der Formen T, für die $T^{-1}PT=Q$, $T=MTN$ ist, formal construiren. Auf Grund der entwickelten Hülfsmittel giebt der Verf. drei Lösungen für das Aequivalenzproblem ähnlicher Formen.

Im Hinblick auf die ausgedehnte Abhandlung, die sich durch drei Jahrgänge des Batt. G. hinzieht, vermisst der Leser eine Zusammenstellung der wesentlichsten Resultate. My.

A. Loewy. Ueber die Transformationen einer quadratischen Form in sich selbst, mit vorzüglicher Berücksichtigung der uneigentlichen, sowie ihre Anwendungen auf Linien- und Kugelgeometrie. Inaug.-Diss. München; Leop. Nova Acta **65**, 1-66.

Geometrische Fragen haben das Problem der Transformation einer quadratischen Form in sich selbst entstehen lassen, und die zahlreichen Arbeiten über diesen Gegenstand zeigen, dass die geometrische Anwend-

barkeit auch der Hauptanziehungspunkt geblieben ist. Die vorliegende umfangreiche Abhandlung ist ein neuer Beleg hierfür. Sie zerfällt in zwei Teile, deren erster das Problem allgemein für beliebig viele Variabeln behandelt, während der zweite eine Reihe von geometrischen Anwendungen enthält. Aber auch der erste Teil ist durchweg geometrisch gefärbt.

Für eigentliche Transformationen hat zuerst Frobenius Formeln aufgestellt, welche alle Fälle ausnahmslos umfassen. Dabei werden die sogenannten speciellen Fälle aus dem allgemeinen (bei welchem die charakteristische Function keine Nullstelle -1 hat) durch einen Grenzübergang gewonnen. Später hat Lindemann für $n=4$ (Transformation einer Fläche zweiter Ordnung in sich) ein anderes Verfahren eingeschlagen, welches geeignet ist, ohne Grenzübergang alle, auch die sämtlichen uneigentlichen Transformationen, zu liefern und sich im wesentlichen auf geometrische Betrachtungen stützt. Diese Methode hat der Verf. auf den Fall eines beliebigen n (Raum R_{n-1} von $n-1$ Dimensionen) ausgedehnt. Die geometrische Behandlung bietet eigentümliche Schwierigkeiten; die verschiedenen speciellen Fälle, welche eintreten können, sind nicht leicht zu übersehen. Wenn infolge dessen schon bei der Transformation der Fläche zweiter Ordnung von Lindemann einige Möglichkeiten ausser Acht gelassen worden sind (von denen die eine vom Verf. bemerkt wurde), so wird man es verstehen, dass bei den allgemeinen Betrachtungen im R_{n-1} mehrfach Irrtümer mit untergelaufen sind. Vielleicht wäre es besser gewesen, der Verf. hätte den Weg, welchen eine geometrische Betrachtung gewiesen, zunächst rein analytisch unter Vermeidung auch der geometrischen Ausdrucksweise weiter verfolgt und erst später die Einkleidung in das geometrische Gewand vorgenommen; dann würde wohl auch die Darstellung an Klarheit gewonnen haben.

Die zur Anwendung kommende Methode soll hier in Kürze wiedergegeben werden. Es sei (1) $f(x) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k$ eine quadratische Form von nicht verschwindender Determinante, dann handelt es sich darum, alle Substitutionen (2) $x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} \xi_k$ $(i = 1, \ldots, n)$ anzugeben, für welche (3) $\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k - \sum_{i,k} a_{ik} \xi_i \xi_k = 0$ wird. Nimmt man zunächst an, (2) stelle eine solche Substitution dar, und setzt man, unter $\varkappa$, λ zwei feste von 0 verschiedene Constanten verstehend:

$$(4) \qquad \begin{cases} x_i = \varkappa t_i + \lambda \tau_i \\ \xi_i = \varkappa t_i - \lambda \tau_i \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

so folgt:

$$(5) \qquad \begin{cases} t_i = \dfrac{1}{\varkappa}(x_i + \xi_i) \\[2ex] \tau_i = \dfrac{1}{\lambda}(x_i - \xi_i), \end{cases}$$

woraus man sieht, dass t_i und τ_i je n lineare homogene Formen der n

unabhängigen Grössen ξ_i werden. Statt dieser kann man aber auch irgend welche anderen n unabhängigen Grössen u_i durch Gleichungen von der Form $\xi_i = \sum b_{ik} u_k$ einführen, so dass t_i und τ_i Functionen von diesen werden. Aus (4) folgt $\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k - \sum_{i,k} a_{ik} \xi_i \xi_k = 2\varkappa\lambda \sum_{i,k} a_{ik} t_i \tau_k$, und mithin nach (3): (6) $\sum_{i,k} a_{ik} t_i \tau_k = 0$. Umgekehrt ist (3) eine Folge von (4) und (6). Wenn man daher $2n$ lineare Formen $t_1, \ldots, t_n$, $\tau_1, \ldots, \tau_n$ und zwei Constanten $\varkappa$, λ so bestimmt, dass die Gleichung (6) besteht und ausserdem die durch (4) als lineare Formen der u_i bestimmten x_i ebenso wie die ξ_i unabhängig werden, so erhält man durch Elimination der u aus (4) eine Substitution, welche $f(x)$ in sich überführt, und jede Substitution, welche $f(x)$ in sich überführt, kann auf diese Weise erhalten werden.

Geometrisch kann man nun folgendermassen interpretiren: x_i, ξ_i, t_i, τ_i stellen Coordinaten von Punkten u_i von Ebenen im R_{n-1} dar, $f = 0$ ist eine Fläche zweiter Ordnung ($M_{n-2}^{(2)}$). Da t_i und τ_i lineare Functionen der u_i sind, so entspricht jeder Ebene u ein bestimmter Punkt t und ein bestimmter Punkt τ. Die hierdurch unter den Punkten t und τ hervorgerufene Correspondenz kann aber eine viel-vieldeutige sein. Aus (6) folgt, dass jedes Paar entsprechender Punkte t, τ in Bezug auf die Fläche f conjugirt ist.

Liegt eine Transformation der verlangten Art vor, so entspricht nach (5) jedem Punkte ξ ein Punkt t und ein Punkt τ. Die sämtlichen Hülfspunkte t können den ganzen Raum R_{n-1} erfüllen, sie können aber auch auf eine lineare Mannigfaltigkeit von weniger Dimensionen ($M_{n-m-1}^{(1)}$) beschränkt sein. Im ersten Falle, welcher dann eintritt, wenn die charakteristische Function $|c_{ik} - \varrho\delta_{ik}|$ für $\varrho = -1$ nicht verschwindet, entspricht jedem Punkte t ein bestimmter Punkt τ, und man kann für t_i irgend welche n unabhängigen Linearformen der u_i wählen. Um ein möglichst anschauliches Bild zu erhalten, setzt man $t_i = \sum_k A_{ik} u_k$, wo A_{ik} die Adjuncte von a_{ik} in der Determinante $|a_{ik}|$ bedeutet, d. h. man lässt jeder Ebene u als Punkt t ihren Pol in Bezug auf f entsprechen. Gleichung (6) geht dann über in (7) $\sum_i u_i \tau_i = 0$, da τ stets auf der Polarebene von t liegt. Die τ_i haben daher die Gestalt $\tau_i = \sum_k \alpha_{ik} u_k$, wo (8) $\alpha_{ik} = -\alpha_{ki}$ ist. Hieraus sieht man, dass in der Form:

$$\begin{aligned} x_i &= \varkappa \sum_k A_{ik} u_k + \lambda \sum_k \alpha_{ik} u_k \\ \xi_i &= \varkappa \sum_k A_{ik} u_k - \lambda \sum_k \alpha_{ik} u_k \end{aligned} \qquad (\alpha_{ik} = -\alpha_{ki})$$

alle Transformationen erhalten werden, deren charakteristische Determinante für $\varrho = -1$ nicht verschwindet.

Hat man eine Transformation, bei welcher für $\varrho = -1$ die charakteristische Determinante und ihre Unterdeterminanten bis zur $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ($m \geqq 1$) verschwinden, so sind die Hülfspunkte t auf eine

M_{n-m-1} beschränkt, welche als Schnitt von m Ebenen $v^{(1)}, \ldots, v^{(m)}$ erhalten werden kann. Es wird nun (§ 2) die Aufgabe behandelt, diejenigen Transformationen aufzustellen, bei welchen die Punkte t eine gegebene M_{n-m-1} erfüllen. Für t_i hat man dann irgend welche Linearformen zu wählen, welche den Gleichungen $\sum_i v_i^{(j)} t_i = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$, aber keinen weiteren unabhängigen genügen. Setzt man voraus, dass M_{n-m-1} nicht Tangentialmannigfaltigkeit von f ist, und ist φ die quadratische Form der u_i, welche, gleich Null gesetzt, den Schnitt von f und M_{n-m-1} in Ebenencoordinaten darstellt, so kann man $t_i = \frac{1}{2}(\partial\varphi : \partial u_i)$ annehmen. Man ordnet dann jeder Ebene ihren Pol in M_{n-m-1} in Bezug auf φ zu. Jeder Punkt τ, welcher einem Punkte t entspricht, liegt auf dessen Polarebene in Bezug auf f. Daraus kann aber nicht, wie es hier geschieht, geschlossen werden, dass die sämtlichen Punkte τ sich auf eine zu den $v^{(j)}$ conjugirte Ebene beschränken müssen. Infolge dieser Annahme geht eine Reihe von Transformationen verloren, schon in dem einfachen Falle, dass es sich um die Transformation eines Kegelschnittes in sich handelt. Ist $n-m$ gerade, so können vielmehr die τ auch den ganzen R_{n-1} ausfüllen. Für ungerades $n-m$ sind sie allerdings auf eine Ebene w beschränkt, von welcher sich auch zeigen lässt, dass sie zu den $v^{(j)}$ conjugirt sein muss. Doch ist diese Thatsache keineswegs unmittelbar zu ersehen. Im übrigen ist auch bei ungeradem $n-m$ die Einführung der Ebene w in die Betrachtung nicht notwendig. Die Polarebene von t, auf welcher alle zugehörigen Punkte τ liegen müssen, erhält man, wenn u irgend eine zu t gehörige Ebene ist, als Verbindungsebene der Pole $\eta^{(j)}$ der $v^{(j)}$ mit dem Schnitt der Ebenen v und u. Man erhält daher die allgemeinste Lösung der Gleichung (6), wenn man $\tau_i = \sum_{j=1}^{m} v_j \eta_i^{(j)} + \tau_i'$ setzt, wo die v_j beliebige Linearformen der u_i sind und τ_i' die allgemeinste Lösung der Gleichungen $\Sigma u_i y_i = 0$, $\Sigma v_i^{(j)} y_i = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ darstellt. Diese Gleichungen haben $n-m-1$ unabhängige Lösungen; das heisst aber nicht, dass jede Lösung aus diesen mit Hülfe constanter Coefficienten zusammengesetzt werden kann, vielmehr lässt sich leicht zeigen, dass die allgemeine Lösung τ' von $\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}$ willkürlichen Constanten abhängt. Die so erhaltenen Transformationen sind eigentliche für gerades, uneigentliche für ungerades n.

Der Fall, dass die M_{n-m-1} die Fläche f berührt, wird vom Verf. ausdrücklich ausgeschlossen; indessen giebt es natürlich auch Transformationen, bei denen die Hülfspunkte t eine Berührungsmannigfaltigkeit von f bilden. Solche Fälle treten schon für $n = 4$ auf, wie die die Form $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$ in sich überführende Transformation $x_1 = \xi_1$, $x_2 = -(\xi_2 - 2\xi_3 + 2\xi_4)$, $x_3 = -(2\xi_2 - \xi_3 + 2\xi_4)$, $x_4 = -(2\xi_2 - 2\xi_3 + 3\xi_4)$ zeigt. Die gegenteilige Behauptung in den Vorlesungen von Clebsch-Lindemann (Bd. 2_1, S. 369) ist daher unrichtig.

Hat man x und ξ durch t und τ ausgedrückt, so sind noch die

u zu eliminiren. Bei dieser in § 3 erledigten Aufgabe spielen die gleichzeitig mit f in sich übergehenden Ebenen eine wichtige Rolle. Ihnen wird in § 4 eine eingehendere Betrachtung gewidmet.

Die im zweiten Teile gegebenen Anwendungen der Hermite'schen Transformation betreffen ausser den Correlationen des Linienraumes ($n=6$) die Darboux'sche Kugelgeometrie (pentasphäre Coordinaten), damit im Zusammenhange die Transformation des Punktraumes durch reciproke Radien und Bewegung und die Transformation des linearen Complexes in sich ($n=5$), endlich die Lie'sche Kugelgeometrie, bei welcher die Kugel als Element des Raumes eingeführt wird ($n=6$). Es handelt sich dabei hauptsächlich um die Anwendung uneigentlicher Transformationen, und es wird eine Reihe interessanter Einzelheiten geboten. Erwähnt mag nur noch sein, dass der die Darboux'sche Geometrie betreffende Satz von Klein einen neuen einfachen Beweis erfährt. Stz.

A. Loewy. Zur Theorie der linearen Substitutionen. Math. Ann. **48**, 97-110.

S bedeute eine bilineare Form von n Variabelnpaaren mit nicht verschwindender Determinante. Eine lineare Substitution A, mit den Coefficienten a_{ik}, soll S cogredient in sich transformiren. Dann ist es Frobenius (cf. F. d. M. **9**, 85, 1877) für symmetrische und alternirende Formen S, Voss allgemein (cf. F. d. M. **21**, 126, 1889) gelungen, die n^2 Grössen a_{ik} rational durch Parameter darzustellen, wobei nur der „singuläre“ Fall ausgeschlossen wurde, in dem zwei gewisse, aus den a_{ik} gebildete Determinanten gleichzeitig verschwinden. Eben diesen Fall studirt der Verf. In der von Frobenius begründeten Symbolik besteht bekanntlich zwischen Substitutionen und bilinearen Formen kein wesentlicher Unterschied: A repräsentirt eine bilineare Form mit den Coefficienten a_{ik}. $E=\Sigma x_i y_i$ bezeichne die (mit jeder Form vertauschbare) Einheitsform. Unter der Voraussetzung, dass weder die Determinante von $A+E$, noch die von $A-E$ verschwindet, hat Voss die Form A in eine gewisse kanonische Form gebracht, die das Problem zu lösen gestattet.

Der Verf. teilt zunächst die singulären Substitutionen A (für die also die beiden erwähnten Determinanten verschwinden) in zwei Gattungen ein, in die „wesentlich“ und „ausserwesentlich“ singulären: das Product einer Substitution der ersteren Gattung mit jeder nicht singulären Substitution liefert wieder eine singuläre Substitution.

In einem wichtigen Falle lassen sich die wesentlich singulären Substitutionen unmittelbar angeben. Bekanntlich heisst eine Substitution eigentlich oder uneigentlich, je nachdem ihre Determinante den Wert $+1$ oder -1 besitzt. Wenn nun alle eigentlichen Transformationen von S in sich ein irreducibles System bilden, so fallen die wesentlich singulären Transformationen zusammen mit den uneigentlichen einer Form gerader Ordnung. Solche Formen S sind z. B. stets die symmetrischen und alternirenden.

Unter den ausserwesentlich singulären Substitutionen zeichnen sich aus die durch Zusammensetzung einer nicht singulären Substitution mit sich selbst entstehenden; die Darstellungen, zu denen der Verf. gelangt, gestalten sich im Falle der symmetrischen Formen besonders einfach. In nahem Zusammenhange mit den Entwickelungen des Verf. stehen solche von Taber (cf. F. d. M. **26**, 176, 1895), die dem Verf. erst nachträglich bekannt wurden. My.

A. Loewy. Bemerkungen zur Theorie der conjugirten Transformation einer bilinearen Form in sich selbst. Münch. Ber. **26**, 1896, 25-30.

Voss (cf. F. d. M. **21**, 126, 1889) hatte das Problem behandelt, eine bilineare Form A (von nicht verschwindender Determinante) durch eine „conjugirte" Transformation P in sich überzuführen, d. h. so dass $PAP = A$ wird. Je nachdem die Determinante von P gleich $+1$ oder -1 ist, hat man zwischen eigentlichen und uneigentlichen Transformationen zu unterscheiden. Der Verf. fragt, wie man a priori entscheiden kann, ob A nur eigentliche, oder aber eigentliche und uneigentliche conjugirte Transformationen in sich zulässt. Sein Kriterium für den letzteren Fall lautet, dass die charakteristische Function von A wenigstens einen Elementarteiler mit ungeradem Exponenten besitzt. Der Beweis beruht auf der einfachen Thatsache, dass ähnliche Formen durch ähnliche Substitutionen conjugirt in sich übergeführt werden, und dass ähnliche Transformationen stets Determinanten von gleichem Werte haben. Man kann daher A in einer geeigneten ähnlichen, kanonischen Gestalt annehmen. Insbesondere geht demnach nicht jede symmetrische Form durch uneigentliche symmetrische Transformationen in sich über. My.

J. Deruyts. Sur les fonctions invariantes associés à un système transformable. Belg. Bull. (3) **32**, 82-94.

J. Deruyts. Quelques propriétés du déterminant d'un système transformable. Belg. Bull. (3) **32**, 433-445.

Es liege eine Urform $F(x|a)$ mit den Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ und den Coefficienten a vor, und es seien $p_1, p_2, \ldots, p_r$ linear unabhängige, isobare Formen, alle je vom nämlichen Grade in den a, wie in den x. Unterwirft man die x einer linearen Substitution S mit den Coefficienten α_{ik} und der Determinante Δ, so heisst das System p „transformabel", wenn es sich linear transformirt, d. h. wenn die transformirten Formen P lineare Formen der p sind, mit Coefficienten ϑ_{ik}, die nur von den α abhängen.

Der Verf. sucht die invarianten Bildungen φ von der Form $\varphi = c_1 p_1 + \cdots + c_r p_r$. Man sieht sofort, dass das Kriterium dafür ist, dass die c contragredient zu den p sind. Man kann das Problem der Bestimmung aller Formen φ zurückführen auf den Fall, wo die p allein von den Coefficienten linearer Urformen abhängen. Man kann dann

immer unter den Formen φ eine, φ_0, so herauswählen, dass die übrigen durch Anwendung eines gewissen Differentiationsprocesses aus φ_0 hervorgehen. Das Resultat lässt sich hinterher auf mehrere Urformen beliebiger Ordnung und von mehreren (cogredienten) Variabelnreihen ausdehnen.

In der zweiten Arbeit wird die Determinante θ der ϑ_{ik} genauer untersucht. Sind die p linear unabhängig, so ist θ eine Potenz der Substitutionsdeterminante Δ; sind die p linear abhängig, so verschwindet θ.

Die ϑ_{ik} genügen gewissen Functionalgleichungen. Ist S eine erste Substitution, T eine zweite, ST ihr Product, so sind die $\vartheta_{ik}(ST)$ Summen von Producten zweier ϑ, so dass der erste Factor stets zu S, der zweite stets zu T gehört. Zwischen den ϑ und den α bestehen einfache lineare Relationen.

Zuletzt wird untersucht, wie umgekehrt die p bei gegebenen ϑ_{ik} durch Polarenprocesse bestimmbar sind.

Die Theorie der „transformabeln Systeme" geht, was nicht erwähnt wird, auf Sylvester zurück (Cambr. and Dublin Math. Journ. **7**, 1852), der den Namen „Plexus" dafür eingeführt hatte. Der Plexus ist bei S ein wichtiges Instrument zur Erzeugung von Covarianten. My.

M. Noether. Ueber den gemeinsamen Factor zweier binären Formen. Erlanger Ber. 1895, 110-115.

F. Brioschi. Sur les invariants de deux formes binaires à facteur commun. Ebenda 116-118.

J. Lüroth. Ueber den gemeinsamen Factor zweier binären Formen. Ebenda 119.

Kapitel 3.

Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

E. Netto. Zur Theorie der Resultanten (nebst Nachtrag). J. für Math. **116**, 33-49; **117**, 57-71.

Die Existenz eines gemeinsamen Teilers der Formen (1) $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, $g(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}$ lässt sich nach Kronecker (cf. F. d. M. **13**, 114, 1881) durch das Verschwinden recurrirender Determinanten ausdrücken. Es handelt sich um die Umwandelung dieser Determinanten in die gewöhnliche Form. Durch vollständige Induction ergiebt sich zunächst:

$$(2)\quad \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{a_0} b_0 x^{-1} + \frac{1}{a_0^2} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} x^{-2} + \frac{1}{a_0^3} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} x^{-3} + \cdots$$
$$= c_0 x^{-1} + c_1 x^{-2} + c_2 x^{-3} + \cdots.$$

Bezeichnet man mit $C_{\lambda+1}$ die Determinante: (3) $C_{\lambda+1} = |c_i, c_{i+1}, \ldots, c_{i+\lambda}|$ ($i = 0, 1, \ldots, \lambda$), so liefert die Theorie der recurrirenden Reihen für die Existenz eines grössten gemeinsamen Teilers der ν^{ten} Ordnung von f und g das Kriterium: (4) $C_n = 0$, $C_{n-1} = 0$, $\ldots$, $C_{n-\nu+1} = 0$, $C_{n-\nu} \gtrless 0$. Die Aufgabe, die $C_{\lambda+1}$ (3) in Function der a und b in Determinantenform herzustellen, wird mit elementaren Mitteln erledigt; schwieriger ist es, eine symmetrische Form für die aus den Subdeterminanten λ^{ter} Ordnung von $C_{\lambda+1}$ gebildete Determinante $\Gamma_{\lambda+1} = |\gamma_{ik}|$ herzustellen, wie sie die Bézout'schen Determinanten $B_{\lambda+1} = |d_{ik}|$ besitzen, wo $d_{ik} = (0, i+k-1) + (1, i+k-2) + \cdots + (i-1, k)$ und $(x, \mu) = (a_x b_\mu - a_\mu b_x)$ ist. Die aus den Minoren λ^{ter} Ordnung von $B_{\lambda+1}$ gebildete Determinante $\mathrm{B}_{\lambda+1} = |\delta_{ik}|$ ist nach Jacobi recurrirend, d. h. es ist $\delta_{ik} = \delta_{lm}$, wenn $i+k = l+m$. Ein ganz entsprechender Satz gilt dann für $\Gamma_{\lambda+1}$, so dass man bei passender Erklärung des Symbols (λ, μ) geradezu $\Gamma_{\lambda+1} = B_{\lambda+1}$ setzen kann.

Hierher gehört noch ein anderer Satz über die Resultante. Ist $f = a_0 x^m + \cdots + a_m$, $f_1 = b_0 x^n + \cdots + b_n$ ($n \leqq m-1$), so kommt durch Division $b_0^{m-n+1} f = f_1 Q_1 + f_2$ und weiter, wenn d_0 den ersten Coefficienten von f_2 (vom Grade p) bedeutet: $d_0^{n-p+1} f_1 = f_2 Q_2 + f_3$. Dann ist jeder Coefficient von f_3 durch $b_0^{(m-n)(n-p)+1}$ teilbar, so dass der Factor b_0^{m-n+1}, der bei f zur Vermeidung gebrochener Coefficienten eingeführt wurde, hier wieder beseitigt werden kann.

Der Nachtrag beschäftigt sich mit dem Verschwinden gewisser intermediärer Formen, die bei dem Verfahren des grössten gemeinsamen Teilers auftreten. My.

J. Hadamard. Mémoire sur l'élimination. Acta Math. **20**, 201-238.

Sind $n+1$ Gleichungen in n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gegeben: (1) $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $\ldots$, $f_n = 0$, $f_{n+1} = 0$, so kann man ihre Resultante definiren als das Product $\Pi f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, erstreckt über alle Wertsysteme der x, die den n Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $\ldots$, $f_n = 0$ genügen. Es handelt sich um die Vergleichung der $n+1$ verschiedenen Ausdrücke (oder vielmehr ihrer Zähler), die sich so bilden lassen. Im Falle $n = 1$ gestaltet sich der Zusammenhang sehr einfach. Um unbequeme Factoren zu vermeiden, schreibe man die Gleichungen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ (von den Geraden m_1, m_2) homogen: $f_1(x_1, x_2) = 0$, $f_2(x_1, x_2) = 0$. Dann ist die Resultante R_{12} das Product $\Pi f_2(x_1, x_2)$, wo die x_1, x_2 durch die bezüglich der u identische Gleichung $\Pi(u_1 x_1 + u_2 x_2) = f_1(u_2, -u_1)$ definirt sind. Zwischen den beiden Resultanten R_{12} und R_{21} besteht die Relation: $R_{12} = (-1)^{m_1 m_2} R_{21}$.

Der Ausdruck R_{12} lässt sich nach Gordan, wenn man symbolisch schreibt: $f_1 = a_x^{m_1}$, $f_2 = b_x^{m_2}$, durch symbolische Determinantenfactoren (Klammerfactoren) von der Form (ab) darstellen.

Es wird gezeigt, wie diese Darstellung allgemein ausführbar ist, wenn sie erst für eine begrenzte Zahl von Anfangsfällen geleistet ist.

Liegen drei Gleichungen in zwei nicht homogenen Unbekannten x, y vor: $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$, von den resp. Graden m_1, m_2, m_3, so seien mit f_1^0, f_2^0, f_3^0 die binären Aggregate des höchsten Grades in f_1, f_2, f_3 bezeichnet. $R_{\alpha\beta}^{(0)}$ bezeichne die Resultante von f_α^0, f_β^0 ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$); P_3 das Product $\Pi f_3\,(x^{(i)}, y^{(i)})$, erstreckt über die gemeinsamen Lösungen von $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, endlich R_{123} das Product aus P_3 und $R_{12}^{0^{m_3}}$. Durch Benutzung eines Poisson'schen Gedankens, im Producte Π_3 die Form f_1 zu ersetzen durch $f_1 - \lambda$, wo λ ein Parameter ist, und durch Anwendung der Transformation $x = 1:x'$, $y = y':x'$ zeigt der Verf., dass $\dfrac{P_1}{P_3} = \dfrac{R_{21}^{0^{m_3}}}{R_{23}^{0^{m_1}}}(-1)^{m_1 m_2 m_3}$, und dass sich demnach die drei Bildungen R_{123}, R_{231}, R_{213} höchstens durch das Vorzeichen unterscheiden. R_{123} wird man daher als Resultante von f_1, f_2, f_3 definiren. Ein entsprechender Satz gilt allgemein. Man vergleiche eine, wie es scheint, dem Verf. unbekannt gebliebene Arbeit von Brill (cf. F. d. M. **21**, 134, 1889). My.

H. Laurent. Sur les fonctions entières. Nouv. Ann. (3) **15**, 23-28.

Bildung der Resultante mehrerer algebraischer Gleichungen mittelst gewisser, in Determinantenform dargestellter Functionen, welche der Verf. in seinem Lehrbuch der Algebra eingeführt hat. F.

A. Pleskot. Zur Eliminationstheorie. Rozpravy **5**, No. 25, 13 S. (Böhmisch.)

Die Hauptaufgabe der Arbeit besteht in einer elementaren Ableitung der Bedingungen für die Teilbarkeit einer ganzen rationalen Function durch den Ausdruck $x^2 + Ax + B$. Hieran knüpft der Verf. einige nicht uninteressante Bemerkungen über die Elimination einer Unbekannten aus zwei beliebigen Gleichungen. Lh.

Th. Muir. On the eliminant of a set of ternary quadrics. Edinb. Proc. **21**, 220-234.

G. Frobenius. Ueber Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe. Berl. Ber. 1896, 689-703.

Sind A, B, S drei Substitutionen aus der Gruppe aller $n!$ Substitutionen von n Grössen und besteht die Gleichung $S^{-1}AS = B$, so heissen die Substitutionen A, B einander ähnlich; und alle ähnlichen Substitutionen werden in eine „Klasse" vereint. Besteht A aus e Cyklen von $f_1, f_2, \dots, f_e$ Elementen, wobei $f_1 + f_2 + \cdots + f_e = n$ ist, so gilt das Gleiche von allen Substitutionen der Klasse von A; und es ist die Klasse zugleich durch Angabe der Invarianten $f_1, f_2, \dots, f_e$ eindeutig definirt.

Ist $\varphi(x)$ eine ganze ganzzahlige Function n^{ten} Grades nicht verschwindender Discriminante d, so werden durch $\varphi(x) = 0$ n conjugirte algebraische Zahlkörper festgelegt; andrerseits hat $\varphi(x) = 0$ im Sinne der Gleichungstheorie eine bestimmte Gruppe. Es werden in der vorliegenden Arbeit Beziehungen aufgestellt, welche zwischen der Zerfällung der rationalen, in d nicht aufgehenden Primzahlen p in Primideale eines jener n Körper einerseits und den Klassen von Substitutionen in der Gruppe von $\varphi(x) = 0$ andrerseits bestehen.

Zerfällt $\varphi(t)$ modulo p in das Product von e Primfunctionen der Grade $f_1, f_2, \ldots, f_e$: (1) $\varphi(t) \equiv P_1(t).P_2(t) \ldots P_e(t)$ (mod. p), so gehört die Primzahl p zur Klasse der Invarianten $f_1, f_2, \ldots, f_e$. Diese sei in einer festgewählten Anordnung der Substitutionenklassen die λ^{te}. Die (in d nicht aufgehenden) rationalen Primzahlen, welche in diesem Sinne der λ^{ten} Klasse angehören, mögen allgemein p_λ heissen.

Der Verf. leitet nun im Anschluss an eine von Kronecker aufgestellte Relation (vergl. F. d. M. **12**, 65, 1880) für die Primzahlen p_λ die Gleichung ab: $\Sigma p_\lambda^{-1-w} = D_\lambda \log(1/w) + \mathfrak{P}(w)$, wo $\mathfrak{P}(w)$ eine für hinreichend klein gewählte w sicher convergente Reihe ist und D_λ eine nur von der Klasse abhängige Constante bedeutet. Letztere liefert ein Mass für die Dichtigkeit der Primzahlen der λ^{ten} Klasse und wird geradezu als „Dichtigkeit" der Primzahlen p_λ bezeichnet. Der vom Verf. aufgestellte Hauptsatz ist alsdann, dass diese Dichtigkeit gleich ist der Anzahl derjenigen Substitutionen der Gruppe von $\varphi(x) = 0$, welche aus e Cyklen von $f_1, f_2, \ldots, f_e$ Elementen bestehen, dividirt durch die Ordnung dieser Gruppe. Dieser Satz überträgt sich in die Terminologie der Idealtheorie vermöge des bekannten Zusammenhangs, in dem die Congruenz (1) zur Factorenzerlegung des Hauptideals op steht.

Der Verf. giebt weiter den genaueren von Dedekind bewiesenen Satz an, dass, wenn eine rationale Primzahl p in e Primideale der Grade $f_1, f_2, \ldots, f_e$ zerfällt, dann auch stets Substitutionen der λ^{ten} Klasse in der zum Körper, bezw. zur Gleichung $\varphi(x) = 0$ gehörenden Gruppe vorkommen.

Weiterhin wird für die Definition der Substitutionenklassen nicht wie oben die Gesamtgruppe aller $n!$ Substitutionen, sondern eine in ihr enthaltene Untergruppe zu Grunde gelegt, so dass nur durch die Substitutionen der letzteren transformirt wird. Hier wird dann für die einzelne Klasse ein Begriff der Dichtigkeit definirt, und diese letztere wird mit der Dichtigkeit der „zur Klasse gehörenden Primzahlen" in Vergleich gestellt. Fr.

G. Frobenius. Ueber Gruppencharaktere. Berl. Ber. 1896, 985-1021.

„Bei dem Beweise des Satzes, dass jede lineare Function einer Variabeln unendlich viele Primzahlen darstellt, wenn ihre Coefficienten teilerfremde ganze Zahlen sind, benutzte Dirichlet zum ersten Male gewisse Systeme von Einheitswurzeln, die auch in der nahe verwandten Frage nach der Anzahl der Idealklassen in einem Kreiskörper sowie bei

der Verallgemeinerung jenes Satzes auf quadratische Formen und in den Untersuchungen über deren Einteilung in Geschlechter auftreten. Die charakteristische Eigenschaft dieser Ausdrücke besteht nach Dedekind darin, dass sie von einer variabeln positiven ganzen Zahl n abhängige Grössen $\chi(n)$ sind, die nur eine endliche Anzahl von Werten haben und der Bedingung $\chi(m)\chi(n) = \chi(mn)$ genügen. Wie er in rein abstracter Form ausführt, lassen sich den Elementen A, B, C, ... jeder Abel'schen Gruppe solche Einheitswurzeln $\chi(A)$, $\chi(B)$, $\chi(C)$, ... zuordnen, welche die Gleichungen $\chi(A)\chi(B) = \chi(AB)$ befriedigen, und die er nach dem Vorgange von Gauss die „Charaktere der Gruppe" nannte. Unter einem Charakter einer quadratischen Form versteht Gauss (Disqu. arithm. Art. 230) eine Relation der durch die Form darstellbaren Zahlen zu den in ihrer Determinante aufgehenden ungeraden Primzahlen p (oder 4 oder 8). Er drückt jene Beziehung durch die Zeichen Rp und Np aus. Diese Symbole ersetzt Dirichlet (J. für Math. **19**) durch das Legendre'sche (und Jacobi'sche) Zeichen (m/p), welches nächst der Resolvente von Lagrange wohl das älteste Beispiel der Anwendung von Charakteren commutativer Gruppen darbietet. Der Vorzug dieser Umwandlung besteht darin, dass die Geschlechtscharaktere von Gauss nur Beziehungen, die von Dirichlet aber Zahlen sind, mit denen man rechnen kann. So wird durch die Multiplication dieser charakteristischen Zahlen die der Composition der Geschlechter entsprechende Composition der Charaktere (Art. 246-248) ersetzt. — Die Anzahl h der Charaktere einer Abel'schen Gruppe $\mathfrak{H}$ ist der Ordnung der Gruppe gleich. Man kann die h Charaktere erhalten, indem man die Elemente von $\mathfrak{H}$ durch eine Basis unabhängiger Elemente darstellt und den Basiselementen beliebige Einheitswurzeln zuordnet, deren Grad ihrer Ordnung gleich ist. Sie lassen sich in mehrfacher Art den Elementen der Gruppe zuordnen und können demnach mit $\chi_B(A)$ bezeichnet werden. Da das Product zweier Charaktere wieder ein Charakter ist, so bilden sie eine Gruppe, und diese ist mit $\mathfrak{H}$ isomorph. Ihre Beziehungen zu den Untergruppen von $\mathfrak{H}$ sind am ausführlichsten von Weber erörtert (Theorie der Abel'schen Zahlkörper, I § 3, IV § 2. u. 3, Acta Math. **8** u. **9**)."

Die Lösung einer dem Verf. von Dedekind mitgeteilten Aufgabe veranlasste ihn zu einer Verallgemeinerung des Begriffes der Charaktere auf beliebige endliche Gruppen. Durch die Einführung dieses Begriffes, den er im Folgenden entwickelt, dürfte nach seiner Meinung die Gruppentheorie eine wesentliche Förderung und Bereicherung erfahren.

Zwei Elemente A und B einer endlichen Gruppe $\mathfrak{H}$ heissen „conjugirt" (in Bezug auf $\mathfrak{H}$), wenn es in $\mathfrak{H}$ ein Element T giebt, das der Bedingung $T^{-1}AT = B$ genügt. Sind zwei Elemente einem dritten conjugirt, so sind sie es auch unter einander. Daher kann man die h Elemente von $\mathfrak{H}$ in „Klassen conjugirter Elemente" einteilen, eine Einteilung, von der Verf. mehrfach, besonders in seinem neuen Beweise des Sylow'schen Satzes (J. für Math. **100**) vorteilhaft Gebrauch gemacht hat. Das Hauptelement E bildet für sich eine Klasse, die „Hauptklasse". Sind (α), (β), (γ) irgend drei verschiedene oder gleiche Klassen, und

durchläuft A die h_α verschiedenen Elemente der α^{ten} Klasse, B die h^β Elemente der β^{ten} und C die h_γ Elemente der γ^{ten}, so soll die Zahl $h_{\alpha\beta\gamma}$ (die auch Null sein kann) angeben, wie viele der $h_\alpha h_\beta h_\gamma$ Elemente ABC gleich dem Hauptelemente sind, also der Gleichung $ABC = E$ genügen. Die Entwickelung der Eigenschaften dieser positiven ganzen Zahlen $h_{\alpha\beta\gamma}$ und ihrer Beziehungen zu den Charakteren bildet den Hauptinhalt der vorliegenden Arbeit. Ein besonderes Interesse gewinnen diese Grössen noch durch ihre merkwürdigen Beziehungen zu der Theorie der aus mehreren Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. Wbg.

G. Frobenius. Ueber die Primfactoren der Gruppendeterminante. Berl. Ber. 1896, 1343-1382.

„Die Theorie der Charaktere einer Gruppe, deren Grundlagen Verf. in seiner letzten Arbeit (vergl. oben S. 92) entwickelt hat, erfordert zu ihrer weiteren Ausgestaltung die Untersuchung einer Determinante, deren Grad der Ordnung der Gruppe gleich ist. Nach dem Vorgange von Dedekind, der zuerst ihre Bedeutung für die Theorie der Gruppen erkannt hat, nennt er sie die der Gruppe entsprechende „Gruppendeterminante". Die h Elemente A, B, C, ... der Gruppe $\mathfrak{H}$ benutzt er als Indices für h unabhängige Variabeln x_A, x_B, x_C, ... Bei der Wahl dieser Bezeichnung wird die Festsetzung getroffen, dass, wenn $L = MN$ ist, auch $x_L = x_{MN}$ sein soll. Aus diesen h Grössen, die durch einen Index von einander unterschieden sind, werden h^2 Grössen gebildet, die mit zwei Indices versehen sind, indem $x_{P,Q} = x_{PQ^{-1}}$ gesetzt wird. Sind G_1, G_2, ..., G_h die h Elemente von $\mathfrak{H}$ in irgend einer bestimmten Reihenfolge, so wird die Matrix $(x_{P,Q}) = (x_{PQ^{-1}})$ betrachtet, deren h Zeilen man erhält, indem man für P der Reihe nach die h Elemente G_1, G_2, ..., G_h setzt, und deren h Spalten man erhält, indem man für Q dieselben h Elemente in derselben Reihenfolge setzt. Diese Matrix besitzt gewisse, durch die Constitution der Gruppe $\mathfrak{H}$ bedingte Symmetrieeigenschaften. In jeder Zeile finden sich die h Variabeln sämtlich und ebenso in jeder Spalte. Die verschiedenen Zeilen (Spalten) unterscheiden sich von einander nur durch die Anordnung der Variabeln. Die Gruppendeterminante, die der Gruppe $\mathfrak{H}$ entspricht, ist die Determinante dieser Matrix $\Theta = |x_{P,Q}| = |x_{PQ^{-1}}|$. Addirt man zu den Elementen der ersten Zeile die aller anderen Zeilen, so werden jene Elemente alle gleich $\Sigma x_R = \xi$. Daher ist die ganze Function h^{ten} Grades Θ der h Variabeln x_A, x_B, x_C, ... durch die lineare Function ξ teilbar. Mithin zerfällt Θ, von dem trivialen Falle $h = 1$ abgesehen, stets in Factoren niedrigeren Grades. Die Anzahl k der verschiedenen irreducibeln Factoren oder Primfactoren von Θ ist gleich der Anzahl der Klassen conjugirter Elemente, worin die Elemente von $\mathfrak{H}$ zerfallen. Ist f der Grad eines solchen Primfactors Φ, so ist Θ durch die f^{te} und durch keine höhere Potenz von Φ teilbar. Der Grad f ist ein Divisor der Ordnung h. Durch eine lineare Substitution lässt sich Φ in eine Function von f^2, aber nicht von weniger Variabeln transformiren,

und wenn man jeden Primfactor von $\Theta = \Pi\Phi^f$ in dieser Weise transformirt, so sind die $\Sigma f^2 = h$ neuen Variabeln alle unter einander unabhängig. Setzt man immer diejenigen Variabeln x_R einander gleich, deren Indices Elemente derselben Klasse sind, so wird $\Phi = \xi^f$ die f^{te} Potenz einer linearen Function ξ von k unabhängigen Variabeln, und die k linearen Functionen, die aus den k Primfactoren von Θ entspringen, sind linear unabhängig. Aus den Coefficienten der linearen Function ξ ergiebt sich ein Charakter χ der Gruppe $\mathfrak{H}$, und aus seinen k Werten $\chi(R)$ lassen sich die Coefficienten der Primfunction Φ sämtlich berechnen. Die Theorie der allgemeinen Gruppendeterminante, worin die h Grössen x_R unbeschränkt veränderlich sind, wird so auf die Theorie der speciellen Gruppendeterminante zurückgeführt, worin die Veränderlichkeit dieser Grössen durch die Bedingungen $x_{BA} = x_{AB}$ beschränkt ist. Die Berechnung dieser Determinante h^{ten} Grades aber $\Theta = \Pi\xi^{f^2}$ lässt sich auf die einer Determinante k^{ten} Grades $\left|\sum_\gamma \frac{1}{h_\alpha} h_{\alpha\beta\gamma} x_\gamma\right| = \Pi\xi$ reduciren, worin der lineare Factor ξ, der in Θ zur Potenz f^2 erhoben vorkommt, nur einfach enthalten ist. (Wegen der Definition der Zahlen $h_{\alpha\beta\gamma}$ vergl. S. 94). Ganz analoge Eigenschaften, wie ein solcher Primfactor Φ einer Gruppendeterminante, hat die ganze Function $2^{\varrho\text{ten}}$ Grades von $2^{2\varrho}$ Variabeln, die Verf. in seiner Arbeit „Ueber Thetafunctionen mehrerer Variabeln" (J. für Math. **96**) untersucht hat, auf die er dort aber nicht durch die Betrachtung der Gruppe der zwischen den Thetafunctionen bestehenden Relationen, sondern durch das für diese Functionen geltende Additionstheorem geführt worden ist. Sonst ist die Gruppendeterminante bisher nur für den Fall commutativer Gruppen untersucht worden, wo ihre Primfactoren sämtlich linear sind. Für einige besonders einfache, nicht commutative Gruppen hat Dedekind im Jahre 1886 die Determinante Θ durch Rechnung in Primfactoren zerfällt, und seine interessanten Ergebnisse haben den Verf. veranlasst, die Zerlegung der Gruppendeterminante in Primfactoren allgemein für eine beliebig gegebene Gruppe zu untersuchen." Wbg.

H. LAURENT. Exposé d'une théorie nouvelle de substitutions linéaires. Nouv. Ann. (3) **15**, 345-365.

Wenn der Verf. seine Darstellung der Lehre von den linearen Substitutionen als eine neue bezeichnet, so ist das wohl so zu verstehen, dass die in den verschiedensten Abhandlungen (von Frobenius u. a.) zerstreuten Entwickelungen noch nicht gesammelt in die Lehrbücher übergegangen sind.

Der Grundgedanke ist die symbolische Repräsentation einer linearen Substitution: (1) $y_i = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \cdots + \alpha_{in}x_n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ durch die lineare Form (2) $t = \Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}$, wo die Symbole τ_{ij} den Relationen unterliegen: (3) $\tau_{ij}\tau_{kl} = 0$ $(j \gtrless k)$, $\tau_{ij}\tau_{jl} = \tau_{il}$. Die Summe $s + t$ zweier Substitutionen s, t ist durch $\Sigma(\alpha_{ij} + \beta_{ij})\tau_{ij}$ definirt, ebenso

das Product st (wo erst t dann s ausführen ist) durch das Product der repräsentirenden Formen.

Die Substitution $\tau_{11}+\tau_{22}+\cdots+\tau_{nn}$ spielt die Rolle der Einheit, wird also gleich Eins gesetzt; eine Zahl a stellt die Substitution $a\tau_{11}+a\tau_{22}+\cdots+a\tau_{nn}$ dar; mithin stellt auch $f(s)$, wenn $f(x)$ ein ganzes Polynom in x bedeutet, eine bestimmte Substitution dar.

Unter den Substitutionen spielen eine ausgezeichnete Rolle einmal die „elementären" τ_{ij}, andererseits die „primären" $a+b\tau_{ij}$. Jede Substitution ist in primäre Factoren zerlegbar. Es werden weiter der Reihe nach betrachtet die charakteristische Function einer Substitution, die Normalformen, auf die sich eine rationale Function einer Substitution bringen lässt, die Substitutionen von der Determinante Null, und die vertauschbaren Substitutionen.

Die vertauschbaren Substitutionen werden dahin verallgemeinert, dass man hat: $st=\varepsilon ts$, wo ε eine Zahl bezeichnet: s und t heissen dann „quasi-vertauschbar".

Für eine Einführung in den Gegenstand erscheint die Abhandlung des Verf. wohl geeignet; durch Hinzufügung von Litteraturnachweisen würde sie freilich ihren Zweck noch besser erfüllen. My.

W. Burnside. On the isomorphism of a group with itself. Lond. M. S. Proc. 27, 354-367.

Der Begriff des Isomorphismus einer Gruppe mit sich selbst ist erst in neuerer Zeit durch die Arbeiten von Hölder und Frobenius ausführlicher entwickelt worden. Die Wichtigkeit dieses Begriffes sowohl für die allgemeine Gruppentheorie als auch für die wirkliche Construction von Gruppen aus gegebenen Factorgruppen ist einleuchtend: in der That kann das letztere Problem nicht eher in Angriff genommen werden, als bis alle möglichen Isomorphismen der enthaltenen Gruppen mit sich selbst bestimmt sind. — In dem ersten Teile der vorliegenden Arbeit giebt Verf. die für das Verständnis des Folgenden notwendigen Definitionen und Erklärungen. In dem zweiten Teile werden drei allgemeine mit dem Isomorphismus einer Gruppe mit sich selbst zusammenhängende Theoreme bewiesen: 1) Ist p^m die höchste Potenz einer Primzahl p, welche in der Ordnung einer Gruppe G enthalten ist, und enthält G keine Substitution, welche mit jeder der $kp+1$ Untergruppen von der Ordnung p^m vertauschbar ist, so kann die Gruppe der Isomorphismen von G als eine transitive Gruppe vom Grade $kp+1$ ausgedrückt werden. 2) Eine Gruppe, welche keine charakteristische Untergruppe enthält, ist entweder einfach oder wird durch n holoedrisch isomorphe und unabhängige einfache Gruppen erzeugt, derart dass jede Substitution irgend einer von ihnen mit jeder Substitution irgend einer anderen vertauschbar ist. 3) Ist G eine Gruppe, welche keine charakteristische Untergruppe enthält, und ist K die Gruppe grösster Ordnung, die G selbstconjugirt enthält, während gleichzeitig keine nicht in G enthaltene Substitution von K mit jeder Substitution von G vertauschbar ist, so ist K eine „vollkommene" Gruppe,

d. h. sie lässt nur cogrediente Isomorphismen zu und enthält ausser der Einheit keine selbstconjugirte Substitution. Im dritten Teile bestimmt Verf. die Gruppen der Isomorphismen für die Klassen der einfachen Gruppen, von denen er bereits früher (Lond. M. S. Proc. **25**) einige Eigenschaften gefunden hat. Wbg.

W. Burnside. On doubly transitive groups of degree n and order $n(n-1)$. Messenger (2) **25**, 147-153.

Es wird gezeigt, dass es für ein beliebiges m immer einen Typus einer doppelt transitiven Gruppe vom Grade p^m und von der Ordnung $p^m(p^m-1)$ giebt, in welcher die Untergruppe bei Festhaltung des einen Symbols cyklisch ist. Die Fälle $m=2$ und $m=3$ werden eingehend betrachtet. Glr. (Lp.)

W. Burnside. On doubly transitive groups of degree 2^m and order $2^m(2^m-1)$. Messenger (2) **25**, 187-189.

Die conciseste Art zur Definition einer Gruppe von endlicher Ordnung ist die durch die unabhängigen Operationen, welche sie erzeugen, und die unabhängigen Beziehungen, welche diese Operationen verknüpfen. Der Verf. zeigt, dass doppelt transitive Gruppen vom Grade 2^m und von der Ordnung $2^m(2^m-1)$ durch zwei Operationen erzeugt werden können, welche drei Bedingungen erfüllen. Glr. (Lp.)

G. A. Miller. List of transitive substitution groups of degree twelve. Quart. J. **28**, 193-231.

Zwölf Buchstaben können auf vier Arten in Systeme eingeteilt werden, deren jedes eine gleiche Anzahl von Buchstaben enthält, nämlich in zwei Systeme zu je sechs, in drei zu je vier, in vier zu je drei und in sechs zu je zwei Buchstaben. Verf. betrachtet der Reihe nach die Construction aller möglichen nichtprimitiven Gruppen für jedes dieser Systeme und stellt auf Grund dieser Betrachtung eine Tabelle aller transitiven Gruppen auf, welche man mit zwölf Elementen bilden kann; ihre Gesamtsumme ist 295. Wbg.

G. A. Miller. The regular substitution groups whose order is less than 48. Quart. J. **28**, 232-284.

Zwei Methoden sind zur Aufzählung der regulären Substitutionsgruppen angewandt worden: erstens die Aufzählung aller Gruppen, welche eine gegebene Anzahl von Elementen enthalten, und zweitens die Aufzählung aller Gruppen, deren Ordnungen eine gegebene Anzahl von Primfactoren enthalten. Die erste Methode wurde zuerst von Cayley bei der Bestimmung aller Gruppen vom Grade 8 befolgt, die zweite von Netto bei der Bestimmung aller Gruppen, deren Ordnung das Product zweier Primzahlen ist. Wenn auch keine dieser beiden Aufzählungsarten bis jetzt sehr weit gefördert worden ist, so hat doch die letztere

weit mehr die Aufmerksamkeit auf sich gelenkt als die erstere. — Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, die Aufzählung nach der ersten Methode weiter fortzuführen, und zwar bis zur Ordnung 47. Bei der Aufstellung seiner Gruppentabelle macht Verf. häufigen Gebrauch von dem folgenden, aus Sätzen von Hölder und Frobenius hervorgehenden Theorem: „Jede Gruppe, deren Ordnung p^a ist, wo p eine Primzahl und a eine ganze Zahl > 3 bedeutet, enthält eine commutative Gruppe von der Ordnung p^3." Am ausführlichsten werden die Gruppen von der Ordnung 32 behandelt, welche die grössten Schwierigkeiten darbieten; ihre Anzahl ist 51 (vergl. das 1. Ref. S. 99). An die Aufstellung der Tabelle schliessen sich allgemeine Bemerkungen über reguläre Gruppen. Ein besonderes Kapitel handelt über die Operation $sts^{-1}t^{-1}$, welche geeignet ist, zwei Eigenschaften einer Gruppe zu bestimmen, deren erzeugende Substitutionen gegeben sind, nämlich 1) die Auflösbarkeit der Gruppe, 2) die grösste commutative Gruppe, zu welcher die gegebene Gruppe isomorph ist. Den Schluss der Arbeit bilden genauere Erörterungen der Gruppen von der Ordnung 16, 24, 36 und 40. Wbg.

G. A. Miller. **On several theorems on operation groups.** American M. S. Bull. **3**, 111-116.

Für den vom Verf. in Quart. J. **28**, 233 aufgestellten Satz, dass jede Gruppe (G), deren Ordnung durch p^4 teilbar ist (wo p eine Primzahl bedeutet), eine commutative Gruppe (G_1) von der Ordnung p^3 enthält, wird ein viel einfacherer Beweis gegeben, der dann auf die Herleitung einiger allgemeinerer Sätze ausgedehnt wird. Lp.

G. A. Miller. **On the lists of all the substitution groups that can be formed with a given number of elements.** American M. S. Bull. **2**, 138-145.

Eine Aufzählung und Kritik aller bis jetzt veröffentlichten Tabellen der Substitutionsgruppen, welche man mit einer vorgegebenen Anzahl von Elementen bilden kann, nebst Angabe der zugehörigen Litteratur und der bei der Aufstellung der Tabellen angewandten Methoden. Lp.

G. A. Miller. **The substitution groups whose order is the product of two unequal prime numbers.** American M. S. Bull. **2**, 332-336.

Während Netto in seiner „Substitutionentheorie" nur die regulären Gruppen von der Ordnung pq (p und q Primzahlen) bestimmt hat, ermittelt der Verf. jetzt sämtliche Substitutionsgruppen dieser Ordnung und stellt Formeln auf, durch welche ihre Anzahl für gegebene Werte von p, q und n (dem Grade der Gruppe) gefunden werden kann. Hierbei werden die cyklischen (§ 1) und die nicht cyklischen (§ 2) Gruppen gesondert bestimmt. In § 3 werden Zahlenbeispiele angeführt. Lp.

G. A. Miller. Sur les groupes de substitutions. C. R. **122,** 370-372.

Verf. berichtigt einige Angaben von Levavasseur: Die Anzahl der Gruppen von der Ordnung 16 ist nicht 15, sondern 14 (cf. Hölder, Young); jede derselben enthält eine commutative Untergruppe von der Ordnung 8. Die Zahl der Gruppen von der Ordnung 32 ist nicht grösser als 75, sondern nur gleich 51. — Ferner giebt Verf. Tabellen für die Anzahl der regelmässigen Gruppen bis zur 36sten und aller Gruppen bis zur 12ten Ordnung. Wbg.

G. A. Miller. Sur les groupes de substitutions. C. R. **123,** 91-92.

Verf. findet 1), dass es nur zwei Gruppen von der Ordnung $8p$ giebt, wenn p durch 4 teilbar ist, ohne durch 8 teilbar zu sein; in der sonst richtigen Aufzählung dieser Gruppen von Levavasseur (C. R. **122,** 516) muss daher die mit G_{8p}^{l} bezeichnete Gruppe unterdrückt werden, 2) eine Formel für die Anzahl der (transitiven und intransitiven) Substitutionsgruppen, deren Ordnung das Product zweier ungleichen Primzahlen ist. Wbg.

G. A. Miller. The non-regular transitive substitution groups whose order is the cube of any prime number. Annals of Math. **10,** 156-158.

Die regulären Gruppen der Ordnung p^3, wo p eine Primzahl, sind fast gleichzeitig von Young, von Cole und Glover und von Hölder behandelt worden, während der Specialfall $p=2$ bereits früher von Cayley erledigt worden war. Der Verf. bestimmt die nichtregulären transitiven Gruppen dieser Ordnung: er findet, dass es stets zwei solcher Gruppen giebt, wenn p ungerade ist. Dass es nur eine giebt, wenn p gerade, war schon bekannt (Serret, Journ. de Math. **15,** 52, 1850). Da für jeden Wert von p fünf reguläre Gruppen der angegebenen Ordnung existiren, so folgt, dass die Anzahl der transitiven Gruppen von der Ordnung p^3 gleich 6 oder 7 ist, je nachdem p gerade oder ungerade. Wbg.

G. A. Miller. The substitution groups whose order is four. Phil. Mag. (5) **41,** 431-437.

Der Grad der Gruppen muss gerade und nicht kleiner als vier sein; er kann also durch $2n$ dargestellt werden. In der Bestimmung der Gruppen vom Grade $2n$ tritt die Hauptschwierigkeit bei den nichtcyklischen Gruppen ein. Um diese aufzufinden, stelle man eine (1,1)-Correspondenz zwischen α ($\alpha \overline{\gtrless} \frac{1}{2}n$) Vierergruppen her und 1) eine (2,1)-Correspondenz zwischen jeder einzelnen dieser Gruppen und einer Gruppe der zweiten Ordnung, deren Grad $2n-4\alpha$ ist, 2) eine (1,1)-Correspondenz zwischen jeder einzelnen dieser Gruppen und einer Gruppe vierter Ordnung, die vom Grade $2n-4\alpha$ ist und $n-2\alpha$ Intransitivitätssysteme enthält. In dem Falle der Gruppen vom zweiten Typus kann α den Wert Null haben, so dass grössere Schwierigkeiten entstehen als in den

Fällen cyklischer Gruppen und nichtcyklischer Gruppen vom ersten Typus. Mithin ist die Hauptaufgabe die, alle Gruppen zu suchen, welche $2n$ Elemente und n Intransitivitätssysteme enthalten, und es wird eine Formel gefunden, vermittelst deren die Anzahl solcher Gruppen bestimmt werden kann, während die anderen Gruppen vom zweiten Typus der nichtcyklischen Gruppen in einer ähnlichen Weise gefunden werden können. Endlich wird auch eine Formel gegeben, durch welche die Anzahl (N) von Gruppen direct für jeden Wert von n gefunden werden kann.

Gbs. (Lp.)

G. A. Miller. **The operation groups of order $8p$, p being any prime number.** Phil. Mag. (5) **42,** 195-200.

Dem Sylow'schen Theorem zufolge enthalten diese Gruppen $kp+1$ conjugirte Untergruppen von der Ordnung p, und b ist $\overline{\gtrless}\, 1$ in der Gleichung $8p/(kp+1) = bp$. Daher müssen sie eine selbstconjugirte Untergruppe von dieser Ordnung enthalten, wenn $p > 3$ und $p \gtrless 7$. Zuerst erstreckt sich die Betrachtung auf alle möglichen Gruppen, welche eine solche selbstconjugirte Untergruppe enthalten, indem die wenigen Gruppen, welche eine solche Untergruppe nicht enthalten, später zur Erörterung kommen. Es wird gezeigt, dass das Problem auf die Herstellung der nichtprimitiven Gruppen zurückkommt, welche an der Spitze eine der fünf regulären Gruppen von der Ordnung $4p$ in der (1,1)-Correspondenz mit sich selbst haben. Hierbei wird p grösser als 2 vorausgesetzt, weil die Gruppen von der Ordnung 16 wohlbekannt sind. Bei der Besprechung der Gruppen, welche nur existiren, wenn $p-1$ ein Vielfaches von 4 ist, wird Levavasseur's Angabe (C. R. 2. März 1896), dass dann drei Gruppen vorkommen, die nur existiren, wenn $p-1$ ein Vielfaches von 4 ist, ohne auch ein Vielfaches von 8 zu sein, als ungenau nachgewiesen; es giebt nur zwei solche Gruppen.

Gbs. (Lp.)

H. Taber. **On certain sub-groups of the general projective group.** American M. S. Bull. **2,** 221-233.

Der Aufsatz fasst die Arbeiten des Verf. über den Gegenstand zusammen, indem die Hauptsätze aufgezählt und sachliche Erläuterungen oder litterarische Bemerkungen angeknüpft werden (vergl. die Referate in F. d. M. **25,** 210-211, 1893/94 und **26,** 175-177, 1895). Den Ausgangspunkt der Betrachtung liefert die Note Sylvester's in C. R. **94,** über welche in in F. d. M. **14,** 99, 1882 berichtet ist, und nach welcher jede Transformation A von nicht verschwindender Determinante als die m^{te} (m positiv, ganz) Potenz irgend einer Transformation B ist, ferner B für hinreichend grosse m von der identischen Transformation beliebig wenig verschieden ist.

Lp.

H. Taber. **Note on the special linear homogeneous group.** American M. S. Bull. **2,** 336-339.

In dem Aufsatze, über den im vorigen Referate berichtet ist, wurde

zuletzt ausgeführt, dass, wenn n eine ungerade Primzahl ist, jede Transformation der speciellen linearen homogenen Gruppe in n Variabeln durch die Wiederholung einer infinitesimalen Transformation dieser Gruppe erhalten werden kann, d. h. zu einer continuirlichen eingliedrigen Untergruppe gehört, welche die identische Transformation enthält. In jedem anderen Falle enthält die specielle lineare homogene Gruppe in n Variabeln eine Vereinigung von Transformationen, unter denen keine durch die Wiederholung einer infinitesimalen Transformation dieser Gruppe erzeugt werden kann. Nichtsdestoweniger kann man durch eine solche Wiederholung jeder Transformation jener Vereinigung beliebig nahe kommen. Die Methode des Beweises hierfür wird durch einige Beispiele erläutert. Lp.

H. Taber. Note on the automorphic linear transformation of a bilinear form. American Acad. Proc. **31**, 181-193.

H. Taber. On the group of linear transformations whose invariant is an alternate bilinear form. Ebenda 336-337.

H. W. Lloyd Tanner. On the enumeration of groups of totitives. Lond. M. S. Proc. **27**, 329-352.

Verf. entwickelt eine Methode, die Anzahl der Gruppen von gegebener Ordnung zu bestimmen, welche man mit den relativen Primzahlen einer ganzen Zahl n bilden kann. Bei dieser Anzahlbestimmung bedient er sich einer bereits von Euler, Gauss, Cayley u. a. benutzten Function, welche aus einem Binomialcoefficienten gebildet wird, indem man jeden Factor des Zählers oder Nenners, z. B. r, durch p^r-1 ersetzt, so dass der Binomialcoefficient de facto der Grenzwert dieser Function ist, wenn p sich der Einheit nähert; darin ist p ein Primfactor von $\tau(n)$, wenn $\tau(n)$ die Anzahl der zu n relativ primen Zahlen bedeutet. Verf. vermutet die Existenz eines Reciprocitätstheorems, dass nämlich die Anzahl der Gruppen von der Ordnung ν gleich der Anzahl der Gruppen von der Ordnung $\tau(n)/\nu$ ist, vermag dasselbe aber nicht zu beweisen. Bei dem Versuche, dieses Theorem zu beweisen, hat er jedoch einige bemerkenswerte Eigenschaften der oben angegebenen Functionen, so z. B. ein Vandermonde-Theorem, entdeckt, und diese bilden neben der Methode der Aufzählung der fraglichen Gruppen den Inhalt der vorliegenden Arbeit. Wbg.

L. Autonne. Sur les substitutions régulières non linéaires. C. R. **122**, 1043-1045.

In seiner Arbeit über die Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades (J. de l'É. Pol. **61** und **62**) hat Verf. die regulären Substitutionen im Raum eingeführt und dort im sechsten Kapitel die linearen regulären Substitutionen construirt. In der vorliegenden Note giebt er die hauptsächlichen Eigenschaften der nichtlinearen regulären Substitutionen an, welche übrigens, bis auf die Wahl der Variabeln, mit

den ebenen birationalen Berührungstransformationen zusammenfallen, und erläutert dieselben an dem Beispiel der Substitution

$$s = \begin{vmatrix} x_1 & x_4^3 \\ x_2 & x_1(x_2x_4 - x_1x_2) \\ x_3 & x_4(3x_1x_3 + x_3x_4) \\ x_4 & x_1x_4^2 \end{vmatrix}.$$

Wbg.

Ed. Maillet. Note sur les groupes de substitutions. S. M. F. Bull. **24,** 85-96.

Die Arbeit enthält: 1) einige Sätze über die transitiven Untergruppen der mit den symmetrischen oder alternirenden Gruppen holoedrisch isomorphen Gruppen, 2) eine Relation zwischen dem Grad, der Klasse und der Ordnung gewisser primitiver Gruppen, 3) einige Eigenschaften der transitiven Gruppen der Klasse ef, wo e und f ungerade Primzahlen sind. Wbg.

Ed. Maillet. Sur quelques propriétés des groupes de substitutions d'ordre donné. (Suite et fin). Toulouse Ann. **10** A. 5-20.

Verf. giebt in der vorliegenden Arbeit (Teil III) eine Reihe von Anwendungen der in den beiden ersten Teilen (Toulouse Ann. **9** D, 1-22; F. d. M. **26,** 163, 1895) von ihm gefundenen Theoreme. Wbg.

E. Beke. Beitrag zur Theorie der rationalen Functionen. Math. Ann. **47,** 441-444.

Wendet man auf die Galois'sche Function von n Elementen $V = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ die Substitutionen einer Gruppe G an, wodurch die Functionen $V_1, V_2, \ldots, V_r$ hervorgebracht werden mögen, so sollen im allgemeinen die symmetrischen Functionen der V_i zur Gruppe G gehören. Es zeigt sich aber, dass zuweilen die einfachsten derartigen Functionen $\sum_1^r {}_i V_i$ symmetrische Functionen der gegebenen Elemente werden können, also nicht zur Gruppe G gehören. Verf. beschäftigt sich mit der Frage, wann diese Erscheinung allgemein eintritt, und wie hoch man den Exponenten k zu wählen hat, damit die Potenzsumme $\sum_1^r {}_i V_i^k$ wirklich zur Gruppe G gehöre; es ergiebt sich $k = \frac{n(n+1)}{2}$. Wbg.

J. Pierpont. On the invariance of the factors of composition of a substitution-group. American J. **18,** 153-155.

Das für die Theorie der algebraischen Gleichungen sehr wichtige Theorem von der Invarianz der Factoren der Zusammensetzung einer Substitutionsgruppe (vergl. Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques, p. 41 - 48; Netto, Substitutionentheorie, p. 87 - 90)

wird von dem Verf. mittels des Begriffes des Isomorphismus noch einfacher bewiesen als von Netto, der bereits Jordan's langen Beweis dieses Theorems bedeutend vereinfacht hatte. Wbg.

G. Cordone. Intorno al gruppo di sostituzioni razionali e lineari. Torino Atti **31**, 804-815.

Die Untersuchung bezieht sich auf die bekannte Gruppe G vom Grade $p+1$ und von der Ordnung $(p+1)p(p-1)$, welche von den linear gebrochenen Substitutionen $\left|z\ \Theta(z)\right| = \left|z\ \frac{az+b}{a'z+b'}\right| (\text{mod.}\, p)$ [p Primzahl > 3] gebildet wird. Verf. beweist durch einfache und elementare Betrachtungen, dass keine Gruppe von $p+1$ Elementen existirt, welche allgemeiner als G und mit den Substitutionen von G vertauschbar ist. Ferner zeigt er eine neue Eigenschaft der in Rede stehenden Gruppe, welche die von den vertauschbaren Substitutionen derselben gebildeten Untergruppen betrifft. Wbg.

R. Fricke. Ueber eine einfache Gruppe von 360 Operationen. Gött. Nachr. 1896, 199-206.

Wiman hat in den Math. Ann. **47**, 531 ff. (vergl. das folgende Ref.) eine interessante algebraische Theorie einer einfachen Gruppe von 360 ebenen Collineationen geliefert. Diese Entwickelungen stehen in engster Beziehung zu gewissen arithmetisch-functionentheoretischen Untersuchungen des Verf. (Acta Math. **17**, 345 ff., 1893). Wiman's algebraische Theorie der Collineationsgruppe G_{360} zeigt nämlich volle Analogie zur bekannten von Klein (Math. Ann. **14**, 1878) herrührenden algebraischen Theorie der Gruppe G_{168} von 168 ebenen Collineationen. Dabei erscheint als Analogon der gegenüber G_{168} invarianten Curve C_4 (1) $x^3y+y^3z+z^3x = 0$ bei der G_{360} die durch (2) $10x^3y^3+9z(x^5+y^5)-45x^2y^2z^2 -135xyz^4+27z^6 = 0$ gegebene C_6 als Curve niedrigster Ordnung, die durch alle 360 Collineationen in sich transformirt wird. — Die G_{168} hat nun eine ausgedehnte transcendente Theorie, und eben von dieser Seite aus wurde Klein zu der G_{168} und der zugehörigen C_4 geführt. Verf. untersucht in der vorliegenden Arbeit die G_{360} nach dieser Richtung hin und kommt zu dem folgenden Resultat: „Den einfachsten Ansatz zur transcendenten Theorie der G_{360} gewinnen wir von der Dreiecksfunction $\zeta(2, 4, 5; J)$ aus; die Untergruppe aller mod. 3 mit 1 congruenten Substitutionen innerhalb der zugehörigen Gruppe liefert direct das durch die C_6 dargestellte algebraische Gebilde“. Wbg.

A. Wiman. Ueber eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen. Math. Ann. **47**, 531-556.

Die Gruppe G_{360}, welche den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung bildet, ist mit den geraden Vertauschungen von sechs Dingen holoedrisch isomorph. Sie wurde ebenso wie die von Klein gefundene G_{168}

von Jordan bei der Bestimmung aller endlichen Gruppen im ternären Gebiete übersehen und erst 1889 von Valentiner aufgestellt; dieser zeigte, dass die fragliche Gruppe aus 45 symmetrischen Collineationen, 80 von der Periode 3, 90 von der Periode 4 und 144 von der Periode 5 besteht, merkte aber nicht den oben angegebenen Isomorphismus. Diese G_{360} scheint berufen zu sein, hinsichtlich ihrer Bedeutung und ihrer Anwendungen eine ähnliche Rolle zu spielen wie die G_{168}. Die G_{360} ist wie die G_{168} einfach und zeigt viele Analogien mit derselben; namentlich lassen sich ihre vollständigen Formensysteme in völlig übereinstimmender Weise ableiten. Die einfachste zur G_{360} gehörige Form kann man auf die folgende Gestalt bringen: $F_6 = 10x^3y^3+9z(x^5+y^5) -45x^2y^2z^2-135xyz^4+27z^6$. Das Formensystem besteht nun aus F_6, ihrer Hesse'schen Determinante H, der durch die Derivirten H_1, H_2, H_3 geänderten Hesse'schen Determinante Φ und der Functionaldeterminanten Ψ von F, H und Φ, welche letztere, gleich Null gesetzt, 45 Symmetrieaxen darstellt. Innerhalb der G_{360} treten zwei Systeme von je 15 gleichberechtigten Oktaedergruppen und zwei Systeme von je sechs gleichberechtigten Ikosaedergruppen auf. Durch die geraden Vertauschungen der zu den einzelnen Ikosaedergruppen eines solchen Systems gehörenden Gebilde entsteht die G_{360}. — Von anderen Untergruppen der G_{360} seien noch zehn gleichberechtigte G_{36} erwähnt, welche Collineationsgruppen von harmonischen C_3 und daher schon als Untergruppen der Hesse'schen Gruppe G_{216} bekannt sind. Wbg.

E. H. Moore. A doubly-infinite system of simple groups. Chicago Congress, Mathem. papers. 208-242.

Die Arbeit (vergl. F. d. M. **25**, 198, 1893/94) beschäftigt sich, ebenso wie die von Burnside (F. d. M. **25**, 203-204, 1893/94), mit der übrigens schon von Mathieu (Journ. de Math. (2), **5**, 38-42, 1860) untersuchten Gruppe der linear gebrochenen Substitutionen in Bezug auf einen Primzahlmodul, deren Coefficienten einem Galois'schen Zahlkörper angehören. Verf. zeigt zunächst, dass jeder „endliche Körper" (nach Weber's Terminologie, vom Verf. „field" genannt) die abstracte Form eines Galois'schen Zahlkörpers ist. Sodann untersucht er die individuellen Elemente sowie die cyklischen und commutativen Untergruppen der in Rede stehenden Gruppe und discutirt die für die Ordnung einer selbstconjugirten Untergruppe derselben bestehende diophantische Gleichung; aus dieser Discussion ergiebt sich, dass die fragliche Gruppe mit Ausnahme von zwei besonderen Fällen einfach ist. — Es sei noch bemerkt, dass die Resultate des Verf. etwas früher (Dec. 1893) veröffentlicht wurden als die von Burnside (Febr. 1894). Wbg.

F. Fano. Ueber endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen. Monatsh. f. Math. **7**, 297-320.

Herleitung der bekannten Sätze auf geometrischem Wege, unter Vermeidung nichteuklidischer Betrachtungen. Bdt.

R. LEVAVASSEUR. **Sur les groupes d'opérations.** C. R. **122**, 180-182, 516-517, 711-713.

I. Darstellung der Operationen einer Gruppe von vertauschbaren Operationen als Potenzen einer einzigen unter ihnen, mit Galois'schen Imaginären als Exponenten. — Aufzählung einiger Gruppen der Ordnung 32.

II. Aufzählung der Gruppen der Ordnung $8p$, für eine Primzahl p.

III. Darstellung einer Gruppe als reguläre Substitutionsgruppe. — Darstellung von Gruppen durch complexe Zahlen eines endlichen Körpers (vgl. damit E. H. Moore, Chicago congress papers, Ref. S. 104). Bdt.

L. E. DICKSON. **Analytic functions suitable to represent substitutions.** American J. **18**, 210-218.

Aufstellung der Typen rationaler ganzer Functionen der Grade 1-6, die geeignet sind, eine Substitution zwischen p Elementen (p Primzahl) darzustellen. Bdt.

A. A. RADZIG. **Die Anwendung des Theorems von Sylow auf die symmetrische Gruppe.** Chark. Ges. (2) **5**, 1-15. (Russisch.)

Enthält einen Auszug aus der Doctordissertation des Verf.: „Die Anwendung des Sylow'schen Satzes auf die symmetrische und die alternirende Gruppe". Berlin, 1895 (F. d. M. **26**, 169, 1895). Wi.

H. MASCHKE. **The representation of finite groups, especially of the rotation groups of the regular bodies of three- and four-dimensional space, by Cayley's color diagrams.** American J. **18**, 156-194.

H. MASCHKE. **Ueber die Darstellung endlicher Gruppen durch Cayley'sche Farbendiagramme.** Gött. Nachr. 1896, 55-59.

Verf. benutzt Cayley's Methode der graphischen Darstellung einer Gruppe, bei welcher die Objecte durch Punkte, die erzeugenden Operationen durch verschiedenfarbige Verbindungslinien derselben repräsentirt werden, um endliche Gruppen, insbesondere die Rotationsgruppen (z. T. auch die erweiterten) der regelmässigen Körper im drei- und vierdimensionalen Raume darzustellen. Diese Darstellungsart hat den Vorzug grosser Uebersichtlichkeit; ganz besonders gilt dies für die Rotationsgruppen der regulären dreidimensionalen Körper, deren zweifarbige räumliche Diagramme sich so auf eine Ebene projiciren lassen, dass die projicirten Farbenlinien sich nirgends kreuzen. Die Farbendiagramme sind daher für viele Zwecke beim Studium der Rotationsgruppen den Modellen der regulären Körper vorzuziehen und bieten bei geeigneter Ausdehnung der vom Verf. angegebenen Methoden für die Untersuchung bekannter sowie für die Aufsuchung neuer Gruppen nach den verschiedensten Richtungen einen weiten Spielraum. So gelingt es u. a. dem Verf., mittels

seiner Farbengruppen in einfachster Weise zu zeigen, dass die erweiterte Tetraedergruppe mit der Oktaedergruppe holoedrisch isomorph ist.

Wbg.

A. Loewy. Sur les formes quadratiques définies à indéterminées conjuguées de M. Hermite. C. R. **123**, 168-171.

L. Fuchs. Remarques sur une Note de M. A. Loewy, intitulée: „Sur les formes quadratiques définies à indéterminées conjuguées de M. Hermite". C. R. **123**, 289-290.

Loewy zeigt in der Note vom 20. Juli 1896 einige Sätze ohne Beweis an, deren bemerkenswertester lautet: „Einer jeden linearen, endlichen Gruppe in n Variabeln entspricht eine definite quadratische Form mit conjugirten Unbestimmten (Hermite'sche Form), die eben durch die Substitutionen der Gruppe in sich übergeht". Fuchs weist demgegenüber darauf hin, dass der Satz von Loewy in seiner in den Berl. Ber. vom 9. Juli 1896 (cf. den betr. Bericht) erschienenen Abhandlung als besonderer Fall enthalten sei. Der Satz erscheint bei Fuchs als Eigenschaft eines Fundamentalsystems von Integralen einer linearen und homogenen Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten.

My.

G. Caldarera. Le sostituzioni rappresentate mediante trasposizioni. Atti Acc. Gioenia (4) **9**, 11 S.

G. Bohlmann. Continuirliche Gruppen von quadratischen Transformationen der Ebene. Gött. Nachr. 1896, 44-54.

Die endlichen discontinuirlichen Gruppen von quadratischen Transformationen sind bereits ausführlich, besonders von S. Kantor und Autonne, behandelt worden. Die vorliegende Arbeit bildet eine Ergänzung dazu, indem Verf. die Theorie der quadratischen Transformationen in Verbindung mit Lie's allgemeiner Theorie der endlichen continuirlichen Gruppen zur Lösung der ungleich leichteren Aufgabe benutzt, alle endlichen continuirlichen Gruppen von quadratischen Transformationen der Ebene aufzustellen. Das Resultat ist folgendes: „Es giebt zwei Arten continuirlicher Gruppen von quadratischen Transformationen der Ebene. Die endlichen Gleichungen der einen sind $x' = \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{\gamma_1 x + \delta_1}$, $y' = \frac{\alpha_2 y + \beta_2}{\gamma_2 y + \delta_2}$. Sie können als die sechsgliedrige Gruppe aller Kreisverwandtschaften gedeutet werden und lassen zwei Scharen von ∞^1 Curven — die beiden Scharen von Minimalgeraden — invariant. Die endlichen Gleichungen der anderen Art sind $x' = \frac{\gamma_1 x + \gamma_2}{\gamma_3 x + \gamma_4}$, $y' = \frac{\alpha_0 y + (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2)}{(\gamma_3 x + \gamma_4)^2}$. Sie stellen eine siebengliedrige Gruppe dar, welche eine Schar von ∞^1 Curven — die Scharen aller Parallelen zur y-Axe — invariant lässt. Die Untergruppen jeder von diesen Gruppen lassen sich nach Lie's Theorien sofort hinschreiben. Jede endliche continuirliche Gruppe von

quadratischen Transformationen der Ebene ist vermöge einer projectiven Coordinatentransformation mit einer dieser zwei Gruppen oder einer ihrer Untergruppen ähnlich." Wbg.

G. Brunel. Sur les systèmes de triades formés avec $6n+1$ éléments. Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24**, 145-149.

Bekanntlich kann man aus $6n+1$ oder $6n+3$ Elementen ein „Tripelsystem" bilden, so dass jede der Dyaden, die man aus diesen Elementen zusammensetzen kann, nur ein einziges Mal in dem System vorkommt. [Kirkman, Cambr. and Dubl. Math. J. **2** (1847) und Reiss, Journ. für Math. **56** (1859)]. In dem Falle von $6n+1$ Elementen, wenn $6n+1$ eine Primzahl ist, hat Netto (Math. Ann. **42**; F. d. M. **25**, 197, 1893/94) gezeigt, wie man ein solches aus n Cykeln von $6n+1$ Triaden bestehendes System bilden kann. Dieses Verfahren ist aber nicht anwendbar, wenn $6n+1$ keine Primzahl ist, z. B. für 25 und 49. Es ist jedoch, wie der Verf. zeigt, nicht schwer, auch in diesen Fällen derartige Systeme zu bilden. Er hat sie direct aufgestellt, wenn die Anzahl der Elemente die Werte 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49 annimmt. Lp.

C. G. J. Jacobi. Ueber die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten (1841). Hersg. von P. Stäckel. (Ostwald's Klassiker d. exacten Wissensch. No. 77.) Leipzig: W. Engelmann. 73 S. 8°.

C. G. J. Jacobi. Ueber die Functionaldeterminanten (1841). Hersg. von P. Stäckel. (Ostwald's Klassiker d. exacten Wissensch. No. 78.) Leipzig: W. Engelmann. 72 S. 8°.

Es muss als ein glücklicher Gedanke bezeichnet werden, die für die Theorie der Determinanten fundamentalen Abhandlungen Jacobi's neu herauszugeben; waren sie es doch, welche diese „Algebra über der Algebra" zum Gemeingut der Mathematiker gemacht haben.

Das erste Bändchen enthält die beiden Arbeiten: De formatione et proprietatibus determinantium und De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum, das zweite die Arbeit: De determinantibus functionalibus, welche alle drei im Jahre 1841 im **22.** Bande des Journals für Math. erschienen sind.

Der Uebersetzung sind die Originalabhandlungen im Journal für Math. zu Grunde gelegt worden, von denen die Gesammelten Werke (Bd. **3**, Berlin 1884) einen wortgetreuen Abdruck geben.

In den Anmerkungen zum zweiten Bändchen giebt der Uebersetzer einen historischen Ueberblick, wie sich der Begriff der Functionaldeterminante allmählich entwickelt hat. Jhk.

E. Pascal. I determinanti, teoria ed applicazioni, con tutte le più recenti ricerche. Manuale Hoepli. Milano: W. Hoepli. VIII + 330 S. 8°.

Eine schätzbare Zusammenfassung alles dessen, was die Determi-

nanten und deren Anwendungen betrifft, mit zahlreichen bibliographischen Verzeichnissen. Vi.

F. J. Studnicka. Beitrag zur Theorie der Determinanten. Casopis **25**, 241-243. (Böhmisch.)

Es wird der Satz aufgestellt und bewiesen: Der Wert einer Determinante wird Null, wenn $k < n$ homologe Elemente aller Colonnen (oder Zeilen), für sich genommen, eine arithmetische Reihe von höchstens $(k-2)^{\text{tem}}$ Grade bilden. Sda.

A. Bonolis. Sul prodotto delle matrici. Batt. G. **34**, 375-379.

Es ist der modificirte Jacobi'sche Beweis (J. für Math. **22**) für den Cauchy'schen Satz über die Multiplication zweier Matrizen von m Horizontal- und n Verticalreihen, je nachdem $m > n$ oder $m < n$. Jhk.

M. Arnaldi. Sui determinanti orlati e sullo sviluppo di un determinante per determinanti orlati. Batt. G. **34**, 209-214.

Verallgemeinerung einer Formel, die sich auf die Entwickelung einer Determinante nach Randdeterminanten bezieht (vergl. Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten § 5, 5). Jhk.

E. Pascal. Sulle varie forme che possono darsi alle relazioni fra i determinanti di una matrice rettangolare. Annali di Mat. (2) **24**, 241-253.

E. Pascal. Sopra le relazioni fra i determinanti formati coi medesimi elementi. Lomb. Ist. Rend. (2) **29**, 436-438.

E. Pascal. Su di un teorema del sig. Netto relativo ai determinanti, e su di un altro teorema ad esso affine. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{5}_1$, 188-191.

Vahlen (J. für Math. **112**, p. 308) hat die zwischen den Determinanten einer Matrix möglichen Relationen in gewisser Weise zusammengefasst. Der Verf. giebt in § 1 eine andere Zusammenfassung und leitet hieraus in § 2 zwei neue Formeln her, deren eine schon von Netto (Acta math. **17**, p. 199) mitgeteilt worden ist. In § 3 werden Untersuchungen von Picquet fortgesetzt: Sind A und B zwei Determinanten der Ordnung m, so werden aus B auf alle möglichen Weisen k Zeilen ausgewählt und an die Stelle von k Zeilen in A gesetzt. Dadurch ergeben sich neue Determinanten, über welche Picquet Theoreme aufgestellt hat. § 4 bezieht sich ebenso wie die dritte Notiz auf die Netto'sche Erweiterung des Laplace'schen Determinanten-Zerlegungssatzes (J. für Math. **114**). Der Verf. giebt einen neuen einfachen Beweis für Netto's Theorem und stellt ihm ein analoges an die Seite.

In der zweiten Notiz knüpft der Verf. an Untersuchungen von Bagnera (Batt. G. **25**) an. Permutirt man die Elemente von k Vertical-

reihen einer Determinante n^{ter} Ordnung auf alle möglichen Weisen, so entstehen neue Determinanten, zwischen denen Beziehungen existiren. Von den Relationen zwischen den Determinanten einer Matrix ausgehend, findet der Verf. einen allgemeinen Typus der gesuchten Beziehungen.

Jhk.

J. Brill. **Note on matrices.** Lond. M. S. Proc. **27**, 35-38.

Bei dem Versuche, die Theorie der Matrizen auf die Lösung linearer Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten anzuwenden, stiess der Verf. auf die Frage, ob das Differential der Matrix mit der Matrix selber vertauschbar ist, wenn eine Matrix m infolge der unendlich kleinen Variationen gewisser Scalarelemente, die in ihrem Ausdruck vorkommen, verändert wird. Wenn der Gleichung $(m-\lambda_1)(m-\lambda_2)\dots(m-\lambda_n)=0$ durch m genügt wird, so ergiebt sich als allgemeinste Form für dm:

$$d\lambda_1\frac{(m-\lambda_2)\dots(m-\lambda_n)}{(\lambda_1-\lambda_2)\dots(\lambda_1-\lambda_n)}+\dots+d\lambda_n\frac{(m-\lambda_1)\dots(m-\lambda_{n-1})}{(\lambda_n-\lambda_1)\dots(\lambda_n-\lambda_{n-1})}.$$

Jhk.

Ch. J. Joly. **Quaternion invariants of linear vector functions and quaternion determinants.** Dublin Proc. (3) **4**, 1-15.

P. G. Tait. **On the linear and vector function.** Edinb. Proc. **21**, 160-164, 310-312.

G. Frobenius. **Ueber vertauschbare Matrizen.** Berl. Ber. 1896, 601-614.

Den Weierstrass'schen Untersuchungen: Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen und den von Dedekind über denselben Gegenstand veröffentlichten Arbeiten liegt ein algebraischer Satz zu Grunde, der in einem weiteren Umfange gilt, als er in jenen Abhandlungen bewiesen ist. Er lautet so: Sind $a_{\alpha\beta\gamma}$ $(\alpha,\beta=1,2,\dots,n;$ $\gamma=1,2,\dots,m)$ irgend mn^2 Grössen, die den Bedingungen $\sum\limits_\lambda a_{\alpha\lambda\gamma}a_{\lambda\beta\delta}=\sum\limits_\lambda a_{\alpha\lambda\delta}a_{\lambda\beta\gamma}$ genügen, und setzt man $a_{\alpha\beta}=\sum\limits_\gamma a_{\alpha\beta\gamma}x_\gamma$, so ist die Determinante n^{ten} Grades $|a_{\alpha\beta}|$ ein Product von n linearen Functionen der m unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Der Verf. beweist dieses Theorem in der etwas allgemeineren Formulirung: Ist $f(x, y, z, \dots)$ eine beliebige Function der m Variabeln $x, y, z, \dots$, sind $A, B, C, \dots$ m Formen, von denen je zwei vertauschbar sind, und sind $a_1, a_2, a_3, \dots$ (resp. $b_1, b_2, b_3, \dots;$ $c_1, c_2, c_3, \dots$) die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von A (resp. $B, C, \dots$), so sind die Grössen $f(a_1, b_1, c_1, \dots)$, $f(a_2, b_2, c_2, \dots)$, $f(a_3, b_3, c_3, \dots)$, ... die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Form $f(A, B, C, \dots)$.

Es wird gezeigt, dass es genügt, folgenden speciellen Fall dieses allgemeinen Theorems zu beweisen: Sind A und B zwei mit einander vertauschbare Formen, und sind x und y zwei Variabeln, so sind die

Wurzeln der charakteristischen Gleichung der Form $Ax+By$ ganze lineare Functionen von x und y.

Beim Beweise bedient sich der Verf. eines Fundamentaltheorems, das er schon in einer früheren Arbeit (J. für Math. **84**) aufgestellt hat, hier aber auf einem einfacheren Wege ableitet: Ist $\vartheta(r)$ der grösste gemeinsame Divisor aller Unterdeterminanten $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades der Form $rE-A$, und ist $\varphi(r)/\vartheta(r) = \psi(r)$, so ist $\psi(A) = 0$ die Gleichung niedrigsten Grades, der die Form A genügt, und wenn $\chi(A) = 0$ irgend eine andere Gleichung ist, der A genügt, so ist $\chi(r)$ durch $\psi(r)$ teilbar.

Dabei ist $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ gesetzt, und $|rE-A| = \varphi(r)$ bezeichnet die charakteristische Function der Form A. Jhk.

H. S. White. Kronecker's linear relation among minors of a symmetric determinant. American M. S. Bull. **2**, 136-138.

An der Darstellung, welche Kronecker in Berliner Ber. 1882 von seinen Relationen zwischen den Subdeterminanten symmetrischer Systeme gegeben hat, vermisst der Verf. eine Andeutung über die Art, wie Kronecker zu der Entdeckung derselben gelangt sei, und bringt diesen Gegenstand in Verbindung mit einer Formel bei den Transformationen der Invariantentheorie. Durchgeführt wird der Gedanke an dreireihigen Determinanten. Von der Litteratur über das Thema wäre vielleicht Mehmke (F. d. M. **17**, 103, 1885), der Grassmann als Vorgänger Kronecker's bezeichnet, und Schendel (F. d. M. **19**, 146, 1887) mit seiner eigentümlichen Beweismethode zu erwähnen gewesen.

Lp.

Ch. Michel. Le déterminant symétrique gauche d'ordre pair. J. de Math. spéc. (4) **5**, 127-129.

Beweis der bekannten Eigenschaft, dass solche Determinante das Quadrat eines Polynoms ist. Lp.

G. Rados. Zur Theorie der adjungirten Substitutionen. Math. Ann. **48**, 417-424.

Werden aus einer Matrix die adjungirten Matrices abgeleitet, so entstehen aus der gegebenen Substitution neue, welche als die „adjungirten Substitutionen“ bezeichnet werden. Für diese wird der folgende Satz bewiesen: Bezeichnen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ die Wurzeln der charakteristischen Gleichung $|c_{ik}-\varepsilon_{ik}\varrho| = 0$, $\varepsilon_{ik} = 0$, $\varepsilon_{ii} = 1$, welche der linearen Substitution $y_\alpha = c_{\alpha 1}x_1 + \cdots + c_{\alpha n}x_n$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ entspricht, so erhält man die Wurzeln der charakteristischen Gleichung für die m^{te} adjungirte Substitution $|C_{ik}^{(m)}-\varepsilon_{ik}\varrho| = 0$ aus dem Producte $\varrho_{i_1}, \varrho_{i_2}, \ldots, \varrho_{i_m}$, indem man für $i_1, \ldots, i_m$ der Reihe nach sämtliche Combinationen m^{ter} Klasse aus den Elementen $1, 2, \ldots, n$ setzt.

Jhk.



Elgé. Exercices sur les déterminants. J. de Math. spéc. (4) **5**, 170-173, 198-201, 223-225, 244-245.

Uebungen in der Auswertung von Determinanten mit Hülfe der ersten Sätze über die Umformungen von Determinanten. Lp.

L. G. Gascó. Reglas prácticas para es desarrollo de las determinantes de cuarto grado. Archivo de Mat. **1**, 11-15.

Drei Regeln zur bequemen Entwickelung der Determinanten vierter Ordnung. Tx. (Lp.)

F. J. Studnicka. Ueber Potenzdeterminanten und deren wichtigste Eigenschaften. Prag. Ber. 1896, 8 S.

Potenzdeterminante heisst die Determinante $|a_k^\lambda|$ $(\lambda = n-1, n-2, \ldots, 0;\ k = 1, \ldots, n)$. Es werden Determinanten betrachtet, wo die Differenz zweier Nachbarexponenten mehr als die Einheit beträgt. Jhk.

T. Cazzaniga. Sopra i determinanti di cui gli elementi principali variano in progressione aritmetica. Lomb. Ist. Rend. (2) **29**, 541-558.

Elementare Herleitung der schon von Capelli (Accad. di Nap. 1889) gegebenen Entwickelungen von Determinanten, deren Hauptelemente etwa die Form $a_{ii}+z+\varepsilon(i-1)$ haben ($\varepsilon = 0$ bezw. 1), nach Potenzen von z bezw. nach Factoriellen von z. Jhk.

Niels Nielsen. En Determinantformel. Nyt Tidss. for Math. **7**B, 59-62.

Die Formel lautet:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x-1}, & \frac{1}{x-2}, & \frac{1}{x-3}, & \ldots, & \frac{1}{x-p} \\ \frac{1}{2x-1}, & \frac{1}{2x-2}, & \frac{1}{2x-3}, & \ldots, & \frac{1}{2x-p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{px-1}, & \frac{1}{px-2}, & \frac{1}{px-3}, & \ldots, & \frac{1}{px-p} \end{vmatrix} = \frac{x^{p(p-1)}\,1^{2p-2}\,2^{2p-4}\,3^{2p-6}\ldots(p-1)^2}{\prod\limits_{\mu=1}^{\mu=p}\prod\limits_{\nu=1}^{\nu=p}(\mu x-\nu)}.$$

Auf der rechten Seite der Gleichung fehlt der Factor $(-1)^{\frac{1}{2}p(p-1)}$. V.

W. W. Taylor. Evaluation of a certain dialytic determinant. Lond. M. S. Proc. **27**, 60-66.

Es ist eine Ergänzung einer an derselben Stelle in demselben Bande erschienenen Arbeit von Elliott (On the existence of a root of a rational integral equation), welche sich im Auszuge nicht wiedergeben lässt. Jhk.

E. Brand. **Note sur les déterminants.** J. de Math. spéc. (4) **5**, 102-106.

I. Differentialquotienten einer Determinante, deren Elemente Functionen einer unabhängigen Veränderlichen sind. II. Eine Eigenschaft der Subdeterminanten bei verschwindenden Determinanten. Lp.

F. Schicht. **Beitrag zur Theorie der Determinanten.** 24. Jahresbericht über das Staatsgymnasium mit deutsch. Unterrichtssprache in Prag-Altstadt. 1896, 2 S.

Beweis des bekannten Satzes:

„Sind $|a_{i,k}|$ und $|b_{i,k}|$ zwei n^2-gliedrige Determinanten und bez. $|A_{i,k}|$ und $|B_{i,k}|$ ihre adjungirten Determinanten, so ist die Multiplicationsdeterminante $|C_{i,k}|$ der beiden adjungirten Determinanten zugleich die adjungirte Determinante der Multiplicationsdeterminante $|c_{i,k}|$ der beiden gegebenen Determinanten $|a_{i,k}|$ und $|b_{i,k}|$." Hau.

E. H Roberts. **Note on infinite determinants.** Annals of Math. **10**, 35 - 49.

Unendliche Determinanten treten u. a. in Arbeiten Poincaré's auf. Doch sind es hier specielle Determinanten, die den Bedingungen genügen, dass die Elemente der Diagonale gleich der Einheit sind, und dass die Summe der nicht in der Diagonale stehenden Glieder absolut convergirt. Der Verf. untersucht allgemeine unendliche Determinanten. Da eine solche eine unendliche Reihe darstellt, deren Glieder unendliche Producte sind, so lassen sich die Begriffe der Divergenz und Convergenz auf die unendlichen Determinanten übertragen. Es werden die notwendigen Bedingungen für die Convergenz derselben aufgestellt. Zu diesen Bedingungen gehört z. B. die, dass nicht alle Elemente negativ sein dürfen. Jhk.

H. von Koch. **Sur la convergence des déterminants d'ordre infini.** Stockh. Akad. Bihang **22**, No. 4. 31 S.

In einer Doppelreihe

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

convergire das Product $A_{11} A_{22} A_{33} \dots$ unbedingt, und man bilde alle Producte $\pm A_{ik} A_{lm} \dots$ nach ganz denselben Regeln wie bei einer endlichen Determinante. Wenn die Summe aller dieser Producte einen bestimmten, von der Summationsordnung unabhängigen, endlichen Wert Δ hat, so bilden nach dem Verf. die Elemente A_{ik} eine unbedingt convergente unendliche Determinante, mit dem Werte Δ. Diese Definition ist nicht ganz mit derjenigen äquivalent, nach welcher die unendliche Determinante convergirt, wenn die aus den ersten n Horizontal- und Verticalreihen gebildete Determinante für $n = \infty$ einen bestimmten endlichen Grenzwert hat.

Wenn alle Elemente von Null verschieden sind, so folgt aus der unbedingten Convergenz der gegebenen Determinante, dass auch alle Minoren derselben (ganz wie bei endlichen Determinanten definirt) unbedingt convergiren.

Producte der Form $A_{i_1 i_2}.A_{i_2 i_3}\dots A_{i_k i_1}$, bezw. $A_{i_1 i_2}.A_{i_2 i_3}\dots A_{i_k i_{k+1}}$ nennt der Verf. „circulare Producte der Ordnung $k-1$“, bezw. „semi-circulare Producte der Ordnung k“ und benutzt bei dem letzteren die Redeweise, dass es „zum Elemente $A_{i_{k+1} i_1}$ gehört“.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für unbedingte Convergenz einer unendlichen Determinante und aller zugehörigen Minoren lassen sich nach dem Verf. so ausdrücken: 1) Das Product der Diagonalelemente soll unbedingt convergiren; 2) die Summe aller circularen Producte soll unbedingt convergiren; endlich 3) ebenso die Summe aller zu einem beliebigen Elemente gehörenden semi-circularen Producte.

Es sei ferner n eine beliebige ganze positive Zahl; dann ist es für die fragliche Convergenz hinreichend, dass 1) das Product der Diagonalelemente unbedingt convergirt; 2) die Summe aller circularen Producte, deren Ordnung $< n-1$ ist, unbedingt convergirt, endlich 3) ebenso die n Summen aller Producte der Form $a_{i_1 i_2}.a_{i_2 i_3}\dots a_{i_\nu i_{\nu+1}}$ ($\nu = n, n+1, \dots, 2n-1$), wo $a_{ik} = A_{ik}$ oder $= 1+A_{ik}$ ist, je nachdem $i \gtrless k$ oder $i = k$.

Die Arbeit enthält auch einige andere Bemerkungen über die unbedingt convergenten unendlichen Determinanten. Bdn.

C. A. LAISANT. Propriétés des coefficients du binôme. S. M. F. Bull. **24**, 197-199.

Bezeichnet man die Determinante des Systems p^k ($p = 1, 2, 3, \dots, n+1$; $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) nach Tilgung der Reihe $p = k$ durch Δ_k, und ist (2) $(1+x)^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$, so ist $\frac{\Delta_0}{c_0} = \frac{\Delta_1}{c_1} = \frac{\Delta_2}{c_2} = \cdots = \frac{\Delta_n}{c_n}$. Zum Beweise wird Gleichung (2) n-mal nach einander erst mit x multiplicirt, dann differentiirt. Das so erhaltene System von n Gleichungen giebt für $x = -1$ nach Auflösung die zu beweisende Proportion. H.

H. TABER. On a twofold generalization of Stieltjes' theorem. Lond. M. S. Proc. **27**, 613-621.

Aus Untersuchungen von F. Deruyts (Liége Mém. (2) **17**) zieht der Verf. als Folgerungen vier Theoreme über orthogonale Substitutionen, unter denen das dritte so lautet: Man bezeichne mit $[A_{-1}^{2m+1}]$ die Determinante der m-fach angewandten linearen Transformation, durch das System $x'_r = a_{r1}x_1 + \cdots + a_{r\,r-1}x_{r-1} + (a_{rr} - \varrho)x_r + a_{r\,r+1}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n$ ($r = 1, \dots, n$) definirt, für $\varrho = -1$. Ist dann die Determinante der orthogonalen, durch das System $x'_r = a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rn}x_n$ ($r = 1, \dots, n$) definirten Substitution A gleich der Einheit, und verschwinden

sämtliche $(2k)^{\text{ten}}$ Minoren der Determinante $[A_{-1}^{2m+1}]$, so verschwinden auch sämtliche $(2k+1)^{\text{ten}}$ Minoren.

Für $m=0$ und $k=0$ fliesst hieraus das Theorem von Stieltjes, welches in der Netto'schen Fassung (Acta Math. **19**) aussagt, dass mit der Determinante n^{ter} Ordnung $\Delta = |a_{ik}+\varepsilon_{ik}|$ ($\varepsilon_{ik}=0$, $\varepsilon_{ii}=1$) zugleich alle ihre Subdeterminanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden, wenn a_{ik} ein orthogonales System mit der Determinante $+1$ bedeutet.

Der interessanteste Fall $m=1$ des neuen Theorems ist schon, wie auch der Verf. in einer Nachschrift bemerkt, von A. Voss (Math. Ann. **13**) aufgestellt worden.

Alle seine Theoreme lassen sich, wie der Verf. noch hinzufügt, aus Theoremen herleiten, die Frobenius über Elementarteiler der charakteristischen Function einer orthogonalen Substitution mitgeteilt hat (J. für Math. **84**).

Jhk.

C. Ciamberlini. **Intorno alla relazione tra le distanze di 5 punti dello spazio.** Batt. G. **34,** 279-289.

Der Verf. untersucht die Modificationen der Cayley'schen Determinanten-Bedingung, welche zwischen den Quadraten der Abstände a_{ik} von fünf Punkten besteht, erstens für den Fall, dass die Punkte auf einer Kugel liegen, zweitens für den Fall, dass vier derselben in einer Ebene liegen. Im letzteren Fall ergiebt sich die Relation in der Form: $a_{15}^2\Delta_{234}-a_{25}^2\Delta_{341}+a_{35}^2\Delta_{412}-a_{45}^2\Delta_{123}-\varepsilon_5=0$, wo Δ_{ikl} den Inhalt des Dreiecks $A_i A_k A_l$ bezeichnet und $16\varepsilon_5^2 = 2(a_{12}^2a_{31}^2a_{24}^2a_{34}^2+a_{23}^2a_{12}^2a_{34}^2a_{14}^2+a_{31}^2a_{23}^2a_{14}^2a_{24}^2)-a_{23}^4a_{14}^4-a_{31}^4a_{24}^4-a_{12}^4a_{34}^4$ gesetzt ist.

Jhk.

J. Brill. **On the generalization of certain properties of the tetrahedron.** Cambr. Proc. **9,** 98-108.

Die Verallgemeinerung besteht darin, dass statt des Minimalkegels ein beliebiger Kegel der Massbestimmung zu Grunde gelegt wird. Die im Sinne dieser Massbestimmung definirten Kantenwinkel eines Tetraeders genügen derselben Determinantenrelation, wie bei der gewöhnlichen Massbestimmung. Verf. zeigt dieses durch symbolische Rechnungen mit „Matrizen", welche eine Umschreibung des Quaternionencalcüls bilden.

A. S.

D. André. **Théorème nouveau de réversibilité algébrique.** S. M. F. Bull. **24,** 136-139.

Folgender Satz, bereits im Intermédiaire ohne Beweis mitgeteilt, wird hier zuerst bewiesen. Aus zwei Reihen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $X_1, X_2, \ldots, X_n$ werden zwei analoge Systeme

$$\begin{matrix} x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x_1 \\ x_3 & x_4 & \cdots & x_1 & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n & x_1 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} \end{matrix}$$

gebildet und nach successiver Tilgung der ersten, zweiten, etc. Colonne die Determinanten mit $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, resp. $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ bezeichnet. Ist dann $\frac{\delta_1}{X_1} = \frac{\delta_2}{X_2} = \cdots = \frac{\delta_n}{X_n}$, so ist auch $\frac{\Delta_1}{x_1} = \frac{\Delta_2}{x_2} = \cdots = \frac{\Delta_n}{x_n}$.

H.

C. A. Laisant. **Identités relatives à des polynômes entiers.** S. M. F. Bull. **24**, 191-192.

Bedeuten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ die Wurzeln einer algebraischen Gleichung m^{ten} Grades $f(x) = 0$, so ist

$$\sum_{\mu=1}^{m} f^{(m-3)}(x_\mu) + \frac{m^2(m-3)}{2} f^{(m-3)}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}\right) = 0,$$

$$\sum_{\mu=1}^{m} f^{(m-2)}(x_\mu) + m(m-2) f^{(m-2)}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_m}{m}\right) = 0.$$

F.

Fr. Junker. **Die elementaren symmetrischen Functionen und die Potenzsummen einer oder mehrerer Reihen von Veränderlichen.** Schlömilch Z. **41**, 199-209.

Die schon vielfach behandelte Darstellung der Potenzsummen $s_1 = \Sigma x_1$, $s_2 = \Sigma x_1^2, \ldots$ als ganzer Functionen der r Elementarfunctionen $\Sigma x_1 = a_1$, $\Sigma x_1 x_2 = a_2, \ldots$ von r Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_r$, und umgekehrt, wird hier auf einem Differentiationswege geleistet, der die Verallgemeinerung auf mehrere Variabelnreihen gestattet.

Auf Grund der als bekannt angenommenen Darstellung $s_p = \varphi(a)$ (bezw. $a_p = f(s)$) wird die nächstfolgende Formel für s_{p+1} bezw. a_{p+1} abgeleitet. Man hat nämlich zunächst $\frac{\partial s_p}{\partial x_i} = p x_i^{p-1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, woraus unmittelbar folgt: $s_{p+1} = \frac{1}{p} \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} x_1^2$. Führt man rechts aus, so hat man nur noch die symmetrischen Functionen $\Sigma x_1^2, \Sigma x_1^2 x_2, \ldots, \Sigma x_1^2 x_2 \ldots x_i$ durch die a auszudrücken. Sobald man aber das Product $a_1 a_i$ bildet, resultirt $\Sigma x_1^2 x_2 \ldots x_i = a_1 a_i - (i+1) a_{i+1}$, und durch Substitution:

(1) $p s_{p+1} = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{\partial \varphi}{\partial a_i} [a_1 a_i - (i+1) a_{i+1}]$. Analog wird a_{p+1} in Function der s gebildet.

Für die entsprechenden Aufgaben des ternären, quaternären, ... Gebietes lassen sich erweiterte Differentiationsprocesse angeben, die auch hier verhältnismässig schnell zum Ziele führen. My.

FR. JUNKER. Die symmetrischen Functionen der gemeinschaftlichen Variabelnpaare ternärer Formen. Tafeln der ternären symmetrischen Functionen vom Gewicht 1 bis 6. Wien. Denkschr. **64**, 439-540.

„Bekanntlich lässt sich jede symmetrische Function $\Sigma x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \ldots$ von beliebig vielen Variabelnpaaren $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, ... durch die Elementarfunctionen Σx_1, Σy_1, $\Sigma x_1 x_2$, $\Sigma x_1 y_2$, $\Sigma y_1 y_2$, ..., bezw. einförmigen Functionen Σx_1, Σy_1, Σx_1^2, $\Sigma x_1 y_1$, Σy_1^2, ... derselben darstellen. Umgekehrt kann auch jede Productcombination von elementaren durch solche der einförmigen Functionen und umgekehrt, oder als lineare Function von mehrförmigen Functionen dargestellt werden. Auf diese Weise lassen sich für jede Art von symmetrischen Functionen vom gleichen Gewicht sechs Tabellen aufstellen, in denen die Productcombinationen der einen Art durch solche der anderen oder durch symmetrische Functionen und umgekehrt ausgedrückt sind. Wir haben diese Tabellen für die Functionen vom Gewicht 1 bis 6 incl. berechnet und in Abschnitt I neben den notwendigsten Definitionen und Erklärungen auch die Methoden und Operationen zusammengestellt, nach denen die Berechnung stattgefunden hat. Gleichzeitig sind auch gewisse Eigenschaften dieser Tabellen angegeben, und ist gezeigt worden, wie die letzteren zur Ermittelung der identischen Relationen zwischen den Elementarfunctionen und einförmigen Functionen einer endlichen Anzahl von Gruppen benutzt werden können.

Betrachtet man nun die Elemente $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, ... als die Coordinaten der $r = mn$ Schnittpunkte zweier algebraischen Curven f und φ von den Ordnungen m und n, so tritt uns in erster Linie die Aufgabe entgegen, die symmetrischen Functionen der Schnittpunkte derselben, sowie die andere, die Coordinaten der letzteren zu berechnen. Hierbei begegnen wir Functionen, die, wie die Resultante zweier algebraischen Gleichungen, nach zwei Seiten hin symmetrisch sind, und die ich deshalb „zweifach symmetrisch“ genannt habe. Die Untersuchungen in Abschnitt II verfolgen deshalb den Zweck, die zweifach symmetrischen Functionen zu studiren und gewisse Differentialprocesse für dieselben aufzustellen und letztere zur Berechnung der symmetrischen Functionen der Schnittpunkte zweier Curven zu benutzen.

Hieran anschliessend sind im Abschnitt III auch die Bedingungen ermittelt worden, dass drei ebene Curven durch mehrere an beliebigen Stellen befindliche Punkte gemeinschaftlich hindurchgehen. Dieselben sind durch gewisse symmetrische Functionen ausgedrückt und meines Wissens noch nicht aufgestellt worden. Hierzu sei noch bemerkt, dass die Methoden, welche zur Aufstellung derselben geführt haben, auch zur Ermittlung der Bedingungen benutzt werden können, dass eine ebene algebraische Curve einen, zwei, ..., i Doppelpunkte an beliebigen, nicht bekannten Stellen besitzt.“

Wir fügen dieser Inhaltsangabe des Verf. nur hinzu, dass die Darstellung der Methoden von S. 439 bis 487 reicht, die Seiten 488 bis 540 dagegen von den Tabellen eingenommen werden. Lp.

M. J. M. Hill. Condensed proof and generalisation of Vandermonde's theorem. Messenger (2) **25**, 154-156.

Die Verallgemeinerung ist:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)_n=\Sigma\frac{n!}{(r_1)!\,(r_2)!\ldots(r_m)!}(a_1)_{r_1}(a_2)_{r_2}\ldots(a_m)_{r_m},$$

wo $r_1+r_2+\cdots+r_m=n$ und $a_r=a(a-1)\ldots(a-r+1)$.

Glr. (Lp.)

L. Saalschütz. Einfache Beweise der Newton'schen Identitäten. Königsb. phys.-ökon. Ges. 1895, 67-74.

Dritter Abschnitt.

Niedere und höhere Arithmetik.

Kapitel 1.

Niedere Arithmetik.

W. Briggs and G. H. Bryan. The intermediate algebra. London: W. B. Clive, University Correspondence College Press. VII + 374 S.

Dieses Buch beruht auf der „Algebra" eines indischen Professors Radakrishnan, welche nach der Angabe der Verf. das Ergebnis einer verständigen Verarbeitung der besten englischen Muster, besonders von De Morgan, Clifford und Chrystal sein soll. Wir haben Radakrishnan's Algebra nicht gesehen und können also nichts über sie aussagen; allein nach einer sorgfältigen Prüfung des vorliegenden Werkes, das sich darauf gründen soll, finden wir es schwierig, seine Ueberlegenheit über die gebräuchlichen Lehrbücher zu erkennen. Es scheint uns sowohl ihre charakteristischen Vorzüge als auch ihre gleich charakteristischen Mängel zu besitzen, unterscheidet sich aber in keinem wesentlichen Punkte von ihnen. Mit der Theorie der Potenzen und der Wurzeln beginnend, erledigt es den gewöhnlichen Lehrgang der Algebra bis zu der allgemeinen Reihentheorie, aber unter Ausschluss derselben, indem es mit der Binomialreihe für einen positiven, ganzen Exponenten endigt. Dieser Stoff wird in 23 Kapiteln vorgetragen, die in 339 Abschnitte oder Paragraphen geteilt sind, so dass kein Mangel an eingehenden Erläuterungen besteht. Die Darstellung ist klar und die Beweise sind in manchen Fällen, wie z. B. in § 205, einfacher als die gewöhnlich gegebenen. Durchgearbeitete Beispiele sind zahlreich vorhanden, und die für Uebungen bestimmten sind noch zahlreicher. Die Untereinteilungen des Gegenstandes sind jedoch so weit getrieben, dass man sich des Sprüchwortes erinnern muss, man sieht den Wald vor Bäumen nicht. Fast gewinnt es den Anschein, als ob jede mögliche Art von Fragen, die bei einer Prüfung gestellt werden könnte, analysirt und erklärt worden sei. Ob es für den Schüler gut ist, dass so viel für ihn geschehen ist, dürfte sehr fragwürdig sein; wenn er aber solcher eingehenden Hülfe bedarf, so findet er sicherlich alles, was er braucht, in diesem Buche.

Andererseits giebt es einige wichtige Teile, die zur eigentlichen Grundlage der Algebra gehören und wohl eine bessere Behandlung hätten erhalten können. So ist das Kapitel über die Wurzeln in keiner Hinsicht besser als in Todhunter's Algebra; es ist sehr zu wünschen, dass die Verfasser elementarer Bücher der Definition und den Eigenschaften der irrationalen Zahlen eine grössere Beachtung schenken. Aus Mangel an einer geeigneten Definition und an einer Entwickelung der Eigenschaften der irrationalen Zahl ist es unmöglich, eine logische Behandlung z. B. der Proportionslehre in der Geometrie zu erhalten, oder des Verhältnisses in der Trigonometrie, um nicht die Schwierigkeiten bei dem Unterricht in der Infinitesimalrechnung zu erwähnen. Ohne Zweifel würde eine gründliche Erörterung in einem Schulbuche durchaus nicht am Platze sein, aber etwas mehr sollte geschehen, als jetzt im allgemeinen gethan wird. Gbs. (Lp.)

E. Gelin. Recueil de problèmes d'arithmétique. Troisième édition. Huy: chez l'auteur. 284 S. 8°.

Eine treffliche Sammlung, wert auch im Auslande bekannt zu werden. Mn. (Lp.)

K. Koppe's Arithmetik und Algebra zum Gebrauche an höheren Unterrichtsanstalten neu bearbeitet von J. Diekmann. 13. Aufl. Teil I und II. Essen: G. D. Bädeker. VIII + 176, VI + 204 S. 4°.

Die beiden Bände, zugleich Lehrbuch und Aufgaben-Sammlung, enthalten etwa das Pensum der höheren Lehranstalten in der Algebra. Wenn der Herausgeber sagt, dass bei der Neubearbeitung, abgesehen von der Berücksichtigung der neueren Lehrpläne, auch „denjenigen Forderungen Rechnung getragen werden sollte, welche im Interesse einer strengen geistigen Zucht und wissenschaftlichen Förderung der Schüler bei dem heutigen Stande der algebraischen Disciplinen gestellt werden müssen", so ist Ref. doch der Ansicht, dass namentlich im ersten Teile die Begründung so mancher Rechnungsvorschrift noch zu wünschen übrig lässt. F.

G. Löwenberg. Lehrbuch der Mathematik. Zum Selbststudium und für den Unterricht in Prima der höheren Lehranstalten. Leipzig: J. J. Arnd. 189 + 8 S. gr. 8°.

Das nicht ganz correct als „Lehrbuch der Mathematik" bezeichnete Buch „soll den Uebergang vom Schulpensum zum Universitätsstudium vermitteln", d. h. es soll diejenigen Teile der Mathematik darstellen, welche zwar zum Pensum der Prima höherer Lehranstalten gehören, aber deren Kenntnis häufig, besonders den Gymnasialabiturienten, fehlt. Besonders soll diese Einleitung in die höhere Mathematik denjenigen jungen Leuten zu Gute kommen, welche die Schule vor Erlangung des Reifezeugnisses verlassen und sich einem praktischen Studium, z. B. dem Bau- oder Ingenieurfach, widmen. Den Inhalt des Buches machen aus: Sphärische Trigonometrie, Grundbegriffe der Astronomie, Elemente der

analytischen Geometrie, stereometrische Behandlung der Schnitte eines Kegels, Permutationen und Combinationen, binomischer und polynomischer Lehrsatz mit Anwendungen auf trigonometrische und logarithmische Reihen, Sätze über Gleichungen höheren Grades, reciproke Gleichungen, Elemente der Differential- und Integralrechnung, Einführung in die Theorie der Determinanten. Ein „Anhang“ von acht Seiten enthält vermischte Aufgaben. M.

J. Müller. **Die sieben arithmetischen Operationen.** Pr. (No. 760) Realsch. Lübeck. 40 S. kl. 8°.

Die für die Realschule bearbeitete kleine Schrift enthält in gedrängter Uebersicht die Sätze und Regeln der sieben elementaren algebraischen Operationen. Eine wissenschaftliche systematische Entwickelung des Zahlbegriffs war nicht beabsichtigt. M.

W. Pflieger. **Elemente der Arithmetik für die mittleren und oberen Klassen höherer Lehranstalten.** Strassburg: F. Bull. IV + 127 S. 8°.

Die Darstellung schliesst sich derjenigen an, welche Weierstrass in seinen berühmten Vorlesungen: „Einleitung in die Functionentheorie“ gegeben hat. Im besonderen wird das Postulat an die Spitze gestellt, dass bei jeder Erweiterung unseres Zahlengebietes die alten Gesetze sämtlich bestehen bleiben. Jhk.

H. Schubert. **Arithmetik und Algebra.** (Sammlung Göschen, No. 47.) Leipzig: G. J. Göschen. 171 S. kl. 8°.

H. Schubert. **Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra.** (Sammlung Göschen, No. 48.) Leipzig: G. J. Göschen. 134 S. kl. 8°.

Ein kurzes, präcis geschriebenes Lehrbuch der elementaren Arithmetik und Algebra, das die exacten Anschauungen, welche sich die Wissenschaft in den letzten Jahrzehnten von den Elementen der Zahlenlehre gebildet hat, auch für den Anfangsunterricht nutzbringend verwendet. Die Behandlung der irrationalen Zahlen scheint dem Ref. allerdings nicht recht befriedigend, z. B. vermisst er eine Definition des Productes zweier irrationalen Zahlen.

Die Beispielsammlung schliesst sich dem Lehrbuch genau an. F.

K. Schwering. **Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik für höhere Lehranstalten. Lehrgang I, II, III.** Freiburg i. B.: Herder. 242 S. 8°.

Die vorliegende Aufgabensammlung schliesst sich nach Plan und Inhalt den „Anfangsgründen der Arithmetik und Algebra“ des Verf. möglichst an. Der erste Lehrgang (S. 1-58) enthält die vier Species, Decimalbrüche und Gleichungen mit einer Unbekannten; der zweite (S. 59-146) negative Zahlen, Gleichungen ersten Grades mit mehreren

Unbekannten, Potenzen und Wurzeln, Gleichungen zweiten Grades, eingekleidete Aufgaben, welche auf diese führen, und Logarithmen; der dritte umfasst die allgemeine Potenz- und Wurzellehre, arithmetische und geometrische Reihen, Zinseszinsrechnung, die imaginären Grössen, den binomischen Lehrsatz, einige Gleichungen höherer Grade, Maxima und Minima und Determinanten. Jeder Lehrgang bildet ein besonderes Ganzes. Ueber den grossen pädagogischen Wert dieser Aufgabensammlung noch etwas hinzuzufügen, wäre bei der allgemeinen Anerkennung, welche die Lehrbücher des Verf. mit Recht gefunden haben, überflüssig. Wir wollen nur erwähnen, dass mit Vorliebe Beispiele aus dem Gebiete der arithmetischen Reihen, der höheren Arithmetik, der magischen Quadrate und der Potenzreste gewählt werden. Hinsichtlich der Grundsätze, welche den Verf. bei der methodischen Behandlung des gebotenen Stoffes geleitet haben, verweisen wir auf das „Begleitwort", welches um so lesenswerter ist, als es auch andere für den Unterricht in der Arithmetik recht beherzigenswerte Winke enthält. M.

W. Winter. Algebra. Lehrbuch mit Aufgabensammlung für Schulen. Zweite Auflage. München: Th. Ackermann. 318 S. 8°. (1895.)

Das sorgfältig gearbeitete Lehrbuch mit seiner Fülle von geschickt gewählten Uebungen erscheint hier in einer wenig veränderten Auflage. Der Uebungsstoff ist nur unwesentlich vermehrt worden, z. B. in den Gleichungen zweiten Grades. Der Abschnitt über Combinatorik ist fortgelassen. M.

---

*J. D. Höppner. Note on four-dimensional figures. Edinb. M. S. Proc. **14**, 121.

Nimmt man an, dass die Multiplication mit einer Linie die wahre Operation ist, welche dem Uebergange aus dem Raume von n Dimensionen in den von $n+1$ Dimensionen entspricht, so kann eine endliche Strecke symbolisch durch $1.a^1+2a^0$ bezeichnet werden, was besagt, dass die Strecke aus einer Liniengrösse besteht und (+) durch zwei dimensionslose Grössen begrenzt ist. Wenn man das Symbol in der Form $a+2$ schreibt, so wird das Symbol für das zweidimensionale Gebilde a^2+4a+4, für das vierdimensionale $a^4+8a^3+24a^2+32a+16$, u. s. w. Gbs. (Lp.)

E. Gelin. Du meilleur système de numération et de poids et mesures. Mathesis (2) **6**, 161-164.

Die Zahl 8 ist die bequemste Basis eines Zahlsystems: 8 ist weder zu klein, noch zu gross. Das oktadische System bietet alle Vorteile des dekadischen und des dodekadischen Systems, aber es gewährt auch noch besondere: Die Operationen sind viel einfacher, die einfachen Charaktere der Teilbarkeit zahlreicher. Das entsprechende Gewichts- und Masssystem wäre sehr einfach im Gebrauche. Mn. (Lp.)

N. SOKOLOW. Notiz über die Numerationssysteme mit einer veränderlichen Basis. Kiew Ges. 1895, 87-91; Kiew Univ. Nachr. No. 9. (Russisch.)

Es sei die Differenz der Zahlen a Pf. b Schill. c Pence minus der Zahl c Pf. b Schill. a Pence gleich p Pf. q Schill. r Pence. Dann ist die Summe dieser Zahl mit der invers geschriebenen (r Pf. q Schill. p Pence) immer eine und dieselbe Zahl, unabhängig von den Zahlen a, b, c. Diese Eigenschaft des englischen Geldsystems ist eine allgemeine Eigenschaft der Systeme mit einer veränderlichen Basis. Wi.

JOS. MAYER. Ueber die vier Grundrechnungsarten mit periodischen Decimalbrüchen. Hoffmann Z. 27, 481-490.

Der Aufsatz enthält eine von gründlichen zahlentheoretischen Kenntnissen getragene Untersuchung über die Frage, wie viel Ziffern bei den Zahlenrechnungen mit periodischen Decimalbrüchen in der Periode des zu gewärtigenden Resultates höchstens sich ergeben werden, wenn man dasselbe genau erhalten will, um von allem Anfange an entscheiden zu können, ob es angezeigt ist, das Resultat in dieser Form auszurechnen oder nicht. Dies wird für die vier Grundoperationen einzeln festgestellt. Lp.

C. E. BICKMORE. Sur les fractions décimales périodiques. Nouv. Ann. (3) 15, 222-227.

Aus allen bis jetzt publicirten Berechnungen hat der Verf. eine Tabelle der Factoren der Zahlen 10^n-1 von $n=1$ bis $n=100$ zusammengestellt, soweit sie bekannt sind. Für 30 Zahlen ist nach Angabe der Autoren die Zerlegung definitiv. H.

R. SCHÖNHERR. Notiz über die Auflösung einiger eingekleideter Aufgaben in Bardey's Aufgabensammlung. Hoffmann Z. 27, 491-493.

Die Aufgaben hängen mit den Eigenschaften periodischer Decimalbrüche zusammen. Lp.

F. J. STUDNICKA. Multiplicatorische Spielereien im allgemeinen und der entsprechende Lehrsatz von Lucas insbesondere. Casopis 25, 289-293. (Böhmisch.)

Der Verf. führt einige interessante numerische Producte aus Alkalsadi's Commentar zu der Schrift „Talchis" und aus der „Arithmétique amusante" von Lucas an und beweist schliesslich eine Eigenschaft der Zahlen des $2n$-zahligen Systemes. Sda.

B. SCHIAPPA MONTEIRO. Sur une inégalité. J. de Math. élém. (4) 5, 121.

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ positive Zahlen, und ist s ihre Summe, so ist
$$(s-x_1)(s-x_2)\ldots(s-x_n) > (n-1)^n . x_1 x_2 x_3 \ldots x_n.$$
Lp.

L. Carlini. Ricerca del massimo comun divisore di due o più numeri mediante la divisione. Periodico di Mat. **11,** 96-100.

Sind die ganzen Zahlen a_0, a_1, . . ., a_n so angeordnet, dass jede folgende kleiner als die vorangehende ist, so dividire man a_0 durch a_1, den erhaltenen Rest durch a_2, den neuen Rest durch a_3, u. s. w. Der Rest der letzten Division heisst der „Endrest" der gegebenen Zahlen. Die Verallgemeinerung der bekannten Regel für zwei Zahlen lautet: Um den grössten gemeinsamen Teiler mehrerer Zahlen zu finden, ordne man sie nach absteigender Grösse und suche ihren Endrest; darauf streiche man die grösste Zahl zur Linken und schreibe rechts dazu den erstberechneten Endrest und suche den Endrest dieser Zahlen, u. s. w. Die als Null sich ergebenden Endreste werden von einem Mal zum anderen fortgelassen. Nach Beendigung der Operation ist der letzte nicht verschwindende Endrest der grösste gemeinsame Teiler der gegebenen Zahlen. Lp.

C. Reuschle. Abgekürzte algebraische Division bei quadratischem und höherem Divisor. Schlömilch Z. **41,** 93-102.

C. Reuschle. Geometrische Bedeutung der Partialbruchzerlegung. Schlömilch Z. **41,** 103-106.

Das bekannte Verfahren, eine ganze algebraische Function m^{ten} Grades durch eine andere n^{ten} Grades zu dividiren, wird für den Fall $n = 2$ zu einem übersichtlichen schematischen Verfahren unter Benutzung eines Schiebezettels umgewandelt, wodurch eine Abkürzung der Rechnung erzielt wird.

Die zweite Notiz enthält eine geometrische Deutung einer in Partialbrüche zerlegten Function. Jhk.

P. T. Foldberg. Lidt om tilnaeret Beregning af Produkter og Qvotienter. Nyt Tidss. for Math. 7A, 73-78.

Ueber die annäherungsweise Berechnung der Producte und Quotienten. V.

G. Mazzola. Saggio di una nuova teoria delle approssimazioni aritmetiche. Periodico di Mat. **11,** 109-111, 180-189.

Schon 1884 hat der Verf. seine Theorie der numerischen Annäherungen in den Annali del R. Istituto tecnico di Torino veröffentlicht, d. h. eine Theorie der Annäherung, welche man erreichen kann, wenn die in eine Rechnung eingehenden Zahlen nur auf eine beschränkte Anzahl von Stellen gegeben sind. Durch einen von ihm neu gefundenen Satz, der auf der Binomialformel beruht, kann jene frühere Darstellung vereinfacht werden. Der vorliegende Aufsatz, dessen Fortsetzung in Aussicht gestellt wird, enthält diese Vereinfachung. Lp.

Aubry. Note sur l'extraction des racines carrées et cubiques. J. de Math. élém. (4) **5,** 10-12.

Ist $x<1$, so setze man $y=\sqrt{1+x}-1$, dann wird $y^2=x-2y$ und eine beliebige Potenz von y ist in der Form darstellbar:

$$\pm y^k = Mx - Ny, \quad \mp y^{k+1} = Nx - (Mx+2N)y,$$

wo M und N bloss x enthalten; die Brüche $\frac{Mx}{N}, \frac{Nx}{Mx+2N}, \ldots$ geben also rasch angenäherte Werte von y. Entsprechend kann mit $x^m = A+Bx+Cx^2$ verfahren werden. Lp.

E. S. Barrachina. Raíces de los numeros. Archivo de Mat. **1**, 173-178.

Ableitung einer allgemeinen Regel aus der Binomialformel zur Ausziehung einer beliebigen Wurzel aus ganzen Zahlen. Tx. (Lp.)

B. Krause. Zur Berechnung einer dreistelligen Logarithmentafel. Hoffmann Z. **27**, 96-98.

Ein recht hübsch ersonnenes elementares Verfahren, das auf der geschickten Benutzung weniger zu berechnenden Quadrat- und Kubikwurzeln beruht. Lp.

Weitere Litteratur.

H. Andoyer. Cours d'algèbre, à l'usage des élèves de l'enseignement primaire supérieur. (Programmes officiels de 1893.) Paris: Belin. VI + 373 S. 12mo.

E. Bardey. Methodisch geordnete Aufgabensammlung, mehr als 8000 Aufgaben enthaltend über alle Teile der Elementar-Arithmetik. 22. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner. XIV + 330 S.

E. Bardey's arithmetische Aufgaben, nebst Lehrbuch der Arithmetik vorzugsweise für Realschulen, höhere Bürgerschulen und verwandte Anstalten, neu bearbeitet und mit einer Logarithmentafel versehen von H. Hartenstein. Leipzig: B. G. Teubner. IV + 202 S. 8°.

L. Bartolucci. Manuale d'aritmetica e principi d'algebra per gli alunni delle scuole tecniche. Firenze: Bemporad. VI + 251 S.

C. Bourlet. Leçons d'algèbre élémentaire. Paris: Colin. XII + 549 S. 8°.

M. Bretschneider. Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik für den zweiten Jahrgang der Militär-Unterrealschulen. Wien: Seidel. III + 75 S. 8°.

A. Büttner. Elemente der Buchstabenrechnung und Algebra; nebst Anhang: Logarithmentafeln für die Zahlen 1 bis 10000. 12. Aufl. Bielefeld. IV + 192 S. 8°.

J. Capelo. Tratado de algebra elemental, conforme al programa oficial. 2a edicion. Paris: Galland. 192 S. 8°.

E. Chailau. Résumé d'algèbre élémentaire, à l'usage des élèves des classes de lettres et des candidats à la première partie du baccalauréat de l'enseignement secondaire classique. 2e éd. Paris: Poussielgue. 72 S. 18mo.

P. L. CIRODDE. Lecciones de algebra. Traducide por B. Pelegrin y revisade por F. de Borja Gayoso. 25ª tirada. Madrid. 522 S. 4°.

CUSACK's algebra. Part I: elementary. City of London Book Depôt. 226 S. 8°.

W. DODDS. Algebra for beginners. New edition. London: Murby. 12mo.

G. DRAGO. Dottrina dei caratteri della divisibilità. Torino: Clausen. 31 S. 8°. Vi.

G. FRASCA. Nozioni d'algebra, ad uso delle scuole tecniche. Napoli: Cosmi. 97 S. 16mo.

W. FREELAND. Algebra for schools and colleges. New York: Longmans. 320 S. 8°.

Les frères des écoles chrétiennes. Éléments d'algèbre, avec de nombreux exercices. 7e éd. Paris: Poussielgue. VIII + 413 S. 16mo.

D. GAMBIOLI. Raccolta di esercizi di aritmetica generale, algebra e meccanica elementare, con parecchi esempi già risolti. Ad uso degli allievi dei licei, istituti technici, nautici e scuole militari. Bologna: Zanichelli. VIII + 496 S. 16mo.

P. GAZZANIGA. Libro di aritmetica e di algebra elementare. Padova: Sacchetto. 319 S. 8°.

E. GELIN. 450 questions d'arithmologie. Mathesis (2) 6; Suppl. II, 32 S.

E. GELIN. Traité d'arithmétique élémentaire. 6e édition. Paris. 416 S. 8°.

J. A. GILLET. Elementary algebra. New York: Holt and Co. 466 S. 12mo.

A. GIOFFREDO. Sunti ragionati delle lezioni di aritmetica, geometria e sistema metrico, specialmente destinati alle scuole superiori, con note didattiche. Nuova edizione, riveduta e ampliata. Saluzzo: Bodoni. 64 S. 16mo.

A. GUILMIN. Algèbre élémentaire (No. 2), à l'usage des classes de lettres et des classes d'enseignement primaire supérieur, renfermant un très grand nombre d'exercices de calcul algébrique et de questions usuelles de tout genre. 19e édition, corrigée et augmentée. Paris: Belin. XII + 200 S. 12mo.

G. GULIANI. Elementi di algebra, ad uso degli licei e degli istituti tecnici. 2ª edizione, riveduta e migliorata. Torino: Loescher. 48 S. 8°.

A. GUGLIUZZO-FAZIO. Sui multipli dei numeri della forma $109 + R$, con $R = 1, 3, 7, 9$ e sopra una operazione di divisibilità. Palermo. 8°.

F. HROMADKO, A. STRNAD. Sammlung von Aufgaben aus der Algebra für die höheren Mittelschulklassen. 5. Auflage. Prag. 240 S. 8°. (Böhmisch.) Sda.

T. E. KÖSTER. Aufgaben aus dem Gebiete der Arithmetik und Algebra für Mittelschulen. I. Teil. 2. Aufl. Oldenburg: Schulze'sche Hofbuchhandlung (A. Schwartz). 96 S. 8°. F.

K. KUHN. Lehrbuch der Elementar-Arithmetik. 1. Teil. Hildburghausen: O. Pezoldt. IV + 48 S. 8°. (Technische Lehrhefte. Mathematik. 1. Heft.)

J. LAFFAILLE. La science des chiffres, contenant la loi de la divisibilité, la recherche immédiate des nombres premiers, les réducteurs des nombres premiers, l'emploi général de 10 — 1, etc. Paris: Laffaille. 140 S. 8°.

W. J. LAUSCHER. Die Algebraregeln für die mittleren Klassen. Opladen. 31 S. 4°.

A. LEFEVRE. Number and its algebra. Boston: Heath. 219 S. 8°.

P. LEYSSENNE. Choix de problèmes de mathématiques à l'usage des candidats aux brevets de capacité. Paris. XII + 238 S. 12mo.

H. B. LÜBSEN. Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 24. Aufl. Leipzig. VI + 261 S. 8°.

G. MAROTTA. Elementi di aritmetica generale ed equazioni di primo grado, ad uso della terza classe delle scuole tecniche. Napoli: Muca. 42 S. 16mo.

A. MARTINI-ZUCCAGNI. Lezioni di aritmetica teorica. Teoria dei numeri razionali. Livorno. 328 S. 12mo.

F. MARTUSCELLI. Complementi d'algebra; corso preparatorio allo studio del primo anno universitario (facoltà matematica) e per l'ammissione all'accademia militare. Salerno: Jovane. 112 S. 8°.

T. MITCHESON. Examples in algebra. London: Hodgson. 80 S. 8°.

T. MITCHESON. Answers to the examples in algebra. Ebenda. 42 S. 8°.

S. PINCHERLE. Algebra elementare. 6a edizione. Milano: Hoepli. VIII + 210 S. 16mo.

S. PINCHERLE. Esercizi sull'algebra elementare. Milano: Hoepli. VIII + 135 S. 16mo.

F. RICCI. Le condizioni di divisibilità per alcuni numeri, dedotte da due teoremi generali dimostrati elementarmente. Firenze: Cirelli. 7 S. 8°.

U. SCARPIS. Primi elementi della teoria dei numeri (Manuali Hoepli). Milano: Hoepli. VIII + 152 S. 16mo. (Referat in Abschnitt III, Kapitel 2, A.)

J. P. SCHMIDT. Erörterungen über einige wichtige Lehren und Fragen, welche der elementaren Arithmetik und Algebra angehören. Trier: Lintz. 70 S. 8°.

J. A. SERRET. Traité d'arithmétique. 6e édition, revue et mise en harmonie avec les derniers programmes officiels. A l'usage des candidats aux écoles du gouvernement et au baccalauréat ès sciences. Paris: Gauthier-Villars et Fils. XII + 325 S. 8°.

H. SERVUS. Regeln der Arithmetik und Algebra zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. 1. Teil: Unter-Tertia, Ober-Tertia und Unter-Secunda. Braunschweig: O. Salle. VI + 130 S. 8°.

G. SPECKMANN. Arithmetische Studien. Dresden: Koch. III + 22 S. 8°.

T. SPIEKER. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit Uebungsaufgaben für höhere Lehranstalten. 4. Aufl. Potsdam: Stein. S. 243-400. 8°.

W. Stary. Arithmetik für die erste, zweite und dritte Realschulklasse. 7. Auflage. Prag. 288 S. 8°. (Böhmisch.) Sda.

W. S. Thomson. 100 papers in difficult higher arithmetic. Answers and hints. London. 200 S. 8°.

F. Vintéjoux. Éléments d'arithmétique, de géométrie et d'algèbre. Nouvelle édition, entièrement refondue. Paris: Hachette. VIII + 568 S. 16mo.

F. Wallentin. Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik für die 3. u. 4. Klasse der Realschulen und anderen gleichstehenden Lehranstalten. 3. Aufl. Wien: C. Gerold' Sohn. IV + 101 S. 8°.

M. Wekwerth. Sammlung von Aufgaben aus der niederen Mathematik. Lösungen zu den Zahlenbeispielen. Leipzig: E. A. Seemann. IV + 68 S. 8°.

J. W. Welsford and C. H. P. Mayo. Elementary algebra. London: Longmans, Green, and Co. XII + 407 S. [Nature **58**, 267.]

E. E. White. A school algebra designed for use in high schools and academies. New York: American Book Co. 394 S. 12mo.

Kapitel 2.

Zahlentheorie.

A. Allgemeines.

U. Scarpis. Primi elementi della teoria dei numeri. (Manuali Hoepli.) Milano: Ulrico Hoepli. VIII + 152 S. kl. 8°.

In der hübschen Ausstattung der Manuali Hoepli behandelt das Büchlein die Elemente der Zahlentheorie mit einer für den knappen Raum anerkennenswerten Vollständigkeit. Die einzelnen Kapitel sind betitelt: I. Grundeigenschaften betreffs der Vielfachen und der Divisoren. II. Congruente Zahlen und allgemeine Eigenschaften der Congruenzen. III. Allgemeine Eigenschaften eines vollständigen Systems von Resten in Bezug auf einen Primmodul. IV. Binomische Congruenzen. V. Quadratische Reste. VI. Binomische Gleichungen. VII. Uebersicht über das Problem der Teilung der Kreisperipherie in gleiche Teile. Den ersten fünf Kapiteln sind am Schlusse Uebungsaufgaben beigefügt. Lp.

H. Minkowski. Geometrie der Zahlen. In 2 Lieferungen. Lfg. 1. Leipzig: B. G. Teubner. 240 S. 8°.

Dieses Buch, welches Ch. Hermite zum 70. Geburtstage gewidmet ist, giebt eine zusammenfassende Darstellung derjenigen Errungenschaften, durch welche Minkowski die höhere Zahlentheorie bereichert hat. In der bislang allein erschienenen ersten Lieferung sind bereits die meisten allgemeinen Theoreme, sowie vor allem die Grundlagen der Methode

entwickelt. Diese letztere ist zwar eine rein analytische. Indessen sind die analytischen Entwickelungen solche, welche für $n = 3$ Schritt für Schritt einer geometrischen Deutung im gewöhnlichen Raume fähig sind. Diese Sachlage hat den Verf. veranlasst, auch im allgemeinen Falle n die für $n = 3$ zutreffenden geometrischen Benennungen beizubehalten, eine Massnahme, deren heuristische Bedeutung sich hier glänzend bewährt.

Die eigentliche Grundlage der ganzen Methode bildet der Begriff der „nirgends concaven Fläche" in einem linearen Raume von n Dimensionen. Das erste Kapitel hat das Ziel, diesen Begriff zu begründen. Es seien $x_1, \ldots, x_n$ die Coordinaten der Punkte im gedachten Raume, und es seien durch $x_i = a_i$, $x_i = b_i$, ... einzelne Punkte fixirt, die auch kurz $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... heissen mögen. Unter „Strahldistanz" $S(\mathfrak{ab})$ zweier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ wird alsdann irgend eine reelle Function dieser beiden Punkte verstanden, welche die „Entfernung" dieser Punkte nur als specielles Beispiel umfasst, allgemein aber durch folgende Bedingungen fixirt ist:

1) $S(\mathfrak{ab})$ hat einen bestimmten positiven Wert, wenn $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{b}$ verschieden ist, den Wert 0, falls $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zusammenfallen.

2) Stehen die Coordinaten von vier Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ in der Beziehung $d_i - c_i = t(b_i - a_i)$, so soll $S(\mathfrak{cd}) = tS(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ sein.

3) Einhellig heissen die Strahldistanzen, falls für irgend drei Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Bedingung $S(\mathfrak{ac}) \leqq S(\mathfrak{ab}) + S(\mathfrak{bc})$ besteht.

4) Wechselseitig heissen die Strahldistanzen, falls die Gleichung $S(\mathfrak{ab}) = S(\mathfrak{ba})$ besteht.

Setzt man speciell für $S(\mathfrak{ab})$ die „Entfernung" der beiden Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ so sind die Bedingungen 3) und 4) erfüllt.

Ist $\mathfrak{o}$ der Nullpunkt, so bilden alle Punkte $\mathfrak{x}$, für welche $S(\mathfrak{ox}) = 1$ ist, die „Aichfläche", welche im Falle einhelliger Strahldistanzen eine „nirgends concave Fläche" vorstellt, und die andrerseits im Falle wechselseitiger Strahldistanzen im Nullpunkt centrirt erscheint. Irgend eine um $\mathfrak{o}$ herumgelegte nirgends concave Fläche kann andrerseits als Aichfläche ein System einhelliger Strahldistanzen definiren. Die Aichfläche umgrenzt den Aichkörper. Die „Kugel" des Radius 1 um $\mathfrak{o}$ liefert ein specielles Beispiel einer Aichfläche.

Zur Ausbildung der Theorie der Aichflächen werden einige weitere Begriffsbestimmungen definirt. Sind a_i, b_i die Coordinaten zweier Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, so sind $(b_i - a_i)$ die „relativen Coordinaten" von $\mathfrak{b}$ in Bezug auf $\mathfrak{a}$. Das Maximum der absoluten Beträge der n Differenzen $(b_i - a_i)$ heisst „Spanne" $E(\mathfrak{ab})$ von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ (oder $\mathfrak{b}$ nach $\mathfrak{a}$). Dividirt man die n relativen Coordinaten $(b_i - a_i)$ durch $E(\mathfrak{ab})$, so entspringen n Grössen, welche die „Richtung" von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$ festlegen. Der Quotient $S(\mathfrak{ab}) : E(\mathfrak{ab})$ heisst der „Distanzcoefficient" der Richtung von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$. Versteht man unter $S(\mathfrak{ab})$ die „Entfernung" von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so ist (bei rechtwinkligen Coordinaten x_i) offenbar $E(\mathfrak{ab}) \leqq S(\mathfrak{ab}) \leqq \sqrt{n}\, E(\mathfrak{ab})$. Minkowski zeigt für beliebige Strahldistanzen eine entsprechende Bedingung $gE(\mathfrak{ab}) \leqq S(\mathfrak{ab}) \leqq GE(\mathfrak{ab})$, wo g und G zwei Constanten sind,

die einzig vom ausgewählten System der Strahldistanzen abhängen. Alle Punkte $\mathfrak{x}$, deren Coordinaten die n Ungleichungen $-t \leqq x_i - a_i \leqq t$ erfüllen, bilden einen „Würfel" des Centrums $\mathfrak{a}$ und der Kante $2t$. Irgend n Punkte $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$, die unter sich und von $\mathfrak{o}$ verschieden sind, bilden mit $\mathfrak{o}$ die $(n+1)$ Ecken einer „Zelle", deren „Spitze" $\mathfrak{o}$ und deren „Basispunkte" die $\mathfrak{a}$ sind. Für $n = 3$ hat man Tetraeder. Diese letzteren Gebilde dienen namentlich dem Zwecke, die Volumenbestimmung des Aichkörpers vorzubereiten, indem letzterer durch ein Netz von Würfeln mit kleiner und kleiner zu wählenden Kanten ausgefüllt wird. Uebrigens entwickelt das zweite Kapitel die weiteren Sätze über Begriffsdefinition und Berechnung des Volumens bei den Aichkörpern und Strahlenkörpern, welche letzteren die Aichkörper als Specialfälle umfassen, selber jedoch vornehmlich wegen einer etwas weiteren Bedeutung des Symbols $S(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ noch allgemeiner erklärt sind. Als besonders wichtiger Specialfall wird die Bestimmung des Parallelepipedons durchgeführt. Ist letzteres durch die n Bedingungen $-1 \leqq \xi_i \leqq +1$ gegeben, wo zur Abkürzung $a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \cdots + a_{ni}x_n = \xi_i$ gesetzt ist, so findet sich als Volumen $2^n/\text{abs.}\, D$, wo im Nenner der absolute Wert der Determinante der n^2 Coefficienten a_{ik} gemeint ist.

Das dritte und vierte Kapitel entwickeln Anwendungen. Im dritten Kapitel werden Sätze über nirgends concave Körper bewiesen, welche in Folge ihres Volumens mehr als einen „Gitterpunkt" (Punkt mit ganzzahligen Coordinaten) enthalten. Diese, auch für sich genommen, höchst merkwürdigen Sätze werden dann im vierten Kapitel zur Grundlage für die Lösung einer Reihe zahlentheoretischer Probleme, denen die bisherigen Methoden nicht gewachsen waren.

Die sämtlichen Punkte ganzzahliger Coordinaten liefern das sogenannte „Zahlengitter". Ist irgend ein System von Strahldistanzen gegeben, so heissen die Strahldistanzen zweier Gitterpunkte kurz „Strahldistanzen im Zahlengitter". Handelt es sich um einhellige und wechselseitige Strahldistanzen, so existirt für die kleinste Strahldistanz M im Zahlengitter eine obere Grenze, die allein vom Volumen des zugehörigen Aichkörpers abhängt. Aus diesem Umstande lässt sich eine Reihe von Sätzen über nirgends concave Körper ableiten, welche durch folgende Beispiele charakterisirt sein mögen: Ein nirgends concaver Körper mit einem Mittelpunkte in einem Gitterpunkte und von einem Volumen $= 2^n$ enthält immer noch mindestens zwei weitere Gitterpunkte entweder im Innern oder auf seiner Begrenzung. Schreibt man $S(\mathfrak{o}\mathfrak{x})$ als Function der Coordinaten von $\mathfrak{x}$ etwa $f(x_1, \ldots, x_n)$, so ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine durch gewisse Functionalbedingungen (die den eingangs genannten Bedingungen für $S(\mathfrak{o}\mathfrak{x})$ entsprechen) definirte Function. Das n-fache Integral $\int dx_1 \ldots dx_n$, mit lauter positiven Integrationsrichtungen über den Bereich $f(x_1, \ldots, x_n) \leqq 1$ erstreckt, hat alsdann nach den Entwickelungen des zweiten Kapitels einen bestimmten Wert J. Der vorhin ausgesprochene Satz lässt sich dann auch dahin formuliren, dass es

mindestens ein System ganzer, nicht durchgängig verschwindender Zahlen $l_1, \ldots, l_n$ giebt, für welches gilt $0 < f(l_1, l_2, \ldots, l_n) \leqq 2 / \sqrt[n]{J}$. Wird M in obiger Bedeutung gebraucht, so werden die Körper der Strahldistanzen $\leqq M / 2$ um die verschiedenen Gitterpunkte zwar Punkte der Begrenzung, aber keine inneren Punkte gemein haben. Diese mit einander congruenten Körper sollen „Stufen im Zahlengitter" genannt werden. Von besonderer Bedeutung sind die „Stufen grössten Volumens", welche eine lückenlose Ausfüllung des Raumes bewerkstelligen. Eine einzelne solche Stufe muss ebenflächig begrenzt sein; und es gilt der Satz, dass hierbei höchstens $(2^{n+1}-2)$ Ebenen (Stützebenen) auftreten.

Bei den im vierten Kapitel entwickelten Anwendungen wird an der Bezeichnung $S(\mathfrak{o}\mathfrak{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ festgehalten, so dass ein nirgends concaver Körper mit $\mathfrak{o}$ als Mittelpunkt durch $f(x_1, \ldots, x_n) \leqq 1$ gegeben ist. Erstlich wird ein Fundamentalsatz aus der Theorie der linearen Formen mit beliebigen reellen Coefficienten entwickelt. Es seien ν Formen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ dieser Art mit $\nu \geqq n$ gegeben, und unter ihnen mögen jedenfalls n unabhängige vorkommen; $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ bedeute ferner das Maximum unter den absoluten Beträgen der $\xi_1, \ldots, \xi_\nu$ für das Wertsystem $x_1, \ldots, x_n$. Dann hat die Function φ alle Eigenschaften von f, so dass sich die im dritten Kapitel für f entwickelten Sätze auf φ anwenden lassen. Ist demnach J der Wert des Integrals $\int dx_1 \ldots dx_n$, mit lauter positiven Integrationsrichtungen über den Bereich $-1 \leqq \xi_1 \leqq 1, \ldots, -1 \leqq \xi_\nu \leqq 1$ erstreckt, so giebt es nach einem eben erwähnten Satze mindestens ein System nicht durchgängig verschwindender ganzer Zahlen x_i, für welche die Ungleichungen bestehen $\text{abs.}\,\xi_1 \leqq 2 / \sqrt[n]{J}, \ldots, \text{abs.}\,\xi_\nu \leqq 2 / \sqrt[n]{J}$. Ist insbesondere $\nu = n$, so folgt aus der Volumenbestimmung des Parallelepipeds $J = 2^n / \text{abs.}\,\Delta$, wo Δ die von 0 verschiedene Determinante des Systems der Formen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ ist. Jetzt giebt es demnach mindestens ein System nicht durchgängig verschwindender ganzer Zahlen x_i, für welches die absoluten Beträge aller ξ kleiner als $\sqrt[n]{\text{abs.}\,\Delta}$ sind. Handelt es sich um n Formen $v_1, \ldots, v_n$ nicht verschwindender Determinante Δ, und haben r unter jenen Formen reelle Coefficienten, während die $2s = n - r$ übrigen Formen paarweise conjugirt complex sind, so lautet der Satz so: Es giebt mindestens ein System nicht durchgängig verschwindender ganzer Zahlen x_i, für welches die n absoluten Beträge der v_i sämtlich $< (2/\pi)^{\frac{s}{n}} \sqrt[n]{\text{abs.}\,\Delta}$ sind. Nicht minder wichtig ist die Bestimmung einer Function $f(x_1, \ldots, x_n)$ durch:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left[\frac{(\text{abs.}\,v_1)^p + \cdots + (\text{abs.}\,v_n)^p}{n}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Ist $p \geqq 1$, so stellt $f = 1$ in der That eine nirgends concave Fläche vor, die zudem für $p > 1$ überall convex ist. Die $v_1, \ldots, v_n$ sind

hierbei in der eben genannten Bedeutung gebraucht. Die oben genannten allgemeinen Sätze führen hier, abgesehen von einem bei $p = 1$, $s = 0$, $n = 2$ eintretenden Ausnahmefalle, auf folgendes Theorem: Es giebt immer mindestens ein System nicht durchgängig verschwindender ganzer Zahlen x_i, für welches die Ungleichung gilt:

$$\frac{(\text{abs.}\,v_1)^p + \cdots + (\text{abs.}\,v_n)^p}{n}$$

$$< \left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^s \frac{n^{-\frac{n}{p}} \Gamma\left(1+\frac{n}{p}\right)}{\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\right]^r \cdot 2^{-\frac{2s}{p}} \cdot \left[\Gamma\left(1+\frac{2}{p}\right)\right]^s} \text{abs.}\,\Delta \right]^{\frac{p}{n}}.$$

Die Γ-Function stellt sich bei Auswertung des Volumens des vorliegenden Aichkörpers ein. Für $p = 2$, d. i. im Falle definiter quadratischer Formen, ist dieses Theorem bereits von Hermite im **40.** Bande des Journals für Math. ausgesprochen. Diese Untersuchung Hermite's lieferte Minkowski die erste Anregung zu seinen Untersuchungen.

Auf Grundlage der letzten Sätze erwächst nun Minkowski's Beweis des Satzes, dass die Grundzahl D eines jeden Gattungsbereiches algebraischer Zahlen (abgesehen vom rationalen) absolut > 1 ist, oder dass es für jede nicht-rationale ganze algebraische Zahl θ „kritische", d. i. von 1 verschiedene, in D aufgehende Primzahlen giebt. Mögen nämlich $\theta_1, \ldots, \theta_n$ n conjugirte ganze Zahlen sein, so mögen ihnen n positive Constanten $c_1, \ldots, c_n$ entsprechen, welche folgenden beiden Bedingungen genügen: Für etwaige conjugirt complexe θ sollen die c gleich sein, und es soll $c_1 c_2 \ldots c_n = 1$ sein. Nun mögen die n ganzen Zahlen $A_1(\theta), \ldots, A_n(\theta)$ eine Minimalbasis des Gattungsbereichs von θ bilden, d. i. ein System ganzer Zahlen mit der Grundzahl D als Discriminante. Es werden dann durch: $x_1 A_1(\theta_h) + \cdots + x_n A_n(\theta_h) = A(\theta_h)$, $\frac{A(\theta_h)}{c_h} = v_h$ (mit $h = 1, \ldots, n$) im ganzen n lineare Formen v_h der Determinante $\pm\sqrt{D}$ definirt. Mögen unter ihnen r reelle Formen $\xi_1, \ldots, \xi_r$ und s Paare conjugirt complexer $\frac{\eta_1 \pm i\zeta_1}{\sqrt{2}}, \ldots, \frac{\eta_s \pm i\zeta_s}{\sqrt{2}}$ enthalten sein; dann sind $\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_s, \zeta_1, \ldots, \zeta_s$ n reelle Formen der Determinante $\pm\sqrt{\text{abs.}\,D}$. Es giebt demnach mindestens ein System rationaler ganzer, nicht durchgängig verschwindender x_i, für welches die absoluten Werte dieser n Formen sämtlich $\leqq \text{abs.}\,D^{\frac{1}{2n}}$ sind, und für welches demnach auch gilt:

$$(1) \qquad \text{abs.}\,v_1 \leqq \text{abs.}\,D^{\frac{1}{2n}}, \quad \ldots, \quad \text{abs.}\,v_n \leqq \text{abs.}\,D^{\frac{1}{2n}}.$$

Durch Multiplication folgt $\text{abs.}\,v_1\, v_2 \ldots v_n \leqq \text{abs.}\sqrt{D}$ oder wegen $c_1 c_2 \ldots c_n = 1$: $\text{abs.}\,\text{Norm}\, A(\theta) \leqq \text{abs.}\sqrt{D}$. Infolge der ganzzahligen x_i steht hier links eine ganze rationale Zahl $\geqq 1$, so dass entweder

mindestens ein abs.$v > 1$ oder alle $= 1$ sind. Im ersten Falle folgt aus (1) sofort abs.$D > 1$, was zu zeigen war. Im zweiten Falle müssten die c gleich den absoluten Beträgen der ganzen algebraischen Zahlen $A(\theta_h)$ sein, was sich jedoch, abgesehen vom Falle $n = 2$, $s = 1$, durch zweckmässige Auswahl der c vermeiden lässt. Also ist bis auf $n = 2$, $s = 1$ die Ungleichung abs.$D > 1$ bewiesen. Der Ausnahmefall wird durch einen zweiten Beweisgang miterledigt, welcher nur für $s > 0$ gilt und an die oben angegebene Formel abs.$v_i < (2/\pi)^{\frac{s}{n}} \sqrt[n]{\text{abs.}\Delta}$ anknüpft. Noch genauere Ungleichungen für D entspringen unter Gebrauch von

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left[\frac{(\text{abs.}v_1)^p + \cdots + (\text{abs.}v_n)^p}{n}\right]^{\frac{1}{p}},$$

wo $v_1, \ldots, v_n$ ihre zuletzt erklärte Bedeutung behalten. Es ergiebt sich abs.$D > \left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^s \frac{n^n}{1.2\ldots n}\right]^2$. Für $n = 2$ ist demnach D entweder $\geqq 5$ oder $\leqq -3$; für $n = 3$ hat man entweder $D > 20$ oder $D < -12$ u. s. w.

Eine weitere Anwendung der Theorie der nirgends concaven Flächen bezieht sich auf die Approximation einer Anzahl reeller Grössen durch rationale Brüche. Es gilt folgender Satz: Sind $(n-1)$ reelle Grössen $a_1, \ldots, a_{n-1}$ gegeben, so kann man immer n ganze Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ ohne gemeinsamen Teiler finden, für welche die Beträge

$$\text{abs.}\left(\frac{x_1}{x_n} - a_1\right), \quad \ldots, \quad \text{abs.}\left(\frac{x_{n-1}}{x_n} - a_{n-1}\right)$$

sämtlich unterhalb einer beliebig angenommenen positiven Grösse und zugleich unterhalb $\dfrac{n-1}{n x_n^{\frac{n}{n-1}}}$ liegen. Weiterhin wird die Lehre von den nirgends concaven Flächen mit der Dirichlet'schen Einheitentheorie, der Theorie der Kettenbruchentwickelungen sowie endlich derjenigen der indefiniten binären quadratischen Formen ausführlich in Beziehung gesetzt.

Im fünften Kapitel wird zunächst der Begriff der „rationalen Richtungen" erklärt; die von $\mathfrak{o}$ ausgehenden rationalen Richtungen sind eben diejenigen, welche nach den gesamten übrigen Punkten des Zahlengitters hinführen. Es heissen n von $\mathfrak{o}$ ausziehende Richtungen „unabhängig", wenn sie nicht sämtlich in einem linearen Raume von weniger als n Dimensionen gelegen sind. Bei gegebenem System von Strahldistanzen wird ein System von Gitterpunkten $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ aufgestellt, welche von $\mathfrak{o}$ aus in n unabhängigen Richtungen liegen, und für welche $S_1 = S(\mathfrak{o}\mathfrak{p}_1)$, $\ldots$, $S_n = S(\mathfrak{o}\mathfrak{p}_n)$ ein „kleinstes System von Strahldistanzen" im Zahlengitter ausmachen; dabei sind die Punkte $\mathfrak{p}$ so geordnet, dass $S_1 \leqq S_2 \leqq \cdots \leqq S_n$ ist. Stellt demnach jetzt $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ ein zweites System von Punkten vor, so werden die Differenzen: $S(\mathfrak{o}\mathfrak{q}_1) - S_1$, $\ldots$, $S(\mathfrak{o}\mathfrak{q}_n) - S_n$ entweder sämtlich verschwinden, oder die erste nicht-ver-

schwindende Differenz ist positiv. Im ersteren dieser beiden Fälle ist auch $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ ein Punktsystem mit kleinsten Strahldistanzen im Zahlengitter. Der Verf. beweist das Theorem, dass für die Auswahl eines solchen Punktsystems mit kleinsten Strahldistanzen im Gitter gewiss nicht mehr als $(2^{n+1}-2)^n$ Möglichkeiten existiren, vorausgesetzt, dass die Strahldistanzen einhellig und wechselseitig sind, und dass die zugehörige Aichfläche wenigstens in allen rationalen Richtungen convex ist.

Dieses Theorem gestattet zwei wichtige Anwendungen, nämlich auf die „endlichen Gruppen ganzzahliger linearer Substitutionen" sowie auf die „Transformationen definiter quadratischer Formen in sich". Im ersten Falle entspringt das Theorem, dass die Ordnung einer solchen Gruppe stets $\leqq (2^{n+1}-2)^n$ ist. Der Grundgedanke des Beweises ist folgender. Mögen $T(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ einhellige und wechselseitige Strahldistanzen mit einer in allen rationalen Richtungen convexen Aichfläche sein. Der zugehörige Aichkörper wird durch die Substitutionen der Gruppe (wenn deren Ordnung w ist) im ganzen in w Körper transformirt, deren gemeinsamer Bestandteil als neuer Aichkörper für Strahldistanzen $S(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ eingeführt wird. Letztere sind gleichfalls einhellig, wechselseitig und von einer in allen rationalen Richtungen convexen Aichfläche. Das Wichtige ist, dass diese Strahldistanzen $S(\mathfrak{o}\mathfrak{x})$ gegenüber der Gruppe invariant sind. Ein erstes Punktsystem $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ mit kleinsten Strahldistanzen wird demnach bei Transformation durch die Substitutionen der Gruppe insgesamt w solche Punktsysteme liefern, welche sich vermöge des Begriffs der unabhängigen Richtungen leicht als verschieden erweisen. Demnach ist in der That $w \leqq (2^{n+1}-2)^n$. Ein weiteres, sehr folgenreiches Theorem besagt, dass die einzelne der in Rede stehenden Substitutionen, sofern sie nicht die identische Substitution selbst ist, letzterer auch niemals nach einem Modul $l \geqq 3$ congruent sein kann. Es können demnach auch keine zwei mod. l congruente Substitutionen in der Gruppe vorkommen. Dieser Umstand gestattet wichtige Schlüsse auf die Ordnung w der Gruppe sowie auf die in w aufgehenden Primzahlpotenzen. Ist $f(x_1, \ldots, x_n)$ eine positive quadratische Form, so stellt $f = 1$ ein „Ellipsoid" vor, welches als Aichfläche eingeführt wird. Dass f nicht mehr als $(2^{n+1}-2)^n$ ganzzahlige lineare Substitutionen in sich zulassen kann, ist alsdann eine unmittelbare Folge der voraufgesandten Theoreme.

Im Mittelpunkte der weiteren Betrachtungen steht die Ungleichung $S_1 . S_2 \ldots S_n . J \leqq 2^n$, welche die frühere Ungleichung $M^n J \leqq 2^n$ als specielle Folgerung zulässt. In der allgemeineren Gestalt liefert die Ungleichung für den Fall eines „Ellipsoides" als Aichfläche Ansätze, aus denen man die Endlichkeit der Klassenanzahl definiter quadratischer Formen in n Variabeln erkennt. Es schliessen sich weiter eingehendere Betrachtungen über die Volumina und sonstige Eigenschaften oval geformter Flächen an. Diese Betrachtungen sollen erst in der zweiten Lieferung zu Ende geführt werden. Fr.

H. Minkowski. Sur les propriétés des nombres entiers qui sont dérivées de l'intuition de l'espace. Nouv. Ann. (3) **15**, 393-403.

Kurzer Abriss einiger Grundsätze, welche in dem Werke „Geometrie der Zahlen“ des gleichen Verf. ausführlich und allgemein behandelt werden. Siehe das vorangehende Referat. Fr.

J. DE VRIES. Ueber geometrische Beweise zahlentheoretischer Sätze. Amst. Ak. Versl. **5**, 218-224 und 284-289.

Es wird gezeigt, wie man durch verschiedenartige Abzählung der in einem begrenzten Gebiete der Ebene belegenen Gitterpunkte zu wichtigen Relationen zwischen zahlentheoretischen Functionen gelangt. Mo.

J. TANNERY. Introduction à l'étude de la théorie des nombres et de l'algèbre supérieure. Par É. BOREL et J. DRACH, d'après des conférences faites à l'École Normale Supérieure, par J. T. Paris: Nony. IX + 350 S. (1895). [American M. S. Bull. **3**, 97-105.]

F. KLEIN. Ausgewählte Kapitel der Zahlenlehre. Zweistündige Vorlesung im Winter 1895/96 und Sommer 1896. Autographirte Vorlesungshefte III. [Bericht in Abschnitt III, Kap. 2B.]

P. A. MACMAHON. Memoir on the theory of the partition of numbers. Part I. Lond. Phil. Trans. **187** A, 619-673; Abstract: Lond. R. S. Proc. **59**, 197-198.

Fortsetzung früherer Untersuchungen, über welche in F. d. M. **25**, 258, 1893/94 berichtet ist. Unipartit heisst eine Zahl, wenn sie lauter gleichbenannte Dinge, multipartit von der Ordnung m, wenn sie Dinge von m verschiedenen Benennungen abzählt. Unter Partition versteht man die Zerlegung einer Zahl in Summanden ohne Rücksicht auf die Reihenfolge, unter Composition dasselbe bei Berücksichtigung der Reihenfolge. Die frühere Abhandlung des Verf. beschäftigte sich mit Compositionen, die vorliegende mit der schwierigeren Frage der Partition von multipartiten Zahlen. Ueber die Partition von unipartiten Zahlen existiren Arbeiten von Sylvester.

Den Ausgangspunkt bildet ein Diagramm, welches bei einer bipartiten Zahl aus einem parallelogrammatischen Ausschnitt eines ebenen Gitters besteht. (Bei einer m-partiten Zahl würde entsprechend ein parallelepipedisches Stück eines m-dimensionalen Gitters zu benutzen sein.) Die Anzahl der verschiedenen Wege, auf denen man, längs der Stäbe des Gitters fortschreitend, von der einen Ecke des Diagramms zu der gegenüberliegenden gelangen kann, giebt die Anzahl der Compositionen der bipartiten Zahl. Von hier aus schliesst man auf die Anzahl der Partitionen gewisser unipartiter Zahlen. Entsprechend besteht ein Zusammenhang zwischen den Compositionen der $(m+1)$-partiten Zahlen und den Partitionen gewisser m-partiter. Den Schluss bildet die Berechnung erzeugender Functionen, deren Coefficienten bezw. gleich den Anzahlen der Partitionen sind. A. S.

A. R. FORSYTH. Some algebraical theorems connected with the theory of partitions. Lond. M. S. Proc. **27**, 18-35.

Bei gewissen Teilungsaufgaben wird man zu folgendem Problem geführt: Der reciproke Wert des aus $2n$ Factoren bestehenden Productes:

$$(1-ax)\left(1-\frac{x}{a}\right)(1-abx^2)\left(1-\frac{x^2}{ab}\right)(1-abcx^3)\left(1-\frac{x^3}{abc}\right)\cdots$$

soll in eine Reihe nach Potenzen von x entwickelt werden; in dieser Reihe sollen alle Glieder, in denen eine der Zahlen $a, b, c, \ldots$ im Nenner auftritt, ausgelassen werden, und in den übrig bleibenden Gliedern soll $a=b=c=\cdots=1$ gesetzt werden. Es ist der Summenwert der restirenden Reihe zu finden. Derselbe ist mit dem reciproken Werte des folgenden Productes identisch: $(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2(1-x^4)^2\ldots(1-x^n)^2(1-x^{n+1})$. Zu demselben Ergebnis gelangt man bei Anwendung des obigen Problems auf das gleichfalls aus $2n$ Factoren bestehende Product:

$$(1-a_{n-1}x)\left(1-\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}x\right)\cdots\left(1-\frac{a_1}{a_2}x\right)\left(1-\frac{x}{a_1}\right)$$

$$\times(1-a_{n-1}b_{n-1}x^2)\left(1-\frac{a_{n-2}b_{n-2}}{a_{n-1}b_{n-1}}x^2\right)\cdots\left(1-\frac{a_1b_1}{a_2b_2}x^2\right)\left(1-\frac{x^2}{a_1b_1}\right).$$

Fr.

J. HERMES. Anzahl der Zerlegungen einer ganzen rationalen Zahl in Summanden. II. Math. Ann. **47**, 281-297.

Die vorangehende Notiz des Verf. (F. d. M. **25**, 256, 1893/94) bezog sich auf die Anzahl G der Zerlegungen einer ganzen rationalen Zahl m mit Permutation der Summanden. Die Euler'schen Anzahlen E setzen Zerlegungen in Summanden ohne deren Permutation voraus. Der Verf. verallgemeinert die Euler'schen Zahlen E zu einer zahlentheoretischen Function $\underset{s,t}{E}(n)$ dreier ganzzahligen Argumente, welche so definirt ist: E ist gleich 0, falls entweder n negativ oder $s=t=0$ ist; E ist gleich 1 für $n=0$; es gelten die Formeln: $\underset{s,t}{E}(n)=\underset{t,s}{E}(n)$, $\underset{s,t}{E}(n)=\underset{s,t}{E}(n-t)+\underset{s,t-1}{E}(n)$. Für $t=0$ kommt man auf die Euler'schen Zahlen zurück, und zwar ist $\underset{s,0}{E}(n)$ die Anzahl von Zerlegungen der Zahl $m=n+s$ in s ganze positive Summanden ohne Wiederholung. Für die Function $\underset{s,t}{E}(n)$ werden zahlreiche Sätze aufgestellt, welche sich als lineare Gleichungen für Functionen E verschiedener Argumente darstellen. Fr.

K. GLÖSEL. Ueber die Zerlegung der ganzen Zahlen. Monatsh. f. Math. **7**, 133-141.

K. Glösel. Notiz über die Zerlegung der ganzen Zahlen. Monatsh. f. Math. 7, 290.

Die Anzahl der Arten, die positive Zahl σ als Summe von r verschiedenen positiven Zahlen darzustellen, heisse $C_r(\sigma)$. Es werden die bereits bekannten Ausdrücke für $C_1(\sigma)$, $C_2(\sigma)$, $C_3(\sigma)$ aufs neue abgeleitet, der gleichfalls bekannte Ausdruck für $C_4(\sigma)$ vereinfacht, sowie $C_5(\sigma)$ neu dargestellt und in der zweiten Note vereinfacht. Fr.

R. Daublebsky von Sterneck. Zur additiven Erzeugung der ganzen Zahlen. Wien. Ber. 105, 875-899.

Nach einem Satze von Legendre ist die Anzahl der geraden Zerlegungen einer ganzen positiven Zahl n in verschiedene Summanden gleich jener der ungeraden Zerlegungen, sofern n keine Pentagonalzahl, d. h. nicht in der Gestalt $\frac{1}{2}k(3k-1)$ darstellbar ist. Im Anschluss hieran werden die Zerlegungen von n in lauter verschiedene Summanden betrachtet, von denen die durch L teilbaren in ungerader Anzahl auftreten; und zwar ist hierbei der Reihe nach $L = 1, 2, 3, 5, 7$. Es werden Kriterien dafür entwickelt, dass die Anzahl dieser Zerlegungen ungerade ausfällt. Auch der Fall, dass eine ungerade Anzahl von Summanden nicht durch L teilbar ist, wird betrachtet. Fr.

P. Stäckel. Ueber Goldbach's empirisches Theorem. Gött. Nachr. 1896, 292-299.

Der Inhalt dieses Theorems ist, dass sich jede gerade Zahl als Summe von zwei Primzahlen darstellen lässt. Die Anzahl der Primzahlen x, für welche $(2n-x)$ wieder eine Primzahl ist, wird G_{2n} genannt und wird als Goldbach'sche Zahl bezeichnet. Für G_{2n} gilt angenähert: $G_{2n} = (9,64+0,029 \,.\, 2n) \,.\, J_{2n}$. Der erste Factor wächst beständig mit n; der zweite Factor J_{2n} giebt die Schwankungen der zahlentheoretischen Function G_{2n}. Sind nämlich $p, q, \dots$ die „verschiedenen" in n aufgehenden ungeraden Primzahlen, so ist $J_{2n} = M_p . M_q \dots$, wo die Multiplicatoren M folgende, sich der Einheit rasch nähernde Werte haben: $M_3 = 1,88 \dots$, $M_5 = 1,26 \dots$, $M_7 = 1,15 \dots$, $M_{11} = 1,08 \dots$, $M_{13} = 1,07 \dots$. G_{2n} wird hiernach verhältnismässig gross, falls n viele „verschiedene" Primfactoren hat.

Ein mit J_{2n} verwandtes Bildungsgesetz befolgt die zahlentheoretische Function $\varphi(2n)$, wie die Formel zeigt:

$$\frac{n}{\varphi(2n)} = \left(1+\frac{1}{p-1}\right)\left(1+\frac{1}{q-1}\right)\cdots.$$

Einen Zusammenhang von G_{2n} mit $\varphi(2n)$ stellt der Verf. unter Gebrauch von Schlüssen der Wahrscheinlichkeitsrechnung her. Schreibt man unter die Reihe $1, 2, \dots, 2n-1$ dieselben Zahlen in umgekehrter Folge, so ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass hierbei zwei Primzahlen unter einander stehen. Mit Rücksicht auf den Umstand, dass die Dichtigkeit der Primzahlen beständig abnimmt, teilt der Verf.

die Reihe 1, 2, ..., $2n-1$ durch die Zahlen $\sqrt{2n}$ und $2n-\sqrt{2n}$ in drei Intervalle und schätzt die genannte Wahrscheinlichkeit in jedem Intervall für sich. Auf diese Weise entspringt die Näherungsformel: $G_{2n}=\frac{[P(2n-\sqrt{2n})-P(\sqrt{2n})]^2}{n-\sqrt{2n}}\cdot\frac{n}{\varphi(2n)}$, welche die Werte der Function G_{2n} in abgeschwächter Form, d. i. unter Vergrösserung der Minima und Verkleinerung der Maxima, wiedergiebt. Als Beispiel werden die geraden Zahlen $2n$ des Intervalls von 400 bis 500 benutzt. Uebrigens bedeutet $P(m)$ die Anzahl der ungeraden Primzahlen, die $< m$ sind. Fr.

J. J. SYLVESTER. On the Goldbach-Euler theorem regarding prime-numbers. Nature **55,** 196-197, 269.

In diesen Noten will der Verf. einige vermutete Eigenschaften der Zerlegungen einer geraden Zahl in zwei Primzahlen, von denen die eine grösser als $\frac{1}{2}n$, die andere kleiner als $\frac{3}{2}n$ ist, die er „mittelprim" nennt, darlegen. Den Beweis für die von ihm ersonnene Anzahl von Zerlegungen hoffte er in den Methoden zu finden, die er in der Theorie der Partitionen mit Erfolg benutzt hat. Der zweite Artikel, der vom 1. Januar 1897 datirt ist, dürfte vielleicht die letzte wissenschaftliche Originalmitteilung des am 15. März verschiedenen Verf. sein, der in seinem hohen Alter die seiner Forschung zusagende Frage mit dem ihm eigenen Feuer aufgegriffen hatte. Lp.

F. W. LAWRENCE. Factorisation of numbers. Quart. J. **28,** 285-311.

Von der gegen 6 primen ganzen Zahl N sollen die Teiler bestimmt werden. Man multiplicire mit einem Factor λ so, dass $\lambda . N = n$ nach einem der Moduln $m = 2^k$, $3^{k'}$, 5, 7, 11, ... mit einem zweckmässig gewählten Reste q congruent wird, und bestimme zunächst die Factoren von n. Sind $2a$ und $2b$ die Summe und die Differenz zweier complementären Factoren, so ist $a^2-b^2=n$ und also $a^2-b^2\equiv q$ (mod. m). Auf Grund dieses Ansatzes werden vermöge elementarer zahlentheoretischer Sätze die Restklassen mod. m bestimmt, denen a und b angehören können. Durch gewisse einfache Tafeln und mechanische Massnahmen bildet der Verf. seinen Ansatz soweit aus, dass er im Stande ist, die Teiler irgend einer unter 600000000 liegenden Zahl „in weniger als zwei Stunden" zu bestimmen. Fr.

G. SPECKMANN. Ueber die Factoren der Zahlen. Hoppe Arch. (2) **14,** 441-443.

Die ganze Zahl Z möge vom grössten Factor 3^ν durch Division befreit sein, so dass die Quersumme Q von Z prim gegen 3 ist. Ist p eine in Z aufgehende Primzahl und $Z=p.p_1$, so gilt $p.p_1\equiv Q$ (mod. 9), da jede Zahl mod. 9 ihrer Quersumme congruent ist. Der Verf.

behauptet, dass durch $p.p_1 \equiv Q$ (mod. 9) bei gegebenem Q die Zahlklasse von p modulo 9 über die sechs gegen 9 primen Klassen hinaus noch weiter eingeschränkt wäre, wodurch eine Erleichterung bei der Aufsuchung der Primfactoren von Z erzielt wäre. Die Behauptung ist jedoch irrtümlich. Fr.

G. SPECKMANN. Arithmetische Studien. Dresden. C. A. Koch. III + 22 S. 8°.

G. WERTHEIM. Ueber die Zerlegung ungerader Zahlen in Factoren. Hoffmann Z. **27**, 256-257.

Der Verf. erläutert ein Verfahren bei Fermat (Bd. **2**, S. 256 der neuen Ausgabe), das die Zurückführung der Aufgabe auf $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ benutzt, ein Verfahren, das vor kurzem in englischen Zeitschriften als neu entdeckt empfohlen und besprochen ist (vergl. F. d. M. **21**, 169, 1889; **22**, 202, 1890). Lp.

M. NEUMANN. Zur Zerlegung ungerader Zahlen in Factoren. Hoffmann Z. **27**, 493-495.

Beweis dafür, dass das durch Wertheim angezeigte Verfahren (vergl. das vorangehende Referat) immer zum Ziele führen muss. Lp.

C. BOURLET. Sur les nombres parfaits. Nouv. Ann. (3) **15**, 297-312.

Ist $\sigma(n)$ die Summe aller Teiler der positiven ganzen Zahl n, so heisst n eine „vollkommene" Zahl, falls $\sigma(n) = 2n$ ist, die Zahl n heisst „unvollkommen" (déficient), falls $\sigma(n) < 2n$, und „übervollkommen" (abondant), falls $\sigma(n) > 2n$ ist. Der Verf. zeigt in selbständiger Weise den schon bekannten Satz, dass jede gerade vollkommene Zahl die Gestalt haben muss $2^n(2^{n+1}-1)$, wobei $(2^{n+1}-1)$ eine Primzahl sein muss. Betreffs der etwaigen ungeraden vollkommenen Zahlen wird nur dargelegt, dass sie mehr als drei verschiedene Primfactoren haben müssen und jedenfalls $> 2\,197\,845$ sind. Fr.

J. BEZDÍCEK. Ueber befreundete und vollkommene Zahlen. Casopis **25**, 129-142, 209-224. (Böhmisch.)

Behandelt fünf Formen von befreundeten und vier von vollkommenen Zahlen. Sda.

A. HAAS. Eine Bemerkung über befreundete Zahlen. Casopis **25**, 349-350. (Böhmisch.) Sda.

A. G. FAZIO. Sui multipli dei numeri della forma $10Q+R$ con $R = 1, 3, 7, 9$ e sopra una operazione di divisibilità. Palermo: A. Reber. 28 S. 8°.

Da jede der Zahlen $R = 1, 3, 7, 9$ prim gegen 10 ist, so durch-

läuft nR mit n ein volles Restsystem modulo 10. Ist demnach eine mehrziffrige Zahl D Multiplum einer gleichfalls mehrziffrigen Zahl $(10Q+R)$, so kann man die einzelnen Ziffern des Quotienten von rechts nach links leicht angeben, indem man R mit der jedesmaligen letzten Ziffer des Dividenden vergleicht. Diese Elementarregel behandelt Fazio allgemein und in Beispielen. Fr.

F. NACHTIKAL. Zwei arithmetische Sätze. Casopis **25**, 344-346. (Böhmisch.)

Elementarer Beweis der Sätze, dass $\sum_{\varrho=0}^{n} \psi(n-\varrho, \varrho) = n$ und $\sum_{\varrho=0}^{n} \psi(n+\varrho, \varrho) = 2n$, wobei $\psi(\alpha, \beta)$ die Anzahl der Teiler der Zahl α bedeutet, welche grösser sind als die Zahl β. Sda.

R. AIYAR. Solution of question 12847. Ed. Times **65**, 100.

Sind A und B zwei ganze Zahlen, so dass x^2+Ax+B und x^2+Ax-B in einfache Factoren zerlegbar sind, so können A und B, und zwar in einer einzigen Art, in die Formen $A = \lambda(m^2+n^2)$, $B = \lambda^2 mn(m^2-n^2)$ gebracht werden, wo λ, m, n ganze Zahlen, m und n relativ prim sind, die eine der letzteren gerade. Lp.

C. E. BICKMORE. On the numerical factors of a^n-1. (Second notice.) Messenger (2) **26**, 1-38.

Fortsetzung eines früheren Artikels in Messenger (2) **25**, 1-44 (F. d. M. **26**, 202, 1895). Der Verf. bezieht sich hauptsächlich auf eine von Heinrich Bork seit der Veröffentlichung des ersten Aufsatzes erschienene Schrift, welche die in manchen Fällen anzustellenden Proben zur Bestimmung der kleinsten Lösung der Congruenz $10^x \equiv 1 \pmod{p}$ betrifft (F. d. M. **26**, 205, 1895). Die anderen Teile des Artikels beziehen sich auf den kubischen, biquadratischen und octavischen Charakter gewisser Zahlen, „quintische" und „septimische" Zahlen, u. s. w.

Glr. (Lp.)

C. E. BICKMORE. Solution of question 13058. Ed. Times **65**, 78.

Jede Primzahl von der Form $4m+1$ ist ein Teiler von m^m-1. Beweise von Bickmore, Nath Coondoo und Curjel. Lp.

E. H. MOORE. A two-fold generalization of Fermat's theorem. American M. S. Bull. **2**, 189-199.

Der Fermat'sche Satz $a^p-a \equiv 0 \pmod{p}$, wo p eine Primzahl und a eine beliebige ganze Zahl ist, wird zunächst so verallgemeinert: Die beiden Formen in den zwei unbestimmten X_0, X_1:

$$D[2, 1; p](X_0, X_1) = X_0 X_1^p - X_0^p X_1,$$
$$P[2, 1, p](X_0, X_1) = \Pi(a_0 X_0 + X_1) \qquad (a_0 = 0, 1, \ldots, p-1)$$

sind identisch congruent (mod. p). Dann wird dieser Satz auf $k+1$ Unbestimmte ausgedehnt. Alle modulo p congruenten ganzen Zahlen bilden eine „Klasse", die p incongruenten Klassen ein „Feld" $F(p)$ von der Ordnung p und dem Range 1. Die p „markirt" gedachten Klassen von $F(p)$ können durch die vier ersten Grundoperationen der Arithmetik mit einander verbunden werden. Der Begriff des Feldes $F(p)$ wird dann ferner erweitert zu dem Galois-Felde $GF(p^n)$ von der Ordnung p^n, dem Modulus p und dem Range n mit p^n Marken α, das demnach nur für $p =$ Primzahl, $n =$ positiver ganzer Zahl definirt ist. Die vom Verf. gegebene Verallgemeinerung des Fermat'schen Satzes lautet nun: Die beiden Formen in den $k+1$ Unbestimmten X_0, $X_1, \ldots, X_k$:

$$D[k+1, n; p](X_0, X_1, \ldots, X_k) \equiv |X_j^{p^{ni}}| \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, k),$$
$$P[k+1, n; p](X_0, X_1, \ldots, X_k) \equiv \Pi^* \Sigma a_g X_g \qquad (g = 0, 1, \ldots, k),$$

wo das Product Π^* die $(p^{n(k+1)}-1)/(p^n-1)$ verschiedenen primitiven linearen homogenen Formen $\Sigma a_g X_g$ umfasst, welche zu $GF(p^n)$ gehören, sind identisch. Lp.

R. Daublebsky von Sterneck. Ueber den Wilson'schen Satz. Monatsh. f. Math. 7, 145-148.

Sind $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-2}, (p-1)!$ die elementaren symmetrischen Functionen der Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$, so folgt aus: $(1+1)(1+2)\ldots(1+(p-1)) \equiv 1+\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_{p-2}+(p-1)! \equiv 0$ (mod. p) der Wilson'sche Satz, falls für Primzahlen p alle $\sigma_1, \ldots, \sigma_{p-2}$ durch p teilbar sind. Letzteres beweist der Verf. unter Vermeidung des Fermat'schen Satzes aus einer zwischen Binomialcoefficienten bestehenden Relation mit Hülfe der schon von Legendre für $n = p-1$ gebrauchten Gleichung: $n! = n^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n - \binom{n}{3}(n-3)^n + \cdots$.

Fr.

Lognon. Généralisation de la formule de Wilson. Nouv. Ann. (3) 15, 503.

Es gilt im Falle einer Primzahl $(n+1)$ für jedes ganzzahlige p die Formel: $(n!)^p + (-1)^{p+1} = (n+1)e_p$, unter e_p eine ganze Zahl verstanden. Für $p = 1$ wird hierdurch der Wilson'sche Satz ausgedrückt. Der Beweis ergiebt sich durch den Schluss der vollständigen Induction. Fr.

N. Nielsen. En Egenskab ved Talraekken. Nyt Tidss. 7B, 29-31.

Es wird bewiesen, dass in jeglichem Zahlensystem die Quersumme s einer Zahl n und die Quersumme S der Zahl rn immer die Ungleichheit $rs - S \geqq 0$ erfüllen.

Dieser Satz wird dazu verwertet, zu beweisen, dass verschiedene Quotienten von Factoriellen ganze Zahlen sind, z. B.

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.\;2.\;\ldots\;p}.$$

V.

L. Birkenmajer. Ueber einen zahlentheoretischen Satz. Prace mat.-fiz. 7, 12-14. (Polnisch.)

Ist p eine Primzahl >3, so ist $[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+1/(p-1)](p-1)!$ durch p^2 teilbar, und umgekehrt. Satz von E. Allardice in den Edinb. M. S. Proc. 8 (F. d. M. 22, 203, 1890). Dn.

M. Lerch. Sur un théorème de Zolotarev. Bull. intern. de l'Ac. François Joseph. 1896. 4 S.

Zolotarev hat im Jahre 1872 in den Nouv. Ann. (2) 9, 354 einen Satz über die Permutationsklasse bewiesen, welche man erhält, wenn man in der Reihe (1) k, $2k$, $3k$, ..., $(p-1)k$, worin p eine Primzahl bedeutet und k nicht durch p teilbar ist, jedes Glied durch seinen kleinsten, in Bezug auf den Modul p genommenen positiven Rest ersetzt. Erteilt man einer Permutation als Charakter die Zahl $+1$ oder -1, je nachdem die Anzahl ihrer Inversionen gerade oder ungerade ist, so lautet der Satz von Zolotarev: „Die Permutation, auf welche sich die Reihe (1) reducirt, hat zum Charakter das Symbol $\left(\frac{k}{p}\right)$." — Verf. giebt folgende Verallgemeinerung dieses Satzes: „Ist k eine ganze zu $2m$ relativ prime Zahl, so hat die Permutation, welche entsteht, wenn man die Glieder der Reihe k, $2k$, $3k$, ..., $(2m-1)k$ nach dem Modul $2m$ reducirt, zum Charakter die Zahl $(-1)^{\frac{1}{2}(k-1)(m-1)}$. Ist ferner m eine ungerade positive Zahl und k relativ prim zu m, so hat die gebildete Permutation zum Charakter das Symbol $\left(\frac{k}{p}\right)$ im Sinne von Jacobi." Wbg.

M. Lerch. Ueber einen arithmetischen Satz von Zolotarev. Rozpravy. 5, No. 17. 8 S. (Böhmisch.)

Jener Satz, auf Grund dessen von Zolotarev das Legendre'sche Gesetz der Reciprocität der quadratischen Reste bewiesen wurde, wird näher beleuchtet und in der Weise verallgemeinert, dass an Stelle der von Zolotarev angewandten Primzahl p eine beliebige ganze Zahl gesetzt wird. Sda.

N. Sokolow. Ein Theorem aus der Arithmetik. Kiew. Ges. 1895, 93-96; Kiew. Univ. Nachr. No. 9. (Russisch.)

Beweis des Theorems von Laisant: „Es werde die Zahl $N = 123\ldots(x-1)$ in dem Zahlensystem mit der Basis x geschrieben. Das Product dieser Zahl mit dem Factor n, welcher kleiner als $x-1$ und gegen sie eine relative Primzahl ist, lässt sich mit Hülfe derselben Ziffern darstellen, jede nur einmal genommen" (Interméd. des Math. 1894, Déc. No. 400). Wi.

F. Gruber. Zur Theorie der Fermat'schen Congruenzen. Ungar. Ber. 13, 413-417.

Es wird bewiesen, dass die für Primzahlen m identisch gültige

Congruenz: $x^{\varphi(m)}-1 \equiv (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{\varphi(m)})$, (mod. m), unter $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(m)}$ ein vollständiges Restsystem relativer Primzahlen zu m verstanden, im Falle zusammengesetzter Moduln m stets, und nur dann, identisch gilt, wenn entweder $m=4$ oder $m=2(2^i+1)$ und (2^i+1) eine Primzahl ist. Fr.

Jos. Mayer. Zu Dr. Kessler's „Periodlänge unendlicher Decimalbrüche". Hoffmann Z. **27**, 426-428.

Das Kessler'sche Werk enthält nach der Anzeige von Wertheim auf S. 195 der Hoffmann'schen Zeitschrift die Periodenlänge aller Brüche $1/p$ mit Primzahlnenner p bis 100000 und ist sehr correct. Durch Vergleichung mit der Arbeit von Jos. Mayer, welche in F. d. M. **20**, 179, 1888 angezeigt ist, ergaben sich dagegen Fehler in letzterer Schrift. Der Verf. derselben hat seine Angaben der Burkhardt'schen Table des diviseurs entnommen, wo sich auch die Perioden der Brüche mit Primzahlnennern bis 2543 finden und die gerügten Fehler ebenfalls stehen. Lp.

E. Busche. Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes. Hamb. Mitt. **8**, 233-234.

Sind p und q zwei verschiedene ungerade Primzahlen, so markire man im Intervall von 0 bis $\frac{1}{4}pq$ erstens die den Zahlen $\frac{p}{2}$, $2\cdot\frac{p}{2}$, $3\cdot\frac{p}{2}$, $\dots$, $\frac{q-1}{2}\cdot\frac{p}{2}$ entsprechenden Teilpunkte und spreche von einem geraden oder ungeraden p-Intervall, je nachdem der linke Endpunkt desselben einem geraden oder ungeraden Vielfachen von $p/2$ entspricht. Zweitens verfahre man gerade so mit den Zahlen $\frac{q}{2}$, $2\cdot\frac{q}{2}$, $\dots$, $\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q}{2}$. Diese $\frac{p-1}{2}$ Teilpunkte collidiren mit jenen $\frac{q-1}{2}$ nicht. Die in dem Gauss'schen Lemma auftretende Zahl $\mu(p,q)$ lässt sich dann, wie bereits Gauss selbst durch eine unwesentliche Umgestaltung seines Lemmas gezeigt hat, so erklären: $\mu(p,q)$ ist die Anzahl derjenigen Teilpunkte $\frac{p}{2}$, $2\cdot\frac{p}{2}$, $\dots$, $\frac{q-1}{2}\cdot\frac{p}{2}$, die in einem ungeraden q-Intervalle liegen.

Zur Bestimmung des Restes von $\mu(p,q)+\mu(q,p)$ modulo 2 gestattet der Verf. Verschiebungen der p-Teilpunkte nach links. So oft hierbei ein p-Teilpunkt einen q-Teilpunkt überschreitet, werden offenbar $\mu(p,q)$ und $\mu(q,p)$ je um eine Einheit verändert, so dass der Rest mod. 2 ungeändert bleibt. Sind alle $(q-1)/2$ p-Teilpunkte in das erste q-Intervall verschoben, so lassen sich die veränderten Anzahlen $\mu(p,q)$, $\mu(q,p)$ unmittelbar bestimmen, und es lässt sich zeigen, dass $\mu(p,q)+\mu(q,p)$ stets und nur dann ungerade ist, falls $(p-1)/2$ und $(q-1)/2$ zugleich ungerade sind. Fr.

Lange. Ein elementarer Beweis des Reciprocitätssatzes. Leipz. Ber. **48**, 1896, 629-633.

Der Verf. stellt zunächst durch eine einfache Betrachtung den mit dem Gauss'schen Lemma nahe verwandten Satz auf: Ist z eine durch die Primzahl $p=2n+1$ nicht teilbare ganze Zahl, so gilt für das Legendre'sche Zeichen: $\left(\frac{z}{p}\right)=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+u}$, wo u angiebt, wie viele unter den kleinsten positiven Resten von $z, 2z, 3z, \ldots, nz$ mod. p ungerade sind. Sind $p=2n+1$ und $q=2m+1$ zwei Primzahlen, so ist zur Bestimmung von $\left(\frac{p}{q}\right)$ und $\left(\frac{q}{p}\right)$ anzugeben, wie viele unter den kleinsten positiven Resten einmal von $p, 2p, \ldots, mp$ modulo q, sodann von $q, 2q, \ldots, nq$ modulo p ungerade sind. Diese Aufgabe löst der Verf. unter Zugrundelegung einer geometrischen Vorstellung, bei welcher auf der Zahlenlinie vom Nullpunkt aus m Strecken p und n Strecken q abgetragen werden und die gegenseitigen Beziehungen der beiden Reihen von Teilstrecken discutirt sind. Das Product der beiden für $\left(\frac{p}{q}\right)$ und $\left(\frac{q}{p}\right)$ folgenden Darstellungen liefert den Reciprocitätssatz. Fr.

X. Stouff. Sur les lois de réciprocité. C. R. **123**, 486-488.

Es sei $m=2p+1$ eine rationale Primzahl, α eine primitive m^{te} Einheitswurzel und $f(\alpha)=\sum_{i=1}^{2p} a_i\alpha^i$ eine ganze complexe Primzahl des zu α gehörenden Zahlkörpers $2p^{\text{ten}}$ Grades. Der Verf. stellt den Satz auf, dass das bei den höheren Reciprocitätsgesetzen zur Verwendung kommende Symbol $\left[\frac{m}{f(\alpha)}\right]$ nur von den Resten der Coefficienten a_i bezüglich gewisser Potenzen von m abhänge, und dass die Exponenten dieser letzteren Potenzen selber nur von m abhängen. Der Verf. giebt an, dass er diesen Satz vermöge eines im Raume von $2p$ Dimensionen gelegenen Discontinuitätsbereichs der Gruppe: $Z'=\alpha^h Z+n(\alpha)f(\alpha)$ gefunden habe, wo h ein Restsystem mod. $2p$ und $n(\alpha)$ alle ganzen Zahlen des fraglichen Körpers zu durchlaufen hat. Fr.

---

de Séguier. Sur les sommes de Gauss. C. R. **123**, 166-168.

Berechnung des Ausdrucks: $\psi(h,D)=\sum_s\left(\frac{D}{s}\right)e^{s.\frac{2h\pi i}{|D|}}$ mit ganzzahligem h für eine beliebige mod. 4 mit 0 oder 1 congruente ganze Zahl D. Hierbei soll der Summationsbuchstabe s ein volles Restsystem mod. D durchlaufen. Fr.

F. Mertens. Ueber die Gaussischen Summen. Berl. Ber. 1896, 217-219.

Neuer Beweis der Formel $\sum_0^{n-1} e^{\frac{s^2 2\pi i}{n}} = i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} \sqrt{n}$ mit positiv genommener Wurzel $\sqrt{n}$ aus der ungeraden Zahl n. Nennt man die linke Seite der Formel kurz S und schreibt $S = i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} R$, so findet man leicht $R^2 = n$. Um das Vorzeichen von $R = \pm\sqrt{n}$ zu bestimmen, beweist der Verf. die Gleichung $R = \sum_0^{4n-1} \cos 8s^2\omega = \sum_1^{4n-1} \sin 8s^2\omega$ mit $\omega = \frac{\pi}{64n}$. Aus der Gleichung: $\cos 2\omega \sin 8s^2\omega + \sin 2\omega \cos 8s^2\omega = \frac{\sin^2(2s+1)^2\omega - \sin^2(2s-1)^2\omega}{\sin 8s\omega}$ folgt durch Summation von $s = 1$ bis $s = 4n-1$ für $(\cos 2\omega + \sin 2\omega)R$ eine Darstellung als Summe lauter positiver Glieder. Es ist somit $R = +\sqrt{n}$. Fr.

G. Wertheim. Primitive Wurzeln der Primzahlen von der Form $2^x q^\lambda + 1$, in welcher $q = 1$ oder eine ungerade Primzahl ist. Acta Math. **20**, 143-152.

Für die Primzahl p sei die Primfactorenzerlegung von $p-1$ durch $p-1 = 2^x q^\lambda \dots r^\mu$ gegeben. Die Zahl a ist primitive Wurzel von p, falls keine der Congruenzen: $x^2 \equiv a$, $x^q \equiv a$, $\dots$, $x^r \equiv a \pmod{p}$ lösbar ist. Hierauf gründet der Verf. eine Discussion derjenigen Primzahlen p, für welche gegebene Zahlen a primitive Wurzeln sind. Die Ausführungen beziehen sich auf $a = 2, 3, 5, 7, 11, 13$. Es werden die Primzahlen der Gestalten 2^x+1, $2q+1$, $4q+1$ angegeben, für welche jene a primitive Wurzeln sind. Auch für $p = 2^x q + 1$ mit $x > 2$ werden einige Ausführungen gegeben. Fr.

G. Wertheim. Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln g aller Primzahlen p zwischen 3000 und 5000. (Fortsetzung der Tabelle aus Band **17**, Seite 315). Acta Math. **20**, 153-158.

Die Tabelle unterscheidet sich von der gleichfalls bis $p = 5000$ gehenden Reuschle'schen Tabelle (Stuttgart 1856) dadurch, dass letztere für das einzelne p irgend eine, Wertheim aber stets die kleinste primitive Wurzel giebt. Am Schlusse sind Berichtigungen des voraufgehenden Teiles der Tabelle gegeben. Fr.

---

de Jonquières. Quelques propriétés des racines primitives des nombres premiers. C. R. **122**, 1451-1455.

de Jonquières. Quelques propriétés des racines secondaires des nombres premiers. C. R. **122**, 1513-1517.

DE JONQUIÈRES. Au sujet d'une précédente communication, relative à quelques propriétés des racines primitives et des racines secondaires des nombres premiers. C. R. **123**, 374.

DE JONQUIÈRES. Au sujet des nombres premiers dont un nombre quelconque donné ne peut être racine primitive. C. R. **123**, 405-406.

1) Von den primitiven Wurzeln der ungeraden Primzahl p gelten die folgenden leicht beweisbaren Sätze: Das Product einer geraden Anzahl von primitiven Wurzeln ist niemals mit einer primitiven Wurzel mod. p congruent. Das Product einer ungeraden Anzahl von primitiven Wurzeln gehört zu einem in $\frac{1}{2}(p-1)$ nicht aufgehenden Exponenten.

2) Ist i ein echter Teiler von $(p-1)$, so werden die zum Exponenten i gehörenden Zahlen als „secundäre" Wurzeln des Exponenten i bezeichnet. Es werden einige einfache Sätze über Producte der secundären Wurzeln des gleichen i aufgestellt. Das Product aller zu den verschiedenen i gehörenden secundären Wurzeln ist $\equiv -1$ (mod. p). Die Summe derselben ist $\equiv 0$ (mod. p), falls $(p-1)$ durch ein Quadrat > 1 teilbar ist; sie ist $\equiv 1$, falls $(p-1)$ eine ungerade Anzahl einfacher Primfactoren > 1 hat, und endlich $\equiv -1$, falls die Anzahl jener Factoren gerade ist. In einem Anhange wird als Erfahrungsgesetz angegeben: Die Zahl 2 kann niemals primitive Wurzel einer Primzahl sein, die mod. 24 mit 1, 7, 17, 23 congruent ist, die Zahl 3 desgleichen nie bei einer mod. 24 mit 1, 11, 13 oder 23 congruenten Primzahl, endlich die Zahl 5 nie bei einer mod. 30 mit 1, 11, 19 oder 29 congruenten Primzahl.

3) und 4) Diese Sätze sind entweder nach Pepin vermöge des Reciprocitätsgesetzes der quadratischen Reste oder auf Grund von Gauss' Sätzen über die Teiler der Form $(x^2 \pm A)$ beweisbar. Auch werden noch entsprechende Sätze für die Zahlen 7 und 11 angegeben. Fr.

PEPIN. Formes linéaires des diviseurs de $x^2 \pm A$. C. R. **123**, 683-686, 737-740.

Beweis der von de Jonquières aufgestellten Sätze über Primzahlen p, von denen eine gegebene Zahl nicht primitive Wurzel sein kann. Bei diesem Beweise wird der Gebrauch des Reciprocitätsgesetzes vermieden. Statt dessen kommen Sätze über Darstellung ganzer Zahlen durch quadratische Formen, sowie über Reduction dieser Formen zur Verwendung. Fr.

G. SPECKMANN. Ueber die Auflösung der Congruenz $x^2 \equiv a$ (mod. p). Hoppe Arch. (2) **14**, 445-448.

Regeln zur Auflösung von $x^2 \equiv a$ (mod. p) bei primzahligem p. 1) In $x^2 = np + a$ ist jedenfalls nur ein solches n zulässig, für welches die beiden letzten Ziffern der ganzen Zahl $(np+a)$ eine der 22 bei Quadraten vorkommenden Combinationen vorstellen. 2) Transformation

der gegebenen Congruenz auf die Gestalt $z^2+z \equiv b \pmod{p}$, die manchmal leichter zu lösen ist. Fr.

N. Aladow. **Ueber die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste von einer Primzahl P in der Reihe 1, 2, ..., $P-1$.** Mosk. Math. Samml. **18,** 61-75. (Russisch.)

Als Beispiel der Theoreme, die in dem vorliegenden Aufsatze über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste einer Primzahl P in der Reihe 1, 2, 3, . . ., $P-1$ gegeben sind, führen wir das folgende an: „Wenn P eine Primzahl von der Form $4m+1$ ist, so hat man in der Reihe 1, 2, . . ., $P-1$: 1) $x=\frac{1}{4}(P-1)$ quadratische Nichtreste der Primzahl P, denen Nichtreste folgen; 2) $x_1=\frac{1}{4}(P-1)$ Nichtreste, denen Reste folgen; 3) $y=\frac{1}{4}(P-1)$ Reste, denen Nichtreste folgen, und 4) $y_1=\frac{1}{4}(P-5)$ Reste, denen auch Reste folgen. Wenn die Primzahl P von der Form $4m+3$ ist, so sind die Zahlen x, x_1, y, y_1 respective gleich $x=\frac{1}{4}(P-3)$, $x_1=\frac{1}{4}(P-3)$, $y=\frac{1}{4}(P+1)$, $y_1=\frac{1}{4}(P-3)$." Die anderen Theoreme beziehen sich auf den Fall einer Primzahl von der Form $4m+3$. Wi.

A. Cunningham. **On 2 as a 16-ic residue.** Lond. M. S. Proc. **27,** 85-122.

Es werden diejenigen Primzahlen p untersucht, von welchen 2 sechzehnter Potenzrest ist. Die Primzahl p muss die Gestalt $16m+1$ haben. Damit 2 vierter und achter Potenzrest von p ist, muss nach Gauss und Reuschle in den im wesentlichen eindeutigen Darstellungen $p=a^2+b^2=c^2+2d^2$ die Zahl b durch 16 und d durch 4 teilbar sein. Je nachdem $(\frac{1}{16}b+\frac{1}{4}d)$ gerade oder ungerade ist, ist dann 2 sechzehnter Rest oder Nichtrest. Es werden Mittel zur Angabe der gesuchten Primzahlen p entwickelt und Sätze über die Darstellung derselben in Formen höheren Grades, wie X^4+Y^4, $X^8-X^4Y^4+Y^8$, ..., angegeben. Am Schluss werden Tabellen der fraglichen Primzahlen p mitgeteilt, die bis 25000 vollständig sind, aber auch noch einige weitere Zahlen p liefern. Fr.

A. Cunningham. **Note.** Lond. M. S. Proc. **27,** 53-54.

1) Angabe derjenigen Primzahlen p, von denen 2 sechzehnter Potenzrest ist (vergl. das vorangehende Referat).

2) Bemerkungen zu Lucas' und Mersenne's Behauptungen, den Primzahlcharakter von $(2^{67}-1)$, $(2^{127}-1)$, $(2^{257}-1)$ betreffend. Fr.

F. Hromadko. **Proben aus Diophantos.** Casopis **25,** 69-75, 143-149. (Böhmisch.)

Behandelt 20 Aufgaben aus dem I., 11 aus dem II., eine aus dem IV. arithmetischen Buche des Diophantos. Sda.

G. B. Mathews. On the representation of a number as a sum of squares. Lond. M. S. Proc. 27, 55-60.

Zwei Darstellungen der Zahl n als Summe von k Quadraten $n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2$ gelten nur dann als gleich, wenn die beiden Systeme darstellender Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ in dieser Reihenfolge einander gleich sind. Die Anzahl aller verschiedenen solchen Darstellungen von n ist gleich dem Coefficienten von q^n in der Entwickelung von

$$\vartheta_3^k = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} q^{s^2}\right)^k = (1+2q+2q^4+2q^9+\cdots)^k,$$

welcher c_k heisse. Aus der Productdarstellung von ϑ_3 folgt:

$$\frac{d \log \vartheta_3}{dq} = -\sum_1^{\infty} \psi(n) . q^{n-1},$$

wo $\psi(n) = -(-1)^{n/m}[\zeta(n)+\zeta(m)]$ ist, $\zeta(l)$ die Teilersumme von l darstellt und m den grössten ungeraden Teiler von n bedeutet. Durch Vergleichung der beiderseitigen Entwickelungscoefficienten in:

$$\frac{\sum_1^{\infty} n c_n q^{n-1}}{1+\sum_1^{\infty} c_n q^n} = -k \sum_1^{\infty} \psi(n) q^{n-1}$$

findet sich für c_n ein übersichtlich gebauter Determinantenausdruck in $\psi(1), \psi(2), \ldots, \psi(n)$. Durch Vergleichung mit den für die niedrigsten Werte n bekannten c_n entspringen merkwürdige Theoreme über Teilersummen. Fr.

A. Martin. A simple method of finding any number of square numbers whose sum is a square. Edinb. M. S. Proc. 14, 113-115.

Durch Substitutionen in einer Formel von der Art:

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2)^2 = (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2-a_n^2)^2 + (2a_1a_n)^2+(2a_2a_n)^2+\cdots+(2a_{n-1}a_n)^2.$$

Gbs. (Lp.)

A. Martin. About biquadrate numbers whose sum is a biquadrate. Math. Magazine 2, 173-184.

A. Martin. About cube numbers whose sum is a cube number. II. Math. Magazine 2, 185-190.

Euler beweist, dass die Summe zweier Biquadrate (vierten Potenzen ganzer Zahlen) niemals ein Biquadrat sein kann, behauptet, dass auch die Summe dreier Biquadrate nicht wieder ein Biquadrat sein kann, und giebt an, dass er keine Summe von vier Biquadraten gleich einem Biquadrat habe finden können.

Der Verf. giebt zahlreiche Beispiele mehr-als-viergliedriger Summen von Biquadraten an, die wieder Biquadrate sind. Zur Charakteristik seiner Untersuchungsweise diene folgende Angabe. Man setze:

$$S(n^4) = 1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4 = \tfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

Es liege b^4 zwischen n^4 und $S(n^4)$. Man setze $S(n^4)-b^4=r$ und stelle alle Zerlegungen von r in Summen von Biquadraten $< n^4$ auf, welche man zu finden vermag. Jedesmal ergiebt sich eine Summe von Biquadraten $= b^4$.

In der zweiten Note werden entsprechend die Kuben behandelt. Fr.

Ed. Maillet. **Sur la décomposition d'un nombre entier en une somme de cubes d'entiers positifs.** Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24**, 242-247.

I. Jede ganze Zahl ist die Summe von höchstens 21 Kuben ganzer positiver Zahlen, von denen höchstens 16 von 1 oder 0 verschieden sind. II. Jedes ganze Vielfache von 6 ist oberhalb einer gewissen endlichen Grenze die Summe von 12 Kuben positiver ganzer Zahlen. III. Jede ganze, oberhalb einer gewissen endlichen Grenze liegende Zahl ist von der Form $\Sigma x_i^3+2\Sigma y_j^3$, wo x_i, $y_j \geqq 0$, Σx_i^3 eine Summe von höchsten 13 Kuben positiver ganzer Zahlen ist, unter denen höchstens 8 von 1 oder 0 verschieden sind, und Σy_j^3 eine Summe von höchstens 4 positiven Kuben ist. Lp.

Ed. Maillet. **Quelques extensions du théorème de Fermat sur les nombres polygones.** Journ. de Math. (5) **2**, 363-380.

Im Anschluss an den bekannten Satz Fermat's über die Darstellung positiver ganzer Zahlen als Summen von Polygonalzahlen werden hier Zerlegungen der positiven ganzen Zahlen in positive ganzzahlige Summanden untersucht, welche sich vermöge ganzzahliger Argumente x in $\varphi(x) = ax^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5$, einer festgegebenen, numerisch rationalen Function, darstellen lassen. Fr.

Ed. Maillet. **Sur une application à l'analyse indéterminée de la théorie des suites récurrentes.** Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24**, 233-242.

Es sei $f(x)=0$ eine algebraische Gleichung q^{ten} Grades mit rationalen Coefficienten; man kann immer zu ihr eine unbestimmte Gleichung mit q Veränderlichen $F(u_0, u_1, \ldots, u_{q-1})=0$ derart in entsprechende Verbindung setzen, dass man diese letztere vollständig in rationalen Zahlen löst, wenn man die rationalen Divisoren von $f(x)$ kennt, und dass im Falle eines irreductiblen $f(x)$ keine Lösungen vorhanden sind. Aehnliche Betrachtungen ermöglichen es, für gewisse Formen von $f(x)$ aus einer Lösung von $F=g$, wo g rational und von Null verschieden ist, unendlich viele Lösungen herzuleiten. Lp.

H. F. Blichfeldt. **On triangles with rational sides and having rational areas.** Annals of Math. **11**, 57-60.

Die Seiten aller möglichen rationalen Dreiecke lassen sich in ele-

ganter Weise durch die Ausdrücke:

$$a = m + \frac{1}{m}, \quad b = n + \frac{1}{n}, \quad c = m - \frac{1}{m} + n - \frac{1}{n}$$

darstellen, wobei m, n beliebige rationale Werte haben. R. M.

J. Iwanow. Ueber eine Congruenz dritten Grades. St. Pétersb. Bull. **5**, No. 2. (Russisch.)

Woronoi hat in seiner Abhandlung: „Ueber die ganzen algebraischen Zahlen, die von einer Wurzel der Gleichung dritten Grades abhängen" (F. d. M. **25**, 302, 1893/94) das folgende Theorem bewiesen: „Die Congruenz $x^3 - rx - s \equiv 0$ (mod. p, p eine Primzahl grösser als 2) hat immer eine und nur eine Lösung, wenn die Zahl $4r^3 - 27s^2$ ein quadratischer Nichtrest nach dem Modul p ist. Wenn aber diese Zahl ein quadratischer Rest ist, so hat die Congruenz entweder drei Lösungen oder keine". Im vorliegenden Aufsatz wird ein anderer Beweis desselben Satzes gegeben. Wi.

L. Gegenbauer. Bemerkung über reelle Primzahlen. Monatsh. f. Math. **7**, 73-76.

H. v. Koch hat eine Function $\vartheta(x)$ construirt, welche für alle eine gegebene Zahl n nicht überschreitenden primzahligen Werte des Argumentes gleich 1, für die übrigen ganzzahligen Werte des Intervalls $1, \dots, n$ gleich 0 wird. Man vergl. F. d. M. **25**, 262, 1893/94. Der Verf. bildet zwei Functionen $\vartheta_1(x)$ und $\vartheta_2(x)$, so dass $\vartheta(x).\vartheta_1(x)$ und $\vartheta(x).\vartheta_2(x)$ für einen n nicht überschreitenden ganzzahligen Wert x nur dann einen von 0 verschiedenen Wert hat, und zwar 1, wenn x Primzahl der Form $(4s+1)$, bezw. $(6s+1)$ ist. Fr.

R. Daublebsky v. Sterneck. Ueber einige specielle zahlentheoretische Functionen. Monatsh. f. Math. **7**, 37-48.

Die zahlentheoretische Function $f(n)$ sei durch die vier Bedingungen charakterisirt: a) $f(1) = 1$; b) der grösste gemeinsame Teiler von $f(m)$ und $f(n)$ sei $f(d)$, wenn d der grösste gemeinsame Teiler von m und n ist; c) für Primzahlen p (abgesehen von einer oder einigen bestimmten) soll eine der Zahlen $f(p-1)$, $f(p+1)$ durch p teilbar sein; d) der grösste gemeinsame Teiler von $f(\varrho n)/f(n)$ und $f(n)$ soll in ϱ aufgehen.

Ist $\Phi(n)$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller Teiler von n (ausser n selbst), so ist $F(n) = \frac{f(n)}{\Phi(n)}$ eine ganze Zahl, welche sich in der Gestalt darstellt:

$$F(n) = \frac{f(n)\, f\left(\frac{n}{p_1 p_2}\right) f\left(\frac{n}{p_1 p_3}\right) \cdots f\left(\frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4}\right) \cdots}{f\left(\frac{n}{p_1}\right) f\left(\frac{n}{p_2}\right) \cdots f\left(\frac{n}{p_1 p_2 p_3}\right) \cdots};$$

hierbei ist $n = p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \dots p_r^{\pi_r}$ die Primfactorenzerlegung von n, und die Factoren des Zählers von $F(n)$ beziehen sich auf alle geradzahligen Combinationen (ohne Wiederholung) der p, diejenigen des Nenners auf alle ungeradzahligen. Der Verf. stellt ein Theorem über die in $F(n)$ enthaltenen Primfactoren auf.

Specialfälle sind die von Zsigmondy betrachtete Function $f(n) = \frac{a_1^n - a_2^n}{a_1 - a_2}$ (a_1 und a_2 teilerfremde ganze Zahlen), sowie die durch die Recursionsformel $f(n) = f(n-1) + \alpha f(n-2)$ mit positivem ganzen α und den Anfangsbedingungen $f(1) = f(2) = 1$ definirte Function, welche E. Lucas für $\alpha = 1$ discutirt hat.

Zum Schluss wird als Anwendung ein Beweis des Satzes gegeben, dass für eine Primzahlpotenz $a = p^l$ die arithmetische Reihe -1, $a-1$, $2a-1$, $3a-1$, ... unendlich viele Primzahlen enthält.

Fr.

R. Daublebsky v. Sterneck. Bemerkungen über die von Dirichlet in seiner Breslauer Habilitationsschrift behandelten Functionen. Monatsh. f. Math. **7**, 342-346.

Fortsetzung der Note „Ueber einige specielle zahlentheoretische Functionen", über welche im vorangehenden Referate berichtet ist.

Die durch die Recursionsformel $f(n) = \alpha f(n-1) + \beta f(n-2)$ mit teilerfremden ganzen Zahlen α, β und den Anfangsbedingungen $f(1) = 1$, $f(2) = \alpha$ definirte Function genügt den Bedingungen a) ... d); für diese Function besteht demnach das l. c. aufgestellte Theorem. Für $\alpha = 2x$, $\beta = b - x^2$ ordnet sich die von Dirichlet untersuchte Function:

$$f(n) = \frac{(x+\sqrt{b})^n - (x-\sqrt{b})^n}{2\sqrt{b}}$$

ein. Das von Lucas vermittelst des k^{ten} Gliedes $f(k)$ der Lamé'schen Reihe aufgestellte Primzahlkriterium bleibt auch für die hier definirten allgemeineren Functionen $f(k)$ gültig. Fr.

Ch. J. de la Vallée Poussin. Démonstration simplifiée du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique. Belg. Mém. c. in 8°. **53**, 32 S.

P. Mansion. Rapport. Belg. Mém. (3) **31**, 19-24.

In den §§ 1, 2, 3 definirt der Verf. die Elemente, deren er sich in der Folge bedient, die übrigens die Dirichlet'schen sind; er bringt aber die Riemann'sche Function $\zeta(s)$ in eine solche Gestalt, dass sie auch für ein imaginäres s einen Sinn behält, falls der reelle Teil von s positiv ist. Der Charakter $\chi(n)$ einer Zahl wird im § 4 erklärt, und im § 5 wird mit Hülfe von $\zeta(s)$ die Summe der Ausdrücke von der Form $[\chi(n) : n^s]$ ermittelt, selbst wenn s imaginär ist. Im § 6 wird die logarithmische Ableitung der Dirichlet'schen Reihen eingeführt an

Stelle des Logarithmus, und dadurch gelangt man mit einer unerwarteten Einfachheit im § 7 zu dem Dirichlet'schen Satze, wofern nicht ein Ausnahmefall vorliegt. Der Verf. beweist jedoch unter Benutzung aller Hülfsmittel der Analysis, dass diese Ausnahme unmöglich ist (§ 8). Zwei neue Eigenschaften werden vom Verf. als Folgerungen aus seinem Beweise ermittelt: 1. Es ist $\lim_{s=1} (s-1)\Sigma \frac{\log q_N}{q_N} = \frac{1}{\varphi(M)}$, wo q_N die Primzahlen bedeutet, welche zu der arithmetischen Reihe $Mx+N$ gehören. 2. Wenn das Verhältnis $\frac{1}{t}\Sigma \log q$ $(q \overline{\overline{<}} t)$, welches zum Zähler die Summe der natürlichen Logarithmen der Primzahlen q hat, die nicht grösser als t sind und der Form $Mx+N$ angehören, für $t=\infty$ einer bestimmten Grenze zustrebt, so kann diese Grenze von $[1/\varphi(M)]$ nicht verschieden sein. In der ganzen Abhandlung setzt der Verf. M ungerade voraus.

In Bd. **20** und **21** von Brux. S. sc. hat der Verf. die hier erhaltenen Ergebnisse beträchtlich erweitert und schärfer gefasst. Diese Arbeiten werden im nächsten Jahrgange der F. d. M. angezeigt werden.

Mn. (Lp.)

L. Carlini. Applicazione delle progressioni aritmetiche alla determinazione dei numeri primi. Treviso. 8°. Vi.

E. Busche. Ueber die Teiler der natürlichen Zahlenreihe. Hamb. Mitt. **3**, 234-249.

Es wird hier eine Reihe arithmetischer Theoreme aufgestellt, in denen die Function $E(x) = [x]$, welche die grösste, die Zahl x nicht übertreffende ganze Zahl darstellt, die Hauptrolle spielt. Der Entwickelung liegen drei einander ähnliche Identitäten zu Grunde, welche durch die erste charakterisirt sein mögen:

$$\sum_{x=1}^{a} f\left(\left[\frac{\Phi(x)}{x}\right], x\right) - \sum_{x=1}^{a} f(0, x) = \sum_{m} [f(\delta'_m, \delta_m) - f(\delta'_m - 1, \delta_m)].$$

Hier ist $f(\alpha, \beta)$ eine beliebige eindeutige Function, $\Phi(x)$ bedeutet eine für alle vorkommenden Werte x mit x wachsende eindeutige positive Function, deren inverse Function $\varphi(y)$ heisse; a ist irgend eine positive ganze Zahl und δ_m, δ'_m sind zwei complementäre positive Teiler der ganzen Zahl m. Links ist über alle ganzen Zahlen x von 1 bis a zu summiren, rechts über alle Teiler δ_m aller ganzen positiven Zahlen m, welche $\varphi(m) \overline{\overline{<}} \delta_m \overline{\overline{<}} a$ befriedigen; wegen der Eigenschaft von $\varphi(y)$, mit y zu wachsen, steht rechts auch nur eine endlich-gliedrige Summe.

Die arithmetischen Sätze folgen durch Einsetzung besonderer Zahlen a und Auswahl specieller Functionen f und Φ, sowie durch Combination der so entspringenden Formeln. Als charakteristisches Beispiel gelte: Die Anzahl aller mod. s mit r congruenten Teiler der Zahlen von 1 bis n ist gleich der Anzahl der Zahlen $[n/1]$, $[n/2]$, ..., $[n/n]$, die

mod. s einen der Reste r, $r+1$, ..., $s-1$ haben, vermehrt um die Anzahl aller Teiler der Zahlen von 1 bis $[n/s]$. Fr.

G. Bertolani. Contributo alla teoria della funzione $E(x)$. Batt. G. **34**, 1-10.

Es werden hier zahlreiche Formeln entwickelt, welche die Auswertung der Summe $\sum_{r=1}^{m-1} E\left(x+\frac{rn}{m}\right)$ betreffen. Hier ist $E(y)$ die grösste, y nicht übertreffende ganze Zahl, m und n sind zwei teilerfremde positive ganze Zahlen und x bedeutet irgend einen positiven Betrag. Im ersten Teil der Arbeit wird für die Function:

$$E_q(x) = \frac{E(x).E(x+1)\dots E(x+q-1)}{1.2\dots q}$$

der Wert der etwas einfacher gebauten Summe $\sum_{r=1}^{m-1} E_q\left(x+\frac{r}{m}\right)$ betrachtet.
Fr.

E. Cesaro. Sulla distribuzione dei numeri primi. Napoli Rend. (3) **2**, 297-304.

Es sei $\vartheta(n)$ die Anzahl ungerader Primzahlen, die $\leq n$ sind, und unter ihnen seien $\vartheta_r(n)$ modulo 4 mit r congruent. Der Verf. zeigt auf Grund von Reihenentwickelungen die Grenzformel:

$$\lim_{n=\infty}\left[\frac{\vartheta_3(n)-\vartheta_1(n)}{\vartheta(\sqrt{n})}\right] = \tfrac{1}{2}$$

und meint, von hier aus auf die für grösser und grösser zu wählendes n gültigen Näherungsformeln:

$$\vartheta_1(n) = \tfrac{1}{2}\vartheta(n)-\tfrac{1}{4}\vartheta(\sqrt{n}),\quad \vartheta_3(n) = \tfrac{1}{2}\vartheta(n)+\tfrac{1}{4}\vartheta(\sqrt{n})$$

schliessen zu sollen, welche er zudem noch „in erster Annäherung“ so schreibt: $\vartheta_1(n) = \frac{1}{2}\vartheta(n-\sqrt{n})$, $\vartheta_3(n) = \frac{1}{2}\vartheta(n+\sqrt{n})$. Diese Formeln würden mit dem von Tschebyschew bemerkten Gesetze in Uebereinstimmung sein, nach welchem die Primzahlen der Gestalt $(4k+3)$ weit häufiger sind als die der Form $(4k+1)$.

Statt die Primzahlen nach ihrem Reste modulo 4 zu klassificiren, werden weiterhin auch noch Einteilungen der Primzahlen nach ihrem quadratischen Restcharakter bezüglich einer festen Zahl μ betrachtet.
Fr.

C. Aiello. Sul numero dei numeri primi inferiori ad un dato limite. Batt. G. **34**, 14-20.

Für die Anzahl $\vartheta(n)$ der unterhalb n gelegenen Primzahlen giebt Cesàro gelegentlich die Näherungsformel an:

$$\vartheta(n) = \frac{n}{\log n - 1 - \frac{1}{\log n} - \frac{3}{\log^2 n} - \dots}.$$

Der Verf. entwickelt die genauere Formel: $\vartheta(n) =$

$$\frac{n}{\log n - 1 - \frac{1}{\log n} - \frac{3}{\log^2 n} - \frac{13}{\log^3 n} - \frac{71}{\log^4 n} - \frac{461}{\log^5 n} - \frac{3447}{\log^6 n} - \frac{29093}{\log^7 n} - \cdots}$$

und stellt einige allgemeine Sätze über die hier auftretenden ganzzahligen Coefficienten 1, 3, 13, 71, ... auf. Fr.

J. FRANEL. Sur la fonction $\xi(t)$ de Riemann et son application à l'arithmétique. Zürich. Naturf. Ges. **41,** 2. Teil. 7-19.

Diese Abhandlung hat im wesentlichen den Zweck, das Studium von Riemann's Untersuchung „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse" zugänglicher zu machen. Es geschieht dies zunächst durch ausführliche Besprechung der Convergenzbedingungen der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^s}$, welche Riemann's Function

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \Pi\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right)$$

als speciellen Fall umfasst. Für die in bekannter Weise transformirte Function: $\xi(t) = s\,\frac{s-1}{2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$ mit $s = \frac{1}{2} + it$ wird alsdann die Anzahl N derjenigen Wurzeln bestimmt, deren reelle Bestandteile zwischen 0 und h liegen: $N = \frac{h}{2\pi}\log\frac{h}{2\pi} - \frac{h}{2\pi} + \varphi(h)$; hierbei ist $\varphi(h)$ eine Grösse, deren absoluter Betrag bei unendlich wachsendem h unterhalb einer angebbaren Grenze bleibt. Wegen der genaueren, durch v. Mangoldt aufgestellten Formel sehe man F. d. M. **25,** 263, 1894. Aus der Formel für N schliesst der Verf. den zuerst von Hadamard vollständig bewiesenen Satz, dass die ganze transcendente Function $\xi(t)$ in t^2 eine Function des Geschlechtes Null ist. Endlich wird von der Gleichung: $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum \frac{\log p}{p^s - 1} = \sum \frac{A_n}{n^s}$ aus durch ein Integrationsverfahren für die Anzahl $F(h)$ aller Primzahlen zwischen 0 und h die folgende Gleichung gewonnen:

$$F(h) = \int_2^h \frac{dx}{\log x} + h^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.F_1(h),$$

wo ε beliebig klein gemacht werden kann und $F_1(h)$ mit wachsendem h die Null zur Grenze hat. Bei dieser letzten Entwickelung gilt die Vermutung, dass alle Wurzeln der Gleichung $\xi(t) = 0$ reell seien, als bewiesen. Fr.

H. VON MANGOLDT. Extrait d'un travail intitulé „Sur le mémoire de Riemann relatif au nombre des nombres premiers inférieur à une grandeur donnée". Ann. de l'Éc. Norm. (3) **13,** 61-78.

Uebersetzung der in den Monatsberichten der Berl. Akad. vom 19. Juli 1894 erschienenen Abhandlung v. Mangoldt's. Siehe F. d. M. **25**, 263, 1894. Fr.

J. Hadamard. Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. S. M. F. Bull. **24**, 199-220.

Die durch die Gleichung: $\log \zeta(s) = -\sum_p \log\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$ definirte Riemann'sche Function $\zeta(s)$ verschwindet bekanntlich für keinen Wert von s, deren reeller Bestandteil $R(s) > 1$ ist. Der Verf. zeigt, indem er sich nur auf die einfachsten Eigenschaften von $\zeta(s)$ stützt, dass auch für kein s mit $R(s) = 1$ ein Nullpunkt von $\zeta(s)$ eintreten kann. Die Betrachtung überträgt sich unmittelbar auf eine Reihe weiterer Functionen, für welche demnach dasselbe Resultat gilt. Vornehmlich sind hierbei diejenigen Functionen zu nennen, welche durch die von Dirichlet eingeführten Reihen definirt werden. Unter k eine ganze positive Zahl verstanden, werden die k Functionen gebildet: $\xi_r(s) = \frac{1}{r^s} + \frac{1}{(k+r)^s} + \frac{1}{(2k+r)^s} + \cdots$ $(r = 1, 2, \ldots, k)$, welche die Integraldarstellung gestatten: $\xi_r(s) = \frac{i}{2\pi}\Gamma(1-s)\int(-x)^{s-1}\frac{e^{(k-r)x}}{e^{kx}-1}dx$. Auf Grund der letzten Darstellung erkennt man in $\xi_r(s)$ eine ganze transcendente Function, so dass die über die letzteren Functionen vom Verf. aufgestellten Theoreme angewandt werden können. Insbesondere zeigt sich, dass man mit Functionen des Geschlechtes 1 zu thun hat. Der Verf. wendet sodann die gleichen Principien auf die (in Uebereinstimmung mit Dirichlet gebauten) Reihen an:

$$L_\nu(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_\nu(n)}{n^s} = \Pi\frac{1}{1-\frac{\psi_\nu(q)}{q^s}},$$

wo q alle natürlichen Primzahlen durchlaufen soll und ψ_ν eine zahlentheoretische Function ist, deren Definition sich nicht ganz kurz wiedergeben lässt.

Die von Riemann behaupteten Eigenschaften von $\zeta(s)$ sind zwar noch nicht vollständig bewiesen. Aber die Ergebnisse genügen bereits, um die grundlegenden arithmetischen Folgerungen Riemann's aus der Natur von $\zeta(s)$ zu gewinnen. Diese Folgerungen werden in Gestalt einer Reihe von Sätzen aufgestellt, die die asymptotischen Werte der Summe der Logarithmen aller natürlichen Primzahlen $< x$, sowie einiger weiterer, ähnlich definirter Summen betreffen. Fr.

J. Hadamard. Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. C. R. **122**, 1470-1473.

Der Verf. zeigt, dass die Function $\zeta(s)$ keine Nullstelle besitzt,

deren reeller Teil gleich 1 ist. Mit Hülfe dieses Satzes wird dann der Nachweis geführt, dass $\lim_{x=\infty} \frac{1}{x} \Sigma \lg p = 1$ ist, wo die Summe sich auf die Primzahlen $p < x$ bezieht. In ausführlicher Form hat der Verf. seine Untersuchungen inzwischen im Bull. de la Soc. Math. de France veröffentlicht (s. das vorangehende Referat). Hz.

J. HADAMARD. Sur la fonction $\zeta(s)$. C. R. **123**, 93.

Beseitigung eines Einwandes, welcher gegen eine Note desselben Verf's. (C. R. 22. Juni 1896) erhoben werden kann. Hz.

KLUYVER. Sur les valeurs que prend la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, pour s entier positif et impair. Darboux Bull. (2) **20,** 116-119.

Der Verf. betrachtet die Integrale $\int (z-i\pi)^n \cdot \frac{z}{e^z-1}\, dz$ und $\int (z-2i\pi)^n \cdot \frac{z}{e^z-1}\, dz$, erstreckt über die Begrenzung eines Rechtecks, dessen Seiten die Geraden $x=0$, $y=0$, $x=\infty$, $y=\pi$, resp. $x=0$, $y=0$, $x=\infty$, $y=2\pi$ sind, und erhält hierdurch Recursionsformeln für die Summen $\zeta(2n+1) = \frac{1}{1^{2n+1}} + \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{3^{2n+1}} + \cdots$. Beispielsweise ergiebt sich

$$\zeta(3) = \frac{2\pi}{7}\left[\frac{1}{2!} - \sum_1^\infty \frac{B_k \pi^{2k}}{(2k+2)!}\right] = \frac{4\pi}{5}\left[\frac{1}{3!} - \sum_1^\infty \frac{B_k \pi^{2k}}{(2k+3)!}\right],$$

wobei B_1, B_2, B_3, ... die Bernoulli'schen Zahlen bedeuten. Hz.

CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Brux. S. sc. **21** B, 183-256, 281-362, 363-397.

C. JORDAN. Rapport sur la première partie. Brux. S. sc. **21** A, 91-96.

CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN. Sur la 2e et la 3e partie. Brux. S. sc. **21** A, 100-101.

Die drei Teile der ersten Abhandlung sind betitelt: I. La fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers en général. II. Les fonctions de Dirichlet et les nombres premiers de la forme linéaire $Mx+N$. III. Les formes quadratiques de déterminant négatif. Die letzte Arbeit wird in einem späteren Bande angezeigt werden, wenn der vierte und fünfte Teil der Abhandlung erschienen sind. Mn. (Lp.)

B. RIEMANN. Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée. Traduit par L. Laugel. Paris (1895).

N. W. BERWI. **Kurzer Abriss des gegenwärtigen Standes der Theorie der zahlentheoretischen Functionen.** Mosk. Math. Samml. **19**, 182-196. (Russisch.)

N. W. BERWI. **Die Auflösung einiger allgemeinen Fragen der Theorie der zahlentheoretischen Functionen.** Mosk. Math. Samml. **18**, 519-585. (Russisch.)

Der Verfasser bemüht sich im ersten Artikel, eine Definition der zahlentheoretischen Functionen zu finden, welche der Definition der analytischen Functionen analog ist, und giebt sie in der folgenden Weise. Ebenso wie für die Theorie der analytischen Functionen die ganzen rationalen Functionen das Grundelement bilden und die analytischen Functionen als die Functionen definirt werden, welche in einem gewissen Gebiete den Charakter einer ganzen rationalen Function haben, muss man in der Theorie der zahlentheoretischen Functionen als Grundelemente betrachten: 1) die analytischen Functionen, 2) die Function $E(x)$ und 3) die ganzzahligen Wurzeln der unbestimmten Gleichungen. Die Summen, nach den Wurzeln der unbestimmten Gleichungen genommen, sind die Zahlenintegrale. Wenn man auf eine analytische Function oder den ganzen Teil derselben die Operation des Zahlenintegrirens anwendet, so erhält man eine zahlentheoretische Function.

Die Lehre von den zahlentheoretischen Functionen kann in drei Abschnitte geteilt werden: 1) die Theorie der Zahlenintegrale, 2) die Theorie der zahlentheoretischen Functionen für endliche Werte des Arguments und 3) die Theorie der asymptotischen Ausdrücke für sehr grosse Werte des Arguments.

Die Zahlenintegrale $\Sigma_d \theta(d) \,.\, \psi(\delta)$ für $d \,.\, \delta = n$ sind von Bugaiew in seinen zahlreichen Abhandlungen eingehend untersucht worden; man hat auch die Summen $\Sigma_x \varphi(x) \,.\, \psi(y)$ $[n = x^l y^m]$ erforscht. Als weitere Entwickelung dieser Untersuchungen muss man die Forschungen über die Summen von der Form: $\tau(n) = \Sigma \pi(x) \,.\, \sigma(y)$ betrachten, wo x und y die ganzzahligen Wurzeln einer unbestimmten Gleichung $\xi(x, y, n) = 0$ sind.

Unter den Summen dieses Typus wird von dem Verf. in der zweiten Abhandlung ausführlich die Summe untersucht, welche der unbestimmten Gleichung $n = a + b(x+y) + cxy$ ($b^2 = b + ac$, c ist ein Divisor von $b-1$) entspricht. Diese Summe führt zur Untersuchung der Zahlen $cm+b$, wie das Zahlenintegral von Bugaiew zur Untersuchung der Zahlen der natürlichen Reihe. Man kann eine Analogie zwischen dieser Verallgemeinerung der Theorie der Zahlenintegrale und der Verallgemeinerung finden, welche die projective Auffassung in die Geometrie einführt. Unter den Zahlen des Typus $cm+b$ sind besonders interessant diejenigen, für welche $b^2 \equiv b$ (mod. c); denn in diesem Falle giebt das Product zweier Zahlen dieses Typus von neuem eine Zahl desselben Typus. Dann giebt es auch in dem Complexe dieser Zahlen solche, welche den Primzahlen der natürlichen Reihe analog sind (d. h. nicht in das Product zweier Zahlen des Complexes zerlegbar). Die Be-

trachtung der Function

$$\zeta_c(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{(c+1)^s} + \frac{1}{(2c+1)^s} + \frac{1}{(3c+1)^s} + \cdots,$$

welche der Riemann'schen Function $\zeta(s)$ analog ist, giebt den Beweis des folgenden Theorems: „Das Verhalten der Anzahl der unzerlegbaren Zahlen der Form $cm+1$, welche n nicht übersteigen, zur Anzahl der Primzahlen, welche n nicht übersteigen, nähert sich der Grenze 1, wenn n ins Unendliche wächst“. Wi.

N. W. Berwi. **Einige zahlentheoretische Anwendungen der Analysis des Unendlichkleinen und analytische Anwendungen der Zahlentheorie. Functionen mit singulären Linien.** Mosk. Phys. Sect. 8_1, 1-28. (Russisch.)

Das Studium der berühmten Riemann'schen Abhandlung: „Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse“ hat Halphen (F. d. M. **15**, 139, 1883) zur Auffindung der Beziehungen zwischen der Summe $\lambda(1)+\lambda(2)+\cdots+\lambda(n)$ und dem Integral geführt, unter welchem die Function $\frac{\lambda(1)}{1^s}+\frac{\lambda(2)}{2^s}+\cdots+\frac{\lambda(n)}{n^s}+\cdots$ vorkommt, die eine Verallgemeinerung der Riemann'schen Function $\zeta(s)$ ist und auch als eine Function der complexen Veränderlichen untersucht wird. Die vorliegende Abhandlung hat zunächst den Zweck, diese Untersuchungen auf viele specielle Fälle anzuwenden; so betrachtet der Verf. z. B. $\lambda(u)$ als der Function $p_1(u)$ gleich, welche gleich 1 für alle primären Zahlen (d. h. die kein Quadrat einer Primzahl in ihrer Zerlegung in Primfactoren enthalten) und gleich 0 für alle anderen Zahlen ist; dann erhält man eine Entwickelung der Function $H_1(x)$, welche die Anzahl der primären Zahlen darstellt, die x nicht übersteigen, in eine Potenzreihe.

Es giebt aber auch zahlentheoretische Functionen, welche sich nicht in Potenzreihen entwickeln lassen; für solche Functionen gilt die Entwickelung nach den durch die Gleichung:

$$\sqrt{-1}.w(q,\,n) = \int_{-\pi i}^{+\pi i} \frac{t^q(e^{nt}-1)}{1-e^{-t}}\,dt$$

definirten Functionen $w(q, n)$, wo der Integrationsweg rechts durch den Punkt $t=0$ geht. Die Stirling'sche Reihe giebt ein einfaches Beispiel der Entwickelung nach den Functionen $w(q, n)$; aus ihrer Betrachtung erhält man:

$$2\pi\log(1.2.3\ldots n) = -w'(-1,n)+w(-1,n)\,\Gamma'(-1)$$
$$-\zeta'(0).w(0,n)+\zeta'(-1).w(1,n)-\frac{\zeta'(-2)}{1.2}w(2,n)+\cdots,$$

wo $\zeta(s)$ die Riemann'sche Function ist.

Den Schluss der Abhandlung widmet der Verf. der Betrachtung einer Klasse analytischer Functionen mit einer natürlichen Grenze, die der

Functionalgleichung $\tau(x)+a_1\tau(xn_1)+a_2\tau(xn_2)+\cdots+a_k\tau(xn_k)$ $=\frac{1}{e^x-1}$ genügen, wenn $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ganze Zahlen sind. Die ähnlichen Functionalgleichungen sind schon von Pincherle und Mellin untersucht. Wi.

N. W. Bugaiew. Die bestimmten Zahlenintegrale nach den Divisoren vermischten Charakters. Mosk. Math. Samml. **18**, 1-54. (Russisch.)

Ein bestimmtes Zahlenintegral nach den Divisoren, z. B. $\Sigma_n\theta(d)$, ist die Summe der Functionswerte $\theta(d)$, welche für alle Divisoren von n genommen sind, die zwischen a und b liegen. Die Zahlengesetze gemischten Charakters sind die Relationen zwischen den verschiedenen Ausdrücken der Form $\Sigma_n\theta(d)$, falls nicht nur a und b, sondern auch n sich verändert. Die Betrachtung solcher Ausdrücke führt zu den interessanten Beziehungen zwischen der Function E und der Function $\zeta(n, m)$, welche die Anzahl derjenigen Teiler der Zahl m darstellt, die n nicht übersteigen. Aus der grossen Menge solcher Beziehungen und interessanter Theoreme führen wir als Beispiel die folgenden an:

$$E\frac{n}{1^2}+E\frac{n}{2^2}+\cdots=\zeta(n,1)+\zeta\left(E\frac{n}{2},2\right)+\zeta\left(E\frac{n}{3},3\right)+\cdots,$$

$$E\frac{n}{1}+E\frac{1+E\frac{n}{2}}{2}+E\frac{1+E\frac{n}{3}}{3}+\cdots=\zeta(n,2)+\zeta\left(E\frac{n}{2},3\right)+\zeta\left(E\frac{n}{3},4\right)+\cdots,$$

$$n+E\frac{n}{2}+E\frac{n}{2.3}+E\frac{n}{3.4}+E\frac{n}{4.5}+\cdots=\zeta(n+1,1)+\zeta\left(1+E\frac{n}{2},2\right)+\zeta\left(1+E\frac{n}{3},3\right)+\cdots.$$

Wenn man mit $\zeta''(n)$, $\zeta'''(n)$, $\zeta^{\mathrm{IV}}(n)$, ... die Anzahlen der quadratischen, kubischen, biquadratischen ... Teiler der Zahl n bezeichnet, so hat man die Formeln:

$$\zeta''(1)+\zeta''(2)+\cdots+\zeta''(n)=\zeta\left(E\frac{n}{1},1\right)+\zeta\left(E\frac{n}{2},2\right)+\cdots,$$

$$\zeta'''(1)+\zeta'''(2)+\cdots+\zeta'''(n)=\zeta\left(E\sqrt{\frac{n}{1}},1\right)+\zeta\left(E\sqrt{\frac{n}{2}},2\right)+\cdots$$

u. s. w. Die zweite Formel wird durch Einführung der Betrachtung der irrationalen Grössen abgeleitet. Wi.

L. Gegenbauer. Arithmetische Bemerkung. Monatsh. 7, 26.

Unter fünf arithmetischen Sätzen, welche Bugaiew in C. R. **120**

ohne Beweis angegeben hat, lassen sich vier in einem Satze zusammenbegreifen. H.

M. Lerch. Sur diverses formules d'arithmétique. Teixeira J. 13, 129-136.

Es werden die beiden folgenden Formeln bewiesen:

$$(1)\quad \sum_\sigma\left[\psi\left(m-\sigma a,\ \frac{\sigma}{r}\right)+\psi(m-\sigma a,\ ra)\right]=\sum_\sigma\left[\psi\left(m-\sigma a,\ \frac{\sigma}{s}\right)+\psi(m-\sigma a,\ sa)\right],$$

$$(2)\qquad \sum_\sigma\psi\left(m-\sigma a,\ \frac{\sigma}{r}\right)=\sum_\sigma\chi(m-\sigma a,\ ra).$$

Hier bedeutet $\psi(p, q)$ die Anzahl der Teiler der positiven ganzen Zahl p, welche die positive Grösse q übertreffen, und $\chi(p, q)$ die Anzahl derjenigen Teiler von p, welche $\leqq q$ sind. Ferner sind a, m, r, s irgend welche ganze positive Zahlen, während der Summationsbuchstabe σ in (1) alle ganzen Zahlen durchlaufen soll, die $> ars$ sind, in der zweiten Formel aber alle nicht negativen ganzen Zahlen, die $\frac{m-1}{a}$ nicht übertreffen.

Der Beweis beruht auf einer für die Function $E(x)$ bestehenden Identität, unter $E(x)$ die grösste, die Zahl x nicht übertreffende ganze Zahl verstanden. Der Uebergang zu den Teileranzahlen wird durch den Umstand gewonnen, dass die Differenz $E\left(\frac{n}{t}\right)-E\left(\frac{n-1}{t}\right)$ offenbar 1 oder 0 bedeutet, je nachdem t in n aufgeht oder nicht. Fr.

G. Landsberg. Ueber das Fundamentalsystem und die Discriminante der Gattungen algebraischer Zahlen, welche aus Wurzelgrössen gebildet sind. J. für Math. 117, 140-147.

Ist λ eine Primzahl, so bilden in der durch die Gleichung $w^\lambda=a$ constituirten Gattung die Zahlen $1, w, w^2, \ldots, w^{\lambda-2}, w^{\lambda-1}$ oder die Zahlen $1, w, w^2, \ldots, w^{\lambda-1}, \frac{(w-a)^{\lambda-1}}{\lambda}$ ein Fundamentalsystem für den Modul λ, je nachdem $(a^{\lambda-1}-1)/\lambda$ zu λ relativ prim ist oder nicht. Bdt.

J. A. Gmeiner. Ueber die ganzen Zahlen im Rationalitätsgebiete der fünften Einheitswurzeln. Programm des Staats-Gymn. in Pola. VI. Jahrgang. 24 S. 1896.

Bezeichnet j eine primitive fünfte Einheitswurzel, so lässt sich jede ganze Zahl im Rationalitätsgebiete der fünften Einheitswurzeln in der Form $a_0+a_1j+a_2j^2+a_3j^3$ darstellen, wo die Coefficienten a reelle ganze Zahlen bedeuten. Der Verf. entwickelt in dieser Arbeit die Eigen-

schaften dieser Zahlen im Anschlusse an die Theorie der algebraischen Zahlen, welche Dedekind im XI. Supplemente zu den von ihm herausgegebenen Dirichlet'schen Vorlesungen über Zahlentheorie aufgestellt hat. Das Endziel der vorliegenden Arbeit ist die Herstellung der Restsysteme in diesem Zahlengebiete. Die Arbeit scheint wohl geeignet zu sein, dem Studirenden das erste Eindringen in die genannte allgemeine Theorie zu erleichtern. Hau.

H. Weber. Ueber einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integralrechnung. Gött. Nachr. 1896, 275-281.

Es seien $x_1, \ldots, x_n$ rechtwinklige Coordinaten eines n-dimensionalen Raumes, in welchem durch n Systeme äquidistanter „Ebenen“ $x_i = \text{const.}$ eine Würfeleinteilung hergestellt sei. Ist $\varDelta$ der Abstand zweier consecutiven Ebenen in jedem System, so ist $\varDelta^n$ das Volumen des einzelnen Würfels δ der Einteilung. Durch Stücke endlich vieler analytischer „Oberflächen“ $f(x_i) = 0$ sei ein ganz im Endlichen gelegenes Volumen eingegrenzt, dessen Inhalt V gleich $\lim\limits_{\varDelta=0} (T\varDelta^n)$ ist, wenn T die Anzahl der im Innern des Volumens gelegenen Gitterpunkte (Eckpunkte der Würfelteilung) ist. Für manche Zwecke ist eine genauere Fassung der Formel für V nötig. Der Verf. stellt in dieser Hinsicht die auch schon von Minkowski bewiesene Formel: (1) $V = T\varDelta^n + M\varDelta$ auf, wo M für $\lim \varDelta = 0$ zwischen bestimmte endliche Grenzen eingeschlossen bleibt. Bei dem Beweise, welchen der Verf. für (1) entwickelt, wird der in (1) enthaltene Satz zunächst auf den anderen zurückgeführt, dass $\lim\limits_{\varDelta=0} Z\varDelta^{n-1}$ zwischen endliche Grenzen eingeschlossen bleibt, wobei Z die Anzahl derjenigen Würfel ist, welche mit der Oberfläche des eingegrenzten Volumens wenigstens einen Punkt gemein haben. Letzterer Satz wird durch den Schluss der vollständigen Induction bewiesen. Die weiteren Erörterungen beziehen sich auf das besondere Volumen, welches bei den zahlentheoretischen Anwendungen des fraglichen Satzes zur Geltung kommt. Fr.

K. Zsigmondy. Beiträge zur Theorie Abel'scher Gruppen und ihrer Anwendung auf die Zahlentheorie. Monatsh. f. Math. 7, 185-289.

Es wird hier eine ausführliche Darstellung der Theorie der Abel'schen Gruppen dargeboten, wobei auch die seit lange bekannten Grundsätze dieser Theorie wieder mitbehandelt werden. Bei den Beweisen wird oft wiederholt Gebrauch gemacht von einer „Methode des Ausscheidens und Hinzufügens“, welche der im Altertume unter dem Namen „Sieb des Eratosthenes“ zu Gewinnung von Primzahlen benutzten Methode nachgebildet ist, und welche übrigens bei der Aufgabe zur Geltung kommt, aus einem System T von Elementen diejenigen speciellen Elemente auszusondern, welche gewissen Untersystemen $T_1, T_2, \ldots$ nicht angehören.

Der Hauptteil der Arbeit behandelt zunächst die Abel'schen Gruppen, deren Grad (Ordnung) eine Primzahlpotenz p^{π} ist. Es wird vor allem

die Existenz einer Basis $A_1, \ldots, A_s$ der Gruppe nachgewiesen, in welcher sich jedes Element derselben in der Gestalt:

$$A_1^{k_1}.A_2^{k_2}\ldots A_s^{k_s} \quad \begin{pmatrix} k_i = 0, 1, \ldots, (p^{\alpha_i}-1) \\ i = 1, 2, \ldots, s \end{pmatrix}$$

nur auf eine Weise darstellen lässt; dabei bedeutet p^{α_i} den Grad von A_i. Reduciren sich die Zahlen α_i auf r verschiedene $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_r$, und kommt α_1 n_1-mal, α_2 n_2-mal, ... vor, so giebt es genau:

$$\prod_{j=1}^{j=r} \frac{p^{n_j(2(n_1+\cdots+n_j)-n_j)\alpha_j}.\left(1-\frac{1}{p^{n_j}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p}\right)}{n_j!}$$

verschiedene Basissysteme der Gruppe. Die Betrachtung der Untergruppen wird demnächst soweit gefördert, dass die Anzahl aller Untergruppen angegeben wird, für welche vom Basissystem Anzahl und Grad der Elemente gegeben sind. Die betreffende Anzahl ist etwas umständlich auszusprechen. Specielle Folgerungen werden betreffs der regulären (cyklischen) Untergruppen gezogen; insbesondere enthält eine reguläre Gruppe des Grades p^n nur eine Untergruppe vom Grade p^β $(\beta < n)$, welche wieder regulär ist.

Nun folgt die Untersuchung beliebiger Abel'scher Gruppen, wobei die Frage nach der Anzahl aller Elemente eines gegebenen Grades δ wichtig wird. Diese Anzahl drückt sich in nicht ganz einfacher Art durch die Primfactoren von δ und die Gradzahlen $n_1, n_2, \ldots, n_s$ der Elemente eines Basissystems aus. Speciell folgt, dass es dann, und nur dann, Elemente des Grades δ giebt, wenn δ im kleinsten gemeinsamen Vielfachen von $n_1, n_2, \ldots, n_s$ aufgeht. Auch folgender Satz sei erwähnt: Multiplicirt man alle der Gruppe angehörenden Elemente eines Grades $\delta > 2$, so ergiebt sich das Element 1.

Eine bemerkenswerte Art der Definition von Untergruppen ist die folgende: Es sei $A_1, \ldots, A_k$ ein der Gruppe entnommenes Elementensystem. Ein Element M, für welches $MA_1, MA_2, \ldots, MA_k$ bis auf die Reihenfolge gleich $A_1, \ldots, A_k$ sind, heisst ein „Multiplicator" jenes Systems. Diese Multiplicatoren bilden offenbar insgesamt eine Untergruppe, die „Multiplicatorengruppe des Systems $A_1, \ldots, A_k$". Vom Grade derselben wird gezeigt, dass er k teilt. Es wird auch noch die Anzahl aller in einer regulären Gruppe n^{ten} Grades enthaltenen Elementensysteme angegeben, deren Multiplicatorengruppe einen gegebenen Grad n/δ besitzt. Combinirt man unter der Voraussetzung einer von 1 verschiedenen Multiplicatorengruppe die Elemente $A_1, \ldots, A_k$ ohne Wiederholung zur δ^{ten} Klasse, so erzeugen diese Combinationen ein System $\mathfrak{C}_\delta$ von Elementen der Gruppe. In diesem System möge ein beliebiges Element S der Gruppe $\mathfrak{C}_\delta$ (S)-mal vorkommen. Diese letztere Anzahl, zu welcher der Verf. auch bei Untersuchungen über wurzellose Congruenzen geführt wurde, ist hier eingehend untersucht.

Der letzte Abschnitt bringt Anwendungen auf die elementareren in der Zahlentheorie vorkommenden Abel'schen Gruppen. Das volle Rest-

system bezüglich eines Zahlmoduls m bildet bei Addition der Elemente eine Abel'sche Gruppe, ebenso das vollständige mit m teilerfremde Restsystem. Ein drittes Beispiel wird von den δ^{ten} Potenzresten mod. m geliefert. Fr.

A. Hurwitz. Ueber die Zahlentheorie der Quaternionen. Gött. Nachr. 1896, 314-340.

Der Verf. überträgt die Begriffsbestimmungen und Sätze der Dedekind'schen Körper- und Idealtheorie auf das System der Quaternionen $a = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$, wobei der Unterschied besteht, dass bei der Multiplication der Quaternionen das commutative Gesetz nicht gilt. Die Norm eines Quaternions ist durch $N(a) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ gegeben. Zum Quaternion a ist $a' = a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - a_3 i_3$ conjugirt. Alle rationalen Quaternionen (solche mit rationalen Componenten a_k) bilden den Körper R. Man gewinnt alle Permutationen von R, wenn man dem Quaternion a das Quaternion qaq^{-1} zuordnet, unter q ein beliebiges von 0 verschiedenes Quaternion verstanden; dabei ist $q^{-1} = q' N(q)$. Sind die vier a_k zugleich ganzzahlig oder zugleich mit den Hälften ungerader Zahlen gleich, so heisst a ein „ganzes" Quaternion. Alle ganzen Quaternionen bilden den Integritätsbereich J, alle Quaternionen mit ganzzahligen Componenten J_0. Es giebt in J 24 Einheiten: $\varepsilon = \pm 1, \pm i_1, \pm i_2, \pm i_3, \dfrac{\pm 1 \pm i_1 \pm i_2 \pm i_3}{2}$. Bei der Teilung hat man „rechtsseitige" und „linksseitige" Divisoren b eines ganzen Quaternions a zu unterscheiden; ein rechtsseitiger Divisor liegt vor, falls die Gleichung $a = cb$ durch ein ganzes c befriedigt wird. Auch die Definition des Ideals unterliegt dieser Complication gegenüber der gewöhnlichen Körpertheorie. Uebrigens gilt hier der einfache Satz, dass jedes Quaternionenideal ein Hauptideal ist. Um die Factorenzerlegung der Quaternionen zu leisten, werden dieselben zunächst mod. 2 betrachtet. Es gilt der Satz: Ist 2^r die höchste in $N(a)$ aufgehende Potenz von 2, so gilt $a = (1+i_1)^r . b$, wo b ein ungerades Quaternion, d. i. ein solches von ungerader Norm ist. Die Einführung eines vollen Restsystems mod. 2 führt weiter zum Begriff des „primären" Quaternions, wobei der Satz entspringt, dass unter je 24 associirten ungeraden Quaternionen stets eines primär ist. Dieser Umstand gestattet, die Zerlegungssätze beim alleinigen Gebrauch von primären Quaternionen eindeutig auszusprechen. Ein volles Restsystem ganzer Quaternionen bezüglich eines ungeraden Moduls m erweist sich genau isomorph zur Gruppe aller mod. m betrachteten ganzzahligen binären Substitutionen: $x_1' \equiv \alpha x_1 + \beta x_2$, $x_2' \equiv \gamma x_1 + \delta x_2$ (mod. m). Der Begriff des Primquaternions gestaltet sich in bekannter Weise; es gilt der Satz, dass es immer $(p+1)$ primäre Primquaternionen giebt, deren Norm gleich der ungeraden Primzahl p ist. Der Hauptsatz der Factorenzerlegung bezieht sich auf ungerade und „primitive" Quaternionen (bei denen die Componenten teilerfremd sind). Werden die Primfactoren der Norm eines solchen Quaternions in eine

bestimmte Reihenfolge gebracht, so giebt es eine eindeutig bestimmte correspondirende Zerlegung des primitiven Quaternions in primäre Primquaternionen.

Als Anwendung löst der Verf. das von Euler gestellte Problem, alle ganzzahligen linearen quaternären Substitutionen zu finden, welche die quadratische Form $(x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2)$ in ein Multiplum ihrer selbst überführen. Fr.

K. Ssorokin. **Zur Frage der complexen Zahlen mit einfachen Moduln.** Kiew. 22 S. 8°. (Russisch.)

B. Theorie der Formen.

F. Klein. **Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie I. Vorlesung, gehalten im Wintersemester 1895/96. Ausgearbeitet von A. Sommerfeld.** Göttingen. V u. 391 S. autogr.

In den von R. Fricke bearbeiteten Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen hat F. Klein schon die Theorie der binären quadratischen Formen durch Heranziehen geometrischer Vorstellungen und der Zusammenhänge mit den Nachbargebieten zugänglicher gemacht. Die dort gegebene Darstellung ist in der vorliegenden Bearbeitung der zweistündigen Vorlesung wesentlich vervollständigt. Einzelne Vorläufer hierzu sind in den Gött. Nachr. erschienen und in F. d. M. **25**, 312, 1893/94 und **26**, 229, 1895 angezeigt worden.

Die Einleitung erörtert die Punktgitter und die geometrische Interpretation der Näherungswerte eines Kettenbruchs, die in der letzten der beiden erwähnten Noten skizzirt worden ist. Der Inhalt des Vortrages wird ferner in zwei Hauptteile gesondert: I. Die Reductionstheorie der einzelnen binären quadratischen Formen; II. die Reductionstheorie in ihrer Wirkung auf die Gesamtheit der binären quadratischen Formen.

Die geometrische Interpretation der binären Form $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ geht nun davon aus, dass die „Entfernung" zweier Punkte (x,y), (x',y') als $\sqrt{f(x-x', y-y')}$ definirt wird. Die Theorie einer beliebigen binären quadratischen Form ist danach in der zu ihr gehörigen Massgeometrie des Gitters enthalten. Dieselben Gesichtspunkte, welche der Verf. in den allgemeinen Formulirungen seines Erlanger Programms (§ 1, 2) für die übliche algebraische Geometrie aufgestellt hatte, erweisen sich jetzt für ihn auch in der Zahlentheorie als fruchtbar, indem man nicht mehr als einziges Object der geometrischen Untersuchung die continuirlichen Curven ansieht, sondern auch Gebilde aus unendlich vielen Bestandteilen, wie das betrachtete Punktgitter, das aus allen Punkten der Ebene mit ganzzahligen Coordinaten gebildet wird. Ist die Discriminante $D = b^2 - 4ac$ negativ, so sind die beiden „Minimalrichtungen" $f(x,y) = 0$ imaginär. Das Gitter kann dann so gewählt werden, dass diese beiden Richtungen nach den gewöhnlichen Kreispunkten hinweisen.

Wird die Form überdies als positiv genommen, so coincidirt diese Massbestimmung mit derjenigen der elementaren Geometrie. Das Hauptinteresse der Vorlesung liegt in dem Nachweise, dass die scheinbar ganz anders geartete Theorie der Reduction der indefiniten quadratischen Formen in dieser verallgemeinerten Massbestimmung eine durchaus entsprechende geometrische Interpretation findet. Die drei Fälle $D < 0$, $D > 0$, $D = 0$ werden als „elliptischer", „hyperbolischer" und „parabolischer" Fall unterschieden, und nach der Entwickelung der erwähnten geometrischen Vorbegriffe wird die Reductionstheorie in diesen drei Fällen (aber in umgekehrter Folge) erledigt, wobei die Pell'sche Gleichung $t^2 - Du^2 = 4$ die Basis der Untersuchung bildet.

Nachdem die Reductionstheorie für die einzelne binäre quadratische Form durchgeführt ist, handelt es sich darum, die Stellung der reducirten Formen innerhalb der Gesamtheit darzulegen. Zu diesem Zwecke werden die Verhältnisse $a:b:c$ als trimetrische Coordinaten in der Ebene gedeutet. Die definiten Formen füllen dann mit ihren Bildpunkten das Innere des Discriminantenkegelschnitts $b^2 - 4ac = 0$ aus, die indefiniten das Aeussere. Dabei zerlegt sich das Innere, den Substitutionen $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ entsprechend, in unendlich viele äquivalente Dreiecke, deren eines die reducirten Formen repräsentirt. Die Reductionstheorie der indefiniten Formen aber wird dadurch zugänglich, dass man dem ausserhalb des Kegelschnitts gelegenen Punkte seine Polarsehne zuordnet und zusieht, wie diese Polarsehne die Dreiecksteilung des Inneren durchzieht (vergl. Hurwitz, Math. Ann. **44**; F. d. M. **25**, 313, 1893/94).

Zum Schlusse wird als Anhang eine Einleitung in diejenigen Gebiete der Theorie der elliptischen Functionen, bezw. Modulfunctionen gegeben, welche in der zweiten Vorlesung (Sommersemester 1896) benutzt werden, und welche in den Vorlesungen über Modulfunctionen in ähnlicher Weise dargestellt worden sind. Eine Selbstanzeige des Werkes „Autographirte Vorlesungshefte III" in Math. Ann. **48**, 562-588 kann genauere Auskunft über den Inhalt dieser eigenartigen Darstellung der Theorie der binären Formen geben. Lp.

Ch. J. de la Vallée Poussin. Recherches arithmétiques sur la composition des formes binaires quadratiques. Belg. Mém. c. in 8°. **53**, 59 S.

P. Mansion. Rapport. Belg. Bull. (3) **30**, 189-193.

In dieser bemerkenswerten Arbeit giebt der Verf. einen aus den Principien der Theorie der binären Formen selbst geschöpften Beweis des Gauss'schen Satzes: Alle binären, eigentlich primitiven Formen des Hauptgeschlechtes können durch Duplication erzeugt werden. Die Abhandlung enthält vier Kapitel und einen Anhang. Dieser letztere bringt einige Sätze über die Darstellung einer unterhalb D liegenden Zahl durch eine eigentlich primitive Form von der Determinante D. Das erste Kapitel enthält eine summarische Darlegung der Principien der Compo-

sition der eigentlich primitiven Formen. Das zweite Kapitel ist verschiedenen Theoremen über die Eigenschaften der Formen gewidmet, welche dieselben Zahlen darstellen können. Das dritte Kapitel enthält die Principien der Einteilung der Klassen in Geschlechter und der Composition der Geschlechter. Der Hauptsatz dieses Kapitels (No. 33) stützt sich auf das folgende Theorem: Jede Klasse des Hauptgeschlechts kann durch Duplication entstehen. Dasselbe wird im vierten Kapitel aus dem folgenden Satze hergeleitet: Ist (a, b, c) eine eigentlich primitive Form von der Determinante D und m eine zu $2D$ relativ prime beliebige Zahl, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung $(a, b, c) = m^2$ lösbar ist, die, dass m durch eine Form von der Determinante D und demselben Geschlechte wie (a, b, c) darstellbar ist. Gelegentlich stösst der Verf. auf verschiedene Eigenschaften der Zahlen, die er aus seinen Haupttheoremen ableitet. So giebt er am Ende des Kapitels III für das Reciprocitätsgesetz der quadratischen Reste einen Beweis, dessen Princip übrigens auf Gauss zurückgeht.

Mn. (Lp.)

G. Osborn. Addendum on the quadratic residues of primes. Messenger (2) **25**, 157.

Nachtrag zu einem Aufsatze in Messenger (2) **25**, 45 (F. d. M. **26**, 208, 1895). Wenn N eine Primzahl von der Form $8m+3$ ist, so ist die Anzahl der Klassen für Formen von der Determinante $-N$: $3\left\{\frac{1}{2}(N-1)-\frac{2(\Sigma R)}{N}\right\}$, wo ΣR die Summe der quadratischen Reste von N in der Reihe 1, 2, 3, ..., $N-1$ bedeutet. Glr. (Lp.)

G. Frattini. Risoluzione dell'equazione $ax^2+bxy+cy^2=m$ a determinante positivo in numeri interi. Periodico di Mat. **11**, 8 S.

Giebt es überhaupt ganzzahlige Lösungen der Gleichung $x^2-Ay^2 = N$ (mit ganzen positiven A und N), so giebt es auch eine Lösung in nicht-negativen ganzen Zahlen x, y, deren zweite die Ungleichung $y<\beta\sqrt{N}$ erfüllt. Unter den gleichen Voraussetzungen giebt es eine Lösung von $x^2-Ay^2=-N$ mit $y<\alpha\sqrt{\frac{N}{A}}$. Hierbei ist unter (α, β) die kleinste positive Lösung von $x^2-Ay^2=1$ verstanden. Der Beweis fliesst aus dem bekannten Algorithmus, welcher vermöge der „Einheit“ $\alpha+\beta\sqrt{A}$ aus einer Lösung von $x^2-Ay^2=\pm N$ alle übrigen herleitet. Für diesen Algorithmus werden noch einige Formeln ausgerechnet. Die Gleichung $ax^2+bxy+cy^2=m$ wird durch Multiplication mit $4a$ und durch die Substitution $X=2ax+by$, $D=b^2-4ac$ auf $X^2-Dy^2=4am$, d. i. auf die obige Gleichung, zurückgeführt.

Fr.

G. Frattini. Dell'equazione di Pell a coefficiente algebrico. Batt. G. **34**, 98-109.

Fortsetzung von Betrachtungen über die Auflösung der Pell'schen Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$, in welcher A als ganze rationale Function einer Grösse u vorausgesetzt wird (Siehe F. d. M. **26**, 210, 1895). Fr.

G. Speckmann. Ueber unbestimmte Gleichungen x^{ten} Grades. Hoppe Arch. (2) **14**, 443-445.

Mitteilung einiger specieller Gleichungen $t^2 - Du^2 = m^2$ und $t^3 - Du^3 = m^3$, wie z. B. $(a^3+1)^3 - (a^6+3a^3+3)a^3 = 1$. Im ganzen werden 12 solche Ansätze aufgestellt. Auch werden bei $t^2 - Du^2 = 1$ für $u = 1, 2, 3$ Bedingungen für D aufgestellt, welche bewirken, dass t^2 mod.u^2 mit 1 congruent wird. Fr.

C. Störmer. Om en Egenskab ved Lösningen af den Pellske Ligning $x^2 - Ay^2 = \pm 1$. Nyt Tidss. for Math. 7B, 44-52.

Der Verf. macht die Annahme, dass die Gleichung von Pell $x^2 - Ay^2 = -1$ eine Lösung in ganzen Zahlen $x = a$, $y = b$ hat, und dass diese Zahlen $x = a$, $y = b$ die kleinsten positiven Zahlen sind, welche die Gleichung befriedigen. Bekanntlich folgen dann alle anderen Lösungen x_{2n+1}, y_{2n+1} der Aufgabe aus der Gleichung $x_{2n+1} + y_{2n+1}\sqrt{A} = (a+b\sqrt{A})^{2n+1}$, indem die rationalen und irrationalen Glieder auf beiden Seiten der Gleichung gleichgesetzt werden. Aehnlich werden die Lösungen der Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$ dann mittels der Gleichung $x_{2n} + y_{2n}\sqrt{A} = (a+b\sqrt{A})^{2n}$ bestimmt. Es wird jetzt der folgende Satz bewiesen:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x_{2n-1}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x_{2n+1}} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{x_{2n}},$$
$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x_{2n-1}} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x_{2n+1}} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{x_{2n}}.$$

Es werden verschiedene Anwendungen dieses Satzes angeführt, endlich wird aus dem gefundenen Satze gefolgert: $x = a$, $y = b$ seien die kleinsten Lösungen der Pell'schen Gleichung $x^2 - Ay^2 = -1$, und $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$; $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ die successiven ganzen positiven Lösungen der Gleichung $x^2 - Ay^2 = 1$. Dann hat man:

$$\tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a} = \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{x_1} + \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{x_2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{x_3} + \cdots,$$
$$\tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a} = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{y_1} - \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{y_2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{y_3} - \cdots.$$

V.

C. Störmer. Sur les solutions entières $x_1, \dots, x_n, k_1, \dots, k_n, k$ de l'équation $x_1 \operatorname{arctg}\frac{1}{k_1} + x_2 \operatorname{arctg}\frac{1}{k_2} + \cdots + x_n \operatorname{arctg}\frac{1}{k_n} = k\cdot\frac{\pi}{4}$. C. R. **122**, 175-177, 225-227.

In der aus der Ueberschrift ersichtlichen Gleichung denke man unter $x_1, \ldots, x_n$ gegebene positive ganze Zahlen und unter k entweder 0 oder 1. Alsdann wird folgender Satz bewiesen: Damit n ganze Zahlen $k_1, \ldots, k_n$ die fragliche Gleichung befriedigen, ist das Bestehen der n Gleichungen: $1+k_i^2 = 2^{\delta_i} p_1^{|\nu_{i1}|} . p_2^{|\nu_{i2}|} \ldots p_s^{|\nu_{is}|}$ hinreichend und notwendig. Hier sind $\delta_1, \ldots, \delta_n$ mit 0 oder 1 zu identificiren, und zwar so, dass $x_1\delta_1 + \cdots + x_n\delta_n + k$ eine gerade Zahl ist. Die p sind Primzahlen der Form $(4a+1)$, und die ν sind ganze, den s Gleichungen: $x_1\nu_{1l}+x_2\nu_{2l}+\cdots+x_n\nu_{nl} = 0$ genügende Zahlen, deren absolute Beträge $|\nu_{il}|$ sind. Für die Auswahl der Primzahlen p gilt die Regel, dass $k_\lambda + k_\mu$ gegen p_l prim oder durch p_l teilbar sein soll, je nachdem $\nu_\lambda \nu_\mu \geqq 0$ oder < 0 ist. Fr.

C. Störmer. Solution complète en nombres entiers m, n, x, y, k de l'équation $m \operatorname{arctg}\frac{1}{x} + n \operatorname{arctg}\frac{1}{y} = k \cdot \frac{\pi}{4}$. Christiania Vidensk. Selsk. Skr. 1895, No. 11. 21 S.

C. Störmer. Sur l'application de la théorie des nombres entiers complexes à la solution en nombres rationnels $x_1, x_2, \ldots, x_n, c_1, c_2, \ldots, c_n, k$ de l'équation $c_1 \operatorname{arctg} x_1 + c_2 \operatorname{arctg} x_2 + \cdots + c_n \operatorname{arctg} x_n = k . \frac{\pi}{4}$. Arch. for Math. og Naturv. **19**, 1-95.

A. Meyer. Ueber indefinite ternäre quadratische Formen. J. für Math. **116**, 307-325.

Die Arbeit bildet den Abschluss einer Untersuchung, über deren drei erste Teile in F. d. M. **25**, 317, 1893/94 und **26**, 227, 1895 referirt ist. Durch Erweiterung der bisherigen Ergebnisse wird der Satz gewonnen: Die Klassenanzahl eines Geschlechts mit Invarianten $\Omega, \Delta\theta^2$, wo Ω, Δ ungerade Zahlen, θ eine ungerade Primzahl und Δ durch θ teilbar ist, erweist sich gleich der des entsprechenden Geschlechts mit den Invarianten Ω, Δ. Nunmehr ist das Endziel der Arbeit erreicht, der Nachweis, dass die Klassenanzahl eines völlig beliebigen Geschlechts mit ungeraden Invarianten stets gleich einer Potenz von 2 ist, deren Exponent von den Charakteren des Geschlechts abhängt. Es wird noch ein bis dahin nicht bewiesener Hülfssatz sichergestellt. In einem kurzen Nachtrag finden endlich die Formen Erledigung, deren Invarianten Potenzen von 2 sind. Mk.

H. W. Lloyd Tanner. Notes on a ternary cubic. Lond. M. S. Proc. **27**, 187-199.

Das Problem der Darstellung einer Zahl m durch eine ternäre, kubische, in reelle Linearfactoren zerfallende Form $F(x, y, z)$ wird hier auf Grund einer geeigneten kanonischen Darstellung von F behandelt. Sei (1) $F = ax^3+by^3+cz^3+6lxyz+3fy^2z+3gz^2x+3hx^2y+3iyz^2+3jzx^2+3kxy^2$, so nehme man $a=1$, $h=0$ und setze

voraus, dass F in ein Product von drei Linearfactoren zerfällt: (2) $F(x, y, z) \equiv (x+\vartheta y+\varphi z)(x+\vartheta_1 y+\varphi_1 z)(x+\vartheta_2 y+\varphi_2 z)$. Die drei ϑ ergeben sich als die Wurzeln der Gleichung: (3) $F(\vartheta, -1, 0) = (1, 0, k, b)(\vartheta, -1)^3 = 0$, worauf φ als quadratischer (ganzer) Ausdruck in ϑ dargestellt wird. Der Linearfactor $x+\vartheta y+\varphi z$ nimmt so die Gestalt $x'+y'\vartheta+z'\vartheta^2$ an, und F erscheint als seine Norm: (4) $F(x, y, z) = N(x'+y'\vartheta+z'\vartheta^2)$. Sind x', y', z' ganz, so ist $x'+y'\vartheta+z'\vartheta^2$ eine complexe ganze kubische Zahl. Ausgerechnet mit Hülfe von (3), erhält F die kanonische Gestalt: (5) $\Phi(x', y', z') = (1, b, b^2;\ 0, 3k^2, 0;\ kb, -2k, k, -\frac{1}{2}b)(x', y', z')$. Man hat daher die reelle ganze Zahl m in die Form $x'+y'\vartheta+z'\vartheta^2$ zu bringen, um zur Darstellung von m durch Φ zu gelangen.

Ein instructives numerisches Beispiel wird am Schlusse durchgeführt.

My.

Th. Dedoff. Untersuchungen über quadratische Formen. Diss. Leipzig: B. G. Teubner. 39 S. 4°.

Kapitel 3.

Kettenbrüche.

D. N. Lehmer. Proof of a theorem in continued fractions. Annals of Math. **11**, 64.

Sehr einfacher Beweis des bekannten Satzes, dass $q_n = 2q_0$ ist in der Entwickelung der Quadratwurzel einer ganzen Zahl R:

$$\sqrt{R} = q_0 + \frac{1}{q_1}\dot{+}\frac{1}{q_2}\dot{+}\cdots\dot{+}\frac{1}{q_n}\dot{+}\frac{1}{q_1}\dot{+}\cdots.$$

R. M.

F. Giudice. Sulle frazioni continue numeriche. Periodico di Mat. **11**, 13-20, 48-55.

Der Verf. giebt den Inhalt seines Aufsatzes mit den folgenden Worten an: „In der gegenwärtigen Note wollen wir schnell einige Sätze erledigen, welche gewöhnlich nicht mit der nötigen Klarheit und Strenge gegeben werden, und werden daraus einige nützliche Formeln ableiten. Wir werden einen neuen, sehr einfachen Satz bringen, mit dessen Hülfe man erkennen kann, ob ein gegebener Kettenbruch mit positiven Elementen convergent ist; ferner werden wir einen anderen geben, der ebenfalls neu und wichtig ist, mit dessen Hülfe man in vielen Fällen entscheiden kann, ob ein convergenter Kettenbruch einen rationalen oder irrationalen Wert hat“. — Wie sich im allgemeinen manche Berührungspunkte mit der Darstellung in Stern's „Lehrbuch der algebraischen Analysis“ finden, so ist auch ein Beweis für die Irrationalität von π^2 und e^n für ein rationales n in ähnlicher Weise bei Stern zu lesen.

Lp.

A. Hurwitz. Ueber die Kettenbrüche, deren Teilnenner arithmetische Reihen bilden. Zürich. Naturf. Ges. **41**, 2. Teil. 34-64.

Der regelmässige Kettenbruch für die Irrationalzahl x sei so beschaffen, dass die Teilnenner von einem bestimmten ab eine gewisse Zahl in einander geschachtelter arithmetischer Reihen bilden; dies möge durch das Zeichen $x=(a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, \overline{\varphi_1(m), \varphi_2(m), \ldots, \varphi_k(m)})$ ausgedrückt werden, wobei die φ ganze rationale Functionen des ganzzahligen Arguments m sein sollen, und der darüber stehende Strich symbolisch die unendliche Reihe der Zahlen $\varphi_1(1), \varphi_2(1), \ldots, \varphi_k(1), \varphi_1(2), \varphi_2(2), \ldots, \varphi_k(2), \varphi_1(3), \ldots, \varphi_k(3), \ldots$ umfassen soll. Die periodischen Kettenbrüche sind ein specieller Fall des vorigen, wenn nämlich sämtliche Functionen φ von 0ter Ordnung sind.

Unter diesen Voraussetzungen hat auch der Kettenbruch für $y=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ $(\alpha\delta-\beta\gamma \gtrless 0)$ stets dieselbe Beschaffenheit, und zwar besitzt (abgesehen von der Ordnung 0) jede in der Entwickelung von y auftretende arithmetische Reihe dieselbe Ordnung wie eine der Reihen bei x.

Eine besonders bemerkenswerte Anwendung dieser Resultate gestattet die Basis e der natürlichen Logarithmen, da nach Lambert $\frac{e^u-1}{e^u+1}=\left(0, \overline{\frac{4m-2}{u}}\right)$ ist, welcher Kettenbruch für $u=1/a$ oder $u=2/a$ regelmässig wird.

Es folgt z. B. $e=(2, \overline{1, 2m, 1})$, $e^2=(7, \overline{3m-1, 1, 1, 3m, 12m+6})$.

Umgekehrt erhebt sich die Frage, ob aus der genannten Beschaffenheit der Entwickelungen von x, y auf die Existenz einer bilinearen Relation geschlossen werden darf. Dies entscheidet für eine grosse Zahl von Fällen der Satz, dass zwischen $x=(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ und $y=(b_0, b_1, b_2, \ldots)$, worin a, b über alle Grenzen wachsen, dann und nur dann eine bilineare Relation mit ganzzahligen Coefficienten besteht, wenn die beiden Zahlenreihen $a_0a_1, a_1a_2, a_2a_3, \ldots, b_0b_1\ b_1b_2, b_2b_3, \ldots$, abgesehen von einer endlichen Zahl von Anfangsgliedern, identisch sind. Zum Schluss streift Verf. noch das Bildungsgesetz, welches die oben betrachteten Irrationalzahlen bei der Entwickelung nach grössten Ganzen ergeben. R. M.

J. Heawood. On certain distinctions between the theories of converging fractions and converging multiples. Messenger (2) **26**, 79-88.

Die Anwendung der Methoden der Theorie der Kettenbrüche auf die Auffindung von angenäherten gemeinsamen Vielfachen zweier Zahlen ist wohl bekannt. In dem gegenwärtigen Aufsatze giebt der Verf. gewisse Unterschiede an zwischen der Theorie einer Reihe von Brüchen $p/q, \ldots$, die sich einem gegebenen Werte a/b nähern, und derjenigen einer Reihe von Paaren von Vielfachen pb, qa, ... von a und b, die stetig einander näher kommen. Glr. (Lp.)

H. Minkowski. **Généralisation de la théorie des fractions continues.** Ann. de l'Éc. Norm. (3) **13**, 41-60.

Der Verf. stellt zuerst einige Theoreme auf über einen Algorithmus der Annäherung an eine einzige reelle Grösse mittels rationaler Brüche, welcher als besondere Fälle die gewöhnliche Kettenbruchentwickelung sowohl als auch einige andere, von Hermite früher gegebene Entwickelungen umfasst. Mit diesen Betrachtungen aber scheint der Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit nur ganz lose zusammenzuhängen.

Wenn ξ, η, ζ drei lineare Formen der drei Variabeln x, y, z mit reellen Coefficienten sind, ϱ, σ, τ dagegen positive Parameter, so mögen x, y, z als rechtwinklige Raumcoordinaten angesehen werden; alsdann möge das von den sechs Ebenen $\xi=\pm\varrho$, $\eta=\pm\sigma$, $\zeta=\pm\tau$ begrenzte Parallelepipedon in Beziehung zu den ganzzahligen Raumpunkten betrachtet werden; es soll Grenzparallelepiped heissen, wenn es ausser dem Nullpunkte keinen ganzzahligen Punkt einschliesst, aber auf jeder seiner Seitenflächen (nicht auf den Kanten) mindestens einen solchen Punkt hat. Indem der Verf. die Bedingungen eines solchen Grenzparallelepipedons und die aus der Lage der Grenzpunkte sich ergebenden linearen Substitutionen untersucht, findet er, dass sich alle möglichen Grenzparallelepipede in eine zusammenhängende Kette ordnen lassen, welche durch einen ausführlich wiedergegebenen Algorithmus hergestellt werden kann.

Wenn nun α, β, γ drei ganze Zahlen eines reellen algebraischen Zahlkörpers dritter Ordnung mit positiver Determinante sind, und wenn $\xi=\alpha x+\beta y+\gamma z$, sowie η, ζ die beiden zu ξ conjugirten Formen sind, so kann man den oben genannten Algorithmus zur Bestimmung der Einheiten des kubischen Körpers anwenden, und erhält ein Verfahren, welches analog ist zur Gauss'schen Auflösung der Pell'schen Gleichung mittels der Formation einer Periode von reducirten binären quadratischen Formen. R. M.

G. Woronoi. **Ueber eine Verallgemeinerung des Kettenbruch-Algorithmus.** Warschau. 1896. (Russisch.)

In diesem Werke werden neue Algorithmen gegeben, welche für die algebraischen Zahlen des kubischen Körpers folgende drei Aufgaben zu lösen ermöglichen: 1) ein System von Fundamentaleinheiten zu finden, 2) zu entscheiden, ob zwei gegebene Ideale äquivalent sind, und 3) die Anzahl aller Idealklassen zu bestimmen. Da diese Aufgaben für die algebraischen Zahlen des quadratischen Körpers bekanntlich durch die Anwendung des Kettenbruch-Algorithmus gelöst sind, so betrachtet der Verf. den Kettenbruch-Algorithmus auch von demselben Standpunkte wie die von ihm gegebenen Algorithmen. Alle diese Algorithmen stellen die Gesamtheit von Operationen dar, mit deren Hülfe „successive relative Minima mehrerer simultaner Linearformen" berechnet werden. Das Werk besteht aus drei Teilen. Im ersten Teile: „Successive relative Minima des Systems simultaner Linearformen $\omega=X\lambda+X'\mu$ und $\omega'=X\lambda'$

$+X'\mu'$ mit ganzen rationalen Veränderlichen" wird der Begriff „der relativen Minima dieser Formen" durch folgende Bestimmung hergestellt. Wenn bei gewissen Werten der Veränderlichen X und X' die simultanen Formen $\omega = X\lambda + X'\mu$ und $\omega' = X\lambda' + X'\mu'$ solche Werte ω_0 und ω'_0 bekommen, dass es unmöglich ist, ganze rationale Zahlen t und t' zu finden, welche gleichzeitig den Ungleichheiten $|t\lambda + t'\mu| < |\omega_0|$ und $|t\lambda' + t'\mu'| < |\omega'_0|$ ($t \neq 0$, $t' \neq 0$ gleichzeitig) genügen, so sind die Zahlen ω_0 und ω'_0 relative Minima der gegebenen Formen. Die betrachteten Formensysteme werden durch das Symbol $\begin{bmatrix}\lambda, & \mu\\ \lambda', & \mu'\end{bmatrix}$ bezeichnet. Die Gesamtheit der Werte ω und ω' der gegebenen Formen nennt der Verf. das System (ω, ω'). Die Systeme (ω, ω') und $(-\omega, -\omega')$ werden nicht als verschieden angesehen; man betrachtet also nur solche, in welchen $\omega > 0$ ist. Alle Systeme (ω, ω') der relativen Minima der gegebenen Formen bilden „eine Schar (S)". Jedes System der Schar (S) besitzt „zwei benachbarte Systeme". Der Verf. nennt (ω_1, ω'_1) das erste dem Systeme (ω_0, ω'_0) benachbarte System, wenn $\omega_1 < \omega_0$ und bei keinen ganzen t und t' die Ungleichheiten $|t\lambda + t'\mu| < \omega_0$ und $|t\lambda' + t'\mu'| < |\omega'_1|$ (t und t' sind gleichzeitig nicht gleich Null) gleichzeitig möglich sind. Das System $(\omega_{-1}, \omega'_{-1})$ heisst das zweite, (ω_0, ω'_0) benachbarte System, wenn $|\omega'_{-1}| < |\omega'_0|$ und die Ungleichheiten $|t\lambda + t'\mu| < \omega_{-1}$ und $|t\lambda' + t'\mu'| < |\omega'_0|$ gleichzeitig unmöglich sind. Alle Systeme der Schar (S) kann man in eine unendliche Folge

(I) $(\omega_{-2}, \omega'_{-2}), (\omega_{-1}, \omega'_{-1}), (\omega_0, \omega'_0), (\omega_1, \omega'_1), (\omega_2, \omega'_2), \ldots$

„successiver relativer Minima" stellen.

Wenn zwei benachbarte Systeme der Folge (I), z. B. (ω_0, ω'_0) und (ω_1, ω'_1), bei den Werten p_0, p'_0 und p_1, p'_1 der Veränderlichen erhalten werden, so ist der absolute Betrag der Determinante $\begin{vmatrix}p_0, & p_1\\ p'_0, & p'_1\end{vmatrix} = \pm 1$ der Einheit gleich. Mit Hülfe dieses Fundamentaltheorems beweist der Verf., dass alle Glieder der Reihe (I) durch die Anwendung des Kettenbruch-Algorithmus nach und nach berechnet werden können, wenn irgend welche zwei benachbarten Glieder derselben bekannt sind. Durch die Substitution $\begin{pmatrix}p_0 & p_1\\ p'_0 & p'_1\end{pmatrix} = \pm 1$ oder $\begin{pmatrix}p_1 & p_0\\ p'_1 & p'_0\end{pmatrix} = \mp 1$ gehen die gegebenen Formen in die äquivalenten Formen $\begin{bmatrix}\omega_0, & \omega_1\\ \omega'_0, & \omega'_1\end{bmatrix}$ oder $\begin{bmatrix}\omega_1, & \omega_0\\ \omega'_1, & \omega'_0\end{bmatrix}$ über, welche „reducirte Formensysteme der ersten und zweiten Art" genannt werden. Die Formensysteme $\begin{bmatrix}\lambda, & \mu\\ \lambda', & \mu'\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}\tau\lambda, & \tau\mu\\ \tau'\lambda', & \tau'\mu'\end{bmatrix}$ werden bei allen Werten von τ und τ' als gleichbedeutend betrachtet und werden durch „das normal dargestellte Formensystem" $\begin{bmatrix}1, & \varphi\\ 1, & \varphi'\end{bmatrix}$, $\left(\varphi = \frac{\mu}{\lambda},\right.$ $\left.\varphi' = \frac{\mu'}{\lambda'}\right)$ ersetzt. Jedes reducirte Formensystem wird in ein redu-

cirtes Formensystem erster oder zweiter Art durch zwei nach einander folgende Substitutionen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ transformirt. Der Coefficient δ wird mit Hülfe des Kettenbruch-Algorithmus berechnet. Durch Anwendung solcher Substitutionen kann man eine unendliche Reihe äquivalenter reducirter Formensysteme einer und derselben Art $\begin{bmatrix} 1, & \varphi_0 \\ 1, & \varphi_0' \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1 \\ 1, & \varphi_1' \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1, & \varphi_2 \\ 1, & \varphi_2' \end{bmatrix}$, ... bekommen. Damit diese Reihe periodisch sei, ist es notwendig und hinreichend, dass φ_0 und φ_0' conjugirte algebraische Zahlen seien, welche einer quadratischen Gleichung mit positiver Discriminante genügen. Diese bemerkenswerte Eigenschaft der reducirten Formensysteme erlaubt, alle Fundamentalaufgaben der Theorie der algebraischen Zahlen eines entsprechenden quadratischen Körpers zu lösen.

Im zweiten Teile des Werkes: „Successive relative Minima des Systems simultaner Linearformen $\omega = X\lambda + X'\mu + X''\nu$ und $\omega' = X(l' + l''i) + X'(m' + m''i) + X''(n' + n''i)$ mit ganzen rationalen Veränderlichen" betrachtet der Verf. von dem im ersten Teile des Werkes festgestellten Gesichtspunkte aus relative Minima eines gegebenen Formensystems, die Schar (S) aller Systeme (ω, ω'), welche relative Minima sind, der Schar (S) angehörige benachbarte Systeme und die unendliche Folge (I) der successiven relativen Minima. Das Formensystem $\begin{bmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ l' + l''i, & m' + m''i, & n' + n''i \end{bmatrix}$ wird reducirtes System erster oder zweiter Art genannt, wenn $(\mu, m' + m''i)$ das erste oder zweite dem $(\lambda, l' + l''i)$ benachbarte System ist. Jedes normal dargestellte reducirte Formensystem $\begin{bmatrix} 1, & \varphi, & \psi \\ 1, & a + bi, & c + di \end{bmatrix}$ wird in ein reducirtes Formensystem erster oder zweiter Art durch zwei nach einander folgende Substitutionen $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & p & q \\ 0 & p' & q' \\ 0 & p'' & q'' \end{pmatrix} = \pm 1$ transformirt. Den Algorithmus, mit dessen Hülfe die Coefficienten der zweiten Substitution bestimmt werden, hält der Verf. für eine Verallgemeinerung des Kettenbruch-Algorithmus. Diese Coefficienten werden folgendermassen berechnet. Das gegebene Formensystem geht in das vermittelnde Formensystem $\begin{bmatrix} 1, & \varphi_1, & \psi_1 \\ 1, & a_1 + b_1 i, & c_1 + d_1 i \end{bmatrix}$ durch die Substitution $\begin{pmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} = \pm 1$ über, deren Coefficienten mit Hülfe bekannter Operationen und ohne Proben bestimmt werden. Dieses vermittelnde Formensystem genügt folgenden Bedingungen:

1) Die Determinante $\begin{vmatrix} 1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ 1 & a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 & d_1 \end{vmatrix} = x_1$ ist eine positive Zahl.

2) Die positive quadratische Form $[(a_1-\varphi_1)X'+(c_1-\psi_1)X'']^2+[b_1X'+d_1X'']^2=A_1X'^2+2BX'X''+C_1X''^2$ ist eine reducirte binäre, d. h. $A_1-B_1\geqq 0$, $B_1\geqq 0$ und $C_1-B_1\geqq 0$.

3) $b_1\geqq 0$ und $d_1\leqq 0$.

4) $0<\varphi_1<1$ und $0<\psi_1<1$.

Aus den Coefficienten des erhaltenen vermittelnden Formensystems wird das reducirte Formensystem erster Art mit Hülfe von nicht mehr als vier Proben gebildet, und somit bestimmt man die gesuchte Substitution. Der Verf. giebt ohne Beweis auch einen Algorithmus für die Transformation eines gegebenen Formensystems in das reducirte Formensystem zweiter Art.

Damit die unendliche Reihe

$$\begin{bmatrix}1, & \varphi_0, & \psi_0\\ 1, & a_0+b_0i, & c_0+d_0i\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1, & \varphi_1, & \psi_1\\ 1, & a_1+b_1i, & c_1+d_1i\end{bmatrix}, \quad \ldots$$

äquivalenter reducirter Formensysteme einer und derselben Art periodisch sei, ist es notwendig und hinreichend, dass die Coefficienten des ersten Formensystems φ_0, a_0+b_0i und ψ_0, c_0+d_0i entsprechend conjugirte algebraische Zahlen seien, welche zu dem kubischen Körper mit einer negativen Determinante gehören. Zwei reducirte Formensysteme sind nur dann äquivalent, wenn sie einer und derselben Periode angehören. Der absolute Betrag der aus den Coefficienten jedes reducirten Formensystems gebildeten Determinante $\begin{vmatrix}1 & \varphi & \psi\\ 1 & a & c\\ 0 & b & d\end{vmatrix}=x$ ist immer grösser als $\sqrt{\tfrac{3}{4}}$. Auf Grund dieses Satzes und aus der Betrachtung der Perioden reducirter Formensysteme gelangt man zur Lösung der oben erwähnten Fundamentalaufgaben der Theorie der algebraischen Zahlen eines kubischen Körpers mit negativer Discriminante.

Im dritten Teile des Werkes: „Successive relative Minima des Systems simultaner Linearformen $\omega=X\lambda+X'\mu+X''\nu$, $\omega'=X\lambda'+X'\mu'+X''\nu'$ und $\omega''=X\lambda''+X'\mu''+X''\nu''$ mit ganzen rationalen Veränderlichen" werden dieselben Aufgaben wie in den beiden ersten Teilen gelöst, wobei die oben für zwei simultane Formen festgestellten Definitionen nur verallgemeinert werden. Der Verf. giebt einen Algorithmus für die Transformation der reducirten Formensysteme in reducirte Formensysteme einer oder anderer Art. Der absolute Betrag der aus den Coefficienten jedes reducirten Formensystems gebildeten Determinante ist grösser als 1. Auf Grund dieses Satzes und aus der Betrachtung der Perioden reducirter Formensysteme erhält man die Lösung der oben erwähnten Fundamentalaufgaben der Theorie der algebraischen Zahlen eines kubischen Körpers mit positiver Discriminante.

Alle vom Verf. gegebenen Algorithmen unterscheiden sich dadurch von bekannten, zur Lösung der oben erwähnten Aufgaben dienenden Methoden, welche in der Anwendung einer endlichen Zahl von Proben

bestehen, dass die neuen Algorithmen eine Gruppe bekannter Operationen mit Hinzufügung von nicht mehr als vier Proben bilden. In numerischen Beispielen zeigt der Verf., dass die neuen Algorithmen ohne Mühe in der Praxis angewandt werden können. Mit Hülfe eines der Algorithmen wird z. B. für die Gleichung $\varrho^3 = 23$ die algebraische Fundamentaleinheit $2166673601 + 761875860\varrho + 267901370\varrho^2$ berechnet.

Wi.

A. A. Markow. Neue Anwendungen der Kettenbrüche. St. Petersburg.

In der Abhandlung: „Ueber einige Anwendungen der Kettenbrüche“ (F. d. M. **17**, 168, 1885) hat der Verf. gezeigt, wie man nach gegebenen Werten der Integrale $\int_0^l f(y)dy$, $\int_0^l yf(y)dy, \ldots, \int_0^l y^{i-1}f(y)dy$ die Grenzwerte einiger Integrale in dem Falle bestimmt, dass die Function $f(y)$ der Bedingung $f(y) > 0$ genügt. Diese Fragen nach den Grenzwerten der Integrale sind von Tschebyschew in der Abhandlung: „Sur les valeurs limites des intégrales“ (Liouv. J. (2) **19**) gestellt, und ihre Beantwortung beruht auf den von Markow bewiesenen und verallgemeinerten Ungleichheiten von Tschebyschew. In der vorliegenden Abhandlung werden für den Fall, dass die Function $f(y)$ zwei Ungleichheiten $L > f(y) > 0$ genügt, folgende Aufgaben gelöst.

1) Es seien gegeben $\int_0^l f(y)dy = \alpha_0$, $\int_0^l yf(y)dy = \alpha_1, \ldots,$ $\int_0^l y^{i-1}f(y)dy = \alpha_{i-1}$; es handelt sich in der ersten Aufgabe um den grössten und kleinsten Wert des Integrals $\int_0^l y^i f(y)dy$. Der Verf. zeigt, dass man im allgemeinen Falle den grössten oder kleinsten Wert des Integrals erhält, wenn man das ganze Intervall zwischen $y = 0$ und $y = l$ in gewisser festgesetzter Art in $i+1$ Teile zerlegt, wo wechselweise $f(y) = 0$ und $f(y) = L$ ist. Um diese Art der Zerlegung näher zu bestimmen, seien ξ' und η' die Werte von y, für welche im Falle des kleinsten Wertes die Function $[f_{\text{min.}}]$ von 0 zu L und von L zu 0 übergeht. Dieselbe Bedeutung haben ξ'' und η'' für die Function $f_{\text{max.}}$, d. h. für die Function, welche den grössten Wert des Integrals giebt. Es seien jetzt $V_i'(z) = \Pi(z-\xi')$, $U_i'(z) = \Pi(z-\eta')$ und respective $V_i''(z) = \Pi(z-\xi'')$, $U_i''(z) = \Pi(z-\eta'')$. Der allgemeine Fall findet z. B. statt, wenn die Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}$ den Gleichungen:

$$\alpha_0 = \int_0^l F(y)dy, \quad \alpha_1 = \int_0^l yF(y)dy, \quad \ldots, \quad \alpha_{i-1} = \int_0^l y^{i-1}F(y)dy$$

entnommen werden, wo $F(y)$ irgend eine gegebene Function ist, deren

Werte der Bedingung $L > F(y) > 0$ genügen, aber nicht alle gleich 0 oder L sind. Dann sind die Brüche $\frac{V_i'(z)}{U_i'(z)}$ und $\frac{V_i''(z)}{U_i''(z)}$ die Näherungsbrüche der Entwickelung der Function $e^{\frac{1}{L}\int_0^l \frac{F(y)\,dy}{z-y}}$ in einen Kettenbruch, in einigen Fällen multiplicirt mit den Factoren $(z-l)/z$, $1/z$, $z-l$. Nachdem die Functionen $f_{\text{max.}}$ und $f_{\text{min.}}$ in dieser Art bestimmt sind, geben sie auch die Lösung der allgemeineren Aufgabe: den grössten und kleinsten Wert des Integrals $\int_0^l \Phi(y) f(y)\,dy$ zu bestimmen, wenn die i^{te} Derivirte der Function $\Phi(y)$ immer ein und dasselbe Zeichen im Intervalle zwischen $y = 0$ und $y = l$ hat.

2) Die zweite Aufgabe über die Grenzwerte des Integrals $\int_0^x f(y)dy$ wird auch mit Hülfe der Functionen $f(y)$ gelöst, welche bei einer gewissen Art der Zerlegung des Intervalls von $y = 0$ bis $y = l$ in $i+2$ Teile wechselweise 0 und L in diesen Teilen sind; dabei muss x die Grenze zweier solcher Teile sein. Die nähere Bestimmung der Functionen $P(z) = \Pi(z-\xi)$ und $Q(z) = \Pi(z-\eta)$ reducirt sich auf die Bestimmung der Functionen V', U', V'', U'' der vorhergehenden Aufgabe. Besonders wird für beide Aufgaben der Fall $l = \infty$ betrachtet. Am Ende der Abhandlung zeigt der Verf., dass seine Untersuchungen zu einer Methode der angenäherten Berechnung der Integrale und zu Formeln führen, die dem Aeusseren nach mit den Formeln übereinstimmen, welche Tschebyschew in seiner Abhandlung: „Sur biquadratures" (Liouville Journ. (2) **19**) gegeben hat. Die Methode besteht in der Vertauschung des Integrals $\int_0^l F(y)\,\Phi(y)\,dy$ mit dem Integral $\int_0^l f_{\text{min.}}\Phi(y)\,dy$ oder mit dem Integral $\int_0^l f_{\text{max.}}\,\Phi(y)\,dy$. Es sei gesetzt $\Phi(y) = \varphi'(y)$, $F'(y) = g(y)$; dann hat man die beiden folgenden Resultate: 1) Wenn $\int_0^l g(y)\,dy = 0$ ist, und das Integral $\int_0^y g(y)\,dy$ im Intervalle von $y = 0$ bis $y = l$ ein und dasselbe Zeichen hat, so kann man das Integral $\int_0^l g(y)\,\varphi(y)\,dy$ approximativ durch eine Summe einiger Werte von $\varphi(y)$ berechnen, genommen im Intervalle von $y = 0$ bis $y = l$, multiplicirt mit einer und derselben Zahl L, wechselweise mit den Zeichen $+$ und $-$ genommen. Z. B. erhält man:

$$\int_{-1}^{+1} y\varphi(y)\,dy = \tfrac{1}{2}\{\varphi(\tfrac{2}{3}) - \varphi(-\tfrac{2}{3})\} + \tfrac{7}{405}\,\varphi'''(\zeta_0),$$

$$\int_{-1}^{+1} y\varphi(y)\,dy = \tfrac{1}{2}\{\varphi(z_1) - \varphi(z_2) + \varphi(z_3) - \varphi(z_4)\} + A\varphi^{v}(\zeta),$$

wo $z_1 = -z_4 = 0{,}73702$, $z_2 = -z_3 = 0{,}07035$, $A = \frac{1306}{2296350}$, ζ_0 und ζ sind in den Grenzen -1 und $+1$ enthalten.

3) Wenn man für alle Werte von y, zwischen 0 und l genommen, $0 \leqq \int_0^y g(y)\,dy \leqq \int_0^l g(y)\,dy$ hat, so kann man das Integral $\int_0^l g(y)\,\varphi(y)\,dy$ approximativ darstellen als eine Summe einiger Werte der Function $\varphi(y)$, im Intervalle von $y = 0$ bis $y = l$ genommen, multiplicirt mit dem Werte des Integrals $\int_0^l g(y)\,dy$, wechselweise mit dem Zeichen $+$ oder $-$ genommen. Z. B. ist

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(y)\,dy = 2\varphi(0) + \tfrac{1}{3}\varphi''(\zeta_0),$$

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(y)\,dy = 2\{\varphi(\sqrt{\tfrac{1}{6}}) - \varphi(0) + \varphi(-\sqrt{\tfrac{1}{6}})\} + \tfrac{13}{1080}\,\varphi^{IV}(\zeta_1),$$

ζ_0 und ζ_1 sind zwischen den Grenzen -1 und $+1$ enthalten. Wi.

A. Markow. **Nouvelles applications des fractions continues.** Math. Ann. **47**, 579-597.

Vorausgesetzt, dass die Werte der $i-1$ Integrale $\int_a^b y^\lambda f(y)dy = a_\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, i-1)$ gegeben sind, und dass die sonst beliebige Function $f(y)$ den Ungleichheiten $L > f(y) > 0$ unterliegt, soll man die extremen Werte des Integrals $\int_a^b y^i f(y)\,dy$ suchen, oder allgemeiner die von $\int_a^b \Phi(y) f(y)\,dy$, wenn die i^{te} Ableitung von Φ zwischen a und b das Vorzeichen nicht ändert. Man findet, dass für die fragliche Function f das Intervall $a \ldots b$ sich in $i+1$ Teile zerlegen lassen muss, in denen abwechselnd $f = 0$ und $f = L$ ist, und das Maximum eintritt, wenn im letzten Intervall $f = L$ ist, das Minimum aber, wenn im letzten

Intervall $f = 0$ ist. Weiter lassen sich für

$$e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{f(y)dy}{z-y}} \quad \text{und} \quad \frac{z-b}{z-a} e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{f(y)\,dy}{z-y}}$$

in Stieltjes'scher Weise Kettenbruchentwickelungen aufstellen, und diese stehen in innigem Zusammenhange mit denjenigen rationalen Functionen, welche die Trennungsstellen obiger Intervalle zu Null- und Unendlichkeitsstellen haben. Auch für $\int_a^x f(y)\,dy$ lassen sich analoge Resultate gewinnen. Hat man die extremen möglichen Werte der fraglichen Integrale bestimmt, so bietet sich damit ein Weg zur angenäherten Berechnung der Integrale. R. M.

F. Klein. Sur une représentation géométrique du développement en fraction continue ordinaire. Nouv. Ann. (3) **15**, 327-331.

Uebersetzt aus Gött. Nachr., vergl. F. d. M. **26**, 229, 1895.

Vierter Abschnitt.

Combinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung.

D. André. Démonstration directe de la relation qui existe entre le nombre des permutations alternées et celui des permutations quasi-alternées. Soc. Philom. Bull. (8) **8**, 5-9.

Es handelt sich um die Gleichung $A_{n+1} = 2A_n + B_n$, wo A_{n+1} bezw. A_n die Anzahl der „permutations alternées“ von $n+1$ und von n Elementen ist, und B_n die Anzahl der „permutations quasi-alternées“ von n Elementen bedeutet (vergl. F. d. Math. **26**, 238, 1895, und **25**, 333, 1893/94). Diese Beziehung wird hier vom Verf. auf rein combinatorischem Wege abgeleitet. Bö.

E. Busche. Ueber die Schubert'sche Lösung eines Bachet'schen Problems. Math. Ann. **47**, 105-112.

Das von Schubert in seinen „Zwölf Geduldspielen“ (Berlin, 1895) mit einer Lösung versehene Problem, von Cardano Josephsspiel benannt, wird in folgender Fassung ausgesprochen: Eine beliebige Anzahl n von Punkten, die man sich etwa auf einer Kreisperipherie angeordnet denken möge, ist der Reihe nach mit den Zahlen 1 bis n bezeichnet. Man zählt nun, bei 1 anfangend und über n hinaus bei 1 fortfahrend, fortgesetzt bis d und scheidet jeden Punkt von der weiteren Abzählung aus, auf den einmal die Zahl d gefallen ist. Die zu beantwortende Frage ist dann: welches ist die Nummer ν des Punktes, der als der e^{te} ausgeschieden wird? Dabei kann $0 < d \gtreqless n$ sein; die positive Zahl e ist natürlich $\overline{\leq} n$. Der Verf. giebt zunächst eine eigene Lösung, beweist dann mittels derselben eine andere, die mit der Schubert'schen (ohne Beweis veröffentlichten) Lösung in engem Zusammenhange steht, und führt endlich die Schubert'sche Lösung auf die letztere zurück.

Lp.



COCCOZ. 1°. Carrés magiques en nombres non consécutifs déduits d'autres carrés. 2°. Enceintes ou bordures; extension de la méthode d'Ons en Bray. 3°. Carrés de 9, magiques à deux degrés, partiellement diaboliques. Assoc. Franç. Bordeaux (1895), **24**, 102-110.

Fortsetzung der Studien des Verf. auf dem Gebiete der magischen Quadrate (vergl. F. d. M. **24**, 197, 1892; **25**, 340, 1893/94; **26**, 238, 1895). In Bezug auf No. 1 des Titels wird gezeigt, wie man durch Hinzufügung einer und derselben Zahl x in gewissen unter den magisch geordneten Zellen wieder ein magisches Quadrat erhält, und wie dieses Verfahren verallgemeinert werden kann. 2. Nach einer vom Grafen Pajot d'Ons en Bray 1750 bei der Académie des Sciences eingereichten Abhandlung kann man ein gewisses Ränderungsverfahren zur Construction magischer Quadrate von $2(2k+1)$ Elementen in jeder Zeile benutzen. Die Verallgemeinerung des Verf. bezieht sich auf die Anwendung desselben Princips auf die Construction magischer Quadrate von beliebiger Elementenzahl. Endlich bei der dritten Aufgabe wird nachgewiesen, dass man in die centrale Zelle der Reihe nach jede der benutzten Zahlen bringen kann. Lp.

B. PORTIER. Le carré diabolique de 9 et son dérivé, le carré satanique de 9 (carré de base magique aux deux premiers degrés), tirés du carré magique de 3. Alger: Jourdan. 32 S. 8° (1895).

FONTÈS. Sur les carrés à bordure de Stifel (1544). Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24**, 248-256.

Michael Stifel hat in seiner Arithmetica integra (Norimbergae: Joh. Petreius, 1544, p. 24-30) ein Verfahren gelehrt, durch passende Ränderung eines magischen Quadrates mit n Elementen in jeder Zeile ein neues von $n+2$ Elementen zu bilden, ohne dass er jedoch den Weg angedeutet hat, wie er zu diesem Verfahren gelangt ist. Fontès sucht ohne andere Mittel als solche, die Stifel besessen haben kann, durch eine analytische Methode die ganz allgemeine Lösung des deutschen Gelehrten herzuleiten, und hebt für seine Landsleute die Thatsache hervor, dass nicht Frenicle du Bessy, ein Zeitgenosse Fermat's, jenes Ränderungsprincip ersonnen habe. Die historischen Studien über die magischen Quadrate von S. Günther (Abschnitt IV der „Vermischten Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften“. Leipzig: Teubner, 1876) sind überhaupt vielen Schriftstellern zu empfehlen, die sich jetzt wieder der Beschäftigung mit den Zauberfiguren widmen. Auch Scheffler's Werk „Die magischen Figuren“ (Leipzig: Teubner, 1882; F. d. M. **14**, 134, 1882) dürfte denen von Nutzen sein, die nach Verallgemeinerungen der Fragestellung suchen.

Lp.

A. H. Frost. **The construction of Nasik squares of any order.** Lond. M. S. Proc. **27,** 487-518.

Ein Nasik-Quadrat ist definirt als ein Quadrat, das durch ein System von Parallelen zu den Seiten in n^2 gleiche Teile (Zellen) geteilt ist; in den Zellen sollen die natürlichen Zahlen von 1 bis n^2 derart verteilt werden, dass die Summe der n Zahlen in solchen je n Zellen, deren Lage durch bestimmte Gesetze bestimmt wird, constant (hier $= \frac{1}{2}n(n^2+1)$) ist.

Der Verf. giebt ausführlich an, wie die Construction solcher Quadrate unter verschiedenen Annahmen für n und für die Lage der Systeme von je n Zellen auszuführen ist. Bö.

J. A. Isnoskow. **Magische Quadrate.** Kasan Ges. (2) **5,** 48-60. (Russisch.)

Ein Ref. über das Buch von Arnoux: „Arithmétique graphique. Les espaces arithmétiques hypermagiques.“ Paris, 1894 (vergl. F. d. M. **25,** 337, 1893/94). Wi.

P. A. Nekrassow. **Theorie der Wahrscheinlichkeiten. Vorlesungen gehalten an der Universität Moskau.** Moskau. 179 S. (Russisch.)

Ein klar und elegant geschriebenes Lehrbuch über die Wahrscheinlichkeitsrechnung, in welchem dem berühmten Tschebyschew'schen Theorem über die mittleren Werte, welches die Theoreme von Bernoulli und Poisson als specielle Fälle umfasst und als Grundlage für die Theorie der Ausgleichung der Beobachtungsfehler dienen kann, gebührend Rechnung getragen wird. In dem Abschnitte über die Methode der kleinsten Quadrate wird auch Rücksicht genommen auf die sogenannten cyklischen Gleichungen, welche von Seidel und von dem Verf. selbst (F. d. M. **17,** 184, 1885) betrachtet worden sind. Wi.

E. Mortara. **Osservazioni critiche circa il calcolo delle probabilità e il suo uso in statistica.** Scansano: Tip. Degli Olmi. 20 S. 8°. Auszug aus der Rivista di sociologia.

Eine kurze Uebersicht über die hauptsächlichsten Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit vielen (zum Teil nicht neuen) kritischen Bemerkungen. Vi.

H. Delannoy. **Emploi de l'échiquier pour la résolution de certains problèmes de probabilités.** Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24,** 70-90.

Die Abzählung der einem Ereignisse günstigen oder ungünstigen Fälle bietet oft eigentümliche Schwierigkeiten. Zur Veranschaulichung solcher Abzählungen hat Delannoy schon 1889 dieselben mit den leichter zu übersehenden Zügen eines Turmes oder der Königin auf Schachbrettern von dreieckiger, viereckiger, fünfeckiger und sechseckiger Begrenzung verglichen (vergl. F. d. M. **21,** 204, 1889) und die für diese Züge geltenden Zahlen (Combinationszahlen für Elemente mit Wieder-

holung) berechnet. Da nach seiner Ansicht diese Methode nicht die ihr zukommende Beachtung gefunden hat, so wiederholt er zunächst die Grundgedanken und erläutert das Verfahren an 17 bezüglichen Aufgaben, von denen einzelne bei anderen Autoren fehlerhaft gelöst sind.

Lp.

ZERR. Solution of question 11924. Ed. Times **65,** 37-38.

Von einer unbekannten Anzahl von Kugeln, die nach gleicher Wahrscheinlichkeit jede von n verschiedenen Farben haben, werden a_1 von der ersten, a_2 von der zweiten, ..., a_n von der n^{ten} Farbe gezogen. Nun werden weitere $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ Kugeln gezogen; die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dass b_1 von der ersten, b_2 von der zweiten, ..., b_n von der n^{ten} Farbe sind. Lp.

W. J. C. MILLER, H. FORTEY. Solution of question 3631. Ed. Times **64,** 59-61.

Die Wahrscheinlichkeit dafür zu bestimmen, dass bei einem regelmässigen Vieleck 1) zwei beliebige Diagonalen sich schneiden, 2) drei beliebige Diagonalen sich in 0, 1, 2, 3 Punkten schneiden.

$$w_2^{(1)} = \frac{(n-1)(n-2)}{3(n^2-3n-2)},\quad w_3^{(1)} = n\binom{n}{5},\quad w_3^{(2)} = \frac{n+5}{2}\binom{n}{5},\quad w_3^{(3)} = \binom{n}{6},$$

$$w_3^{(0)} = \tfrac{1}{144}(n+2)(n+1)n(n-3)(n-4)(n-5).$$ Lp.

H. FORTEY, D. BIDDLE, T. C. SIMMONS. Solution of question 12898. Ed. Times **65,** 68-73.

Vier willkürliche Sehnen werden in einem Kreise gezogen. Für die Wahrscheinlichkeiten, dass dieselben sich in 0, 1, ..., 6 Punkten schneiden, findet Fortey $w_0 = \frac{2}{15}$, $w_1 = w_2 = \frac{4}{15}$, $w_3 = \frac{4}{21}$, $w_4 = \frac{2}{21}$, $w_5 = \frac{4}{105}$, $w_6 = \frac{1}{105}$.

Biddle hat eine ganz andere Lösung erhalten, und es entspinnt sich ein Streit über die Richtigkeit der gefundenen Lösungen. Simmons tritt hierbei auf die Seite von Fortey. Lp.

W. J. C. SHARP, ZERR. Solution of question 9806. Ed. Times **64,** 78-79.

Liegt P innerhalb des spitzwinkligen Dreiecks ABC mit den Winkeln α, β, γ, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Winkel BPC stumpf ist:

$$\frac{\sin\alpha}{4\sin\beta\sin\gamma}(\sin 2\beta + \sin 2\alpha + \pi - 2\alpha) \quad \text{oder} \quad \frac{\sin\alpha}{4\sin\beta\sin\gamma}(2\gamma + \sin 2\gamma),$$

je nachdem β spitz oder stumpf ist. Lp.

W. J. C. MILLER, N. COONDOO, ZERR. Solution of question 2042. Ed. Times **64,** 91-92.

Der mittlere Wert des spitzwinkligen, einem Kreise einbeschriebenen Kreises vom Radius a ist $3a^2/\pi$, des stumpfwinkligen a^2/π. Lp.

FINKEL, D. BIDDLE, RADHAKRISHNAN. Solution of question 13080. Ed. Times **65**, 90.

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Abstand zweier willkürlichen Punkte innerhalb eines Quadrates die Seite des Quadrates nicht übersteigt, ist $\pi - 13/6 = 0{,}9749259$. Lp.

CH. LAGRANGE. Démonstration du théorème de Bernoulli par la formule sommatoire d'Euler. Belg. Bull. (3) **31**, 439-457.

Der Verf. prüft allein den Fall, bei welchem die absolute Abweichung und das Product der gesamten Zahl der Fälle mit den Wahrscheinlichkeiten der betrachteten Ereignisse ganze Zahlen sind.

Mn. (Lp.)

CH. LAGRANGE. Moindres carrés. Démonstration du principe de la moyenne par les probabilités a posteriori. Belg. Bull. (3) **32**, 60-74.

B. GUSTAWICZ. Die Ausgleichungsrechnung auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate. Krakau. 158 S. 8°.

Enthält eine historische Einleitung, Erklärung der wichtigsten Begriffe der Fehlertheorie, Darlegung der Ausgleichungsmethoden mit vielen Aufgaben und ausgeführten Rechnungen. Im Anhang: Methode zur Berechnung des Laplace'schen Integrals $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$, die Tafel der Werte von $\theta(\gamma h) = \frac{2}{\pi}\int_0^{h\gamma} e^{-z^2}dz$; Formeln zur Aufstellung und Lösung der Normalgleichungen; Zusammenstellung aller Formeln und endlich eine ausführliche Bibliographie der betreffenden Litteratur. Dn.

J. ANDRADE. Sur la méthode des moindres carrés. C. R. **122**, 1400-1403.

Bei den gewöhnlichen Anwendungen der Methode der kleinsten Quadrate setzt man voraus, dass jede Gleichung nur eine direct beobachtete Grösse enthält. Die Aufgaben der Wirklichkeit führen aber zu Gleichungen, die mindestens zwei beobachtete Grössen enthalten, die auch nicht einmal unabhängig von einander zu sein brauchen. Sind z. B. die Gleichungen zur Bestimmung der n Parameter a, b, c von der Form $F(a, b, c; t_i) = N_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r; r > n)$, so enthält jede Gleichung zwei gleichzeitige Messungen t_i und N_i.

Die Messungen t_i und N_i mögen, jede Art für sich, gleiches Gewicht haben. Je nachdem die Messungen t_i sehr viel genauer als die

N_i, oder die N_i sehr viel genauer als die t_i sind, muss dann entweder $\sum_i [F(a, b, c; t_i) - N_i]^2$ oder $\sum_i \frac{[F(a, b, c; t_i) - N_i]^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial t_i}\right)^2}$ ein Minimum werden.

Kennt man ferner a priori die Genauigkeiten p und q der Messungen t_i und N_i, sind t_i und N_i unabhängig von einander erhalten, und bezeichnet man die Fehler von t_i und N_i mit θ_i und ν_i, so sind die Unbekannten des Problems die $2r+n$ Grössen θ_i, ν_i, a, b, c.

Diese werden bei Annahme des Gauss'schen Fehlergesetzes unter der Bedingung bestimmt: $p\sum_i \theta_i^2 + q\sum_i \nu_i^2 = \text{Min.}$, während die Gleichungen $F(a, b, c; t_i+\theta_i) = N_i+\nu_i$ bestehen. Setzt man

$$\left.\begin{array}{l} a = a_0+\alpha \\ b = b_0+\beta \\ c = c_0+\gamma \end{array}\right\} F_0(t_i) = F(a_0, b_0, c_0; t_i),$$

so erhält man die Gleichungen: $(\partial F_0/\partial t_i)\theta_i - \nu_i = \varepsilon_i^0 + a_i\alpha + b_i\beta + c_i\gamma \equiv \eta_i$. Die Unbekannten α, β, γ ergeben sich darauf aus den linearen Gleichungen:

$$\sum_i \frac{a_i\eta_i}{\left(\frac{\partial F_0}{\partial t_i}\right)^2\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = 0, \quad \sum_i \frac{b_i\eta_i}{\left(\frac{\partial F_0}{\partial t_i}\right)^2\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = 0, \quad \sum_i \frac{c_i\eta_i}{\left(\frac{\partial F_0}{\partial t_i}\right)^2\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} = 0,$$

während θ_i und ν_i aus den Formeln

$$\theta_i = \frac{\eta_i \frac{\partial F_0}{\partial t_i}}{\left(\frac{\partial F_0}{\partial t_i}\right)^2 + \frac{p}{q}}, \quad \nu_i = -\frac{\eta_i}{\frac{q}{p}\left(\frac{\partial F_0}{\partial t_i}\right)^2 + 1}$$

erhalten werden.

Ist $\partial F_0/\partial t_i$ für alle i nahezu constant, und ist p nicht sehr klein, so erhält man im besonderen die Gleichungen: $\sum_i a_i\eta_i = 0$, $\sum b_i\eta_i = 0$, $\sum c_i\eta_i = 0$. In diesem Falle ist die Bestimmung der Unbekannten a, b, c nahezu unabhängig von dem Verhältnis p/q. Bö.

Kopsel. Zur Methode der kleinsten Quadrate. Jordan Z. f. V. **25**, 316-317.

Soll der Gleichung $ax+by = v$ durch möglichst kleine Werte von x und y genügt werden, so geschieht dies nach des Verf.'s Meinung ohne jede Willkür dadurch, dass man vom Coordinatennullpunkt auf die durch die Gleichung dargestellte Gerade ein Lot fällt; die Coordinaten des Fusspunktes sind dann die gesuchten Werte. Sie erfüllen gleichzeitig die Bedingung: $x^2+y^2 = \text{Min.}$ Bö.

A. K. Kononowitsch. **Sur la résolution du système des équations linéaires à trois inconnues par la méthode des moindres carrés.** Odessa Abhandl. **69**, 463-468.

In der letzten Zeit hat man graphische Methoden einzuführen versucht, um die linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten nach der Methode der kleinsten Quadrate aufzulösen. Solche Methoden sind von Klingatsch (Die graphische Ausgleichung bei der trigonometrischen Punktbestimmung durch Einschneiden. Wien: C. Gerold's Sohn. 1894) und von Pomerantzew (Procédé graphique pour la détermination de deux inconnues par la méthode des moindres carrés. Mémoires de la section topographique militaire de l'état-major général. Partie **52**, St. Pétersbourg. 1895) vorgeschlagen. Wenn man die Bedingungsgleichungen als gerade Linien auf der Ebene darstellt, so kann die Lösung dieser Gleichungen mit Hülfe der Methode der kleinsten Quadrate durch die Coordinaten eines Punktes der Ebene dargestellt werden. Klingatsch nennt diesen Punkt Minimumspunkt. Die Auflösungsmethode von Pomerantzew beruht auf dem folgenden Theorem: „Der Minimumspunkt ist der Schwerpunkt des Systems der Durchschnittspunkte der gegebenen Geraden, wenn man diese Punkte mit Massen beschwert annimmt, welche durch die Coefficienten der gegebenen Gleichungen und die Gewichte der Beobachtungen bestimmt sind. Die von dem Minimumspunkte auf die gegebenen Geraden gefällten Lote dienen auch zur Bestimmung der wahrscheinlichen Fehler der Unbekannten." Der Zweck der gegenwärtigen Note ist der Beweis eines analogen Theorems auch für den Fall dreier Unbekannten. Wi.

F. Y. Edgeworth. **The asymmetrical probability curve.** Phil. Mag. (5) **41**, 90-99.

Die asymmetrische Wahrscheinlichkeitscurve hat eine Gleichung von folgender Gestalt: $y = \frac{1}{\sqrt{\pi c}} \cdot e^{-\frac{x^2}{c^2}} \left\{1 - \frac{2j}{c^3}\left(\frac{x}{c} - \frac{2}{3}\frac{x^3}{c^3}\right)\right\}$. Nach einigen Bemerkungen über frühere Beweise giebt der Verf. einen neuen nach dem Vorbilde desjenigen für die symmetrische Wahrscheinlichkeitscurve von Morgan Crofton in der Encyclopaedia Brittannica, art. Probability (Bd. **19**, 781). Gbs. (Lp.)

F. Y. Edgeworth. **The compound law of error.** Phil. Mag. (5) **41**, 207-215.

In diesem Artikel wird die Methode der partiellen Differentialgleichungen (die schon in der vorstehend besprochenen Note benutzt ist) angewandt, um die erste Annäherung an das zusammengesetzte Fehlergesetz zu erhärten und eine zweite Annäherung zu entdecken.

Gbs. (Lp.)

K. Pearson. Contributions to the mathematical theory of evolution. Lond. Phil. Trans. **187** A, 253-318; Lond. R. S. Proc. **59**, 69-71, 301-305, **60**, 273-283.

Mathematische Grundlegung und Begriffsbestimmungen für statistische Untersuchungen betreffs Vererbung, Auslese etc. Mehrfach wird betont, dass die normale Frequenzcurve (Gauss'sches Fehlergesetz) in der Statistik durch schiefe Frequenzcurven ersetzt werden muss (Vgl. F. d. M. **26**, 243, 1895). A. S.

C. B. Davenport and C. Bullard. A contribution to the quantitative study of correlated variation and the comparative variability of the sexes. American Ac. **32**, 87-97.

Gertrud Crotty Davenport hat die Müller'schen Drüsen an 8000 Vorderbeinen von 2000 männlichen und 2000 weiblichen Schweinen gezählt. Das Resultat dieser Zählung ist in einer Tabelle direct, in einer zweiten pro mille umgerechnet angegeben. Hieran knüpfen die Verf. folgende Fragen:

1. Wie verhält sich die durchschnittliche Zahl der Drüsen in den beiden Geschlechtern, ferner in dem rechten und linken Bein jedes Geschlechtes?

2. Welches Geschlecht zeigt grössere Variabilität? Ist die Variabilität zwischen dem rechten und linken Bein geringer als die zwischen den beiden Geschlechtern?

3. Welche Relation besteht für die Drüsenanzahl des rechten und linken Beines der Individuen?

Die auch vom mathematischen Standpunkt aus interessirenden Antworten sind:

1. Die durchschnittliche Anzahl der Drüsen ist zwar nicht genau, jedoch leidlich genau gleich bei beiden Geschlechtern; die männlichen Schweine haben etwa 1 $^0/_0$ Drüsen mehr.

2. Die Variabilität verläuft ähnlich wie die Wahrscheinlichkeitscurve.

3. Die Männchen haben eine etwa 2,5 $^0/_0$ grössere Variabilität; die Drüsen sind um 0,8 $^0/_0$ variabler auf der linken Seite als auf der rechten. Die relative Veränderlichkeit in demselben Bein ist bei verschiedenen Geschlechtern ungefähr 1,6 $^0/_0$ grösser als in den beiden Beinen desselben Geschlechts. Bö.

Bennecke. Ueber ein einfaches Verfahren zu Durchschnittsalters-Ermittlungen. Hoffmann Z. **27**, 180-182.

Bemerkungen über die Berechnung des mittleren Klassenalters in Schulen. Lp.

A. Pringsheim. Die Grundlage der modernen Wertlehre: Daniel Bernoulli, Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen. (Samml. ält. u. neuer. staatsw. Schr. No. 9.) Leipzig: Duncker u. Humblot. 60 S. 8°.

Das Werkchen enthält eine Uebersetzung der im Jahre 1738 erschienenen Abhandlung: Specimen theoriae novae de mensura sortis, auctore Daniele Bernoulli. In 16 zum Teil längeren Anmerkungen werden vom Uebersetzer und Herausgeber der Abhandlung Erläuterungen zu ihr nach dem jetzigen Stande der Wissenschaft gegeben. Sehr interessant ist die 20 Seiten starke, von L. Fick verfasste Einleitung, die vom staatswissenschaftlichen Standpunkte aus eine Kritik des Bernoulli'schen Principes der moralischen Hoffnung enthält. Bö.

L. Grossmann. Die Mathematik im Dienste der Nationalökonomie unter Rücksichtnahme auf die praktische Handhabung der Disciplinen der Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik mit einigen, durch selbständige wissenschaftliche Errungenschaften auf dem Gebiete der reinen Mathematik begründeten, neuen Fundamenten der politischen Arithmetik. 8. Lieferung. Wien: Selbstverlag. Suppl.-Band. IV + 80 S. 8°.

L. Grossmann. Die Mathematik im Dienste der Nationalökonomie: Die allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und deren Bedeutung für die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie. I - IV. Beilage zur „Centrale" 1896. 69-80 u. 5-8.

Der Verf. nimmt wesentlich Bezug auf seine Abhandlungen: „Allgemeine Integration der linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung" und „Die Beziehung zwischen der Curve der wahrscheinlichen Lebensdauer und der Curve der Lebenden als Element einer Differentialgleichung zweiter Ordnung und die hieraus entspringenden Conclusionen." Es genügt, auf die Besprechung derselben hinzuweisen. (F. d. M. **21**, 331, 1889.) Gz.

B. Danielewicz. Die mathematischen Grundlagen der Lebensversicherung. Warschau. 335 S. 8° u. X Tafeln. (Polnisch.)

Ein ausführliches elementares Handbuch der mathematischen Versicherungslehre. Der erste Abschnitt behandelt die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, der zweite die Sterblichkeitsstatistik, die Gompertz'schen und Makeham'schen Sterblichkeitsformeln und die Sterblichkeitstafeln der verschiedenen Versicherungsgesellschaften, der dritte Abschnitt die Zins- und Rentenrechnung. Die folgenden sieben Abschnitte sind den praktisch wichtigsten Fragen der Lebensversicherung gewidmet und enthalten die einfachsten Methoden zur Berechnung der Renten, Prämien und die Prämienreserve nach der Zillmer'schen Schreibweise. Das Ganze bildet ein sehr brauchbares und nützliches Hand- und Hülfsbuch. Dn.

E. Fagnart. Sur le calcul des annuités viagères. Mathesis (2) **6**, 64 - 67.

Ein häufiger Fehler bei der Auswertung der Leibrenten besteht darin, dass man die Lebensdauer, ein unbekanntes Ziel, durch die Dauer des mittleren Lebens oder des wahrscheinlichen Lebens darstellt. Die Berechnung der Leibrenten ist dann nur noch eine einfache Aufgabe einer sicheren Rente. Der Verf. erinnert an den wahren Wert der Leibrente und den Sinn des Fehlers, den man begeht, wenn man die Dauer des mittleren Lebens oder des wahrscheinlichen Lebens zur Basis der Rechnung nimmt. Mn. (Lp.)

G. ENESTRÖM. Om lifränteberäkningsmetoderna under sextonhundratalet. Stockh. Öfv. **58,** 41-49.

Der Verf. berichtet über die Methoden, welche im 17. Jahrhundert von J. de Witt (1671) und E. Halley (1693) angewandt wurden, um den Wert einer Leibrente zu berechnen. De Witt betrachtet, wie gewöhnlich, eine ganze Generation von Personen, gruppirt aber diese Personen nach den Sterbealtern und bestimmt für jede solche Gruppe den Kapitalwert der Auszahlungen; durch einfache Summation aller solcher Beträge und Division durch die Anzahl der betreffenden Personen erhält er dann den gesuchten Wert. — Halley dagegen bedient sich wesentlich der gewöhnlichen Methode, d. h. er betrachtet nicht die Gestorbenen, sondern die Ueberlebenden. — Der Verf. fügt zuletzt einige kritische Bemerkungen hinzu über die Verdienste der beiden genannten Mathematiker um die Entwickelung der Leibrententheorie. E.

G. ENESTRÖM. Ett bidrag till mortalitetstabellernas historia före Halley. Stockh. Öfv. **58,** 157-172.

Im Jahre 1671 veröffentlichte J. de Witt eine Schrift „Waerdye van Lyfrenten naer Proportie van Losrenten" (vgl. das vorangehende Referat), worin er u. a. auch eine Hypothese über die Sterblichkeit aufstellte; da aber seine Ausdrücke oft undeutlich oder sogar verwirrend waren, ist er von den historischen Forschern entweder nicht beachtet oder missverstanden worden. Eneström hat sich darum vorgenommen, eine ausführliche Darstellung der Sterblichkeitsbetrachtungen de Witt's zu geben, und zeigt, dass dieser in der That zwei verschiedene Hypothesen aufgestellt hat, die auch zu ganz verschiedenen Sterblichkeitstafeln führen. Beide Hypothesen entsprechen einem Sterblichkeitsgesetze von der Form $L_x = A + Bx$, wo x das Alter und L_x die Anzahl der Ueberlebenden bedeutet; A und B sind Constanten, die für verschiedene Altersklassen besondere Werte annehmen. Der Verf. hat die zwei entsprechenden Sterblichkeitstafeln berechnet und vergleicht sie mit einigen anderen solchen Tafeln aus dem 16. und dem Anfange des 17. Jahrhunderts. E.

G. ENESTRÖM. Befolkningsstatistiska formler för dödligheten, då hänsyn tages till emigration och immigration. Stockh. Öfv. **58,** 225-252.

Vor einigen Jahren (vgl. F. d. M. **23**, 241-242, 244-245, 1891) hat der Verf. zwei Formeln zur Ermittelung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungsstatistik hergeleitet. Diese Formeln sind aber, wie auch gleichzeitig bemerkt und jetzt ausführlich bewiesen wird, theoretisch nur in dem Falle gültig, wo keine Ein- und Auswanderung vorkommt. Sonst müssen sie modificirt werden, und der Verf. zeigt mit Hülfe von Doppelintegralen, wie diese Modificationen auszuführen sind. Die neuen Formeln wendet er auf ein paar specielle Fälle an, und es erhellt daraus, dass die alten Formeln in der Praxis auch bei Ein- und Auswanderung benutzt werden können, ohne dass man Gefahr läuft, irgend einen erheblichen Fehler zu begehen. E.

G. Eneström. Generalisation af ett par formler inom befolkningsstatistiken. Stockh. Öfv. **53**, 403-416.

Verallgemeinerung zweier bevölkerungsstatistischer Sterblichkeitsformeln, welche vom Verf. früher hergeleitet worden sind (vgl. das vorangehende Referat), und von welchen die eine nur für das erste Altersjahr gilt, die andere nur dann richtig ist, wenn die Sterbefälle, die in einem gewissen Altersjahre stattfinden, über das ganze Jahr gleichmässig verteilt sind. Bemerkt sei, dass in der zweiten verallgemeinerten Formel ein Doppelintegral von der Form $\int_0^1\int_0^t f(t)dt\,dx$ auftritt, wo $f(t)$ die Art der Verteilung der Sterbefälle über das Altersjahr angiebt. Sind sie gleichmässig verteilt, so wird $f(t) = t$, und das Integral bekommt dann den Wert $\frac{1}{6}$. E.

G. Eneström. Sur une formule de l'assurance de survie. Archief voor de verzekeringswetenschap en aanverwante vakken (Haag) **2**, 1896, 151-159.

Bei der Berechnung des Wertes einer einseitigen Ueberlebenskapitalversicherung nimmt man gewöhnlich an, dass unter den Paaren, von denen Mann und Frau in demselben Jahre sterben, gleich viele sind, bei denen die Frau vor dem Manne, als bei denen der Mann vor der Frau stirbt. Diese Annahme ist aber im allgemeinen nicht richtig, und der Zweck dieser Note ist, zu untersuchen, in welchen Fällen sie statthaft ist. Das Problem wird vermittelst Integration einer Differentialgleichung gelöst. Zuletzt wird eine specielle, hierher gehörende Frage behandelt, welche zu einer Differenzengleichung führt. E.

E. Phragmén. Sur la théorie des élections multiples. Stockh. Öfv. **53**, 181-191.

In zwei früheren Publicationen (vgl. F. d. M. **26**, 253-254, 1895) hat Phragmén eine besondere proportionale Wahlmethode angegeben und empfohlen. In dieser Note begründet er dieselbe Methode auf einem anderen Wege und leitet eine gewisse Minimaleigenschaft derselben her.

Die Begründung ist zwar mathematisch richtig, beruht aber auf einer Hypothese, welche im allgemeinen unstatthaft sein dürfte. Um zu seiner Methode zu gelangen, ist nämlich Phragmén zu der Annahme genötigt, dass, wenn n Plätze durch Wahl besetzt werden sollen, und es einem Wähler gelungen ist, alle n Plätze zu besetzen, während ein anderer nur den n^{ten} Platz nach seinem Wunsche besetzt hat, diese zwei Wähler doch denselben Anteil an der Repräsentation („part de représentation") bekommen haben. Aber diese Annahme, zu welcher Phragmén wahrscheinlich durch eine wenig glückliche Verallgemeinerung einer Eigenschaft der D'Hondt'schen Methode geführt worden ist, muss wohl als der gewöhnlichen Auffassung widerstreitend bezeichnet werden, und die Phragmén'sche Methode selbst ist also aus principiellen Gründen nur in dem Specialfalle, wo sie mit der D'Hondt'schen identisch wird, zu empfehlen. E.

G. Eneström. Om aritmetiska och statistiska metoder för proportionella val. Stockh. Öfv. **53,** 543-570.

Die theoretische Begründung, welche man bisher den proportionalen Wahlmethoden zu geben versucht hat, bezeichnet der Verf. als unbefriedigend, weil sie Hypothesen benutzt, deren Gültigkeit nichts weniger als unzweifelhaft ist. Nach seiner Ansicht muss man auch überhaupt darauf verzichten, eine Theorie der Proportionalwahlen aus einem allgemeinen Grundsatze herzuleiten. Er schlägt daher einen anderen Weg ein, indem er zuerst eine Definition der proportionalen Wahlmethode aufstellt, welche selbstverständlich für den einfachsten Fall gelten muss, und dann durch successive Erweiterungen eine allgemein gültige Definition zu finden versucht. Es zeigt sich dabei, dass es eine unbegrenzte Anzahl von proportionalen Wahlmethoden giebt, und der Verf. behandelt besonders zwei solche, nämlich die „arithmetische", von der die D'Hondt'sche Methode ein Specialfall ist, und die „statistische", wo die Repräsentanten successive gewählt werden, und jeder Gruppe von Wählern, die einen Repräsentanten schon bekommen hat, bei der Fortsetzung der Wahl nicht die ganze Stimmenzahl, sondern nur ein nach gewissen Grundsätzen reducirter Teil derselben gutgeschrieben wird. Diese letzte Methode wird ferner untersucht und durch Beispiele erläutert. Hieran knüpft der Verf. noch einige Andeutungen über eine allgemeinere Theorie der Wahlen.

E.

Weitere Litteratur.

W. W. R. Ball. Mathematical recreations and problems of past and present times. Third edition. London: Macmillan. 288 S. 8°.

W. A. Bowser. Friendly societies' valuation and other tables, deduced from the sickness and mortality experience of the Manchester unity of oldfellows (1866-70), combined with the mortality of the English life-table (No. 3) at ages 75 and upwards. London.

G. GARDENGHI. Manuale tecnico per le società di mutua soccorso. Manuale Hoepli. (1895). Ref. in Periodico di Mat. **11,** 43.

P. GEORGIÉVSKY. Nouvelle théorie sur l'origine des revenus nets. Berlin. 22 S. 8°.

J. W. GORDON. Mathematical tables (actuarial). London.

E. HEGEMANN. Uebungsbuch für die Anwendung der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate auf die praktische Geometrie. Berlin: Parey. IV + 156 S. 8°.

F. LATOON. On common and perfect magic squares. With examples. London. 140 S. 8°.

E. LUCAS. Récréations mathématiques. 2e édition. Tome II. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 247 S.

DE MANTEL. Le leggi dell'interesse. Scantano.

A. W. NORMAN. Death duty tables. Comprising in an expanded form, 3 tables appended to the succession duty act for valuing successions and annuities. London.

E. PÉREIRE. Tables de l'intérêt composé des annuités et de l'amortissement. 4e édition. Paris. XXXII + 156 S. 4°.

M. H. PIMENTEL. Populaire Handleiding voor Rente- en Levensverzekerings-Berekningen. s'Hage. IV + 112 S. 8°.

H. POINCARÉ. Calcul des probabilités. Leçons professées au cours de physique mathématique pendant le 2e semestre 1893 - 94, rédigées par A. QUIQUET. Paris: Carré. 280 S. 8°.

A. TOLDT. Das Verhältnis der Unterstützungen zu den Beitragsleistungen bei den Bruderladen in Oesterreich. Teil I: Invalidenpensionen. Wien. 112 S. gr. 8°.

L. TORRES. Memoria sobre las maquinas algebricas. Madrid. 108 S. 4° (1895).

A. WERNELL. Lifförsäkringen, dess Grunder, Hafel og Vigt. Stockholm. 64 S. 8°.

Fünfter Abschnitt.

Reihen.

Kapitel 1.

Allgemeines.

B. Sporer. Niedere Analysis (Sammlung Göschen). Leipzig: G. J. Göschen'sche Verl. 174 S. kl. 8°.

Unter dem Titel der niederen Analysis sind nach dem Vorgange von Euler's Introductio in analysin besonders diejenigen Teile der Analysis behandelt, die sich zum Unterrichte an Gymnasien, Realgymnasien u. s. w. eignen. Die Ableitungen sind einfach gehalten und möglichst durch Beispiele erläutert. Die einzelnen Kapiteltitel lauten: I. Kettenbrüche. II. Diophantische Gleichungen. III. Combinationslehre. IV. Wahrscheinlichkeitsrechnung. V. Arithmetische Reihen höherer Ordnung. VI. Figurirte Zahlen. VII. Interpolation. VIII. Summirbare Reihen. Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen. IX. Die Methode der unbestimmten Coefficienten. Umkehrung von Reihen. X. Die binomische Reihe. XI. Die Exponentialreihe. Die logarithmische Reihe. Logarithmen. XII. Die trigonometrischen Functionen. Imaginäre Logarithmen. XIII. Die hyperbolischen Functionen. XIV. Die cyklometrischen Functionen. XV. Die Berechnung der Zahl π. XVI. Unendliche Producte. XVII. Der Satz von Cotes. XVIII. Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Gleichungen mit einer Unbekannten. XIX. Eigenschaften der Coefficienten einer Gleichung. XX. Auflösung der Gleichungen höheren Grades. XXI. Näherungsweise Auflösung der Gleichungen. — Die Ausstattung ist die elegante der Göschen'schen Sammlung. Lp.

A. Pringsheim. Ueber die sogenannte Grenze und die Grenzgebiete zwischen Convergenz und Divergenz. Münch. Ber. **26,** 1896, 605-624.

P. du Bois-Reymond hat eine Function $\tau(\alpha)$ eingeführt, welche für $\alpha = 0$ ohne Maxima und Minima verschwindet und die Grenze der

Convergenz und Divergenz des Integrals $\int_0^a da \frac{\tau(a)}{a}$ bildet; „diese Einführung ist unzulässig."

„Es seien nun c_ν, d_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) zwei monoton gegen Null abnehmende Folgen positiver Zahlen von der Beschaffenheit, dass Σc_ν convergirt, Σd_ν divergirt und dass $d_\nu > c_\nu$ für jedes endliche ν. $\lim_{\nu=\infty} \frac{d_\nu}{c_\nu} = \infty$.

Bedeutet a_ν eine andere positive, monotone Zahlenfolge, so convergirt die Reihe Σa_ν, wenn für alle Werte von ν, zum mindesten von einem bestimmten Werte $\nu = n$ ab, (A) $a_\nu \leqq c_\nu$; sie divergirt, wenn für $\nu \geqq n$ (B) $a_\nu \geqq d_\nu$.

Ist dagegen, wie gross auch ν werden mag, (C) $c_\nu \leqq a_\nu \leqq d_\nu$ (wobei man die Gleichheitszeichen so zu verstehen hat, dass die schon unter (A) und (B) erledigten Fälle $a_\nu = c_\nu$, bezw. $a_\nu = d_\nu$ für $\nu \geqq n$ wegfallen), so kann Σa_ν noch convergiren oder divergiren, sie gehört dem Grenzgebiet zwischen Convergenz und Divergenz an, welches durch die Schranke (c_ν), (d_ν) definirt wird." — Es gelten folgende Sätze:

I. Wie man auch die monotonen Zahlenfolgen (c_ν), (d_ν) annehmen mag, so giebt es stets unendlich viele monotone Zahlenfolgen (a'_ν), welche keiner der drei Klassen (A), (B), (C) angehören; nämlich solche, welche eine der beiden Schranken (c_ν), (d_ν) oder auch beide unendlich oft durchsetzen, also durch eins der folgenden drei Ungleichungs-Paare charakterisirt werden: (A') $a_\lambda < c_\lambda$, $c_\mu \leqq a_\mu \leqq d_\mu$; (B') $a_\lambda > c_\lambda$, $c_\mu \leqq a_\mu \leqq d_\mu$; (C') $a_\lambda < c_\lambda$, $a_\mu > d_\mu$. Dabei bedeuten die λ und μ von einander verschiedene Zahlen, von denen beide Kategorien in unbegrenzter Anzahl vorkommen, und die in den Fällen (A'), (B') die Reihe der ganzen Zahlen ν, zum mindesten für $\nu \geqq n$ vollständig erschöpfen.

II. Wie man auch die monotonen Zahlenfolgen (c_ν), (d_ν) wählen mag, so giebt es stets unendlich viele monoton abnehmende Reihen $\Sigma a'_\nu$, welche nicht dem von den Schranken (c_ν), (d_ν) eingeschlossenen Grenzgebiete angehören, und deren Convergenz und Divergenz dennoch nicht durch Vergleichung von a'_ν mit c'_ν oder d'_ν entschieden werden kann.

Es giebt daher in keinem Falle gleichzeitig eine allgemein gültige Schranke für die Convergenz und eine solche für die Divergenz in dem Sinne, dass die Glieder aller convergenten Reihen (mit monotonen Gliedern) von irgend einem bestimmten Stellenzeiger ab durchweg unterhalb der einen (oberen) Schranke, die aller divergenten Reihen oberhalb der anderen (unteren) Schranke liegen.

III. Für Reihen mit monotonen Gliedern a_ν bildet zwar die Beziehung $\lim_{\nu=\infty} \nu . a_\nu = 0$ eine notwendige Convergenzbedingung, nicht aber irgend eine Beziehung von der Form $\lim_{\nu=\infty} \nu . m_\nu a_\nu = 0$, wie langsam auch m_ν mit ν ins Unendliche wachsen möge.

IV. Wie stark auch die Reihe $\Sigma(1/c_\nu)$ convergiren möge, so giebt es stets divergente Reihen Σa_ν, unter deren (monoton abnehmenden) Gliedern unbegrenzt viele infinitär kleiner sind, als die entsprechenden der Reihe $\Sigma(1/c_\nu)$, d. h. man hat $\liminf C_\nu a_\nu = 0$ (wo lim inf. die untere Unbestimmtheitsgrenze bedeutet).

V. Die Sätze werden auf Integrale von der Form $\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$ übertragen, wo $f(x)$ mit wachsendem x monoton gegen Null abnimmt.

Wz.

W. F. Osgood. Ueber die ungleichmässige Convergenz und die gliedweise Integration der Reihen. Gött. Nachr. 1896, 288-291.

A. 1) Es seien $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... stetige Functionen der reellen Veränderlichen x im Intervall (a, b); dann wird $s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)$ ebenfalls stetig sein. 2) $s_n(x)$ soll gegen einen endlichen Grenzwert $f(x)$ convergiren, wenn x constant bleibt und n ins Unendliche wächst. 3) $f(x)$ soll stetig sein. — Man nehme x_0 im Intervall (a, b) beliebig an. Es sind für die Werte x', x'', ..., n', n'', ..., $\lim\limits_{i=\infty} x^{(i)} = x_0$, $\lim\limits_{i=\infty} n^{(i)} = \infty$ von x, bezüglich n, 3 Fälle zu unterscheiden: $x^{(i)}$, $n^{(i)}$ lassen sich so annehmen, dass a) $\lim\limits_{i=\infty} s_{n^{(i)}}(x^{(i)}) = \infty$ wird; b) dass $\lim\limits_{i=\infty} s_{n^{(i)}}(x^{(i)}) \neq f(x_0)$, ohne dass dabei der Fall a) notwendig vorläge; c) wie auch immer $x^{(i)}$, $n^{(i)}$ angenommen werden, stets ist $\lim\limits_{i=\infty} s_{n^{(i)}}(x^{(i)}) = f(x_0)$. In den 3 Fällen soll x_0 bezüglich als x-, ξ-, ζ-Punkt bezeichnet werden.

G_i sei eine Punktmenge, die nirgends dicht ist und ihre Ableitung enthält. G_1, G_2, ... seien ferner so beschaffen, dass alle Punkte G_i in $G_{i'}$ $(i' > i)$ vorkommen; dann wird die Menge derjenigen Punkte, die eventuell in einer G_i vorkommen, als eine Punktmenge Q bezeichnet: $Q = \lim\limits_{i=\infty} G_i$. Umgekehrt soll jede Menge als eine Q bezeichnet werden, falls sich eine G_i finden lässt, für welche $Q = \lim\limits_{i=\infty} G_i$ ist. Dann gilt Folgendes:

I. Die x-Punkte bilden eine Menge G, und umgekehrt entspricht jeder G eine den Bedingungen A genügende Function $s_n(x)$, deren x-Punkte ausschliesslich aus den Punkten von G bestehen.

Die ζ-Punkte liegen in jedem Intervall überall dicht und nicht abzählbar.

Die ξ-Punkte bilden eine Punktmenge Q, und umgekehrt entspricht jeder Menge Q eine den Bedingungen A genügende Function $s_n(x)$, deren ξ-Punkte ausschliesslich aus den Punkten von Q bestehen.

II. Die Gleichung: (1) $\int_{x_0} \left[\lim\limits_{n=\infty} s_n(x)\right] dx = \lim\limits_{n=\infty} \left[\int_{x_0}^{x} s_n(x)\,dx\right]$

ist richtig, falls im Integrationsintervall kein x-Punkt vorkommt. Das Integral $\int_{x_0}^{x} s_n(x)dx$ $(a \leqq x_0 \leqq b,\ a \leqq x \leqq b)$ wird, als Function von x_0, x betrachtet, mit ins Unendliche wachsendem n gleichmässig gegen $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$ convergiren, wenn im Intervall (a, b) kein x-Punkt vorkommt.

III. Ist das Integral einer gliedweisen Integration der u-Reihe $\int_{x_0}^{x} u_1(x)dx + \int_{x_0}^{x} u_2(x)dx + \cdots$ eine stetige Function von x, und ist die Menge der x-Punkte eine abzählbare, so genügt das, damit die gliedweise Integration gestattet sei, d. h. damit (1) besteht. Ist dagegen G nicht abzählbar, so ist die erste Bedingung nicht genügend, da es dann stets u-Reihen giebt, deren x-Punkte ausschliesslich aus den Punkten der Menge G bestehen, und welche, gliedweise integrirt, stetige Functionen bilden, die dem Integral der u-Reihe nicht gleich sind.

IV. Besitzt die Function $U(x)$ eine für alle Werte von x $(a \leqq x \leqq b)$ stetige Ableitung, und wird $U(x)$ durch eine Reihe dargestellt: $U(x) = U_1(x) + U_2(x) + \cdots$, wobei $U_i(x)$ eine stetige Ableitung $u_i(x)$ zukommt, convergirt ausserdem die Reihe der Ableitungen gegen einen stetigen Grenzwert $u(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots$, so lässt sich die U-Reihe gliedweise differentiiren: $U'(x) = u(x)$.

Die Beweise dieser Sätze werden demnächst im Amer. Journ. of Math. mitgeteilt werden. Wz.

W. F. Osgood. A geometrical method for the treatment of uniform convergence and certain double limits. American M. S. Bull. (2) **3**, 59-86.

Wann darf eine Reihe gliedweise 1) integrirt, 2) differentiirt werden? 3) Wann darf in einem Doppelintegral die Integrationsordnung umgekehrt, und 4) wann darf unter dem Integrationszeichen differentiirt werden? — Diese Fragen bespricht der Verf. und erläutert sie geometrisch, definirt die gleichmässige Convergenz und begründet folgende Sätze.

Eine gleichmässig convergente Reihe kann innerhalb eines endlichen Intervalls gliedweise integrirt werden.

Wenn im Intervall (a, b) die Reihe (1) $u_1(x) + u_2(x) + \cdots$ wenigstens für einen Wert x_0 convergirt, $u_i(x)$ stetig ist und eine stetige Ableitung $u_i'(x)$ besitzt, und wenn die Reihe (2) $u_1'(x) + u_2'(x) + \cdots$ gleichmässig convergirt, so convergirt die Reihe (1) für alle Werte von x im Intervall (a, b); wird der Wert von (1) durch $f'(x)$ bezeichnet, so hat $f(x)$ eine stetige Ableitung $f'(x)$, die durch gliedweises Differentiiren aus (1) erhalten werden kann, also durch (2) dargestellt wird.

Wenn die Functionen $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... innerhalb des ganzen

Intervalls (a, b) stetig sind $(a \leqq x \leqq b)$, so existirt eine Function $f(x, y)$ der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y, die innerhalb des Bereiches $a \leqq x \leqq b$, $y \geqq 0$ durchweg stetig ist und die Eigenschaft hat: $u_i(x) = \int_{i-1}^{i} f(x, y)\,dy$, um so mehr, wenn die Reihe (1) gegen eine Grenze $f(x) = \int_0^\infty f(x, y)\,dy$ convergirt. Wz.

A. S. Chessin. On non-uniform convergence of infinite series. American J. **18**, 128-129.

Wenn $f(x) = \sum_1^\infty f_m(x)$ für alle Werte von x in einem gegebenen Intervall mit Ausnahme von $x = x_0$ convergirt, so stellt die nicht gleichmässig convergente Reihe $F(x) = \sum_1^\infty \theta(x) f_m(x)$ eine stetige Function dar, wenn eine beliebig kleine endliche Zahl h gefunden werden kann, für welche $|\theta(x_0 \pm \eta h) f(x_0 \pm \eta h)| < \varepsilon$ $(0 < \eta \leqq 1)$ ist. Ebenso sind $\sum_1^\infty \{a_m + \theta(x) f_m(x)\}$, $\sum_1^\infty \{\chi_m(x) + \theta(x) f_m(x)\}$ nicht gleichmässig convergente Reihen, welche unter der angegebenen Bedingung stetige Functionen darstellen. Wz.

A. S. Chessin. On infinite products. Johns Hopkins Univ. Circ. **15**, 38-39.

I. Absolut convergente unendliche Producte reeller Factoren sind unbedingt convergent.

II. Semi-convergente unendliche Producte reeller Factoren sind bedingt convergent.

III. Durch eine geeignete commutative Veränderung in der Ordnung der Factoren kann man bewirken, dass ein semiconvergentes unendliches Product reeller Factoren gegen eine willkürlich gewählte Zahl N convergirt, die positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem das unendliche Product positiv oder negativ ist.

Diese Sätze werden ohne Benutzung der unendlichen Reihen bewiesen. Wz.

A. S. Chessin. A new classification of infinite series. Johns Hopkins Univ. Circ. **15**, 39.

Der Verf. schlägt folgende Einteilung der unendlichen Reihen vor: I. Convergente, d. h. solche, welche unterworfen sind dem associativen, commutativen und distributiven Gesetz; sie sind absolut und unbedingt convergent. II. Solche, die dem associativen Gesetze ohne Einschränkung gehorchen, aber nur teilweise dem distributiven und gar nicht dem commutativen. Es sind die semi-convergenten Reihen; sie sind nur be-

dingungsweise convergent. III. Solche, die keinem der drei genannten Gesetze gehorchen. Es sind die oscillirenden Reihen, sie sind bedingungsweise convergent. IV. Solche Reihen, welche den drei Gesetzen gehorchen, aber nicht convergent sind. Sie sind unbedingt divergent und werden in bestimmter Weise unendlich. Wz.

A. S. Chessin. **Demonstration of the existence of a limit for regular sequences of rational numbers.** Johns Hopkins Univ. Circ. **15**, 37-38.

Eine nach einem gewissen Gesetze gebildete, unendliche Folge von rationalen Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ heisst regulär, wenn die absoluten Beträge ihrer Glieder sämtlich kleiner als eine bestimmte endliche Zahl bleiben, und wenn gleichzeitig eine Zahl m sich angeben lässt von der Art, dass die Differenz $|\gamma_{m+n}-\gamma_m|$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ kleiner als jede beliebig kleine Zahl gemacht werden kann.

Wenn in einer Folge von rationalen Zahlen von einer gewissen Stelle an die Glieder beständig wachsen und ihrem absoluten Betrage nach kleiner bleiben, als eine endliche bestimmte Zahl, oder wenn die Glieder der Folge von einer gewissen Stelle an beständig abnehmen, ohne dass ihre absoluten Beträge unter eine endliche bestimmte Zahl sinken, so ist die Folge regulär. Wz.

A. S. Chessin. **Additional note on divergent series.** American M. S. Bull. (2) **2**, 177-179.

„In einer früheren Note (F. d. M. **26**, 263, 1895) war gezeigt worden, dass jede divergirende Reihe, die zwischen endlichen Grenzen oscillirt, durch eine geeignete Anordnung ihrer Glieder convergent gemacht werden kann. Wir wollen nun jene Resultate auf den Fall ausdehnen, wo eine oder beide Grenzen, zwischen denen die Reihe oscillirt, unendlich sind. Zu diesem Zwecke genügt es, neben regulären Folgen von Zahlen solche Folgen zu betrachten, welche in einer bestimmten Weise unendlich werden.“ Lp.

F. Cajori. **On the multiplication and involution of semi-convergent series.** American J. **18**, 195-209.

Bildet man nach Cauchy's Multiplicationsregel die q^{te} Potenz der semiconvergenten Reihe (I) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^r}$ $(0 < r \leq 1)$, wo q eine positive ganze Zahl ist und der Bedingung $(q-1)/q < r$ genügt, so ist dieselbe convergent; dasselbe gilt für die p^{te} Potenz, wenn p eine positive ganze Zahl und kleiner als q ist. Ist jedoch $(q-1)/q > r$, so ist die q^{te} Potenz der obigen Reihe divergent.

Multiplicirt man die Reihe (I) mit der Reihe (II) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ $(0 < s \leq 1)$ nach der Cauchy'schen Regel, so muss $r+s > 1$ sein, wenn das Product convergent sein soll.

Das Product der Reihen:

$$\text{(III)} \qquad \sin\theta + \frac{1}{2^r}\sin 2\theta + \frac{1}{3^r}\sin 3\theta + \cdots + \frac{1}{n^r}\sin n\theta + \cdots,$$

$$\text{(IV)} \qquad \sin\varphi + \frac{1}{2^s}\sin 2\varphi + \frac{1}{3^s}\sin 3\varphi + \cdots + \frac{1}{n^s}\sin n\varphi + \cdots$$

ist convergent, wenn $r+s>1$ ist.

Ist $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eine Reihe positiver Glieder, und sind die Reihen $\Sigma(a_{2n}-a_{2n+1})$ und $\Sigma(a_{2n+1}-a_{2n+2})$ absolut convergent und wachsen schliesslich in demselben Masse wie $\Sigma\frac{1}{n\lambda_n\lambda_n^2\ldots\lambda_n^{c-1}(\lambda_n^c)^x}$, so ist das Product der beiden convergenten Reihen:

$$\text{(V)} \qquad a_1\sin\theta + a_2\sin 2\theta + \cdots + a_n\sin n\theta + \cdots,$$

$$\text{(VI)} \qquad b_1\sin\varphi + b_2\sin 2\varphi + \cdots + b_n\sin n\varphi + \cdots$$

convergent, wenn $r+s>1$ ist und r und s die grössten Werte bedeuten, welche den Relationen $a_n \gtreqless 1/n^r$ und $b_n \gtreqless 1/n^s$ für alle Werte von n genügen; dabei bedeuten $\lambda_n, \lambda_n^2, \ldots$ bezüglich $\log n$, $\log\log n, \ldots$.

Die q^{te} Potenz der Reihe (III) ist convergent, wenn $(q-1)/q<r$ ist. — Die q^{te} Potenz der Reihe (V) ist convergent, wenn $(q-1)/q<r$ und r der grösste Wert ist, welcher für alle Werte von n der Relation $a_n \leqq 1/n^r$ genügt. Wz.

R. Bryant. Note on the convergency of series. Lond. M. S. Proc. **27,** 69-70.

Setzt man $\log_a = l$, $\log_a\log_a = l^2, \ldots$ so sind die Reihen $\Sigma f(n)$ und $\Sigma f(n)/n$ beide convergent oder beide divergent.

Die Convergenz der Reihe $\Sigma f(n)$ wird durch Vergleichung mit der Reihe $\Sigma\frac{r^{l^k n}}{n\, l n\, l^2 n\ldots l^{k-1}n}$ festgestellt. Wz.

M. J. M. Hill. On Cauchy's condensation test for the convergency of series. Messenger (2) **26,** 102-105.

Ein ganz algebraisch gehaltener Beweis für die Kohn'sche Ausdehnung des Cauchy'schen Satzes, dass, wenn $f(n)$ eine einwertige stetige Function von n ist, die positiv ist und mit zunehmendem n derartig abnimmt, dass die Grenze von $f(n)$ bei unendlichem n Null ist, dann die Reihen $\Sigma f(n)$ und $\Sigma a^n f(a^n)$ beide convergent oder beide divergent sind, wo a eine beliebige positive ganze oder gebrochene Zahl grösser als 1 bedeutet. Glr. (Lp.)

É. Borel. Fondements de la théorie des séries divergentes sommables. Journ. de Math. (5) **2,** 103-122.

É. Borel. Sur la région de sommabilité d'un développement de Taylor. C. R. **128,** 548-549.

É. Borel. Sur les séries de Taylor. C. R. **128,** 1051-1052.

É. Borel. Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure. Journ. de Math. (5) **2,** 441-451.

Der Verf. ordnet der Folge reeller Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ die Potenzreihe $x(a) = x_0 + x_1 a + x_2 \frac{a^2}{2!} + \cdots + x_n \frac{a^n}{n!} + \cdots$ zu und nennt, wenn für ein durch positive Werte ins Unendliche wachsendes a $\lim\limits_{a=\infty} [e^{-a} x(a)] = x$ wird, x „die verallgemeinerte Grenze der Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots$". Liegen von einem gewissen Werte von n an die Grössen x_n zwischen zwei festen Zahlen p und q, so liegt auch die verallgemeinerte Grenze, falls eine solche existirt, zwischen p und q.

Die Reihe reeller Grössen (1) $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$ heisst „summirbar", wenn die Folge $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$, wo s_n die Summe der ersten n Glieder bedeutet ($s_0 = 0$), eine verallgemeinerte Grenze s hat.

Eine notwendige Bedingung für die Summirbarkeit der Reihe (1) ist $\lim\limits_{n=\infty} u_n = 0$.

Setzt man
$$s(a) = s_0 + s_1 a + s_2 \frac{a^2}{2!} + s_3 \frac{a^3}{3!} + \cdots,$$
$$u(a) = u_0 + u_1 a + u_2 \frac{a^2}{2!} + u_3 \frac{a^3}{3!} + \cdots,$$
so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung für die Summirbarkeit der Reihe (1) darin, dass das Integral $\int_0^\infty e^{-a} u(a)\, da$ einen Sinn hat.

Eine hinreichende Bedingung für die Summirbarkeit der Reihe (1) besteht darin, dass $\lim\limits_{a=\infty} [a^2 e^{-a} u(a)] = 0$, oder dass Null die verallgemeinerte Grenze von $(n+1)(n+2)\, u_n$ ist.

Für die Beispiele $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \cdots$ ergiebt sich $s = \frac{1}{2}$, bezüglich $s = \frac{1}{3}$.

Sind $x_0, x_1, x_2, \ldots$ in einem gewissen Bereich analytische Functionen einer complexen Veränderlichen z, so geht $x(a)$ in eine Function $x(a, z)$ über; dann sagt der Verf.: Die Functionen x_n convergiren gleichmässig (uniformément) gegen die verallgemeinerte Grenze $x(z)$, wenn das Product $e^{-a} x(a, z)$ gleichmässig gegen $x(z)$ convergirt, sobald $a = \infty$ wird.

Wenn eine Folge von innerhalb eines Bereiches D analytischen Functionen einer complexen Veränderlichen in D gleichmässig gegen eine verallgemeinerte Grenze convergirt, so ist diese Grenze innerhalb D gleichfalls eine analytische Function.

Wenn eine in einem einfach zusammenhängenden Bereiche gleichmässig summirbare Reihe in einem Teile dieses Bereiches gleichmässig convergirt, so stellt die Summe im ganzen Bereiche dieselbe analytische Function dar.

Als Beispiel wird gezeigt, dass die Entwickelung von $D_z \log \Gamma(1+z)$ nach wachsenden Potenzen gleichmässig convergirt im ganzen Bereich, der durch die Ungleichung: reeller Teil von $z < k < -1$ definirt ist.

Als numerisches Beispiel wird $(1+x)^m$ für $x = 2$, $m = \frac{1}{2}$ behandelt.

Der Verf. verallgemeinert in folgender Weise seinen Begriff der verallgemeinerten Grenze: Ist $\varphi(a) = c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \cdots$ eine Potenzreihe, für welche der Quotient $\varphi(a)/a^n$ mit unendlich wachsendem a für jeden festen Wert von n selbst unendlich zunimmt, so heisst die Grenze, die der Ausdruck $\theta(a) = \frac{1}{\varphi(a)}(c_0 s_0 + c_1 a s_1 + \cdots + c_n a^n s_n + \cdots)$ für ein positives, unendlich grosses a annimmt, die verallgemeinerte Grenze der Grössen $s_0, s_1, s_2, \ldots$.

In manchen Fällen ist es nützlich, $\varphi(a) = e^{a^k}$ zu nehmen, wo k eine ganze Zahl ist.

Für die Taylor'sche Reihe ergiebt sich die Frage, ob dieselbe über ihren Convergenzkreis (der Radius desselben sei endlich) analytisch fortgesetzt werden kann, oder ob der Convergenzkreis eine Grenze für die Fortsetzbarkeit der Reihe bildet. Es gelten die Sätze:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass für die Fortsetzbarkeit einer Taylor'schen Reihe der Convergenzkreis kein Grenzkreis ist, besteht darin, dass sie in einem beliebigen Bereich ausserhalb desselben summirbar sei (oder dass der Bereich ihrer Summirbarkeit über den Convergenzkreis hinausreicht).

Für die Reihe $\Sigma a_n z^{c_n}$, in welcher die Exponenten c_n wachsende ganze Zahlen und die Coefficienten a_n beliebige Zahlen bedeuten, ist der Convergenzkreis ein Grenzkreis, wenn von einem gewissen Werte von n an das Verhältnis $\frac{c_{n+1} - c_n}{\sqrt{c_n}}$ grösser als eine feste Zahl k ist.

Giebt man dem Modul von z einen festen Wert r, und erreicht der Modul der der Taylor'schen Reihe $\Sigma a_n z^n$ „associirten" Reihe $\Sigma \frac{a_n z^n}{n!}$ sein absolutes Maximum nur für einen Wert ω des Arguments, so soll dieser Wert ω das Hauptargument für den Modul r heissen. Dann gelten die Sätze:

Die notwendige Bedingung, dass es auf dem Convergenzkreis einer Taylor'schen Reihe nur isolirte singuläre Punkte giebt, besteht darin, dass bei unendlich wachsendem r das Hauptargument für den Modul r der associirten Potenzreihe gegen eine oder mehrere bestimmte Grenzen convergirt.

Die notwendige Bedingung, dass der Convergenzkreis einer Taylor'schen Reihe ein Grenzkreis für dieselbe sei, besteht in der Möglichkeit, eine Zahl r_0 anzugeben, für welche das Hauptargument der associirten Function für die Werte von r, welche grösser als r_0 sind, sich beständig in einem festen Intervall befindet, das kleiner als 2π ist. Wz.

É. Borel. Applications de la théorie des séries divergentes sommables. C. R. **122**, 805-807.

Die divergente Entwickelung $\varphi(w, \mu) = A_0 + A_1\mu + A_2\mu^2 + \cdots$, welche Stieltjes in seiner Arbeit: „Sur les fractions continues" der von Poincaré behandelten Reihe

$$\varphi(w, \mu) = 1 + \frac{w}{1+\mu} + \frac{w^2}{1+2\mu} + \frac{w^3}{1+3\mu} + \cdots$$

gegeben hat, ist summirbar (in dem von Borel angegebenen Sinne, wie sich ergiebt, wenn man $\varphi(a) = e^{\sqrt{a}} + e^{-\sqrt{a}}$ setzt) in einem Bereich, welchem alle reellen positiven Werte von μ angehören. Wz.

M. Petrovitch. Un problème sur les séries. Nouv. Ann. (3) **15**, 58-63.

Es soll die Summe der Reihe

$$\Phi(x) = \frac{\varphi(1)x}{1} + \frac{\varphi(2)x^2}{2!} + \cdots + \frac{\varphi(n)x^n}{n!} + \cdots$$

durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt werden, wenn die Summe der Reihe $F(x) = \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \cdots + \varphi(n)x^n + \cdots$ bekannt ist.

Setzt man $u = \dfrac{x}{a+zi}$, $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{czi}dz$, wo c und ϱ positive Constanten sind, a eine Constante bedeutet, deren reeller Bestandteil positiv ist, und $|u| < \varrho$ ist, so ist

$$\Phi(cx) = \frac{ce^{ac}}{2\pi}J, \quad \Phi(x) = \frac{e^a}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{zi}dz.$$

Ist nun $F(u)$ eine beliebige holomorphe Function von u und $F(0) = 0$, so ist $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{F^n(0)x^n}{(n!)^2} = \frac{e^a}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{zi}dz.$

Setzt man $w = 1/(a+zi)$, so gilt die Formel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(w)e^{zxi}dz = \frac{2\pi}{xe^{ax}}\Phi(x)$$

für alle positiven Werte von x, für welche $\Phi(x)$ convergirt.

Ebenso ist die Formel $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi(z)e^{zxi}dz = \frac{2\pi}{xe^{ax}}\sum_1^\infty \frac{\theta(n, a)x^n}{n!}$ für alle positiven Werte von x gültig, für welche die Reihe convergirt; $\psi(z)$ bedeutet darin eine Function, die in jedem endlichen Intervall nur eine endliche Anzahl Maxima und Minima hat und für $x = \pm\infty$ gegen Null convergirt; $|u|$ sei hinreichend klein, der reelle Bestandteil von a positiv und $\psi\left[\left(a - \frac{1}{n}\right)i\right] = \sum_1^\infty \theta(n, a)u^n$. Wz.

N. Bougaief. Sur le théorème de Taylor avec l'approximation du troisième degré. C. R. **122**, 369-370.

Durch Anwendung der bekannten Formel:

$$\alpha = \alpha_1 - \frac{2f(\alpha_1)f'(\alpha_1)}{2f'^2(\alpha_1)-f(\alpha_1)f''(\alpha_1)}$$
$$+\frac{3f''(\alpha_1)-2f'(\alpha_1)f'''(\alpha_1+\theta\omega_1)}{3[2f'^2(\alpha_1)-f(\alpha_1)f''(\alpha_1)]}\omega_1^3+\frac{f''(\alpha_1)f'''(\alpha_1+\theta\omega_1)}{2f'^2(\alpha_1)-f(\alpha_1)f''(\alpha_1)}\frac{\omega_1^4}{12},$$

in welcher α_1 und ω_1 die erste Annäherung und die erste Correctur der Wurzel der Gleichung $f(\alpha)=0$ bezeichnen, auf die Gleichung $\varphi(\alpha) = x+h$, worin φ die Umkehrung der Function ψ bedeutet, ergiebt sich die Formel

$$\alpha = \psi(x+h) = \alpha_1 - \frac{2[\varphi(\alpha_1)-(x+h)]\varphi'(\alpha_1)}{2\varphi'^2(\alpha_1)-\varphi''(\alpha_1)[\varphi(\alpha_1)-(x+h)]}+R;$$

in derselben sind für α_1, ω_1 die Ausdrücke:

$$\alpha_1 = \psi(x)+h\psi'(\alpha)+\cdots+\frac{h^n}{n!}\psi^{(n)}(x),\ \omega_1=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\psi^{(n+1)}(x+\theta_1 h)$$

zu setzen. R hängt dann von h^{3n+3} ab. Wz.

Ed. Lemaire. Sur les séries entières à plusieurs variables indépendantes. Darboux Bull. (2) **20**, 286-292.

Zeichnet man in der Ebene der x einen Kreis mit dem Radius r und in derjenigen der y einen Kreis mit dem Radius r' (x, y seien complexe Veränderliche), so heissen r und r' „associirte Convergenzradien“, wenn die Reihe (1) $\Sigma\Sigma a^{pq}x^py^q$ für jeden Punkt innerhalb dieser Kreise absolut convergirt, für jeden Punkt ausserhalb derselben divergirt. Die sich darbietende Aufgabe, die zwischen zwei associirten Convergenzradien r und r' bestehende Gleichung (2) $f(r,r')=0$ zu finden, will der Verf. nicht behandeln, er beschränkt sich auf Radien, die in einem gegebenen Verhältnis K stehen.

Man definire die obere Grenze einer reellen Grösse mit zwei Indices h_{pq} $(p+q=n)$ für $n=\infty$ als eine Zahl H von der Beschaffenheit, dass, wie klein auch ε angenommen sein möge, die Grössen h_{pq} von einem hinreichend grossen Werte N von n an sämtlich kleiner als $H+\varepsilon$ werden, während es Werte giebt, die grösser als $H-\varepsilon$ sind, wie gross n auch werden mag.

Bezeichnet man die obere Grenze von $|\sqrt[n]{a_{pq}K^q}|$ für $n=\infty$ durch $\lambda(K)$, so gilt der Satz: Die Zahlen (3) $r=\frac{1}{\lambda(K)}$, $r'=\frac{K}{\lambda(K)}$ bestimmen für ein beliebiges K ein System von Convergenzradien, und die Relation (2) hat die Form (4) $r\lambda(r'/r)=1$.

Bezeichnet man die obere Grenze von $|\sqrt[n]{f_n(x, y)}|$ für $n=\infty$ durch $\lambda(r, \theta, r', \theta')$, wo $f_n(x, y)$ eine beliebige Function der complexen

Veränderlichen $x = re^{i\theta}$ und $y = r'e^{i\theta'}$ ist, so ist die Reihe (5) $f_0(x, y) + f_1(x, y) + \cdots + f_n(x, y) + \cdots$ absolut convergent für die Punkte, die der Bedingung $\lambda(r, \theta, r', \theta') < 1$ genügen; sie divergirt, wenn $\lambda(r, \theta, r', \theta') > 1$ ist.

Bedeutet $f_n(x, y)$ eine homogene Function n^{ten} Grades, so nimmt $\lambda(r, \theta, r', \theta')$ die Form $r\mu(r'/r, \theta' - \theta)$ an; die Convergenz der Reihe (5) hängt also von der Differenz der Argumente $\theta' - \theta$ ab. Wz.

W. Williams. On the convergency of the Fourier series. Phil. Mag. (5) **42**, 125-148.

Die Fourier'sche Reihe ist von einer solchen Wichtigkeit, dass neue Methoden zu ihrer Behandlung, auch wenn sie keine neuen Ergebnisse liefern, notwendig Interesse beanspruchen. Die besondere Vereinfachung jedoch, auf welche der Verf. Gewicht legt, nämlich die Methode zur Auswertung der Dirichlet'schen Summe S_n durch den zuerst erbrachten Nachweis, dass die ausserhalb der Nachbarschaft von x liegenden Teile für $n = \infty$ verschwinden, ist keineswegs neu. Die besondere Art, in welcher die Auswertung bewirkt wird, ist interessant, würde aber durch eine etwas grössere Ausführlichkeit gewinnen. Die Substitution von $F(x) + \theta F'(x)$ in § 16 für $F(x+\theta)$ scheint ganz entbehrlich und widerspricht dem Wesen der Bemerkungen in § 23, wo darauf hingewiesen wird, dass an Stelle von $F(x+\theta)$ der Ausdruck $F(x) + \{F(x+\theta) - F(x)\}$ eingesetzt werden sollte. Der übrige Teil der Abhandlung bedarf keiner besonderen Bemerkung, da er sich auf ziemlich vertrautem Boden bewegt. Gbs. (Lp.)

A. Berger. Sur le développement de quelques fonctions discontinues en séries de Fourier. Upsala Nova Acta (3) **15**$_2$, 33 S. (1895).

Es sei
$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < 1 = x_n,$$
$$\varphi(x) = c_0 + c_1 + \cdots + c_s \quad \text{für} \quad x_s < x < x_{s+1},$$
$$\varphi(x_s) = c_0 + c_1 + \cdots + c_{s-1} + \tfrac{1}{2}c_s \quad \text{für} \quad 0 < s < n,$$
$$\varphi(x_0) = c_0, \quad \varphi(x_n) = c_0 + c_1 + \cdots + c_{n-1},$$
(c_0, c_1, ..., c_n beliebige Constanten). Der Verf. beschäftigt sich eingehend mit der Entwickelung solcher Functionen $\varphi(x)$ in Fourier'sche Reihen und wird dabei zu einer Menge von zahlentheoretischen und reihensummatorischen Relationen geführt, welche grösstenteils ziemlich complicirt sind. Bdn.

M. Lerch. Sur la transformation abélienne des séries trigonométriques. Bull. intern. de l'Ac. François Joseph. 1896, 4 S.

Setzt man in der Abel'schen Identität
$$\sum_{\mu=h}^{m} a_\mu b_\mu = \sum_{\mu=h}^{m-1} (a_\mu - a_{\mu+1})(b_h + b_{h+1} + \cdots + b_\mu) + a_m(b_h + b_{h+1} + \cdots + b_m)$$

$b_\mu = \cos 2\mu x\pi$ und wendet sie auf die als convergent vorausgesetzte trigonometrische Reihe $f(x) = \sum_{\mu=h}^{\infty} a_\mu \cos 2\mu x\pi$ $(0 < x < 1;\ h \geqq 0)$ an, so erhält man die Formel:

$$\sum_{\mu=h}^{\infty} a_\mu \cos 2\mu x\pi = \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{\nu+1} V^{2\nu} a_h \frac{\sin(2h+2\nu-1)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+1}}$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^{\nu} V^{2\nu+1} a_h \frac{\cos(2h+2\nu)x\pi}{(2\sin x\pi)^{2\nu+2}}$$
$$+ \frac{(-1)^k}{(2\sin x\pi)^{2k}} \sum_{\mu=h}^{\infty} V^{2k} a_\mu \cos(2\mu+2k)x\pi,$$

worin gesetzt ist: $Va_\mu = a_\mu - a_{\mu+1}$, $V^2 a_\mu = Va_\mu - Va_{\mu+1}$, $V^3 a_\mu = V^2 a_\mu - V^2 a_{\mu+1}$, ...

Aehnliche Entwickelungen werden für die Reihen:

$$\sum_{\mu=h}^{\infty} b_\mu \sin 2\mu x\pi, \quad \sum_{\mu=h}^{\infty} a_\mu \cos(2\mu+1)x\pi \quad \text{und} \quad \sum_{\mu=h}^{\infty} b_\mu \sin(2\mu+1)x\pi$$

gegeben, die Resultate auf

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{e^{2\mu x\pi i}}{w+\mu}, \quad \sum_{\mu=1}^{\infty} \log\frac{\mu}{\mu+1} \sin(2\mu+1)x\pi, \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\cos 2\mu x\pi}{(w+\mu)^s}$$

angewandt; dadurch ergiebt sich z. B.

$$w \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z^\mu}{w+\mu} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\binom{w+\mu}{\mu}} \frac{z^\mu}{(1-z)^{\mu+1}};$$

ferner für $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$:

$$\frac{\Gamma'(x+\frac{1}{2})}{\Gamma(x+\frac{1}{2})} = \Gamma'(1) - \log 2\pi + \frac{\pi}{2} \operatorname{tang} x\pi$$
$$-2 \sum_{\mu=1}^{\infty} (V^\mu \log h)_{h=1} \frac{\cos(2\mu+1)x\pi}{(2\cos x\pi)^{\mu+1}};$$

endlich, wenn $1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + \cdots = \zeta(s)$ gesetzt wird,

$$(1-2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu+1}} \left(V^\nu \frac{1}{w^s}\right)_{w=1}.$$

Wz.

M. Lerch. Ueber die Abel'sche Transformation trigonometrischer Reihen. Rozpravy 5, No. 24. 5 S. (Böhmisch).

Durch Anwendung der Abel'schen Identität auf die Transformation trigonometrischer Reihen werden einige formal interessante Resultate gewonnen, namentlich auch ein stets convergenter Ausdruck für die Riemann'sche Function $\zeta(s)$ (vergl. das vorangehende Referat). Sda.

W. A. Steklow. Ueber die Entwickelung einer gegebenen Function in eine Reihe nach den harmonischen Functionen. Charkow Ges. 5, 60-74. (Russisch.)

Es giebt für jede geschlossene Oberfläche (S) eine unendliche Reihe positiver Zahlen K_s $(s = 1, 2, \dots)$ und entsprechender Functionen u_s $(s = 1, 2, \dots)$, welche die Bedingungen $\Delta U_s + K U_s = 0$ innerhalb der (S) und $U_s = 0$ auf (S) erfüllen. (H. Poincaré: „Sur les équations de la physique mathématique". Palermo Rend. **8**, 57-156; F. d. M. **25**, 1526-1532, 1893/94). Der Verf. giebt einen einfachen Beweis des folgenden Satzes: „Wenn die Reihe $\sum_{s=1}^{s=\infty} U_s \int f U_s \, d\tau$ gleichmässig convergirt, so hat man $f = \sum_{s=1}^{s=\infty} U_s \int f U_s \, d\tau$". Wi.

N. W. Bugaiew. Die Methode der successiven Annäherungen. Die Anwendung auf die Ableitung der Theoreme von Taylor und Lagrange in modificirter Form. Mosk. Math. Samml. **18**, 586-598. (Russisch.)

Bericht auf S. 70 dieses Bandes.

Ch. Méray. Nouveaux exemples d'interpolations illusoires. Darboux Bull. (2) **20**, 266-270.

Es bezeichne $f(x)$ eine Function, welche innerhalb eines gegebenen Flächenraumes S_x holotrop ist; $x_1, x_2, \dots, x_n$ seien beliebige, von einander verschiedene Grössen in S_x, $f_n(x)$ das durch die n numerischen Gleichungen $f_n(x_1) = f(x_1)$, $f_n(x_2) = f(x_2)$, $\dots$, $f_n(x_n) = f(x_n)$ bestimmte Polynom, dessen Grad höchstens gleich $n-1$ ist; endlich sei $\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$; dann gilt die Formel $f(x) - f_n(x) = \omega(x) E_t \dfrac{f(t)}{[\omega(t)(t-x)]}$, wenn x in S_x liegt und das Zeichen E sich auf die Werte $x, x_1, x_2, \dots, x_n$ erstreckt. Diese Formel wird für den Fall specialisirt, dass $f(x)$ ein rationaler Bruch ist, und dann auf $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ und $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ angewandt.

Im ersten Falle wird $n = 2\nu$ angenommen, statt der Grössen $x_1, \dots, x_n$ werden die von Null verschiedenen Werte $\pm\xi_1, \pm\xi_2, \dots, \pm\xi_n$ gesetzt, dann ergiebt sich

$$\frac{1}{x^2+1} - f_n(x) = \frac{(-1)^\nu}{x^2+1}\left(\frac{x^2-\xi_1^2}{1+\xi_1^2} \cdots \frac{x^2-\xi_\nu^2}{1+\xi_\nu^2}\right).$$

Bezeichnet man jetzt durch Ξ, Θ zwei beliebige positive Grössen, von denen die zweite > 1 ist, und nimmt die Grössen ξ_ν kleiner als Ξ, x reell und so an, dass $|x| > \sqrt{\Theta^2 + \Xi^2 + \Theta\Xi^2}$ ist, so wird die rechte Seite grösser als Θ^ν und daher mit unendlich wachsendem ν selbst unendlich.

Im zweiten Beispiel $\left(f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}\right)$ bedeuten $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_{\nu'}$, $\xi''_1, \xi''_2, \dots, \xi''_{\nu''}$ reelle Grössen, die sämtlich zwischen 0 und 1 (mit

Ausschluss der Grenzen) liegen, n ist gleich $2\nu' + 2\nu''$. Für $x = 0$ ergiebt sich $\left(\frac{1}{x^2-1}\right)_{x=0} - f_n(0) = 2^{\nu''} \frac{\xi_1'^2}{1-\xi_1'^2} \cdots \frac{\xi_{\nu'}'^2}{1-\xi_{\nu'}'^2}$; nimmt man jetzt die Grössen $\xi > \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ an, so wird $\frac{\xi^2}{1-\xi^2} > 2$; daher wird auch in diesem Falle für ein hinreichend grosses ν'' die Formel illusorisch.

Wz.

E. Netto. Ein Analogon zu den Euler'schen Interpolationsformeln. Schlömilch Z. 41, 107-111.

Es sei $p_i(z) = (z-z_{i_1})(z-z_{i_2}) \dots (z-z_{i_m}) \quad (i_a < i_{a+1})$,
$p_i(z) = z^m - \sigma'(i_1, \dots, i_m) z^{m-1} + \sigma''(i_1, \dots, i_m) z^{m-2} - \dots$;
und $(i_1, i_2, \dots, i_m)$ bedeute der Reihe nach alle Combinationen von m Gliedern der Zahlenreihe $0, 1, 2, \dots, m+n$; während $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$ diejenigen Zahlen bedeuten, welche die i zu der gesamten Reihe $0, 1, \dots, (m+n)$ vervollständigen; $S_{m-1}(k_1, \dots, k_{n+1})$ bedeute eine symmetrische Function von $z_{k_1}, \dots, z_{k_{n+1}}$, welche keine höhere als die $(m-1)^{te}$ Potenz jedes z_k enthält; $\sigma'(i_1, \dots, i_m)$, $\sigma''(i_1, \dots, i_m)$, ... bedeuten die elementaren symmetrischen Functionen von $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_m}$, $\sigma(i_1, \dots, i_m)$ eine von ihnen; endlich bedeute $\{(A, B, C, \dots)(A', B' C', \dots)\}$ das Product aus allen Differenzen der Grössen $A, B, C, \dots$ und der Grössen $A', B', C', \dots$, das man erhält, indem man immer die zweiten von den ersten subtrahirt, dann ist

$$\sum_{(i)} \frac{S_{m-1}(k_1, \dots, k_{n+1}) S_{n-1}(i_1, \dots, i_m) \sigma(i_1, \dots, i_m)}{\{(z_{k_1}, \dots, z_{k_{n+1}})(z_{i_1}, \dots, z_{i_m})\}} = 0.$$

Wz.

G. Löwenberg. Lehrbuch der Mathematik. Leipzig: J. J. Arnd. 189 + 8 S. gr. 8°.

Bericht auf S. 119 dieses Bandes.

S. Romano. Sulla convergenza delle serie e metodi per determinare la somma. Noto: Zammit. 38 S. 8°.

Kapitel 2.
Besondere Reihen.

A. Arnaudeau. Table de triangulaires de 1 à 100000, suivie d'une table de réciproques des nombres, à cinq chiffres, de 1 à 100000, et d'une table de sinus et tangentes naturels, variant de 30″ en 30″, de 0° à 90°, avec texte explicatif. Paris: Gauthier-Villars et Fils. XX + 36 + 5 p. gr. 8°.

Das vorliegende Heft ist nur eine Ankündigung und Einleitung zu

dem grossen Tabellenwerk, welches Arnaudeau herauszugeben beabsichtigt, wenn er bei gelehrten Gesellschaften, Industriellen u. a. die nötige pecuniäre Unterstützung findet. Es wird die Methode entwickelt, nach der die Tabelle der Triangularzahlen berechnet ist. Eine Triangularzahl einer Zahl n ist bekanntlich die Summe $1+2+3+\cdots+n$. Eine solche Tabelle ist für Versicherungsgesellschaften u. a. sehr nützlich. Eingehenderes enthält der „Rapport à l'Institut des actuaires français" (p. IX-XX). Das Folgende ist ein Auszug aus dem Tabellenwerke, das einen Umfang von 538 Seiten haben wird. M.

A. Emmerich. **Zum Beweise der Formel für die Summe der Quadratzahlen.** Hoffmann Z. **27**, 16-19.

Empfiehlt in erster Linie den Beweis, wie er u. a. bei Baltzer in den Elementen der Mathematik für die Ableitung der Summen $\sum x_m$ $(x=1, 2, 3, \ldots, n)$ steht; die Redaction macht auf die Arithmetik von Elia Misrachi, Ausgabe von Wertheim, aufmerksam. Lp.

E. J. Nanson. **Transformation of a series.** Messenger (2) **25**, 160.

Sind $a_1, a_2, \ldots, a_n$ Glieder einer arithmetischen Progression, und bilden $b_1, b_2, \ldots, b_n$ eine Folge von Zahlen, bei welcher die von den Enden gleich weit abstehenden einander gleich sind, so ist $\sum a_r b_r = \frac{1}{2}(a_1+a_2)\sum b_r$, wo $r=1, 2, \ldots, n$. Dieses Ergebnis wird auf einige Beispiele angewandt. Glr. (Lp.)

A. S. Chessin. **Note on Cauchy's numbers.** Annals of Math. **10**, 1-2.

Bedeuten q und j ganze, positive Zahlen oder Null, p eine ganze positive oder negative Zahl oder Null, so ist die Cauchy'sche Zahl $N_{-p,j,q}$ das constante Glied der Entwickelung des Ausdrucks $x^{-p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^j\left(x-\frac{1}{x}\right)^q$; für dieselbe wird die Formel:

$$N_{-p,j,q}=\binom{j}{n}-\binom{j}{n-1}\binom{q}{1}+\binom{j}{n-2}\binom{q}{2}-\cdots+(-1)^n\binom{q}{n},$$

mit $n=\frac{1}{2}(-p+j+q)$ abgeleitet, wo $\binom{j}{n}$ den Binomialcoefficienten bezeichnet. Wz.

O. Schlömilch. **Ueber einige unendliche Producte und Reihen.** Schlömilch Z. **41**, 127-128.

Es ist

$$l[(1-e^{-u})(1-e^{-2u})(1-e^{-3u})\ldots]=\frac{u}{24}-\frac{\pi^2}{6u}+\frac{1}{2}l\left(\frac{2\pi}{u}\right)-R_{2n},$$

$$R_{2n}=\varrho\frac{B_{2n-3}B_{2n-1}}{2n}\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{u^2}{4\pi^2}\right)\frac{u^{2n-2}}{1.2\ldots(2n-2)}$$

$(-1 < \varrho < +1)$. Für $e^{-u} = q$ und bei Fortlassung des Restes R_{2n} ergiebt sich hieraus:

$$(1)\qquad (1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots = \sqrt{\frac{2\pi}{-lq}}\left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{24}} e^{\frac{\pi^2}{6lq}}.$$

Ebenso ist bei Fortlassung des Restes:

$$l[(1-e^{-u^2})(1-e^{-4u^2})(1-e^{-9u^2})\dots] = \log\left(\frac{2\pi}{u}\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2u}\sigma,$$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{1^3}} + \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt{3^3}} + \cdots = 2{,}61227,$$

und hieraus folgt für $e^{-u^2} = q$:

$$(2)\qquad (1-q)(1-q^4)(1-q^9)(1-q^{16})\cdots = \frac{2\pi}{\sqrt{-lq}}\, e^{-\frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\pi}{-lq}}}.$$

Diese Formeln (1) und (2) sind zur numerischen Rechnung sehr geeignet.

Wz.

M. Lerch. Ueber eine Gattung semiconvergenter Entwickelungen. Rozpravy, 5, No. 18, 6 S. (Böhmisch.)

Enthält eine elementare Entwickelung von Näherungswerten der Reihe $\mathfrak{F}(a)+\mathfrak{F}(a+1)+\mathfrak{F}(a+2)+\cdots$, in welcher die Function $\mathfrak{F}(z)$ für entsprechend grosse z in eine Reihe von der Form $\mathfrak{F}(z) = \frac{a_2}{z^2}+\frac{a_3}{z^3}+\frac{a_4}{z^4}+\cdots$ entwickelt werden kann, und eine ähnliche für die Reihe $\mathfrak{F}(a)+e^{u}\mathfrak{F}(a+1)+e^{2u}\mathfrak{F}(a+2)+\cdots$, bei welcher $\mathfrak{F}(z) = \frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\frac{a_3}{z^3}+\cdots$.

Sda.

M. Lerch. Sur une espèce de séries semiconvergentes. Bull. intern. de l'Ac. François Joseph. 1896, 3 S.

Es sei die Reihe $f(z) = \frac{a_2}{z^2}+\frac{a_3}{z^3}+\cdots$ für hinreichend grosse Werte von z convergent, a sei so gewählt, dass in der Summe $F(a) = \sum_{n=0}^{\infty} f(a+n)$ alle Grössen $a+n$ sich im Innern des Convergenzbereiches von $f(z)$ befinden. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(a+n) = \sum_{\nu=1}^{m}\frac{A_\nu}{a^\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} Q(a+n);$$

darin kann das zweite Glied vernachlässigt werden, und es ist:

$$A_\nu = \frac{1}{\nu}a_{\nu+1} + \tfrac{1}{2}a_\nu + \frac{1}{\nu}\sum_{\mu=1}^{[\frac{1}{2}\nu]}(-1)^{\mu-1}\binom{\nu}{2\mu}B_\mu a_{\nu-2\mu+1}.$$

Für $f(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \cdots$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nu} f(a+n) = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{C_\nu}{a^\nu} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{nu} Q(a+n),$$

und es kann hierin gleichfalls die zweite Summe für angenäherte Werte vernachlässigt werden; dabei ist:

$$C_\nu = \sum_{\beta=0}^{\nu-1} (-1)^\beta \binom{\nu-1}{\beta} D_u^\beta \frac{1}{1-e^u} a_{\nu-\beta}.$$

Wz.

N. Nielsen. Sur la sommation de quelques séries. Kjöb. Overs. 1896, 348-361.

Die Reihen, welche hier summirt werden, sind von der Form $\sum \frac{1}{\nu^p} x^\nu$, wo x entweder $\frac{e^{\varphi i}}{2\cos\varphi}$, $2\cos\varphi e^{\varphi i}$ oder $\cos\varphi e^{\varphi i}$ bedeutet. Mittels der gefundenen Werte der Reihen werden verschiedene bestimmte Integrale ermittelt, namentlich Integrale von der Form $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \xi_p d\varphi$ und $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_p d\varphi$, indem $(\log\cos\varphi + i\varphi)^r = \xi_r + i\eta_r$, und es wird bewiesen, dass $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \xi_p d\varphi = (-1)^p \frac{\pi}{2} \log^p 2$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta_p \cot\varphi\, d\varphi = (-1)^{p-1} \log^p 2$. Endlich werden die Werte mehrerer specieller Integrale gefunden.

V.

N. Nielsen. Summation af nogle elementaere Raekker. Nyt Tidss. f. Math. 7B, 63-66.

Es wird die Formel (der hypergeometrischen Reihe)

$$\frac{1}{y} + \frac{x}{y(y+1)} + \frac{x(x+1)}{y(y+1)(y+2)} + \cdots + \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{y(y+1)\ldots(y+n)}$$
$$= \frac{1}{y-x}\left(1 - \frac{x(x+1)\ldots(x+n)}{y(y+1)\ldots(y+n)}\right)$$

auf elementare Weise hergeleitet, und daraus werden einige Folgerungen gezogen.

V.

J. W. L. Glaisher. Correction of an error in the paper on numerical products in Vol. XXIII. Messenger (2) 25, 186.

Bezieht sich auf des Verf. Abhandlung in Messenger (2) **23**, 145-175 (F. d. M. **25**, 437, 1893/94), wo in einigen der Formeln ein Zahlenfactor einen falschen Exponenten hat.

Glr. (Lp.)

Ch. J. de la Vallée Poussin. Sur la série de Lambert. Brux. S. sc. **20** A, 56-62.

Summation dieser Reihe durch Integrale, die sich auf die Thetafunctionen, auf sn$u$ oder $\wp u$ erstrecken. Mn. (Lp.)

E. Bunitzky. Reihen mit constantem Excess. (Antwort auf das von Prof. Ermakow vorgeschlagene Thema.) Spaczinski's Bote 237 u. 238.

Untersuchung der Reihen mit dem allgemeinen Gliede u_n, für welche $\frac{u_n}{u_{n-1}+u_{n+1}}$ oder $u_n^2-u_{n-1}u_{n+1}$ constant ist. Wi.

J. Neuberg. Sur une suite récurrente. Mathesis (2) **6**, 88-92.

J. Neuberg. Sobra una serie recurrente. Archivo de Mat. **1**, 230-234.

Diese Arbeit enthält eine elegante Theorie der recurrenten Reihen nach dem Gesetze $u_n = au_{n-1}+bu_{n-2}$. Die erhaltenen Formeln werden auf die Fibonacci'sche Folge angewandt. Dml. (Lp.)

Sonin et Hermite. Sur les polynômes de Bernoulli. Extrait d'une correspondance entre M. Sonin et M. Hermite. J. für Math. **116**, 133-156.

In dem ersten Briefe Sonin's wird die i^{te} Bernoulli'sche Function $\varphi_i(x)$ durch die Gleichungen $\varphi_i(x+1)-\varphi_i(x) = ix^{i-1}$, $\varphi_i(0)=0$ definirt und in der Form $\varphi_i(x) = p^{i-1}\left\{\sum_{k=0}^{p-1}\varphi_i\left(\frac{x+k}{p}\right)-A_i(p)\right\}$ dargestellt, wo $A_i(p) = \sum_{k=0}^{p-1}\varphi_i\left(\frac{k}{p}\right)$, $A_{2n+1}(p)=0$ und

$$A_{2n}(p) = \sum_{k=0}^{p-1}\varphi_{2n}\left(\frac{x+k}{p}\right)-p^{1-2n}\varphi_{2n}(x) = p(1-p^{-2n})(-1)^n B_n,$$

$(-1)^n B_n = \int_0^1 \varphi_{2n}(x)dx$ ist. Eine andere Darstellung ist

$$\varphi_i(x) = x^i-\frac{i}{2}x^{i-1}+\binom{i}{2}B_1x^{i-2}-\binom{i}{4}B_2x^{i-4}+\binom{i}{6}B_3x^{i-6}-\cdots;$$

das letzte Glied der rechten Seite ist

$$-(-1)^{\frac{i-1}{2}}\binom{i}{i-1}B_{\frac{i-1}{2}}x \quad \text{oder} \quad (-1)^n\binom{2n}{2}B_{n-1}x^2,$$

je nachdem i eine ungerade oder gerade Zahl ist.

Für eine ganze Function $f(z)$ vom n^{ten} Grade gilt die Entwickelung

$$f(y+xh) = f(y)+\sum_{i=1}^{m}\{f^{i-1}(y+h)-f^{i-1}(y)\}h^{i-1}\frac{\varphi_i(x)}{i!},$$

$$\frac{f(y+xh)+f(y+h-xh)}{2}=\frac{f(y+h)+f(y)}{2}$$
$$+\sum_{m=1}^{[n/2]}\{f^{2m-1}(y+h)-f^{2m-1}(y)\}h^{2m-1}\frac{\varphi_{2m}(x)}{(2m)!},$$

wo $[n/2]$ die grösste ganze Zahl bedeutet, welche in $n/2$ enthalten ist.

Diese Formeln werden verallgemeinert und dann auf $f(x)=\log\Gamma(x)$ angewandt:

$$(1)\quad \log\frac{\Gamma(y+x)}{\Gamma(y)}=x\log y+\sum_{i=2}^{n}(-1)^i\frac{\varphi_i(x)}{(i-1)i}y^{1-i}+R_n(x,y);$$

für $0<x\leqq\frac{1}{2}$ hat R_n die Form $(0<\vartheta<1)$:

$$(2)\qquad R_{2k-1}=\frac{\vartheta}{2k}\left\{\frac{\varphi_{2k}(x)}{2k-1}y-\frac{\varphi_{2k+1}(x)}{2k+1}\right\}y^{-2k}.$$

Für $x=\frac{1}{2}$ ist:

$$\log\frac{\Gamma(y+\frac{1}{2})}{\Gamma(y)}=\tfrac{1}{2}\log y+2\sum_{m=1}^{k-1}(-1)^m(1-2^{-2m})\frac{B_m}{(2m-1)2m}y^{1-2m}$$
$$+2\vartheta(-1)^k(1-2^{-2k})\frac{B_k}{(2k-1)2k}y^{1-2k}.$$

Mit Hülfe der Formel (wo $k=(n-1)/2$):

$$\frac{h}{2}(e^h+1)=\left\{1+\frac{B_1}{2!}h^2-\frac{B_2}{4!}h^4+\cdots\pm\frac{B_k}{(2k)!}h^{2k}\right\}(e^h-1)$$
$$+\frac{(-h)^{n+1}}{n!}\int_0^1\varphi_n(x)e^{hx}dx$$

werden die Resultate:

$$(-1)^m\int_0^1\varphi_{2m}(x)dx=B_m=2\frac{(2m)!}{(2\pi)^{2m}}\sum_{r=1}^{\infty}r^{-2m},$$

$$\int_0^1\varphi_{2m+1}(x)\operatorname{cotg}\pi x\,dx=-2(-1)^m\frac{(2m+1)!}{(2\pi)^{2m+1}}\sum_{r=1}^{\infty}r^{-2m-1}$$
$$=-\frac{2m+1}{\pi}\int_0^1\varphi_{2m}(x)\log\sin\pi x\,dx-(-1)^mB_m(2m+1)\frac{\log 2}{\pi}$$

abgeleitet. Das Wesentliche dieser Arbeit hatte der Verf. in russischer Sprache bereits im Jahre 1888 in den Nachrichten der Universität Warschau veröffentlicht (F. d. M. **20**, 424, 1888). Daher gebührt Sonin, wie Hermite in seiner Antwort bemerkt, die Priorität für die auch von ihm in seiner Arbeit: Sur la fonction $\log\Gamma(a)$ (J. für Math. **115**, F. d. M. **26**, 474, 1895) entwickelten Formeln (1) und (2). Hermite definirt sodann die Function $S_n(x)=\frac{\varphi_{n+1}(x)}{n+1}$ durch die Gleichung

$\frac{e^{xy}-1}{e^y-1} = \sum \frac{S_n(x)}{n!} y^n$ und leitet daraus ($c=0, 1, 2, \ldots, n$) die Entwickelungen ab:

$$\frac{S_n(x+z)-S_n(z)}{n!} = \sum \frac{S_c(x) z^{n-c}}{c!(n-c)!}, \quad \frac{x^n}{n!} = \sum \frac{S_c(x)}{n!(n-c)!}$$

und, wenn $f(y)$ eine beliebige Function bedeutet,

$$f(y+x)-f(y) = \sum \frac{f^c(y+1)-f^c(y)}{c!} S_c(x) - \frac{R_n}{n!};$$

für R_n werden zwei Darstellungen gegeben, deren eine ist:

$$R_n = \int_0^x (x-z)^n f^{n+1}(y+z)dz - \int_0^1 [S_n(x+1-z)-S_n(z)] f^{n+1}(y+z)dz.$$

Weiter giebt er die Formel ($0 < \theta < 1$):

$$\log \Gamma(a) = (a-\tfrac{1}{2})\log a - a + \log\sqrt{2\pi} + \frac{\theta}{12a}$$

und entwickelt eine beliebige Function $f(y+x)$ nach Functionen $\chi_n(x)$, $\varphi_n(x)$ (und ähnlichen), die durch die Gleichungen definirt sind:

$$\frac{e^{xy}}{e^y+1} = \sum \frac{\chi_n(x)}{n!} y^n, \quad \frac{y^s e^{xy}}{\Phi(y)} = \sum \frac{\varphi_n(x)}{n!} y^n \quad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

wo $\Phi(x) = Ae^{ax} + Be^{bx} + \cdots + Le^{lx}$ ist.

In seinem zweiten Briefe leitet Sonin für die Bernoulli'schen Zahlen verschiedene Sätze ab, z. B.

$$(-1)^n B_n = \frac{1}{2n+1} - \tfrac{1}{2} + \binom{2n}{1}\frac{B_1}{2} - \binom{2n}{3}\frac{B_2}{4} + \cdots$$
$$+ (-1)^n \binom{2n}{2n-3}\frac{B_{n-1}}{2n-2},$$

$$\frac{(-1)^n B_n p(p^{2n}-1)}{n} = \sum_{k=0}^{p-1} (p-1-2k)(x+k)^{2n-1}$$
$$+ \binom{2n-1}{1}\frac{B_1(p^2-1)}{1}\sum_{k=0}^{p-1}(x+k)^{2n-2} - \cdots$$
$$+ (-1)^n \binom{2n-1}{2}\frac{B_{n-1}(p^{2n-2}-1)}{n-1}\sum_{k=0}^{p-1}(x+k)^2,$$

woraus sich ergiebt, dass die linke Seite der letzten Formel eine ganze Zahl ist. Zum Schlusse behandelt er das Integral

$$\Omega(z) = \int_0^\infty F(x)\frac{z\,dx}{x^2+z^2},$$

wo $F(x)$ zwischen den Grenzen nicht negativ wird, ferner $\log\frac{\Gamma(a+\xi)}{\Gamma(a)}$ und berechnet die Werte von $\Omega_k = (k+\tfrac{1}{2})(k+1)\frac{B_k}{B_{k+1}}$ für $k = 1, 2, 9, \infty$.

Wz.

C. Pietrocola. Sui numeri e polinomi di Bernoulli. Batt. G. **34**, 48-72.

Führt man folgende Bezeichnungen ein:

$$C_x^y = \frac{(x+y)!}{x!\,y!}, \quad S_q(n) = 1^q + 2^q + \cdots + (n-1)^q \quad (n, q = 1, 2, \ldots),$$

$$H_h^q(i, q) = C_i^q y^{q-i} + C_{i+h}^q y^{q-i+h} + C_{i+2h}^q y^{q-i+2h} + \cdots,$$

wo $i < h$, y, q ganze positive Zahlen oder Null sind und die rechte Seite der letzten Gleichung so lange fortzusetzen ist, wie die Coefficienten von y^{q-i+nh} nicht verschwinden, so gelten folgende Sätze:

Bedeuten n, m ganze positive Zahlen, p eine Primzahl, und ist $n \equiv m$ (mod. $p-1$), so ist $H_{p-1}^n(i, y) \equiv H_{p-1}^m(i, y)$ (mod. p).

Ist für einen beliebigen Wert von $m \geqq 0$ und $n \geqq -1$

$$A_{n+1}^{m+1} = A_n^m + A_{n+1}^m, \quad A_0^0 = A_1^1 = A_2^2 = \cdots = 1,$$

so ist, wenn p eine beliebige Primzahl ist, $A_{p-1}^q + A_{2(p-1)}^q + A_{3(p-1)}^q + \cdots$

$$\equiv \varepsilon \frac{q}{p-1} + A^{q-1-(p-1)} + A_{-1}^{q-1-2(p-1)} + \cdots + A_{-1}^{q-1-\left[\frac{q-1}{p-1}\right](p-1)}$$

(mod. p); hierin bedeutet $\left[\frac{q-1}{p-1}\right]$ die grösste ganze in $\frac{q-1}{p-1}$ enthaltene Zahl, ferner das Zeichen $\varepsilon(y/x)$ den Wert 1, wenn die ganze Zahl y durch die ganze Zahl x teilbar oder gleich Null ist, während es in allen anderen Fällen gleich Null zu setzen ist. Für $0 \leqq i < p$ ist

$$C_i^q + C_{i+p-1}^q + C_{i+2(p-1)}^q + \cdots \equiv \varepsilon\left(\frac{q-i}{p-1}\right) + C_i^{q-\left[\frac{q-1-i}{p-1}\right](p-1)} \pmod{p}.$$

Sind n und q beliebige ganze Zahlen, so ist $n_q \frac{1-n^q}{q} B_q$ gleich einer ganzen Zahl.

Der Zahl B_q kann man die Form geben: $B_q = A_q - \frac{\mu_q}{j^\lambda q}$; darin bedeutet j eine beliebige Primzahl, A_q eine Zahl, welche in ihrer einfachsten Form j nicht im Nenner enthält, μ_q, λ_q positive ganze Zahlen oder Null, die so beschaffen sind, dass $\mu_q < j^{\lambda_q}$ und μ_q relativ prim zu j ist.

Die notwendige und hinreichende Bedingung, dass ein Teiler p von q ein Teiler von B_q ist, besteht darin, dass p relativ prim zum Nenner von B_q ist.

Sind q und n beide ungerade, so ist $S_q(n) \equiv 0$ (mod. n).

Ist q ungerade und > 1, so ist $S_q(n)$ durch n teilbar oder nicht, je nachdem n durch 4 teilbar ist oder nicht.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $S_{2q}(n) \equiv 0$ (mod. n) ist, besteht darin, dass n relativ prim zum Nenner von B_{2q} ist.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die unge-

rade Zahl n eine Primzahl ist, besteht darin, dass $S_{p-1}(n) \equiv 0 \pmod{p}$ ist, wenn p eine beliebige Primzahl und $< \sqrt{n}$ ist.

Sind q und n ungerade Zahlen und $q > 1$, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $S_q(n)$ durch n^2 teilbar sei, darin, dass n mit dem Nenner von B_{q-1} nur solche Primfactoren gemeinsam hat, die n auch mit q gemeinsam hat.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die ungerade Zahl n eine Primzahl sei, besteht darin, dass die Congruenz $S_q(n) \equiv 0 \pmod{p^2}$ für alle Werte von q befriedigt wird, welche die Form $p(p-1)+1$ haben, während p eine ungerade Primzahl und $< \sqrt{n}$ ist.

Werden zwei Ausdrücke durch das Zeichen $\#$ mit einander verbunden, so bedeutet dies, dass die Brüche gleich sind, welche man erhält, wenn man von ihnen die in ihnen enthaltenen grössten ganzen Zahlen subtrahirt; $m \# 0$ bedeutet also, dass m eine ganze Zahl ist. Dann ist $h_q(n) \# \sum_i h_q(n_i)$, $h_{n-2}(n) \# \sum_i \frac{1}{n_i} \varepsilon\left(\frac{n-1}{n_{i-1}}\right)$, worin die Summation auf alle Primfactoren von n zu erstrecken ist, q, n beliebige ganze positive Zahlen sind und $n < 2$ ist; während für eine ganze Zahl n, die grösser als 0 ist, die Formel $h_n(n) \# -\sum_i \frac{1}{n_i} \varepsilon\left(\frac{n+1}{n_{i-1}}\right)$ gilt, worin die Summation über alle Teiler von n zu erstrecken ist. In diesen Formeln ist $h_q(n)$ durch die Formel $h_q(n) = \frac{1-n^{q+1}}{q+1} B_{q+1}$ definirt, worin n, q beliebige ganze Zahlen und $q \geqq 0$ ist. Wz.

G. de Rocquigny-Adanson. Les nombres triangulaires. Note, suivie de diverses questions sur ces nombres. Moulins. 23 S. 8°.

L. Saalschütz. Zwei Sätze über arithmetische Reihen. Königsb. Physik.-ökon. Ges. 1895, 67-74.

G. Fleuri. An elementary exposition of the theory of power series. Rep. Austral. Assoc. **6**, 217-223 (1895).

R. Mildner. Ueber einige allgemeinere, durch einfache und Doppelintegrale ausdrückbare unendliche Reihen und Producte. Znaim. 17 S. 8° (1895).

Sechster Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

Kapitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

É. Picard. Traité d'analyse. Tome III. Des singularités des intégrales des équations différentielles. Étude du cas où la variable reste réelle; des courbes définies par des équations différentielles. Équations linéaires; analogies entre les équations algébriques et les équations linéaires. Paris: Gauthier-Villars et Fils. XIV + 568 S. gr. 8⁰.

In den Besprechungen der beiden ersten Bände dieses hervorragenden Werkes (F. d. M. **23**, 279, 1891 u. **25**, 443, 1893/94) hat Ref. den eigenartigen Charakter dieses „Traité d'analyse" zu schildern gesucht, die Höhe der Gesichtspunkte hervorgehoben, unter denen die Einzelergebnisse betrachtet werden, und seiner Bewunderung für die Beherrschung des ganzen Gebietes der Functionentheorie und der höheren Geometrie, die sich auf jeder Seite bekundet, einen Ausdruck gegeben, soweit dies der Raum und der im Jahrbuch stets beobachtete sachliche Berichtsstil gestatten. Unter Berufung und Verweisung auf jene früheren Anzeigen können wir hier nur wiederholen, was der Verf. in seiner Einleitung selbst betont, dass dieser Band und die versprochenen weiteren Bände nicht ein erschöpfendes didaktisches Werk über das unabsehbare Gebiet der Differentialgleichungen bilden sollen. „Viele klassische Punkte sind bei Seite gelassen, und in dieser Hinsicht würde der Titel eines „Traité d'analyse" ziemlich schlecht gewählt sein, wenn er nicht durch das Herkommen geheiligt wäre. Die Zeit der Encyklopädien scheint vorüber zu sein; ich habe besonders das Ziel verfolgt, in meinen Vorlesungen neben den nötigen Vorbegriffen einige derjenigen Fragen klarzustellen, welche jetzt die Analysten besonders interessiren, und deren Erforschung mit Nutzen verfolgt werden kann." Trotz dieser bescheidenen und in gewissem Sinne auch richtigen Aeusserung ist der gegenwärtige Band eine nach manchen Richtungen recht vollständige, also doch encyklopädische und nichts desto weniger an originalen Ideen reiche und

formschöne Darstellung der behandelten Theorien. Was der Verf. selbst und sein ausgezeichneter Freund Poincaré in dem betrachteten Gebiete seit 20 Jahren gearbeitet und entdeckt haben, was in vielen Einzelschriften zerstreut veröffentlicht worden ist und mühsam zusammengesucht werden musste, findet man in der ersten Hälfte des Buches übersichtlich verarbeitet und unter die leitenden Gesichtspunkte der Functionentheorie eingeordnet. Als eine Eigentümlichkeit der Poincaré'schen Forschung hebt der Verf. die Richtung der Untersuchung auf den Fall hervor, bei welchem alle in den Differentialgleichungen vorkommenden Elemente reell sind, einen Fall, der durch die glänzende Entwickelung der Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen etwas in den Hintergrund gedrängt worden sei.

Wir erinnern daran, dass von der Theorie der Differentialgleichungen im zweiten Bande nur ein Kapitel gehandelt hatte, und dass in demselben die allgemeinen Sätze, besonders die Existenztheoreme für die Integrale erledigt worden waren. Das erste Kapitel des vorliegenden Bandes beginnt mit der Betrachtung allgemeiner Eigenschaften hinsichtlich der Singularitäten der Differentialgleichungen, sowohl der partiellen wie der gewöhnlichen. Darauf wendet sich die Darstellung im Kapitel II den gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Variabeln zu und erörtert im Kapitel III die singulären Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen, wie dies aus einer Vorlesung des Verf. aus dem Jahre 1886 (veröffentlicht in dem lithographirten Cours d'analyse 1886/87) bekannt ist. Als Anwendung werden im Kapitel IV die Gleichungen von Briot und Bouquet nach der Hermite'schen Darstellung im Cours lithographié de l'Ec. Pol. 1873 behandelt, wobei dann Gelegenheit gegeben ist, auf bezügliche Arbeiten vom Verf. sowie von Appell, Fuchs, Poincaré einzugehen. Das Kapitel V über gewisse Methoden successiver Annäherung betrifft die eigensten Entdeckungen des Verf., Methoden, die sich schon in vielen Untersuchungen als fruchtbar erwiesen haben und sich einer zunehmenden Verbreitung erfreuen. Nachdem auf diese Weise das Gebiet der Differentialgleichungen erster Ordnung durchmessen ist, werden im Kapitel VI gewisse lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung, nämlich von der Form $d^2y/dx^2 + A(x)y = 0$, betrachtet, wo $A(x)$ zwischen a und b positiv ist. Die nicht-linearen Differentialgleichungen von der Form $d^2y/dx^2 + f(x,y) = 0$, mit den Bedingungen: $f(x, 0) = 0$, $f_y(x,y)$ stets positiv, aber abnehmend mit zunehmendem y, bilden den Gegenstand des Kapitels VII, über den der Verf. seit 1890 eine ganze Reihe von Artikeln geschrieben hat. Mit dem VIII. Kapitel über die periodischen und die asymptotischen Lösungen gewisser Differentialgleichungen betritt der Verf. dasjenige Forschungsgebiet, in welchem Poincaré seine grossen Erfolge gehabt hat; in diesem und den folgenden Kapiteln begegnen wir daher überall den Citaten aus Poincaré's Schriften, besonders aus den Méthodes nouvelles de la mécanique céleste (F. d. M. **24**, 1130, 1892 u. **25**, 1847, 1893/94). Die Differentialgleichungen des Dreikörperproblems dienen natürlich zur Beleuchtung der allgemeinen Sätze. Die singulären Punkte

der reellen Integrale bei den Differentialgleichungen erster Ordnung erfahren im IX. Kapitel eine gründliche Behandlung, wobei Poincaré's Forschungen massgebenden Einfluss gehabt haben. Ebenso ist das X. Kapitel über die Form der Curven, die einer Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades genügen, eng an die Poincaré'sche Arbeit angeschlossen: Sur les courbes définies par les équations différentielles (Journ. de Math. (3) **7** u. **8**, F. d. M. **13**, 591, 1881 u. **14**, 666, 1882), „indem der Verf. besonders die interessantesten Punkte hinsichtlich der qualitativen Seite der Frage ins Licht zu setzen sucht.“ Nunmehr geht der Vortrag zu den linearen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung über und beschäftigt sich also mit den Entdeckungen, die mit den Fuchs'schen Arbeiten in den Bänden **66** und **68** des J. für Math. anheben und durch Thomé, Frobenius, Hamburger und viele andere vertieft und vermehrt worden sind. Das XI. Kapitel bringt allgemeine Sätze über die singulären Punkte dieser Gleichungen und berücksichtigt ausser den vielen deutschen Arbeiten auch die in manchen französischen Abhandlungen zerstreuten und versteckten Resultate. Im XII. Kapitel werden bei den hypergeometrischen Functionen die Verdienste Riemann's um die Theorie der linearen Differentialgleichungen gebührend gewürdigt. „Man findet auf den wenigen Seiten der kleinen Abhandlung des erlauchten Autors jenen originalen und tiefen, sich durch die hohe Stellungnahme zu den Fragen auszeichnenden Geist, den wir schon in der Theorie der Abel'schen Integrale zu bewundern Gelegenheit hatten.“ Die Schwarz'schen Arbeiten zur hypergeometrischen Reihe werden von dem feinen Kenner der Litteratur liebevoll dargestellt. Dies geschieht dann besonders noch im XIII. Kapitel über eine Klasse von eindeutigen Transcendenten, die aus der hypergeometrischen Differentialgleichung abgeleitet werden, nämlich über diejenigen Fälle, in denen der Quotient zweier Integrale jener Differentialgleichung zu einer eindeutigen Function führt. Neben den Modularfunctionen hat ja diese Arbeit von Schwarz Beispiele für die automorphen Functionen aufgestellt, die von Poincaré in seiner berühmten Abhandlung in Acta Math. **1** Fuchs'sche Functionen genannt worden waren. Die erweiterte Fragestellung bildet dann überhaupt das Thema dieses Kapitels. Das folgende Kapitel XIV handelt von gewissen Klassen linearer Differentialgleichungen, die im Unendlichen irregulär sind, und auch hier wieder sind mehrere Arbeiten von Poincaré (American J. **7**, Acta Math. **8**, vergl. F. d. M. **17**, 290, 1885 und **18**, 273, 1886) die Quellen, aus denen die ersten Ideen des Verf. geschöpft sind. Ein gewisser Abschluss wird dann im XV. Kapitel gewonnen, in welchem einige Klassen integrabler linearer Differentialgleichungen untersucht werden, nämlich die mit constanten Coefficienten, solche mit rationalen Coefficienten und mit eindeutigem allgemeinem Integrale und endlich eben die letzteren für jeden Punkt einer Riemann'schen Fläche. Zur Anwendung von Betrachtungen, wie sie bei der Theorie der algebraischen Gleichungen sich bewährt haben, wird im Kapitel XVI ein Abriss der Theorie der Substitutionen und der algebraischen Gleichungen gegeben, der in seinem

mässigen Umfange (S. 420-491) ein kleines Kabinetstück ist, und dann führt das letzte Kapitel (XVII) die Analogien zwischen den linearen Differentialgleichungen und den algebraischen Gleichungen durch. Hier müssen natürlich neben den bekannten Arbeiten von Frobenius und Königsberger die Lie'schen Transformationsgruppen wiederholt herangezogen werden, und der in F. d. M. **24**, 283, 1892 besprochenen Thèse von Vessiot werden manche Ueberlegungen ebenso entlehnt, wie auch auf verschiedene Klein'sche Arbeiten eingegangen wird. Lp.

O. Stolz. Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Zweiter Teil: Complexe Veränderliche und Functionen. Mit 33 Figuren im Text. Leipzig: B. G. Teubner. IX + 338 S. 8°.

Bezüglich des ersten Teiles wolle man das Referat in F. d. M. **25**, 447, 1893/94 nachlesen. Wem es um Strenge in der Grundlegung der Begriffe zu thun ist, wie dies im Anschlusse an die von Weierstrass begründete Functionentheorie erforderlich ist, der wird immer zu den vorliegenden Grundzügen greifen, die an und für sich eine ausgezeichnete Einleitung in die Functionentheorie bilden.

Der gegenwärtig zu besprechende zweite Teil, welcher die Lehren der Differential- und Integralrechnung für complexe Veränderliche und Functionen im Zusammenhange vorführt, zerfällt in fünf Abschnitte, welche unter den fortlaufenden Nummern XI bis XV gezählt werden.

Die beiden ersten sind der Differentialrechnung gewidmet, und zwar Abschnitt XI der Lagrange'schen, Abschnitt XII der Cauchy'schen Darstellung ihrer Grundbegriffe, wobei die Kreisfunctionen bei complexem Argumente als Beispiele benutzt werden. Es folgt im XIII. Abschnitte die Integration der einfachsten analytischen Functionen, namentlich der rationalen Functionen von x und $y=\sqrt{ax^2+2bx+c}$. Zu dem letzteren Zwecke bedient sich der Verf. statt der sonst in den Lehrbüchern vorgetragenen Methoden des Verfahrens von Weierstrass, dessen Fundamentalintegrale nicht wesentlich von denjenigen verschieden sind, die Aronhold im J. für Math. **61**, 95-145 eingeführt hat; hier ist ja zuerst diese neue Behandlungsweise von Integralen solcher irrationalen Differentiale gelehrt. Die beiden folgenden Abschnitte XIV und XV behandeln Cauchy's Theorie der bestimmten Integrale in dem Falle, dass die Veränderliche unter dem Integralzeichen complexe Werte annimmt.

Insbesondere beschäftigt sich der Verf. in dem letzten Abschnitte mit dem Cauchy'schen Integralsatze nebst seinen wichtigsten Anwendungen. An den Weierstrass'schen Satz über das Verhalten der Summe einer gewöhnlichen Potenzreihe schliesst sich der Laurent'sche Satz über die Darstellbarkeit einer eindeutigen Function einer complexen Veränderlichen durch eine Potenzreihe (wobei darauf hingewiesen wird, dass Weierstrass schon 1841 einen allgemeineren Satz aufgestellt hat) nebst den aus diesem Satze zu ziehenden Folgerungen für die Theorie der eindeutigen analytischen Functionen, die Bestimmung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung innerhalb einer geschlossenen Linie nach

Cauchy und die Darstellung der bezüglichen Untersuchungen von Weierstrass, endlich die Betrachtung der Reihen von Lagrange und von Bürmann.

In einem Anhange wird die Rectification der ebenen Curven in der analytischen Geometrie gelehrt, und zuletzt folgen einige Nachträge und Berichtigungen zum ersten Teile. Als wichtigster Nachtrag ist derjenige über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen der Darstellbarkeit einer Function einer reellen Veränderlichen durch die Taylor'sche Reihe nach Pringsheim zu nennen. — Durch die sorgfältige Abfassung dieser Grundzüge hat sich der Verf. ein grosses Verdienst erworben. Lp.

M. Merriman and R. S. Woodward. Higher mathematics, a textbook for classical and engineering colleges. New York: John Wiley and Sons. London: Chapman and Hall. XI + 576 S.

Dieses Sammelwerk besteht aus elf selbständigen Teilen, die unabhängig von einander sind und von verschiedenen Verfassern herrühren. Diese Teile hätten ebenso gut als kleine Schriften für sich ausgegeben werden können, wie dies unter anderem mit dem letzten Abschnitt über die Geschichte der modernen Mathematik geschehen ist. Die Verfasser haben insofern nach einem gewissen gemeinsamen Plane gearbeitet, als ihre Artikel dazu bestimmt sind, zur ersten Einführung in den Gegenstand zu dienen. Die Art der Darstellung, ob dogmatisch oder historisch und heuristisch, blieb den einzelnen Verfassern überlassen; das Ziel sollte eben darin gegeben sein, eine klare Vorstellung der leitenden Principien des abgehandelten Gegenstandes zu erzeugen, ohne durch Einzelheiten den Sinn zu verwirren. Natürlich ist die Ungleichartigkeit in der Behandlung leicht sichtbar. Ein Abschnitt über elliptische Functionen und elliptische Integrale sollte nach dem ursprünglichen Plane ebenfalls eingefügt werden, fehlt aber in der vorliegenden „ersten Auflage, erstes Tausend", weil das Manuscript nicht rechtzeitig eingeliefert ist. Angaben über die bezügliche Litteratur sind zur Anregung für weitere Studien beigegeben, berücksichtigen aber vorwiegend die englisch geschriebenen grösseren Werke. Zur Orientirung fügen wir die Titel der einzelnen Abschnitte in der Form hinzu, wie wenn sie selbständige Schriften wären:

M. Merriman. The solution of equations. 1-32.
L. G. Weld. Determinants. 33-69.
G. B. Halsted. Projective geometry. 70-106.
J. McMahon. Hyperbolic functions. 107-168.
W. E. Byerly. Harmonic functions. 169-225.
Th. S. Fiske. Functions of a complex variable. 226-302.
W. W. Johnson. Differential equations. 303-373.
E. W. Hyde. Grassmann's space analysis. 374-424.
A. Macfarlane. Vector analysis and quaternions. 425-466.
R. S. Woodward. Probability and theory of errors. 467-507.
D. E. Smith. History of modern mathematics. 508-570.

So weit es in dem beschränkten Raume angeht, sind, den englischen Gewohnheiten entsprechend, Uebungsbeispiele eingestreut. Ein alphabetisches Sachregister macht den Beschluss des Buches, das zunächst dazu bestimmt ist, in den oberen Klassen der amerikanischen Colleges als Lehrbuch den höheren Cursen zu Grunde gelegt zu werden. Auch bei uns in Deutschland kann ein derartiges Werk für die Studenten der technischen Hochschulen dazu dienen, sie mit mathematischen Theorien bekannt zu machen, welche in dem beschränkten Lehrgange entweder gar nicht besprochen, oder nur leicht gestreift werden. Lp.

J. Graham. An elementary treatise on the calculus for engineering students. With numerous examples and problems worked out. London: E. and F. N. Spon. X + 256 S.

Die Aufgabe, die beste Methode für die Behandlung der Infinitesimalrechnung zu finden, die den Bedürfnissen jener Studenten entgegenkommt, welche, wie die Ingenieure, kaum für die Ausbildung zu tüchtigen Analytikern in Aussicht genommen werden können, ist ungemein schwierig zu lösen. In der That ist es wesentlich, dass sie tüchtige praktische Kenntnisse in den Elementen dieser Rechnung besitzen; es ist jedoch schwierig, dieses Ergebnis sicher zu stellen und gleichzeitig der Forderung strenger Beweise zu genügen. Hier muss durchaus ein Compromiss geschlossen werden, und Ref. neigt zu der Ansicht, es sei viel besser, gewisse grundlegende Sätze anzunehmen, indem man in möglichster Klarheit die Natur der Annahmen darlegt, als dass man Beweise vorbringt, welchen keine wirkliche Beweiskraft zusteht. Wie weit jedoch der Compromiss gehen mag, so hält Ref. streng daran fest, dass die Differentialrechnung sich auf die Grenzmethode gründen muss, und dass eine nicht unbeträchtliche Zeit aufzuwenden ist, den Grenzbegriff durch Erläuterungen aus der Geometrie, Mechanik und Physik lebendig zu machen. Wofern der Begriff einer Grenze nicht klar gefasst ist, so wird immer der Hang vorwalten, jeden Beweis nach der Methode der zu „vernachlässigenden" Glieder durchzuführen, deren Zahl endlich oder unendlich sein kann, und von denen es nicht nachgewiesen ist, dass sie vernachlässigt werden dürfen. Ausserdem tritt die Notwendigkeit des Begriffes eines Grenzwertes dem Studenten der Mechanik oder der Physik bei jedem Schritt entgegen, und ohne jenen Begriff ist die mathematische Behandlung jener Gegenstände fast immer unvollständig.

Diese Bemerkungen sind durch eine sorgfältige Prüfung des vorliegenden Buches veranlasst. Das Buch ist hauptsächlich für die Studenten des Ingenieurwesens bestimmt und daher nach unserer Ansicht nicht nach dem Massstab zu messen, der an eine für Mathematiker bestimmte Differentialrechnung zu legen ist. Aber auch mit dieser Beschränkung macht es keinen günstigen Eindruck. Die Schlussbildung ist durchweg äusserst locker, und bis auf die letzten beiden Kapitel ist wenig in dem Buche, was sich ausdrücklich für die Ingenieure eignet. Diese beiden Kapitel sind ohne Zweifel sehr brauchbar, aber viele der

in ihnen erzielten Resultate hätten auch schon auf einer früheren Stufe eingeschaltet werden können. Es lohnt sich kaum, länger bei dem Buche zu verweilen; nur möge gesagt werden, dass ausser den in den meisten elementaren Werken über den Gegenstand gegebenen üblichen Dingen ein Kapitel über Fourier'sche Reihen vorhanden ist und drei über Differentialgleichungen handeln. Gbs. (Lp.)

A. G. Greenhill. **Differential and integral calculus with applications. Third edition.** London: Macmillan and Co, Ltd. New York: The Macmillan Co. XII + 460 S. 8°.

Die zweite Auflage dieses Lehrbuchs des ausgezeichneten englischen Mathematikers ist in F. d. M. **23**, 282, 1891 angezeigt worden; dort kann man auch das Urteil über die Vorzüge und gewisse, dem Verf. gemachte Einwände finden. Da die Einrichtung des Werkes im allgemeinen beibehalten ist, so kann von einer erneuten Besprechung abgesehen werden. Für die Hinzufügungen ist an anderen Stellen dadurch Platz geschaffen worden, dass die durchgeführten Erläuterungen zu der Theorie kleiner gedruckt sind; dadurch ist der Umfang etwa derselbe geblieben. Bei den Hyperbelfunctionen ist neben den üblichen Bezeichnungen sinh und cosh die abgekürztere sh und ch gebraucht worden. So wird denn das Buch auch in dieser neuen Ausgabe von den Studenten und den praktischen Lehrern gern benutzt werden. Lp.

F. Gomes Teixeira. **Curso de analyse infinitesimal. Calcolo differencial. 3ª. Ediçao.** Porto: Typographia occidental. IV + 383 S. gr. 8°.

Die erste Auflage dieses Lehrbuches ist in F. d. M. **19**, 244, 1887 angezeigt worden. Dort ist die strenge Form der Darstellung und die Eigenartigkeit des Ganges in diesem Werke des gelehrten Verfassers hervorgehoben worden. Da die dritte Auflage nur geringe Aenderungen gegen die erste erlitten hat, meistens solche, die auf die neuesten Arbeiten aus den betreffenden Gebieten Bezug haben, so bedarf es keines neuen Referates, und wir können dem geschätzten Mitarbeiter des Jahrbuchs nur Glück zu dem Erfolge wünschen, den er mit seinem Buche in seinem Vaterlande erzielt hat. Lp.

A. H. Barker. **Graphical calculus. Being an elementary treatise on the differential and integral calculus treated graphically.** London: Longmans, Green, and Co. VIII + 188 S.

Dieses Büchlein ist vornehmlich dazu bestimmt, den Bedürfnissen der Studenten in Fächern von der Art des Ingenieurwesens entgegenzukommen, wo zuerst für eine gründliche Vertrautheit mit den einfacheren Verfahrungsarten beim Differentiiren und Integriren Sorge zu tragen ist. Von der rein analytischen Entwickelung wird daher Abstand genommen, und graphische Methoden werden in den Vordergrund gerückt. Für den be-

sonderen Zweck, den der Verf. im Auge behält, scheint das Buch wohl geeignet, und Anfänger, welche für rein mathematische Forschungen wenig Zeit oder Neigung haben, dürften aus ihm eine recht wertvolle Uebersicht über die wichtigsten und erfolgreichsten Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf verschiedene Zweige der angewandten Mathematik erwerben. Gbs. (Lp.)

L. Kiepert. Grundriss der Differential- und Integralrechnung. II. Teil: Integral-Rechnung. Sechste vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage des gleichnamigen Leitfadens von M. Stegemann. Mit 139 Figuren im Texte. Hannover: Helwing'sche Verlagsbuchhdl. XVIII u. 599 S. 8°.

Die fünfte Auflage der Kiepert'schen Integralrechnung wurde in F. d. M. **25**, 451, 1893/94 angezeigt. Da die sechste Auflage nur unwesentliche Aenderungen erfahren hat, so dürfen wir uns mit der Verweisung auf die Besprechungen der früheren Auflagen dieses in Deutschland am meisten verbreiteten Lehrbuchs der Infinitesimalrechnung begnügen. Lp.

B. Williamson. An elementary treatise on the integral calculus, containing applications to plane curves and surfaces, and also a chapter on the calculus of variations, with numerous examples. Seventh edition. London: Longmans, Green and Co. XVIII + 512 S.

Ueber ein Lehrbuch, das es bis zu einer siebenten Auflage gebracht hat, wie es das vorliegende gethan hat, braucht wenig gesagt zu werden. An den Universitäten Grossbritanniens bleibt es das ständige Werk, und wenn es auch jemandem, der, wie Ref., durch seinen Lehrgang in die Geheimnisse der Infinitesimalrechnung eingeführt wurde, vielleicht wohl ansteht, die Meinung zu äussern, dass ein so umfangreiches Lehrbuch mit den späteren Untersuchungen über das Wesen der Functionen und ihre Integrabilität auf gleiche Höhe hätte gebracht werden können, so ist es doch ein gutes Zeichen für das an der höheren Mathematik bestehende Interesse und für die Gediegenheit des Werkes, dass eine siebente Auflage nötig geworden ist. Gbs. (Lp.)

F. Tisserand. Recueil complémentaire d'exercices sur le calcul infinitésimal. Deuxième édition, augmentée de nouveaux exercices sur les variables imaginaires par P. Painlevé. Paris: Gauthier-Villars et Fils. XXIII + 524 S. 8°.

Als Tisserand die erste Auflage dieser Aufgabensammlung als Ergänzung der Frenet'schen abfasste, war er Repetitor an der École des Hautes Études; bei der Vollendung der zweiten stand er auf der Höhe seines Ruhmes, aber auch kurz vor seinem unerwarteten Ende (Oct. 1896). Die in dem Werke behandelten Aufgaben sind umfangreicher als die meisten des Frenet'schen Buches und behandeln viele

interessante Fragen aus dem Gebiete der geometrischen Anwendungen. Ref. hat dieser Sammlung des genialen Astronomen oft Aufgaben für seine Uebungen entnommen und gefunden, dass dielben immer sehr anregend wirkten. Bezüglich der neuen Auflage halten wir es für das Beste, die Vorrede des früh verstorbenen Autors, datirt aus dem Januar 1896, also aus seinem Sterbejahre, hier zu wiederholen: „Seit der ersten Auflage dieses Werkes sind die Programme für die Licence und die Agrégation erweitert worden. Man hat vornehmlich die von dem erlauchten Cauchy begründete Theorie der imaginären Veränderlichen eingeführt. Diese Theorie ist klassisch geworden; sie wird jetzt an allen unseren Facultäten gelehrt, und dabei wird es bleiben, welches auch die weiteren Aenderungen der Programme sein werden. Es war unmöglich, ihr einen besonderen Raum in der zweiten Auflage dieses Werkes vorzuenthalten; wir wurden also veranlasst, einen vierten Teil zuzufügen, den P. Painlevé, einer der jungen uud hoffnungsreichsten Professoren der Facultät der Wissenschaften, abzufassen die Güte gehabt hat. Die Uebungen, welche diesen Teil ausmachen, sind mit dem Talente ausgewählt und dargestellt worden, welche den gelehrten Verf. kennzeichnen, und wir zweifeln nicht, dass sie den Studenten grosse Dienste leisten werden. Ebenso haben wir an dem Ende des zweiten und dritten Teiles einige von P. Painlevé herrührende interressante Ergänzungen zugefügt.“ Lp.

W. H. Echols. On the calculus of functions derived from limiting ratios. Annals of Math. **10,** 50-76.

Es bezeichne r eine positive ganze Zahl, h eiue reelle Veränderliche, $f(x)$ eine Function der reellen Variable x. Sind r und h gegeben, bedeutet ferner x_g einen bestimmten, aber beliebigen Wert des Argumentes x, so soll x_{g+rh} einen nach festem Gesetze aus x_g, r, h abzuleitenden Argumentwert bezeichnen. Wird nun allgemein

$$\delta_h^n f(x_g) = f(x_g) - \binom{n}{1} f(x_{g+h}) + \binom{n}{2} f(x_{g+2h}) - + \cdots \pm f(x_{g+nh})$$

gesetzt, so kann man nach dem Grenzwert $\operatorname*{Limes}_{h=0} \dfrac{\delta_h^n f(x_g)}{\delta_h^n x_g}$ fragen. Diesen Grenzwert nennt der Verf. eine „n^{te} Differelle“ und bezeichnet ihn mit $f^{(n)}(x_g)$, während die gewöhnliche n^{te} Ableitung, welche ein specieller Fall des Begriffes der n^{ten} Differelle ist, die Bezeichnung $f^n(x_g)$ erhält. Der Verf. untersucht insbesondere den Fall, wo die Zuordnung des Argumentes x_{g+rh} zum Argumente x_g durch die Festsetzung $x_{g+rh} = x_g(1-h)^r$ geschieht. Die hierbei sich ergebende Rechnungsart heisst „Multiplications-Calcul“. Die der Taylor'schen Reihe entsprechende Entwickelung, sowie die Processe, welche der Differentiation und Integration (auch mit gebrochenen Ordnungszahlen) entsprechen, werden behandelt. Da für den Multiplications-Calcul $f^{(1)}(x) = f^1(x)$ und allgemein $f^{(n+1)}(x) = (d/dx)[(x-a)f^{(n)}(x)]$ ist, wo a eine Constante be-

deutet, so kommt alles auf elementare Anwendungen der Differentialrechnung hinaus. Hz.

Weitere Litteratur.

F. Autenheimer. Elementarbuch der Differential- und Integralrechnung. Russische Uebersetzung von W. Göbel. Moskau. IV + 300 S. gr. 8°.

Vergl. F. d. M. **26**, 302, 1895.

E. W. Bass. Differential calculus. New York: Wiley. 12mo.

F. Bendt. Katechismus der Differential- und Integralrechnung. Leipzig: J. J. Weber. XVI + 268 S. 12°.

J. van der Breggen. Integraalrekening. Verzameling van opgeloste Vraagstukken. Zutphen. IV + 160 S. 8°.

L. N. Carnot. Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal. 5e édition. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 202 S. 8°.

J. Edwards. An elementary treatise on the differential calculus. With applications and numerous examples. Third edition, revised and enlarged. London: Macmillan. 546 S. 8°.

H. Fleury. L'analyse dite infinitésimale sans limites ni infiniment petits. 2e édition, augmentée de quatre notes fort importantes. Paris. 80 S. 8°.

F. Gambardella. Elementi di calcolo infinitesimale. Seconda edizione. Livorno. VIII + 517 S.

J. B. Goudin. Considérations élémentaires ou notions sur le calcul infinitésimal et ses dérivés. Paris.

E. S. Gould. A primer of calculus. New York: Van Nostrand. 91 S. 16mo.

C. Jordan. Cours d'analyse de l'École Polytechnique. 2e édition, entièrement refondue. Tome III. Calcul intégral. (Équations différentielles.) Paris: Gauthier-Villars et Fils. XI + 543 S. 8°.

J. W. Nicholson. Elements of the differential and integral calculus. With examples and practical applications. New York: University Publishing Company. 268 S. 8°.

E. Pascal. Infinitesimalrechnung. Erster Teil: Differentialrechnung. 8°. IV, 265. Zweiter Teil: Integralrechnung. 8°. 240. Warschau 1896. Ins Polnische übersetzt von S. Dickstein.

Uebersetzung der „Lezioni di calcolo infinitesimale“ (s. F. d. M. **26**, 305, 1895).

A. J. Stodólkiewicz. Die Principien der höheren Calcule. Warschau. 138 S. 8°. (Polnisch.)

Kapitel 2.

Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen. Maxima und Minima).

E. M. Lémeray. Sur la dérivée des fonctions interpolées. Nouv. Ann. (3) **15**, 325-327.

Eine Function $f(x)$ sei für eine unendliche Reihe von x, deren Differenz $= 1$, bekannt; es soll unter der Voraussetzung, dass sie die Bedingungen des Taylor'schen Satzes erfüllt, ihr erster Differentialquotient approximativ ermittelt werden. Es wird erst $\frac{f(x+p)-f(x-p)}{2p} = f'(x)+\cdots$ nach Potenzen von p entwickelt, darin $p = 1, 2, 3, \ldots, n$ gesetzt, dann werden zwischen den n Gleichungen die höheren Reihenglieder eliminirt. Schliesslich wird der sich ergebende Algorithmus aufgestellt. H.

W. H. Echols. On the fundamental problem of the differential calculus. Annals of Math. **11**, 61-63.

Wenn man den Bruch $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (unter den gebührenden Voraussetzungen) mit Hülfe der Leibniz'schen Productformel n-mal nach a differentiirt, findet man:

$$f(x)-\sum_0^n \frac{(x-a)^r}{r!} f^{(r)}(a) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{d^n}{da^n}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\};$$

dies ist die Taylor'sche Reihe; der Rest kann nach dem Rolle'schen Theorem direct in die Lagrange'sche Form gebracht werden. R. M.

E. J. Nanson. Hessian of an implicit function. Messenger (2) **25**, 137-138.

Das Resultat lautet: Sind n Veränderliche $y_1, y_2, \ldots, y_n$ durch die Gleichung $\varphi(y_1, \ldots, y_n) = 0$ verbunden, und ist $H(y_r)$ die Hesse'sche Form von y_r in Bezug auf $y_1, \ldots, y_{r-1}, y_{r+1}, \ldots, y_n$, ferner $H(\varphi)$ die von φ in Bezug auf $y_1, \ldots, y_n$ und $K(\varphi)$ die mit den ersten Differentialquotienten von φ geänderte $H(\varphi)$, so ist

$$\left(\frac{d\varphi}{dy_1}\right)^{n+1} H(y_1) = \cdots = \left(\frac{d\varphi}{dy_n}\right)^{n+1} H(y_n) = (-1)^n K(\varphi).$$

Glr. (Lp.)

E. J. Nanson. Change of independent variables in the Hessian of a function of any number of variables. Messenger (2) **25**, 139-145.

Es sei u eine beliebige Function der n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$, und es seien $\xi_1, \ldots, \xi_n$ n neue Veränderliche. Der Zweck des Aufsatzes ist der, die Hesse'sche Determinante von u in Bezug auf die $x_\varkappa$ in Gliedern aus den Differentialquotienten von u in Bezug auf die ξ_k auszudrücken. Glr. (Lp.)

E. Bortolotti. **Sui determinanti di funzioni nel calcolo alle differenze finite.** Rom. Acc. L. Rend. (5) **5**$_1$, 254-261.

Die gleiche wichtige Bedeutung, welche die Functionaldeterminante für die Theorie der linearen Differentialgleichungen besitzt, hat die Determinante

$$V(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \Delta y_1 & \Delta y_2 & \cdots & \Delta y_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \Delta^{n-1} y_1 & \Delta^{n-1} y_2 & \cdots & \Delta^{n-1} y_n \end{vmatrix}$$

für die Differenzenrechnung; es ist das Ziel dieser Abhandlung, die Haupteigenschaften dieser Determinante zu erforschen. Diese sollen später dazu dienen, die Beziehungen zwischen jenen Differenzenformen, welche Pincherle zu einander invers nennt, zu untersuchen. Hau.

E. B. Elliott. **Note on a class of exact differential expressions.** Messenger (2) **25**, 173-176.

Wenn Ω und ω die Operatoren bedeuten:

$$y\frac{d}{dy_1} + 2y_1\frac{d}{dy_2} + 3y_2\frac{d}{dy_3} + \cdots, \qquad y_1\frac{d}{dy} + y_2\frac{d}{dy_1} + y_3\frac{d}{dy_2} + \cdots,$$

ferner G eine rationale ganze homogene Function i^{ten} Grades in Buchstaben, die aus den $y, y_1, y_2, \ldots$ gewählt sind, dann ist, falls man y als eine willkürliche Function von x ansieht und $y_1, y_2, \ldots$ als Bezeichnungen für $dy/dx, d^2y/dx^2, \ldots$, die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass Gdx ein exactes Differential ist:

$$\left\{1 - \frac{1}{i}\omega\Omega + \frac{1}{i^2}\frac{\omega^2\Omega^2}{1.2} - \frac{1}{i^3}\frac{\omega^3\Omega^3}{1.2.3} + \cdots\right\} G = 0.$$

Glr. (Lp.)

R. Harley. **Results connected with the theory of differential resolvents.** Brit. Ass. Rep. 1896, 714-716.

Durch einen Process, der demjenigen ähnlich ist, welcher in einem Artikel der British Association 1878, 466-468 angewandt ist, kann gezeigt werden, dass jede Wurzel von $axy^m + by^r + c = 0$ der Gleichung genügt:

$$[D]^r \left[\frac{m-r}{r} D + \frac{n}{r}\right]^{m-r} y^n = (-1)^m \frac{a^r c^m}{b^m c^r} \left[\frac{m}{r} D + \frac{n}{r} - 1\right]^m x^r y^n,$$

oder, falls $r > m$:

$$[D]^r y^n = (-1)^r \frac{a^r c^m}{b^m c^r} \left[\frac{m}{r} D + \frac{n}{r} - 1\right]^m \left[\frac{r-m}{r} D - \frac{n}{r} - 1\right]^{r-m} x^r y^n,$$

und jede Wurzel von $ay^m + bxy^r + cx = 0$ der Gleichung:

$$\left[\frac{m}{r} D - \frac{n}{r}\right]^m y^n = (-1)^m \frac{b^m c^r}{a^r c^m} [D-1]^r \left[\frac{m-r}{r} D - \frac{n}{r} - 1\right]^{m-r} x^r y^n,$$

oder, falls $r > m$:

$$\left[\frac{m}{r} D - \frac{n}{r}\right]^m \left[\frac{r-m}{r} D + \frac{n}{r}\right]^{r-m} y^n = (-1)^r \frac{b^m c^r}{a^r c^m} [D-1]^r x^r y^n,$$

wo $D = x(d/dx)$ und $[\theta]^a = \theta(\theta-1)(\theta-2)\dots(\theta-a+1)$.

Gbs. (Lp.)

A. Perna. Sulla derivabilità reciproca per polare di due funzioni delle stesse serie di variabili. Batt. G. **34,** 110-117.

Wenn zwei ganze rationale Functionen mit denselben Reihen von Veränderlichen, welche in Bezug auf die Veränderlichen jeder Reihe homogen sind, sich von einander nur durch eine Permutation der Reihen unterscheiden, so ist immer die eine aus der anderen mittels einer polaren Operation ableitbar. Für diesen Satz Capelli's giebt der Verf. einen Beweis, dessen Schwerpunkt in der wirklichen Bildung des Ausdruckes einer solchen Operation liegt. Hau.

W. Kleinmichel. Maxima und Minima vom Standpunkte des Gymnasiums. Pr. (No. 165) Gymn. Posen. 28 S. 4°. Mit 1 Fig.-Taf.

Es werden die verschiedenen elementaren Methoden zur Auffindung grösster und kleinster Werte an ausführlich durchgerechneten Beispielen klar gemacht, ähnlich wie in dem bekannten und geschätzten Buch von Martus „Maxima und Minima“, Berlin 1861, das aber wohl noch reichhaltiger und weitgehender ist und dennoch von Gymnasiasten vollständig bewältigt werden kann, wie Ref. aus seiner eigenen Schulzeit weiss.

Lg.

E. J. Nanson. Conditions for maximum or minimum of stationary value of a function of any number of variables which are not all independent. Messenger (2) **25,** 129-137.

Der Verf. bestimmt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit ein stationärer Wert einer Function von einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen, die durch gegebene Gleichungen verbunden sind, ein Maximum oder ein Minimum sein kann. Glr. (Lp.)

E. J. Nanson. On the condition that a quadric may be of invariable sign when the variables are connected by given linear relations. Messenger (2) **25,** 157-160.

Diese Bedingungen wurden in der im vorangehenden Referate besprochenen Arbeit gefunden. In dem gegenwärtigen Artikel leitet der Verf. einen Beweis für sie aus den bekannten Bedingungen ab, wenn die Variabeln unabhängig sind. Glr. (Lp.)

E. J. NANSON. Conditions that a quadric may be one-signal. Messenger (2) **26**, 57-59.

In diesem Artikel werden die Bedingungen durch eine directe, unabhängige Untersuchung ermittelt. Glr. (Lp.)

V. v. DANTSCHER. Ueber die Ellipse vom kleinsten Umfange durch drei gegebene Punkte. (II. Mitteilung.) Wien. Ber. **104**, 301-350.

Der Mittelpunkt der gesuchten Ellipse muss, wie der Verf. in seiner ersten Mitteilung (F. d. M. **22**, 288, 1890) gezeigt hatte, auf einer gewissen Curve dritter Ordnung und zwar so liegen, dass die beiden Ellipsen, welche von ihm aus dem von den drei gegebenen Punkten A, B, C gebildeten Dreiecke um- und eingeschrieben werden, zusammenfallende Axenrichtungen haben. Darauf ermittelt der Verf. umgekehrt alle Dreiecke $P'P''P'''$ auf einer gegebenen Ellipse E, für welche E die Ellipse vom kleinsten Umfange ist. Werden dann alle Ellipsen E bestimmt, welche ein dem gegebenen Dreiecke ABC congruentes Dreieck $P'P''P'''$ enthalten, so ist der Umfang derselben ein Minimum, und es ist die Aufgabe völlig gelöst, sobald der Nachweis, dass es nur eine solche Ellipse giebt, geführt ist. Dieser Nachweis hängt aber ausschliesslich von dem Beweise des Satzes ab, dass durch die Forderung des Minimums der Wert von b^2/a^2 $(a > b)$, d. i. des Verhältnisses der Quadrate der Halbaxen der gesuchten Ellipse, im Intervalle $(0\dots1)$ eindeutig bestimmt ist.

Dem Beweise dieses Satzes gilt die vorliegende zweite Mitteilung. Die sehr umfangreichen und mühsamen Rechnungen, welche dieser Beweis erfordert, machen es unmöglich, an dieser Stelle näher auf denselben einzugehen (vergl. F. d. M. **26**, 311, 1895). Hau.

G. PENNACCHIETTI. Sui parametri differenziali. Atti dell'Acc. Gioenia (4) **9**, No. 1. 11 S.

W. SCHIDLOWSKY. Zur Lehre vom Differential und Integral. St. Petersb. 1896.

Kapitel 3.
Integralrechnung.

G. A. Gibson. A reduction formula for indefinite integrals. Edinb. M. S. Proc. **14**, 27-30.

Der Typus dieser Integrale ist

$$\int \frac{Hx+K}{(Ax^2+2Bx+C)^n} \cdot \frac{dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}},$$

und die zur Reduction benutzte Methode ist die von Hermite (Cours, 4[e] éd. Leçon IV). Gbs. (Lp.)

G. Morera. Dimostrazione di una formola di calcolo integrale. Revue de Math. **6**, 19-20.

Wohlbekannt aus der Theorie der Functionen zweier Veränderlichen ist die Formel: $\int \frac{\partial f}{\partial x} ds = -\int f.\cos(n, x) dl$, in welcher f eine in dem ebenen, von der Linie l begrenzten Flächenstücke s eindeutige, endliche und stetige Function von x und y ist, und n die nach dem Inneren von s gerichtete Normale in einem Punkte der begrenzenden Curve bezeichnet. Gewöhnlich führt man den Beweis dieser Formel so, dass man $ds = dx\,dy$ setzt und die Integration in Bezug auf x ausführt. Damit aber dieser Beweis streng sei, muss notwendiger Weise angenommen werden, dass $\partial f/\partial x$ in dem Flächenstücke s längs jedes geradlinigen Streifens parallel der x-Axe integrabel ist, während die Formel gilt, wenn nur $\partial f/\partial x$ in dem ganzen Flächenstücke s endlich und integrabel ist. Die erstere Annahme ist aber nicht unbedingt eine blosse Folge der zweiten; es kann eine Function zweier Veränderlichen in einem ebenen Flächenstücke integrabel sein, während sie längs gewisser geradlinig begrenzter Streifen, welche in diesem Flächenstücke liegen, nicht integrabel ist Der hier gegebene Beweis bedarf der ersteren Voraussetzung nicht, sondern nur der allgemeineren zweiten. Hau.

G. Morera. Sopra una formola di calcolo integrale. Palermo Rend. **10**, 75-80.

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung der Formel:

$$\int \frac{1}{r^2} \frac{\partial f}{\partial r} dS = \int f \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - f_0 \cdot (\sigma)_0,$$

in welcher f eine analytische Function, welche in dem von der geschlossenen Fläche σ begrenzten Raume S endlich und stetig ist, r den Radiusvector in Bezug auf einen beliebigen Pol, n die nach dem Inneren gerichtete Flächennormale, f_0 den Wert von f im Pole bezeichnet und

$(\sigma)_0$ der räumliche Winkel ist, unter welchem die Fläche σ von dem Pole aus gesehen wird; die partielle Derivirte $\partial f/\partial r$ muss in dem Raume S existiren und integrabel sein.

Behält man diese Festsetzungen bei, und bezeichnet man ferner mit φ eine analytische, stetige und endliche Function der Richtung des Radiusvectors r, so lautet die verallgemeinerte Formel:

$$\int \frac{\varphi}{r^2}\frac{\partial f}{\partial r}\,dS = \int \varphi f \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma - f_0 \int \varphi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma.$$

Das zweite Integral ist gleich Null, wenn der Pol ausserhalb der Fläche σ liegt. Es ist gleich $\int \varphi d\Sigma$, wenn der Pol im Inneren der Fläche σ oder in einem nicht singulären Punkte derselben liegt; hierbei bezeichnet Σ die Oberfläche der um den Pol als Mittelpunkt construirten Einheitskugel, und es ist im ersten Falle das Integral über die ganze Kugelfläche zu nehmen, im letzten Falle über diejenige der beiden von der Tangentialebene in dem Pole gebildeten Hemisphären, welche die nach dem Inneren von σ gerichtete Flächennormale im Pole enthält.

Von dieser Formel macht der Verf. Anwendung auf zwei Beispiele aus der Potentialtheorie. Hau.

G. Koenigs. **Sur les invariants intégraux.** C. R. **122**, 25-27.

Bekannt ist die Rolle, welche Integralinvarianten von der Form

$$J = \iint \dots \int M(x_1, x_2, \dots, x_n)\, \delta x_1\, \delta x_2 \dots \delta x_n$$

in der Theorie des Differentialgleichungssystems

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

spielen. Einen ähnlichen Nutzen gewähren nach dem Verf. $(n-1)$-fache Integrale von ähnlicher Form wie J. Es lassen sich mit Hülfe des Poisson'schen Klammerausdrucks alle Integralinvarianten des gemeinten Typus construiren, und es wird gezeigt, welchen Vorteil es bietet, wenn man eine solche Invariante (resp. mehrere) a priori kennt. My.

Kapitel 4.
Bestimmte Integrale.

O. Stolz. Ueber den von Herrn G. Peano aufgestellten Begriff des bestimmten Integrals. Monatsh. f. Math. **7**, 291-295.

Aus der von Peano gegebenen Definition des bestimmten Integrales (vergl. F. d. M. **7**, 243, 1875 und **26**, 313-314, 1895) leitet der Verf. die folgende Bedingung für die Integrirbarkeit der Function $f(x)$

im Intervalle (a, b) ab: „Zur Integrirbarkeit der eindeutigen und endlichen Function $f(x)$ im Intervalle (a, b) ist notwendig und hinreichend, dass jeder Zahl $\varepsilon > 0$ mindestens eine Teilung des Intervalles (a, b) durch Einschaltung von Werten $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ zwischen $a (= a_0)$ und $b (= a_n)$ sich so zuordnen lässt, dass

$$0 \leqq \sum_{r=1}^{r=n} [g(a_{r-1}, a_r) - k(a_{r-1}, a_r)] \delta_r < \varepsilon$$

ist.“ Hierbei bezeichnen $g(a_{r-1}, a_r)$ und $k(a_{r-1}, a_r)$ die obere und untere Grenze der Werte von $f(x)$ im Intervalle (a_{r-1}, a_r), und es ist $\delta_r = a_r - a_{r-1}$. Diese Integrirbarkeitsbedingung ist gleichbedeutend mit der Riemann'schen, nach welcher es „zur Integrirbarkeit von $f(x)$ notwendig und hinreichend ist, dass

$$\lim_{\xi_r=0} \sum_{r=1}^{r=p} \{g(x_{r-1}, x_r) - k(x_{r-1}, x_r)\} \xi_r = 0$$

ist, d. h. dass jedem $\varepsilon > 0$ ein $\Delta > 0$ so sich zuordnen lässt, dass, wenn nur von den Teilen $\xi_1 = x_1 - a$, $\xi_2 = x_2 - x_1, \ldots, \xi_p = b - x_{p-1}$ der Strecke $b - a$ jeder kleiner als Δ ist,

$$0 \leqq \sum_{r=1}^{r=p} \{g(x_{r-1}, x_r) - k(x_{r-1}, x_r)\} \xi_r < \varepsilon \text{ ist.“}$$

Um das bestimmte Integral einer Function einer complexen Veränderlichen durch einen Grenzprocess einzuführen, ist dieses neue Verfahren nicht geeignet; auf Doppelintegrale zweier reellen Veränderlichen kann die vorstehende Erklärung des einfachen bestimmten Integrales zwar ausgedehnt werden, was aber nicht vorteilhaft zu sein scheint. Hau.

M. Fouché. Sur la définition de l'intégrale définie. Nouv. Ann. (3) **15**, 207-215.

C. Burali-Forti. Sur la définition de l'intégrale définie. Nouv. Ann. (3) **15**, 495-502.

Die Function $f(x)$ der reellen Veränderlichen x sei in dem Intervalle $a \ldots b$ $(a < b)$ definirt und nehme in demselben beständig zu. Fouché bildet dann für unendlich viele Wertesysteme $x_1, x_2, \ldots, x_n$, von denen jedes nur der Bedingung $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$ unterworfen ist, die durch die folgenden Gleichungen definirten Zahlen:

$$\alpha = (x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \cdots + (b - x_n) f(x_n),$$
$$\beta = (x_1 - a) f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_2) + \cdots + (b - x_n) f(b).$$

Vereinigt man alle Zahlen α zu einer Zahlenklasse und alle Zahlen β zu einer zweiten, so sind diese beiden Klassen benachbart, d. h. jede Zahl α ist kleiner als jede Zahl β, und es lassen sich in beiden Klassen zwei Zahlen α_h und β_k finden, so dass $\beta_k - \alpha_h < \varepsilon$ ist, wo ε eine willkürlich gegebene positive Zahl ist. Beide Klassen bestimmen eine sie trennende Zahl A; diese ist der gemeinsame Grenzwert, gegen welchen die Zahlen α und β convergiren, wenn die Differenz je zweier auf ein-



ander folgenden Werte von x, $x_i - x_{i-1}$ der Null zustrebt. Folglich ist: $\int_a^b f(x)dx = A$. Nimmt die Function nicht von a bis b beständig zu (oder ab), ist sie aber in dem ganzen Intervalle stetig und endlich, so ist die vorstehende Definition noch brauchbar; nur muss man in den Definitionsgleichungen für α und β die darin vorkommenden Werte der Function $f(x)$ durch die Minimal- und Maximalwerte der Function $f(x)$ in den Intervallen $a \dots x_1$, $x_1 \dots x_2$, $\dots$, $x_n \dots b$ ersetzen. Aus diesen Betrachtungen folgt unmittelbar, dass eine Function $f(x)$ in einem Intervalle integrabel ist, wenn man dasselbe in eine endliche Anzahl von Teilintervallen zerlegen kann, in denen die Function entweder beständig zu- oder abnimmt oder stetig und endlich ist.

Burali-Forti's Definition bedeutet, im Grunde genommen, nur eine kleine Verallgemeinerung der zuletzt besprochenen Modification der Fouché'schen Definition. An Stelle der Maximal- und Minimalwerte von $f(x)$ in den Intervallen $a \dots x_1$, $x_1 \dots x_2$, $\dots$, $x_n \dots b$ treten die oberen und unteren Grenzwerte von $f(x)$ in denselben. Bezeichnet man die so an Stelle von β und α tretenden Zahlen mit s' und s_1, so besitzen, wenn $f(x)$ selbst in dem Intervalle $a \dots b$ eine obere und eine untere Grenze hat, die Zahlen s' eine bestimmte untere Grenze $l_1 s'$ und die Zahlen s_1 eine bestimmte obere Grenze $l' s_1$; ferner ist keine Zahl s' kleiner als irgend eine Zahl s_1. Die Function $f(x)$ ist dann in dem Intervalle $a \dots b$ integrabel, wenn $l_1 s' = l' s_1$ ist. Hieraus ergeben sich aber wieder die beiden oben erwähnten Fälle, in denen $f(x)$ in einem gegebenen Intervalle integrabel ist. Hau.

M. Petrovitch. Sur un mode de décomposition des intégrales définies en éléments simples. C. R. **122**, 27-30.

Für jeden ganzzahligen, positiven Wert von n werde gesetzt: $\int_a^b [u(z)]^n \chi(z)dz = \varphi(n)$, wo $\varphi(0)$ einen bestimmten endlichen Wert haben soll, $F(u)$ einen in u rationalen Bruch, welcher holomorph ist, wenn u zwischen den Grenzen $u(a)$ und $u(b)$ variirt, und $\chi(z)$ eine beliebig gegebene Function bezeichnet. Der Verf. zeigt, dass dann die Function: $\theta(x) = \sum_0^\infty \varphi(n)x^n$ für das Integral: $J = \int_a^b F(u)\chi(z)dz$ die Bedeutung eines einfachen Elementes hat. In dieser Beziehung steht z. B.
$$\theta(x) = \sum_0^\infty \frac{x^n}{\sqrt{n+1}} \text{ zu dem Integrale } J = \int_{-\infty}^{+\infty} F(e^{-z^2})dz.$$
Hau.

W. F. Osgood. Zur Differentiation des bestimmten Integrales nach einem Parameter. Monatsh. f. Math. **7**, 90-92.

Correction und Vervollständigung einer nicht mitgeteilten Stelle in O. Stolz, Differential- und Integralrechnung I, S. 449, Auszug aus einem Schreiben an den Verf. H.

N. Nielsen. Sur la transformation d'une intégrale définie. Kjöbh. Overs. 1896, 235-247.

Der Verf. hat in seiner Inauguraldissertation (Ueber eine Klasse von bestimmten Integralen und einigen dadurch definirten semiperiodischen Functionen) behauptet, dass eine grosse Menge bestimmter Integrale aus der Formel $\int_0^1 \frac{c^{x-1}\log c}{\sqrt{1-c^2}}\,dc = -\int_0^1 \frac{c^{x-1}}{1+c}\,dc \int_0^1 \frac{c^{x-1}}{\sqrt{1-c^2}}\,dc$ hergeleitet werden könne. Diese Formel hat der Verf. in seiner Inauguraldissertation bewiesen, wie auch, dass sie immer gültig ist, wenn nur der reelle Teil von c positiv ist. Es werden nun hier mittels der citirten Formel die Werte verschiedener bestimmter Integrale gefunden, namentlich von der Form $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\sin^2\varphi)\log\sin\varphi\,d\varphi$, wo f eine ganze rationale Function bezeichnet. So wird z. B. der Wert des Integrals $\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(1, 1, \frac{1}{2}, x^2\sin^2\varphi)\log\sin\varphi\,d\varphi$ ermittelt, in dem F eine hypergeometrische Reihe bezeichnet. V.

M. Bôcher. On Cauchy's theorem concerning complex integrals. American M. S. Bull. (2) **2**, 146-149.

„Die folgende Anordnung für den Beweis des Cauchy'schen Satzes, dass das Integral einer holomorphen Function in einem einfach zusammenhängenden Gebiete eine Function der Grenzen der Integration ist, nicht aber vom Wege, ist elementarer als die gewöhnlich anzutreffenden Beweise. Wie die Beweise von Goursat und Jordan vermeidet er den Gebrauch der Doppelintegrale oder der Variationsrechnung und besitzt vor diesen Beweisen nicht nur den Vorzug der Kürze, sondern auch den anderen, mehr oder weniger verwickelte Grenzbetrachtungen zu vermeiden."

Lp.

E. Gubler. Ueber ein discontinuirliches Integral. Math. Ann. **48**, 37-48.

Anknüpfend an das von H. Weber behandelte discontinuirliche Integral $\int_0^{\infty} \overset{(1)}{J}(x)\overset{(0)}{J}(ax)\,dx$ berechnet der Verf. das aus diesem durch

Verallgemeinerung der Parameter der Bessel'schen Functionen J sich ergebende Integral: $S = \int_0^\infty \overset{(a)}{J}(x) \overset{(b)}{J}(cx)dx$. Damit das Integral an der unteren Grenze convergent ist, muss $a+b+1>0$ sein; an der oberen Grenze ist die Convergenz gesichert, wenn die zunächst als positiv angenommene Zahl c von 1 verschieden ist. Wenn $a-b$ gleich einer positiven oder negativen ungeraden Zahl ist, so convergirt das Integral an der oberen Grenze auch noch für $c=1$.

Man erhält, wenn $0<c<1$ ist:

$$S = S' = \frac{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)}{\Gamma(b+1)\Gamma\left(\frac{a-b+1}{2}\right)} c^b F\left(\frac{a+b+1}{2}, \frac{b-a+1}{2}, b+1, c^2\right),$$

und wenn $c>1$ ist:

$$S = S'' = \frac{\Gamma\left(\frac{a+b+1}{2}\right)}{\Gamma(a+1)\Gamma\left(\frac{b-a+1}{2}\right)} c^{-a-1} F\left(\frac{a+b+1}{2}, \frac{a-b+1}{2}, a+1, \frac{1}{c^2}\right),$$

wo F in gewohnter Weise die Gauss'sche hypergeometrische Reihe bezeichnet. Beide Functionen gelten auch für negative und complexe Werte von c und haben mit Ausnahme der Pole $c^2 = 0, 1, \infty$ den Charakter ganzer Functionen. Wenn c gegen 1 geht, so wird S unendlich gross wie $-\frac{\cos\frac{a-b}{2}\pi}{\pi}\ln(1-c^2)$. Die Discontinuität des Integrales hat ihre Ursache aber nicht etwa in der logarithmischen Unstetigkeit, sondern darin, dass an der Stelle $c=1$ für das Integral ein Functionswechsel eintritt; denn es ist:

$$S''-S' = e^{i\frac{\pi}{2}(b-a+1)} c^{-a-1} F\left(\frac{a+b+1}{2}, \frac{a-b+1}{2}, 1, \frac{c^2-1}{c^2}\right),$$

also: $\lim\limits_{c=1}(S''-S') = e^{i\frac{\pi}{2}(b-a+1)}$.

Für $a-b = -(2n+1)$, wo n eine positive ganze Zahl bezeichnet, findet man: $S=0$ oder $=(-1)^n c^{-2n-a-1} F(-n, -n-a, 1, 1-c^2)$ und für $a-b = 2n+1$: $S = (-1)^n c^{2n+b} F(-n, -n-b, 1, 1-1/c^2)$ oder $=0$, je nachdem $0<c<1$ oder $c>1$ ist. Hau.

M. Lerch. Betrachtungen über einige Fragen der Integralrechnung. Prag: Rozpravy 5, No. 23. 16 S. (Böhmisch).

Den Mittelpunkt des ersten Teils der Arbeit bildet die Integralformel:

$\int_0^\infty J(u)u^{s-1}du = \frac{2^s\Gamma(s/2)\sin(s\pi/2)}{2\pi}$, in welcher $J(u)$ die bekannte Fourier-Bessel'sche Function bezeichnet, als deren wichtigste Folgerung die Formel: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\pi(w+ix).\Gamma(w+ix)^2}{(w+ix).v^{w+ix}}dx = 4\pi^2\int_{2v}^{\infty}J(x)\frac{dx}{x}$ erscheint ($v > 0$, $0 <$ Real. $w < \frac{1}{2}$).

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Reihenentwickelung des Integrals $\int_0^\infty \frac{x^s dx}{(w^2+2wx\cos(\pi/\sigma)+x^2)(1+x^\sigma)}$, welches, als Function von s aufgefasst, eine gewisse Analogie mit den elliptischen Functionen zeigt; namentlich hat es einfache Beziehungen zum Parallelogramm der Perioden 1 und σ. Die Entwickelungen, welche hier abgeleitet sind, haben viel Aehnlichkeit mit gewissen Reihen aus der Theorie der elliptischen Functionen.

Als Nebenresultat ergab sich auch die verhältnismässig einfache Formel: $\int_0^\infty \frac{x^\sigma}{1+x^\sigma}\frac{dx}{w^2+2wx\cos(\pi/\sigma)+x^2} = \frac{\pi}{\sigma\sin(\pi/\sigma).(1+w)}$.

Lh.

Calculation of the $G(r, \nu)$-integrals. Brit. Ass. Rep. 1896, 70-82.

Ein vorläufiger Bericht über das Integral $G(r,\nu) = \int_0^\pi \sin^r\theta . e^{\nu\theta}d\theta$ (vergl. F. d. M. **26**, 316, 1895), das oft unter der Form $e^{-\frac{1}{2}\pi\nu}G(r,\nu)$ bei der Bestimmung der Häufigkeitscurven und der wahrscheinlichen Fehler ihrer Constanten auftritt. Die Function $F(r,\nu) = e^{-\frac{1}{2}\pi\nu}G(r,\nu)$ ändert sich gleichmässiger und allmählicher als $G(r,\nu)$, und somit wird $F(r,\nu)$ endgültig tabulirt werden. $\log F(r,\nu) = \log 2\pi - (r+1)\log 2 + \log\Gamma(r+1) - \log\Gamma(\frac{1}{2}r+1-\frac{1}{2}\nu i) - \log\Gamma(\frac{1}{2}r+1+\frac{1}{2}\nu i)$. Dieser Ausdruck wird vermittelst der Entwickelung von $\log\Gamma(r+1)$ in Glieder mit Bernoulli'schen Zahlen transformirt. Setzt man $r = 2\beta\cos\varphi$, $\nu = 2\beta\sin\varphi$ und bezeichnet mit $2\chi(r,\varphi)$ die Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{B_{2m+1}}{(2m+1)(2m+2)}(1-2^{2m+2}\cos^{2m+1}\varphi\cos(2m+1)\varphi)\cdot\frac{1}{r^{2m+1}},$$

so wird (1) $F(r,\nu) = (2\pi/r)^{\frac{1}{2}}\cos^{\nu+1}\varphi e^{\nu\varphi+2\chi(r,\varphi)}$; $\chi(r,\varphi)$ kann in der Form geschrieben werden: $\chi(r,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\chi_{2m+1}(\varphi)}{(\frac{1}{2}r)^{2m+1}}$, wo

$$(2)\quad \chi_{2m+1}(\varphi) = \frac{B_{2m+1}}{(2m+1)(2m+2)}((\tfrac{1}{2})^{2m+2}-\cos^{2m+1}\varphi\cos(2m+1)\varphi).$$

Der Ausdruck für $F(r,\nu)$, der durch (1) gegeben wird, ist unter Benutzung

der Reihe (2) für $\chi(r, \varphi)$ derjenige, aus welchem die Tabellen für $F(r, v)$ berechnet werden sollen.

Angehängt an diesen vorläufigen Bericht sind Tafeln der χ-Functionen für $m = 0, 1, 2, 3$ und für φ von 0^0 bis 90^0 in Schritten von je 1^0; die Tafeln geben $\log(\pm\chi_{2m+1})$, χ_{2m+1}, sowie die ersten und die zweiten Differenzen für χ_{2m+1}. Gbs. (Lp.)

V. Jamet. Sur les intégrales de Fresnel. Nouv. Ann. (3) **15**, 372-376.

E. Fabry. Sur les intégrales de Fresnel. Ebenda 504-505.

Zur Berechnung der Fresnel'schen Integrale

$$\int_0^\infty \sin\frac{\pi}{2}v^2 dv, \qquad \int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}v^2 dv$$

wird der Beweis des Satzes erfordert: $\int e^{-z^2}dz$, gerechnet längs eines halben Kreisquadranten um den Ursprung als Centrum, verschwindet, wenn der Radius ins Unendliche wächst. Einen neuen Beweis dafür hat erst Jamet, dann einen kürzeren Fabry gegeben. H.

E. J. Nanson. On certain definite integrals, single and multiple. Messenger (2) **26**, 119-133.

Ist $\omega = ax^2+2hx+b$, $\omega' = a'x^2+2h'x+b'$ und $ab>h^2$, so ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)\frac{dx}{\omega} = \tfrac{1}{2}(ab-h^2)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{2\pi} f(\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta)\,d\theta,$$

wo α, β die Wurzeln von $(ab-h^2)\lambda^2-(ab'+a'b-2hh')\lambda+a'b'-h'^2 = 0$ sind. Dieses Theorem wird bewiesen und auf verschiedene besondere Fälle angewandt, z. B.:

$$\int_0^\pi f\left(\frac{1}{1+e\cos\varphi}\right)\frac{d\varphi}{1+e\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\int_0^\pi f\left(\frac{1-e\cos\varphi}{1-e^2}\right)d\varphi.$$

Es wird auch auf vielfache Integrale ausgedehnt, indem das allgemeine Theorem lautet: Es seien v, v' homogene quadratische Functionen der Richtungscosinus $l_1, \dots, l_n$ des Radius durch ein Element $d\omega$ der Oberfläche einer Einheits-Hypersphäre im Raume von n Dimensionen; dann ist

$$\int f\left(\frac{v'}{v}\right)v^{-\frac{1}{2}n}\,d\omega = \varDelta^{-\frac{1}{2}}\int f(\Sigma a_p l_p^2)\,d\omega,$$

wo $\varDelta$ die Discriminante von v ist, a_p eine Wurzel der Discriminante von $\lambda v - v'$, v als eine definite positive Form vorausgesetzt ist, und die Integration sich über die ganze Oberfläche der Hypersphäre erstreckt. Dieses Theorem wird auf viele besondere Fälle angewandt, z. B. wenn v als ein vollständiges Quadrat angenommen wird. Die so erhaltenen Resultate schliessen manche bekannten Auswertungen vielfacher Integrale ein. Glr. (Lp.)

G. Oltramare. Note sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos yx}{(a^2+b^2x^2)^n}dx$.

Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24,** 167-171.

Das in der Ueberschrift bezeichnete Integral ist von Catalan und A. Serret auf andere bestimmte Integrale zurückgeführt worden. Der Verf. gelangt vermittelst seines „Calcul de généralisation" zu neuen Formeln für den Ausdruck dieses Integrals. Von diesen bezeichnet er die beiden folgenden als bemerkenswert wegen ihrer Form:

$$(7)\quad \int_0^\infty \frac{\cos yv}{(a^2+b^2v^2)^n}dv = \frac{\pi(-1)^{n-1}}{2ba^{2n-1}\Gamma(n)}\left[\frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\left(\frac{e^{-\frac{ay}{b}\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}\right)\right]^{p=1},$$

$$(8)\quad \int_0^\infty \frac{\cos yv}{(a^2+b^2v^2)^n}dv = \frac{(-1)^{n-1}\pi}{ba^{2n-1}\Gamma(n)}\left[\frac{d^{n-1}}{dv^{n-1}}\left(\frac{e^{-\frac{ay}{b}v}}{(1+v)^n}\right)\right]^{v=1}.$$

Lp.

C. Störmer. Om en generalisation af integralet $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

Christiania Vidensk. Selsk. Forh. 1895, No. 4. 11 S.

J. Richard. Note sur l'intégrale définie. Rev. de Math. spéc. **6,** 249 - 250.

A. Maggi. Sull'area delle superficie curve. Rom. Acc. L. Rend. (5) 5_2, 440-445.

Nachdem H. A. Schwarz mit Hülfe seiner bekannten, einem geraden Kreiscylinder eingeschriebenen Polyederoberfläche die Unrichtigkeit der Serret'schen Definition des Flächeninhaltes einer krummen Fläche nachgewiesen hatte, bediente man sich meistens der Hermite'schen Definition, welche von einer eingeschriebenen Polyederfläche ganz absah. Der Verf. greift auf die Serret'sche Definition zurück und fügt dieser eine passende Bedingung bei, welche das Hineinziehen jedes fremdartigen Elementes und eine allzu grosse Einschränkung vermeidet; seine Definition lautet:

Man denke sich in die krumme Fläche, welche in jedem Punkte eine Normale, deren Richtung sich stetig ändert, besitzen soll, eine Polyederoberfläche eingeschrieben, deren einzelne Seitenflächen innerhalb eines Kreises vom Radius R Platz finden; der Flächeninhalt der krummen Fläche ist dann der Grenzwert, welchem der Flächeninhalt der eingeschriebenen Polyederoberfläche zustrebt, wenn $R=0$ wird, und die Bedingung erfüllt ist, dass gleichmässig mit R der Winkel verschwindet, welcher von dem Lote auf jeder Polyederfacette mit der Flächennormale in einem beliebigen Punkte des darüber liegenden Flächensegmentes gebildet wird.

Schwarz hatte der Serret'schen Definition die einschränkende Bedingung hinzugefügt, dass jede Polyederfläche mit der Tangentialebene der Oberfläche in einem unendlich benachbarten Punkte einen unendlich kleinen Winkel einschliessen soll. Die von Maggi gegebene Definition scheint der Schwarz'schen gegenüber keine Vorteile zu bieten, namentlich auch mindestens nicht allgemeiner zu sein. Hau.

P. H. Schoute. L'aire des paraboles d'ordre supérieur. C. R. **122**, 1113-1115.

D. J. Korteweg. Sur le théorème énoncé par M. P. H. Schoute dans les „Comptes rendus“ du 18 mai 1896. C. R. **122**, 1399.

G. Mannoury. Sur la note de M. P. H. Schoute, intitulée: „L'aire des paraboles d'ordre supérieur“. C. R. **122**, 1399-1400.

Der Flächeninhalt A der von der parabolischen Curve: $y = f(x) = a_0 x^{2m} + a_1 x^{2m-1} + \cdots + a_{2m}$, der Abscissenaxe und den beiden Ordinaten, welche $x = 0$ und $x = h$ entsprechen, begrenzten Figur lässt sich durch die Formel:

$$A = h\left[b_0 f(0) + b_1 f\left(\frac{h}{2m}\right) + b_2 f\left(\frac{2h}{2m}\right) + \cdots + b_{2m} f(h)\right],$$

wo die Grössen b gewisse Constanten sind, darstellen. Schoute zeigt nun, dass der Flächeninhalt A' der von einer parabolischen Curve $(2m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung: $y = f'(x) = a'_0 x^{2m+1} + a'_1 x^{2m} + \cdots + a'_{2m+1}$ und denselben Geraden wie oben begrenzten Figur durch dieselbe Formel gegeben wird, d. h. dass

$$A' = h\left[b_0 f'(0) + b_1 f'\left(\frac{h}{2m}\right) + b_2 f'\left(\frac{2h}{2m}\right) + \cdots + b_{2m} f'(h)\right]$$

ist, wo die b dieselben Constanten sind wie vorher.

Korteweg und Mannoury geben Beweise dieses Satzes, welche einfacher sind als der von Schoute; von beiden verdient wiederum der von Mannoury wegen grösserer Einfachheit den Vorzug. Hau.

J. Franel. Sur la formule sommatoire d'Euler. Math. Ann. **47**, 433-440.

Von dem Integrale $J = \int_0^h f(x) F'(x)\, dx$ ausgehend, wo $f(x) = E(x) - x + \frac{1}{2}$ ist [$E(x)$ bezeichnet die grösste in x enthaltene ganze Zahl], die Function $F(x)$ und ihre Derivirte $F'(x)$ im Integrationsintervalle eindeutig und stetig sind und h eine positive ganze Zahl ist, erhält man leicht die folgende Summationsformel:

$$\sum_{r=0}^{r=h} F(r) = \frac{1}{2} F(0) + \frac{1}{2} F(h) + \int_0^h F(x)\, dx - \int_0^h f(x) F'(x)\, dx.$$

Setzt man hierin für die Function $f(x)$ ihre Reihenentwickelung $f(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\sin 2mx}{m\pi}$ ein, welche für alle Werte von x mit Ausnahme der ganzzahligen gilt und convergent ist, so ergiebt sich nach einigen Umformungen die bekannte MacLaurin'sche Summenformel in der gewöhnlich gebrauchten Gestalt.

Die obige Reihenentwickelung für $f(x)$ leitet der Verf. aus dem Integrale: $2\pi i f(x) = \int_0^1 \left[\frac{1}{t-e^{2\pi ix}} - \frac{1}{t-e^{-2\pi ix}}\right] dt$ ab.

Hau.

L. Raffy. **Une leçon sur la méthode de quadrature de Gauss.** Nouv. Ann. (3) **15**, 249-262.

Der Inhalt der Schrift ist eine näher eingehende Betrachtung der Gauss'schen Methode. Ueber die Fehlergrenze wird ein Satz aufgestellt.

H.

L. F. Marrecas Ferreira. **Estudo sobre o planimetro de Amsler.** Revista de obras publicas, Lisboa. **25.**

In diesem Artikel vervollständigt und verbessert der Verf. in einigen Punkten die Theorie des Amsler'schen Planimeters, welche Resal in seinem Traité de mécanique générale gegeben hat. Tx. (Lp.)

Kapitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen.

C. Arzela. **Sull'esistenza degl'integrali nelle equazioni differenziali ordinarie.** Bologna Mem. (5) **6**, 131-140.

Der Verf. giebt in Verallgemeinerung eines in der Abhandlung „Sulle funzioni di linee" (Bologna Mem. (5) V; F. d. M. **26**, 454, 1895) entwickelten Satzes die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine Reihe von Functionen $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., welche alle in dem Intervalle $a \leqq x \leqq b$ nur Werte annehmen, die zwischen zwei festen Grenzen liegen, mit wachsendem Index gegen eine bestimmte Grenzfunction convergirt, die in jedem Punkte zwischen a und b continuirlich ist. Mit Hülfe dieses Satzes wird der Beweis für die Existenz der Integrale einer gewöhnlichen Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ gegeben, wo $f(x, y)$ eine in einem gewissen Bereiche continuirliche Function von x, y bezeichnet. In einem zweiten Abschnitt wird der ersterwähnte Satz auf Functionen mehrerer Variabeln ausgedehnt. Hr.

S. Lie. **Zur allgemeinen Transformationstheorie. I. Ueber Differentialgleichungen, die eine continuirliche Gruppe gestatten.** Leipz. Ber. **48**, 1896, 390-404.



Der Verf. bemerkt, dass er bei vielen seiner Untersuchungen über Differentialgleichungen das folgende Princip verwertet hat: Gestattet ein System von Differentialgleichungen eine endliche oder infinitesimale Punkttransformation (Berührungstransformation), so führt diese Transformation jedes andere Gleichungssystem, das zu dem ersten in einer durch Punkttransformation (Berührungstransformation) invarianten Beziehung steht, in ein ebensolches System über. Er erläutert sodann dieses Princip kurz an einzelnen Beispielen und geht ausführlicher ein auf seine schon 1882 kurz skizzirte Integrationstheorie solcher Gleichungen:

$$Af = \frac{\partial f}{\partial z} + \sum_k^{1\dots r} \varphi_k(z).X_k f = 0,$$

wo $X_1 f, \dots, X_r f$ unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Gruppe sind. Dabei wird vorausgesetzt, dass man irgend eine Mannigfaltigkeit $W_i(x_1, \dots, x_n, z) = 0$ $(i = 1, \dots, q)$ kennt, die von Integralcurven des zu $Af = 0$ gehörigen simultanen Systems erzeugt ist, und zwar hängt der Grad des Vorteils, den dieser Umstand mit sich bringt, von der Zusammensetzung der grössten Untergruppe der Gruppe: $X_1 f, \dots, X_r f$ ab, die eine beliebige Mannigfaltigkeit $W_i(x_1, \dots, x_n, a_0) = 0$ $(i = 1, \dots, q;$ $a_0 = \text{Const.})$ invariant lässt. Eine Theorie derselben Art lässt sich nun auch für lineare homogene gewöhnliche Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung entwickeln. Diese wird kurz auseinandergesetzt (vgl. hierzu die ausführlichere Darstellung des Verf., Leipz. Ber. 1891, S. 253ff.) und insbesondere auf Differentialgleichungen $y^{(n)} + X_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + X.y = 0$ mit algebraischen Coefficienten angewandt, wobei sich eine Reihe neuer Sätze ergiebt. Ferner wird gezeigt, dass die beschriebene Integrationstheorie der linearen Differentialgleichungen sich auf eine viel allgemeinere Klasse von Differentialgleichungen übertragen lässt. Den Schluss bilden Betrachtungen über Differentialgleichungen, die eine endliche oder unendliche continuirliche Gruppe gestatten. El.

E. Picard. Sur l'extension des idées de Galois à la théorie des équations différentielles. (Extrait d'une lettre adressée à M. Klein.) Math. Ann. 47, 155-156.

Ist $P\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0$ eine algebraische Differentialgleichung und $V = R(y_1, y_2, \dots, y_\mu, x)$ eine rationale Function von μ Integralen $y_1, \dots, y_\mu$ und x, so genügt V einer Differentialgleichung $(m\mu)^{\text{ter}}$ Ordnung E. Im allgemeinen hat $E = 0$ kein Integral mit einer algebraischen Gleichung niederer Ordnung gemein, ausser mit gewissen leicht herstellbaren Gleichungen, deren Ensemble mit φ bezeichnet werde. In besonderen Fällen kann es vorkommen, dass $E = 0$ ein nicht φ angehörendes Integral mit einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung $f\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \dots, \frac{d^p V}{dx^p}\right) = 0$ gemein hat. Die niedrigste

unter den Gleichungen dieser Art führt zu einer ganz ähnlichen Theorie wie die, welche der Verf. für die linearen Gleichungen (Math. Ann. **46**) entwickelt hat. Hr.

F. Marotte. Sur une application de la théorie des groupes continus à l'étude des points singuliers des équations différentielles linéaires. C. R. **123**, 867-870.

Picard (Traité d'Analyse, **3**) hat gezeigt, dass die Integration einer linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten sehr eng mit dem Studium einer algebraischen Gruppe linearer Transformationen verbunden ist, welche hier dieselbe Rolle spielt wie die Galois'sche Gruppe bei der Auflösung einer algebraischen Gleichung. Der Verf. zeigt, wie man auf diesem Wege in Bezug auf das Verhalten der Integrale in der Umgebung eines einzelnen singulären Punktes zu ganz ähnlichen Sätzen gelangt wie sie Picard für die Untersuchung der Integrale in der ganzen Ebene erhalten hat, und erläutert dies an einem Beispiel. Wbg.

J. M. Page. Note on singular solutions. American J. **18**, 95-97.

Ist $Uf \equiv \xi(x, y)\, \partial f/\partial x + \eta(x, y)\, \partial f/\partial y$ eine Transformationsgruppe, die zur Differentialgleichung $\Omega(x, y, y') = 0$ gehört, und deren Bahncurven nicht mit den Integralcurven der letzteren identisch sind, so kann es vorkommen, dass eine begrenzte Anzahl der Bahncurven von Uf mit particulären Integralen der Differentialgleichung zusammenfällt. Solche Curven werden dargestellt durch $\Omega(x, y, \eta/\xi) = 0$. In dieser Gleichung ist die Enveloppe der Integralcurven, falls sie existirt, enthalten. Dies giebt ein Mittel an die Hand, singuläre Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen zu finden mit Vermeidung der Oerter der Spitzen und Knoten, die bei der gewöhnlichen Methode gleichzeitig mit erhalten werden. Hr.

I. Maddison. On singular solutions of differential equations of the first order and the geometrical properties of certain invariants and covariants of their complete primitives. Quart. J. **28**, 311-374.

Die Untersuchung der singulären Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung kann bekanntlich auf zwei Wegen geführt werden, indem der Ausgangspunkt entweder von der Integralgleichung oder der Differentialgleichung genommen wird. In der vorliegenden Arbeit wird der erstere Weg eingeschlagen und vorausgesetzt, dass die Integralgleichung eine Gleichung n^{ten} Grades in der willkürlichen Constante Ω ist, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von x und y sind (Ω-Gleichung). Die Differentialgleichung, die durch Elimination von Ω zwischen der Ω-Gleichung und ihrer Ableitung nach x erhalten wird, heisst p-Gleichung ($p = dy/dx$). Betrachtet man die linken Seiten dieser Gleichungen als binäre Formen resp. in $\Omega, 1$ und $p, 1$, so kommen in der

Frage nach den singulären Lösungen die Discriminanten der Formen in Betracht, die, gleich Null gesetzt, neben der Enveloppe der Curvenschar den Ort der Knotenpunkte (node-locus), der Spitzen (cusp-locus) und der Berührungspunkte (tac-locus) in sich schliessen. Es erfolgt zunächst eine allgemeine Discussion der Schar n^{ter} Ordnung, in welcher namentlich die Aufstellung einer Grenze für die Ordnung der Singularitäten, die in jeder Curve der Schar auftreten können und einen Ort haben, sowie die Bestimmung der Zahl der festen Punkte der Schar und der Ordnung der in einem solchen Punkte stattfindenden Singularität an der Enveloppe bemerkenswert ist. Darauf werden speciell die quadratische, kubische und biquadratische Schar eingehend untersucht, und bei den beiden letzteren wird der Nutzen gezeigt, den man aus der Betrachtung der anderen Invarianten und Covarianten ausser den bisher allein berücksichtigten Discriminanten für die Erörterung der in Rede stehenden Singularitäten ziehen kann. Die geometrischen Eigenschaften dieser Gebilde und ihre Beziehungen zu der ursprünglichen Curvenschar bilden den Hauptgegenstand der Abhandlung, deren Ergebnisse durch zahlreiche Beispiele illustrirt sind. Vorausgeschickt ist ein chronologisch geordnetes reichhaltiges Verzeichnis der einschlägigen Litteratur. Hr.

A. Kneser. Neue Beweise für die Convergenz der Reihen, welche bei der Integration linearer Differentialgleichungen in der Umgebung der einfachsten singulären Stellen auftreten. Math. Ann. **47**, 408-422.

Frobenius hat im J. für Math. **76** (s. F. d. M. **5**, 180, 1873) für die Convergenz der Reihen, welche, wie Fuchs (J. für Math. **66**) zuerst gezeigt hat, bei der Integration linearer homogener Differentialgleichungen in der Umgebung eines als „Stelle der Bestimmtheit" bezeichneten singulären Punktes auftreten, eine neue Beweismethode gegeben. Darin bildet das Theorem von Weierstrass über die Summation einer gleichmässig convergenten Reihe, deren Glieder Potenzreihen einer und derselben Variable sind, ein wesentliches Hülfsmittel. In der vorliegenden Abhandlung wird gezeigt, wie man, ohne von diesem Satze Gebrauch zu machen, den Beweis der Convergenz in mehr elementarer Weise führen und zu der Frobenius'schen Darstellung der Integrale in dem Falle gelangen kann, dass einige Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung gleich sind oder um ganze Zahlen von einander sich unterscheiden. Hr.

L. Fuchs. Ueber eine Klasse linearer homogener Differentialgleichungen. Berl. Ber. 1896, 753-769.

Gegenstand der Arbeit ist der Beweis des folgenden Satzes: Hat die zu einem beliebigen Umlauf der unabhängigen Variable z einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung für u zugehörige Fundamentalgleichung $|a_{h,k}-\delta_{hk}\omega|=0$ $(h,k=1,2,\dots,n;\ \delta_{hk}=0$ für $h\neq k$, $\delta_{ii}=1)$ die Eigenschaft, dass sie von den reciproken Wur-

zeln der Gleichung $|a'_{h,k} - \delta_{hk}\omega| = 0$ befriedigt wird, wo a' den conjugirten Wert von a bezeichnet, und sind überdies die Wurzeln wenigstens einer dieser Fundamentalgleichungen sämtlich vom Modul 1 und von einander verschieden, so giebt es einen aus den Elementen $u_1, \dots, u_n$ eines Fundamentalsystems von Integralen und ihren conjugirten Werten gebildeten bilinearen Ausdruck von der Form $\varphi = A_1 u_1 u'_1 + \cdots + A_n u_n u'_n$, dessen Coefficienten von z unabhängig sind und reale Verhältnisse besitzen, und der für alle Umläufe von z ungeändert bleibt. Dieser Satz ist umkehrbar. Zu der durch die angegebenen Bedingungen charakterisirten Klasse gehören speciell die algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen, sofern wenigstens eine der Fundamentalgleichungen lauter ungleiche Wurzeln hat. Auf Grund des erwähnten Satzes wird eine Bemerkung von Picard betreffs der von Jordan gegebenen Typen von Fundamentalsubstitutionen der algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen dritter Ordnung ergänzt durch Angabe einer bilinearen Form für den vierten Typus, die bei allen Fundamentalsubstitutionen dieses Typus in sich selbst verwandelt wird. Hr.

L. SCHLESINGER. Ueber die Integration linearer homogener Differentialgleichungen durch Quadraturen. J. für Math. **116**, 97-132.

Die Euler'sche Methode, die Differentialgleichung der Gauss'schen Reihe durch Quadraturen, nämlich in Form bestimmter Integrale, in denen die unabhängige Veränderliche als Parameter vorkommt, zu integriren, wird auf beliebige lineare homogene Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten nach dem Vorgange von Poincaré ausgedehnt, der die allgemeine Anwendbarkeit der Laplace'schen Methode gezeigt hatte (American J. 7). Hierbei tritt ein bisher nicht bemerkter Zusammenhang hervor mit dem Abel'schen Satze über die Vertauschung von Parameter und Argument und den sich darauf stützenden Untersuchungen von Fuchs im J. für Math. 76. Ist $A_x(y) \equiv \sum_{k=0}^{k=n} P_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} = 0$ eine lineare Differentialgleichung mit ganzen rationalen Coefficienten vom Grade m, und setzt man:

$$\varphi_\nu(z) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{m+\nu} \frac{(\xi-1)(\xi-2)\dots(\xi-k)}{(\xi+m-1)(\xi+m-2)\dots(\xi+m-\nu)} \frac{P_k^{(m+k-\nu)}(z)}{(m+k-\nu)!},$$

dann steht der lineare Differentialausdruck $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung $\mathfrak{A}_z(u) = \sum_{\nu=0}^{\nu=m+n} \varphi_\nu(z) \frac{d^\nu u}{dz^\nu}$ mit $A_x(u)$ in der Beziehung $A_x((z-x)^{\xi-1}) = \mathfrak{A}_z((z-x)^{\xi+m-1})$. In dieser Gleichung ist der Abel'sche Vertauschungssatz als specieller Fall enthalten. Ist $A'_x(w)$ der adjungirte und $A_x(u, w)$ der begleitende bilineare Differentialausdruck von $A_x(y)$, so ist $u = \int_L w(z-x)^{\xi+m-1} dx$ eine Lösung der Differentialgleichung $\mathfrak{A}_z(u) = 0$, wenn w eine Lösung der Differentialgleichung $A'_x(w) = 0$

und L einen Integrationsweg bedeutet, für den $\int\limits_L \frac{d}{dx} A_x((z-x)^{\xi-1}, w)\,dx$ Null ist. Als einen solchen Integrationsweg werden sogenannte Doppelschleifen gewählt. Bezeichnet man mit $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ die von einander verschiedenen Nullstellen der Function $P_n(x)$ und mit s_k die von einem regulären Punkte $x=\xi$ aus um $x=a_k$ herumgelegte Schleife, mit s_0 die von demselben Punkte um $x=z$ gelegte Schleife, so sind die Doppelschleifen durch Symbole $s_\alpha s_\beta s_\alpha^{-1} s_\beta^{-1}$ $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, \ldots, \sigma;$ $\alpha \neq \beta)$ charakterisirt. Die über diese Doppelschleifen erstreckten Integrale lassen sich linear und homogen und mit constanten Coefficienten aus den Schleifenintegralen $\int\limits_{s_\alpha} w_k(z-x)^{\xi+m-1}dx$ zusammensetzen, wo $w_1, \ldots, w_n$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $A'_x(w)=0$ ist. Die Bestimmung der Coefficienten, damit diese linearen Verbindungen Lösungen von $\mathfrak{A}_z(u)=0$ werden, und die Herstellung eines Fundamentalsystems solcher Lösungen bilden den Gegenstand der Untersuchung, die für den Fall, wo $A_x(y)=0$ zur Fuchs'schen Klasse gehört und der Grad von $P_n(x)$ gleich n ist, vollständig durchgeführt wird. Die hierbei nötige Bestimmung der Aenderungen, welche die Schleifenintegrale bei geschlossenen Umläufen von z erleiden, wird nach der von Fuchs begründeten „Methode der veränderlichen Integrationswege“ (J. für Math. **71**; F. d. M. **2**, 248, 1870) ausgeführt. In den sich ergebenden Formeln sind die Fundamentalsubstitutionen der Differentialgleichung für die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale erster Gattung, wie sie Fuchs aufgestellt hat, ebenso wie die allgemeineren zu Abel'schen Integralen mit beliebiger binomischer Irrationalität gehörigen, wie sie später von Broecker (Diss. Berlin 1893) gegeben worden sind, als specielle Fälle enthalten. Hr.

L. Schlesinger. Zur Theorie der Euler'schen Transformirten einer homogenen linearen Differentialgleichung der Fuchs'schen Klasse. J. für Math. **117**, 148-167.

In einer früheren Arbeit (vergl. das vorhergehende Referat) ist gezeigt worden, dass sich die Lösung jeder homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten durch ein Integral von der Form $\int\limits_L w(z-x)^{\xi-1}dx$ darstellen lässt, wo w die Lösung einer gewissen homogenen linearen Differentialgleichung mit ebenfalls rationalen Coefficienten bedeutet, die sich unmittelbar in expliciter Form angeben lässt. Diese Hülfsdifferentialgleichung nennt der Verf. „Euler'sche Transformirte“ der vorgelegten Differentialgleichung. A. a. O. wurden für eine Differentialgleichung der Fuchs'schen Klasse die Substitutionen bestimmt, die ein Fundamentalsystem in obiger Integralform bei einem Umlauf der unabhängigen Variable erfährt. In der vorliegenden Abhandlung wird

mit Zuhülfenahme dieser Substitutionen das Verhalten zweier Differentialgleichungen zu einander erörtert, deren Euler'sche Transformirte im Riemann'schen Sinne zu derselben Klasse gehören. Im Zusammenhange damit wird die Reductibilitätsfrage untersucht, und die erlangten Ergebnisse werden auf die Tissot-Pochhammer'sche und auf diejenigen Differentialgleichungen angewandt, denen nach Fuchs die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung Genüge leisten. Hr.

L. Heffter. Ueber gemeinsame Vielfache linearer Differentialausdrücke und lineare Differentialgleichungen derselben Klasse. J. für Math. **116**, 157-166.

Zweck der Arbeit ist, zu zeigen, wie der von Riemann eingeführte Begriff einer Klasse von linearen Differentialgleichungen, der in den neueren Untersuchungen von Fuchs (Berl. Ber. 1888ff.) eine wichtige Rolle spielt, mit dem Begriff des gemeinsamen Vielfachen zweier linearen Differentialausdrücke zusammenhängt. Sind $P(y)$ und $R(y)$ zwei solche Ausdrücke von den resp. Graden ν und n, so wird das kleinste gemeinsame Vielfache beider durch den Differentialausdruck niedrigster Ordnung Z dargestellt, der durch P und R zugleich teilbar ist, $Z \equiv SP \equiv QR$; er ist höchstens von der Ordnung $n+\nu$, die Coefficienten von S und Q bestimmen sich bis auf einen gemeinsamen Factor durch Auflösung von linearen Gleichungen. Haben P und R einen grössten gemeinsamen Teiler von der Ordnung σ, so ist Z von der Ordnung $n+\nu-\sigma$. Sei nun $\nu \leqq n-1$, so gehört die Gleichung $S=0$, wie unmittelbar zu ersehen, mit $R=0$ zu derselben Klasse, und umgekehrt, wenn $S=0$ mit $R=0$ zu derselben Klasse gehört, so ist $SP(y)$ durch $R(y)$ teilbar, $SP(y) \equiv QR(y)$, SP also ein gemeinsames Vielfaches von P und R. Hieraus ergiebt sich ein Mittel, alle mit $R=0$ zu derselben Klasse gehörigen Gleichungen zu finden, und ein einfacher Weg, alle von Fuchs a. a. O. bewiesenen Sätze abzuleiten. Hr.

P. Günther. Zur Theorie der adjungirten Differentialgleichung. J. für Math. **117**, 168.

Drückt man ein Fundamentalsystem der linearen homogenen Differentialgleichung $P(y)=0$ in der bekannten Form

$$y_1 = v_1,\ y_2 = v_1 \int v_2\, dx,\ \ldots,\ y_n = v_1 \int v_2 dx \int \ldots \int v_n\, dx$$

aus und setzt $\eta_i = v_1 v_2 \ldots v_i$, $A_i(y) = \eta_i D_x(\eta_i^{-1} y)$, $A_i'(z) = \eta_i^{-1} D_x(\eta_i z)$, so ergeben sich für $P(y)$ und den adjungirten Differentialausdruck $P'(z)$ die Darstellungen: $P(y) = A_n A_{n-1} \ldots A_1$, $P'(z) = A_1' A_2' \ldots A_n'$. Diese Form von P' lässt die Reciprocität mit P am deutlichsten hervortreten und zugleich andere bekannte Eigenschaften der Multiplicatorgleichung leicht erkennen. Hr.

A. Gutzmer. Zur Theorie der adjungirten Differentialgleichungen. Habilitationsschrift. Halle a. S. 25 S. 4°.

Bilden $y_1, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem von Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung, so genügen die logarithmischen Ableitungen der Determinante $D(y_1 \ldots y_n) = | y_\lambda^{(\varkappa-1)} |$, nach den Elementen der $\varkappa^{\text{ten}}$ Zeile genommen, $z_{\varkappa,\lambda} = \dfrac{\partial \log D}{\partial y_\lambda^{(\varkappa-1)}}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ ebenfalls einer homogenen linearen Differentialgleichung, welche Cels, der sie zuerst untersucht hat, die „Adjungirte der $\varkappa^{\text{ten}}$ Zeile“ nennt. Im vorliegenden Aufsatz werden einige weitere Eigenschaften dieser Gleichung, die kürzer „$\varkappa^{\text{te}}$ Adjungirte“ genannt wird, abgeleitet. Insbesondere wird der Fall $\varkappa = 1$ näher untersucht; zunächst werden die Bedingungen dafür explicite angegeben, dass eine lineare homogene Differentialgleichung mit ihrer ersten Adjungirten übereinstimmt. Hierbei ergiebt sich, dass, wie bereits Cels gefunden hat, erstere von gerader Ordnung sein muss. Ferner wird der eigentümliche Zusammenhang zwischen der ersten und n^{ten} (Lagrange'schen) Adjungirten aufgedeckt und gezeigt, dass nur für lineare homogene Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten die beiden Adjungirten übereinstimmen. Endlich gilt, wie für die Lagrange'sche Adjungirte, der Satz, dass sich die erste Adjungirte eines zusammengesetzten Differentialausdrucks aus den ersten Adjungirten der einzelnen Componenten in umgekehrter Reihenfolge zusammensetzt. Hr.

A. Gutzmer. Note sur certaines équations différentielles linéaires. Teixeira J. **13**, 3-9.

Der in einer Abhandlung des Verf. im J. für Math. **115**, 79 - 84, (F. d. M. **26**, 356, 1895) bewiesene Satz, dass die linearen homogenen Differentialgleichungen, die aus der Iteration einer linearen Gleichung erster Ordnung hervorgehen, identisch sind mit den linearen homogenen Differentialgleichungen, denen die Potenzen der Integrale einer solchen Gleichung zweiter Ordnung genügen, wird hier auf einem anderen Wege abgeleitet, und daran wird eine Bemerkung über die Iteration von linearen nicht homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung geknüpft.

Hr.

G. F. Metzler. Equations and variables associated with the linear differential equation. Annals of Math. **11**, 1-9.

Die Principien der allgemeinen Ausdehnungslehre werden kurz auseinandergesetzt und zu der bekannten geometrischen Auffassung der Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung verwandt, wonach die Werte, welche ein Fundamentalsystem von Integralen an irgend einer Stelle der unabhängigen Variable x annimmt, als die homogenen Coordinaten eines Punktes einer $(n-1)$-fach ausgedehnten ebenen Mannigfaltigkeit S_{n-1} betrachtet werden. Variirt die unabhängige

Veränderliche, so beschreibt dieser Punkt eine Curve Γ in S_{n-1}. Der Totalität aller geschlossenen Umläufe von x entspricht eine Curve des Systems von Integralcurven, die in collinearer Beziehung zu einander stehen und durch homographische Substitutionen aus einander abgeleitet werden. Es folgt dann die geometrische Deutung der Eigenschaften der Integrale einer Differentialgleichung, die sich selbst adjungirt ist. Hr.

M. Petrovitch. Remarques algébriques sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre. S. M. F. Bull. **24,** 58-80.

Die Bemerkungen beziehen sich auf die reellen Werte der unabhängigen Variable, für welche Integrale einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung im voraus gegebene feste Werte annehmen können. Als ein solcher Wert wird hier Null oder Unendlich angenommen, worauf die anderen Fälle leicht zurückgeführt werden können. In einer früheren Arbeit hat der Verf. die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, dass die Null- und Unendlichkeitsstellen mit der Integrationsconstante sich nicht ändern, und ein einfaches Verfahren angegeben, die Ordnung der beweglichen Null- und Unendlichkeitsstellen zu berechnen. Mit Hülfe dieser Resultate gelingt es, bemerkenswerte Sätze über die Zahl und Lage der Null- und Unendlichkeitsstellen der Integrale in einem gegebenen reellen Intervalle, in welchem dieselben reell sind, abzuleiten. Eine detaillirte Untersuchung der reellen Null- und Unendlichkeitsstellen der Integrale der Riccati'schen Gleichung bildet den Beschluss. Hr.

G. Wallenberg. Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung. J. für Math. **116,** 1-9.

Den von Fuchs aufgestellten Bedingungen dafür, dass die Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung feste Verzweigungspunkte besitzen, hat Poincaré eine Form gegeben, bei der der zweite Differentialquotient der Integrale eine wesentliche Rolle spielt. Andererseits hat derselbe Mathematiker nachgewiesen, dass eine solche Differentialgleichung erster Ordnung im allgemeinen algebraisch integrirbar ist. Dies führt den Verf. darauf, zu untersuchen, in wie weit die blosse Gestalt des zweiten Differentialquotienten über die algebraische Integrirbarkeit der gegebenen Differentialgleichung erster Ordnung entscheidet. Sei $F(z, y, y') = 0$, die betrachtete Differentialgleichung, worin F eine ganze rationale Function von z, y, y' bedeutet, so beschränkt sich der Verf. auf den Fall, dass alle ihre Particularintegrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' + \lambda y' + \mu y = 0$ genügen, deren Coefficienten rationale Functionen von z sind. Enthält F ausser dem von y und y' freien Gliede mindestens noch Glieder zweier verschiedenen Dimensionen y und y', so ist sowohl das allgemeine Integral von $F = 0$ als auch das der linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Particularintegral erster Ordnung $F = 0$ darstellt, algebraisch. Hr.

A. Korkine. Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre. C. R. **122,** 1183-1185; Math. Ann. **48,** 317-364.

In der Differentialgleichung (1) $Mdx+Ndy=0$ sei, wenn $\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho$ beliebig gegebene, aber von einander verschiedene Functionen von x bedeuten, $N=(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)\ldots(y-\alpha_\varrho)$ und $M=p_0y^\varrho+p_1y^{\varrho-1}+\cdots+p_\varrho$, wo p_0 ebenfalls eine beliebig gegebene Function von x ist, während $p_1, \ldots, p_\varrho$ noch zu bestimmende Functionen von x sind. Es sollen alle Gleichungen (1) gefunden werden, deren allgemeines Integral die Form $(y-v_1)^{m_1}(y-v_2)^{m_2}\ldots(y-v_n)^{m_n}=C$ hat; $m_1, \ldots, m_n$ sind gegebene, von Null verschiedene Constanten, $v_1, \ldots, v_n$ von einander verschiedene Functionen von x, n eine gegebene ganze Zahl und C eine willkürliche Constante. Das Resultat ist folgendes: Es sei $f(y)=(y-v_1)\ldots(y-v_n)\Sigma\frac{m_i}{y-v_i}$, so setze man (2) $f(\alpha_1)=0$, $f(\alpha_2)=0, \ldots, f(\alpha_\varrho)=0$; ferner, indem man die Wurzeln von $f(y)/N=0$ mit $w_1, \ldots, w_{n-\varrho-1}$ bezeichnet, (3) $(w_k-v_1)^{m_1}(w_k-v_2)^{m_2}\ldots(w_k-v_n)^{m_n}=C_k$ $(k=1, 2, \ldots, n-\varrho-1)$, (4) $\Sigma m_iv_i=-\Sigma m_i\int p_0\,dx+C'$, so bestimmen die n Gleichungen (2), (3), (4) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ als Functionen von x und den willkürlichen Constanten $C_1, C_2, \ldots, C_{n-\varrho-1}, C'$. Die Coefficienten $p_1, \ldots, p_\varrho$ ergeben sich dann eindeutig aus den v_i und p_0. Die Fälle, dass $\Sigma m_i=0$ ist und die Gleichung $f(y)/N=0$ vielfache Wurzeln hat, erfordern gewisse Modificationen. Bemerken wir noch, dass in der Abhandlung, welche die Entwickelung des Resultates enthält, zur Einleitung die Euler'sche Gleichung $\frac{dy}{dx}=1+\frac{R(x)}{y}$ als einfachstes Beispiel für das gestellte Problem ausführlich behandelt wird. Hr.

P. Painlevé. Sur les équations différentielles du premier ordre. C. R. **122,** 1319-1322; Toulouse Ann. **10** G, 1-37.

Die von Korkine veröffentlichten Resultate (vergl. das vorhergehende Referat) veranlassen den Verf., auf ein von ihm früher behandeltes Problem zurückzukommen, welches das Korkine'sche als besonderen Fall in sich schliesst (C. R. **114,** 107-109, 280-283; F. d. M. **24,** 298, 1892). Ist nämlich die Differentialgleichung (1) $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ gegeben, wo P und Q zwei Polynome in y von den Graden p und q mit von x abhängigen Coefficienten sind, so handelt es sich darum, zu erkennen, ob das allgemeine Integral von (1) die Form (2) $h(x)[y-g_1(x)]^{\lambda_1}[y-g_2(x)]^{\lambda_2}\ldots[y-g_n(x)]^{\lambda_n}=$ Const. annehmen kann, wo $h, g_1, g_2, \ldots, g_n$ (n eine gegebene ganze Zahl) unbekannte Functionen von x und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ unbekannte numerische Constanten sind. Der Verf. hat gefunden, dass man die Frage stets durch eine endliche Anzahl von rationalen Operationen entscheiden kann, und dass dann zwei Fälle möglich sind: Entweder $g_1, \ldots, g_n$ hängen

algebraisch von den Coefficienten von (1) ab, und $h(x)$ wird durch eine logarithmische Quadratur gegeben, oder die Gleichung lässt sich auf rationalem Wege auf eine Riccati'sche Gleichung zurückführen. Zum Schluss wird ein Verfahren angegeben, alle Differentialgleichungen (1) zu finden, deren Coefficienten rational in x sind, und deren Integral sich auf die Form (2) bringen lässt. Hr.

A. Korkine. Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre. C. R. **123**, 38-40.

P. Painlevé. Sur les équations différentielles du premier ordre. Réponse à M. Korkine. C. R. **123**, 88-91.

Die Behauptung von Painlevé in den C. R. **122**, 1319 ff. (vergl. das vorhergehende Referat), dass er früher ein allgemeineres Problem behandelt und gelöst habe als das Korkine'sche, erklärt dieser für ein Missverständnis; ihm sei bisher keine andere Lösung des von ihm gestellten Problems bekannt als diejenige, die er in seiner Note C. R. **122**, 1183 ff. gegeben hat. Ferner rügt er einen Irrtum von Painlevé in der Anführung der von Korkine bei seinem Problem gemachten Restrictionen für gewisse Constanten und erklärt einzelne von Painlevé aufgestellte Sätze als ungenau. Painlevé giebt den gerügten Irrtum zu. Was aber die behauptete Ungenauigkeit seiner Resultate betrifft, so glaubt er, abgesehen von einem durch einen Druckfehler entstellten Passus, der durch eine Verweisung auf die C. R. vom Jan. 1892 leicht zu berichtigen war, keinen Anlass zu haben, an seiner Mitteilung etwas zu ändern. Hr.

M. Petrovitch. Sur une équation différentielle du premier ordre. C. R. **122**, 1261-1263.

Zurückführung der Gleichung $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=f(x)$ auf die vielfach behandelte Gleichung $\frac{dY}{dt}=F(t)+Y^2$. Hr.

J. Bendixson. Sur les équations différentielles linéaires à solutions périodiques. Stockh. Öfv. **53**, 193-205.

Bei Differentialgleichungen der Form:

$$(1)\qquad \frac{dx}{dt}+(\alpha\cos t+\beta\sin t)x=\sum_{\nu=0}^{q}(a_\nu\cos\nu t+b_\nu\sin\nu t),$$

wo die Constanten rational sind, lässt es sich durch eine endliche Anzahl arithmetischer Operationen entscheiden, ob die Lösungen periodisch sind oder nicht.

Es wird dies zunächst für den Fall $\beta=0$ dargethan. In diesem

Falle lässt sich die Gleichung (1) in der Form:

$$x = e^{-a \sin t}\left\{\int_0^t e^{a \sin t}[f(\sin t) + \varphi(\sin t) \cos t]dt + c\right\}$$

integriren, wo f und φ ganze rationale Functionen bedeuten. Hieraus folgt, dass x periodisch wird, wenn die Entwickelung von $e^{a \sin t} f(\sin t)$ in eine Fourier'sche Reihe kein constantes Glied enthält, d. h. für $J \equiv \int_0^{2\pi} e^{a \sin t} f(\sin t)dt = 0$. Es lässt sich aber leicht nachweisen, dass (2) $J = A(a)V(a) + B(a)V'(a)$ ist, wo

$$V(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{a \sin t}\, dt,$$

und $A(a)$, $B(a)$ gewisse ganze rationale Functionen von $1/a$ bedeuten, deren Coefficienten ganze, ganzzahlige rationale Functionen von $a_1, \dots, a_q, b_1, \dots, b_q$ sind. Der Verf. zeigt nun, dass für rationale a der Quotient $V'(a)/V(a)$ immer irrational ist und $V(a)$, $V'(a)$ beide von Null verschieden sind. Die notwendige und hinreichende Periodicitätsbedingung $J = 0$ reducirt sich also nach (2) auf $A(a) = 0$, $B(a) = 0$. Aehnliches gilt im allgemeinen Falle (α und β beliebige rationale Zahlen).

Diese Untersuchung scheint geeignet, eine Vorstellung von den Schwierigkeiten zu geben, welche in complicirteren Fällen mit der Periodicitätsfrage verknüpft sind. Bdn.

A. Guldberg. Om integration af Differentialligninger af 2den orden. Christiania: Videnskabs-Selskabs Forhandlinger 1895, No. 6, 48 S.

Für die Differentialgleichung: (1) $F(y'', y', y, x) \equiv M(x, y, y')y'' + N(x, y, y') = 0$ giebt der Verf. folgende Integrationsmethode an:

Man bringe die Gleichung auf die Form $R dy' + Q dy + P dx = 0$ und addire zu dieser Gleichung die Identität $\alpha(x, y)dy - \alpha(x, y)y'dx = 0$, wo $\alpha(x, y)$ so zu bestimmen ist, dass die neue Gleichung (2) $R_1 dy' + Q_1 dy + P_1 dx = 0$ integrirbar wird (was damit gleichbedeutend ist, dass α einer gewissen partiellen Differentialgleichung genügen soll). Ein Integral von (2) sei (3) $\varphi(x, y, y') = k$. Dies ist zugleich ein erstes Integral von (1). Um das allgemeine Integral zu bekommen, hat man entweder (3) zu integriren, oder durch Anwendung einer neuen Function α (welche die obige Bedingung erfüllt) ein neues erstes Integral (4) $\psi(x, y, y') = h$ herzuleiten und nachher aus (3) und (4) y' zu eliminiren [falls (3) und (4) wesentlich verschieden sind].

Die Brauchbarkeit dieser Methode hängt wesentlich von der Natur der partiellen Differentialgleichung ab, von welcher α eine Lösung sein soll. Der Verf. stellt in dieser Hinsicht ziemlich ausführliche Betrachtungen an. Nachher beschäftigt er sich mit der Integration der Glei-

chung (2), wobei die Lie'sche Theorie der infinitesimalen Transformationen berücksichtigt wird. Bdn.

A. GULDBERG. En Bemaerkning om Differentialligninger af anden Orden. Nyt Tidss. f. Math. 7B, 1-6.

Eine Bemerkung über die Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Gegeben sei eine Differentialgleichung von der Form $My''+N=0$, wo M und N Functionen von y', y und x sind, dann kann sie immer auf die Form $Rdy'+Qdy+Pdx=0$ gebracht werden, wo R, Q, P Functionen von y', y und x sind. Durch Addition der identischen Gleichung $\alpha(y', y, x)dy-\alpha(y', y, x)y'dx=0$ kann sie immer die Form einer totalen Differentialgleichung annehmen, wenn α eine passende Function ist. Die partielle Differentialgleichung, die α befriedigen muss, wird entwickelt, und einige Beispiele werden gegeben (vergl. das vorangehende Referat). V.

E. NAETSCH. Untersuchungen über die Reduction und Integration von Picard'schen Differentialgleichungen. Leipz. Ber. 48, 1896, 1-78.

Die Lehre von den doppeltperiodischen Functionen zweiter Art ist geschichtlich durch ihre Entstehung wie auch sachlich durch ihre Anwendungen aufs engste verwachsen mit der Theorie einer gewissen Klasse von homogenen linearen Differentialgleichungen. Hermite, dem die Analysis den Begriff der doppeltperiodischen Function zweiter Art verdankt, wurde auf denselben bekanntlich geführt, als er es (1877) unternahm, die Lamé'sche Differentialgleichung $y''=[m(m+1)k^2\mathrm{sn}^2w+A]y$, in welcher m eine ganze Zahl ist, für beliebige Werte der Constanten A zu integriren; es stellte sich heraus, dass die vollständige Lösung dieser Differentialgleichung stets durch doppeltperiodische Functionen zweiter Art oder doch durch gewisse Abarten solcher Functionen dargestellt werden kann. Wesentlich verallgemeinert wurde dieses Ergebnis durch Picard, welcher bald darauf zeigte, dass die angegebene Eigenschaft allen homogenen linearen Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten zukommt, deren allgemeine Lösungen den Charakter rationaler Functionen besitzen (J. für Math. 90).

Die dieser Klasse angehörigen „Picard'schen Differentialgleichungen" sind seitdem in einer Reihe von Arbeiten behandelt worden, indem bald eine einzelne Differentialgleichung, bald eine mehr oder weniger umfassende Schar solcher Gleichungen herausgegriffen wurde, um hinsichtlich ihrer Eigenschaften und der Beschaffenheit ihrer Lösungen untersucht zu werden. Ein Blick auf diese Arbeiten lehrt nun, dass sich die Aufmerksamkeit der Mathematiker hierbei in erster Linie solchen Differentialgleichungen zuwandte, welche, wie die Lamé'sche Gleichung, die Eigenschaft besitzen, sich nicht zu ändern, wenn $-w$ an Stelle von w substituirt wird. Insbesondere sind von Hermite, Elliot, Gyldén, Picard, Darboux, de Sparre eine Reihe von Differentialgleichungen zweiter Ordnung betrachtet worden, welche mit der Lamé'schen das

genannte Merkmal gemein haben; aber auch in den vereinzelten Untersuchungen über Differerentialgleichungen höherer Ordnung mit doppeltperiodischen Coefficienten, z. B. von Halphen, spielen Gleichungen, denen die obige Eigenschaft zukommt, eine wichtige Rolle.

Die vorliegende Arbeit ist nun in erster Linie dem Problem gewidmet, die allgemeinste Picard'sche Differentialgleichung zweiter Ordnung aufzustellen und vollständig zu integriren, welche bei Aenderung des Vorzeichens der unabhängigen Variable in sich selbst übergeht; daneben aber werden einige allgemeinere auf doppeltperiodische Functionen zweiter Art und auf Picard'sche Differentialgleichungen bezügliche Fragen erörtert, zu deren Studium die Behandlung dieses Problems Anlass giebt. Die erste dieser Fragen betrifft die Beziehungen, welche zwischen zwei conjugirten doppeltperiodischen Functionen zweiter Art stattfinden, d. h. solchen, die sich nur durch das Vorzeichen der unabhängigen Variable w von einander unterscheiden. In zweiter Linie kommt die wichtige Frage in Betracht, ob es vorteilhafter ist, eine doppeltperiodische Function zweiter Art mit der einzigen singulären Stelle $w = iK'$, welche einer vorgelegten Picard'schen Differentialgleichung Genüge leisten soll, mittels ϑ-Quotienten in „Productform" oder in „Summenform" darzustellen. — Ferner wird noch gezeigt, dass man jede beliebige Picard'sche Differentialgleichung durch Einführung einer neuen unbekannten Function auf eine gewisse „Normalform" bringen, d. h. auf eine andere Picard'sche Gleichung von derselben Ordnung und mit denselben singulären Stellen zurückführen kann, deren vollständige Lösung nur eine singuläre Stelle besitzt und für keinen endlichen Wert der unabhängigen Variable verschwindet.

Dann wird unter Benutzung der gewonnenen Ergebnisse die allgemeine Form jeder Picard'schen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche sich durch Vertauschung von w mit $-w$ nicht ändert, festgestellt. Im Anschluss hieran wird gezeigt, wie sich derartige Differentialgleichungen durch Einführung einer neuen unbekannten Function in einander überführen lassen, und wie sich die Zurückführung einer solchen Gleichung auf die Normalform gestaltet. Den Eigenschaften der auf die Normalform gebrachten Differentialgleichungen wird hierauf eine nähere Betrachtung gewidmet. Dabei findet insbesondere der Fall eingehende Würdigung, wo die betrachtete Differentialgleichung nur die vier singulären Stellen $w = iK'$, 0, K, $K + iK'$ besitzt; in diesem Falle ist dieselbe identisch mit der von de Sparre (Acta Math. **3**) behandelten Gleichung, welche ihrerseits alle von den übrigen vorhin citirten Autoren betrachteten Differentialgleichungen als specielle Fälle umfasst.

Zum Schluss wird ein auf den vorangehenden Entwickelungen beruhendes Verfahren zur vollständigen Integration der auf die Normalform gebrachten Differentialgleichungen angegeben und an einigen einfachen Beispielen erläutert. — Dieses Verfahren lässt sich übrigens — mutatis mutandis — auf alle Picard'schen Differentialgleichungen zweiter Ordnung anwenden, welche die Normalform besitzen.

Bei der vollständigen Integration der in Rede stehenden Differential-

gleichungen wird vorausgesetzt, dass die vollständige Lösung die Form $AF(w)+BF_1(w)$ erhalten kann, wo $F(w)$ und $F_1(w)$ doppeltperiodische Functionen zweiter Art sind; der Ausnahmefall, in welchem diese Annahme nicht zutrifft, bleibt ausser Betracht. Wbg.

A. Berger. Sur une généralisation algébrique des nombres de Lamé. Upsala Nova Acta (3) **15**, 33 S. (1895.)

Ueber ganze rationale Functionen, welche der Differentialgleichung $(x^2+4)\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}-n(n+2)y=0$ genügen und für specielle x-Werte die Lamé'schen Zahlen geben. Bdn.

A. Markoff. Sur l'équation de Lamé. Math. Ann. **47**, 598-603.

In der Differentialgleichung zweiter Ordnung: $2\varphi y''+\varphi' y' -2(Ax+B)=0$ sei $\varphi=4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$, $A=n(n+1)$, B eine beliebige Constante; dann existiren, wie Hermite gezeigt hat, stets zwei Particularlösungen y_1, y_2 derart, dass das Product $y_1y_2= F(x, B)$ ein Polynom von x ist. F. Klein hat später in einer Note in den Math. Ann. **40**, 125ff. (F. d. M. **24**, 308, 1892) die Gesetze der Verteilung der reellen Wurzeln der Gleichung $F(x, B)=0$ für ein beliebiges B mittels schematischer Zeichnungen angegeben. In der vorliegenden Note wird für diese Gesetze ein analytischer Beweis geliefert. Hr.

A. Liapounoff. Sur une série relative à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. C. R. **123**, 1248-1252.

Für die Theorie der Gleichung (1) $d^2y/dx^2+p(x)y \doteq 0$, worin $p(x)$ eine reelle continuirliche und periodische Function von x mit der Periode ω bedeutet, ist die Betrachtung der Constante $\frac{1}{2}(f(\omega)+\varphi'(\omega)) =A$, wo $f(x)$ und $\varphi(x)$ zwei Lösungen von (1) sind, mit den Anfangsbedingungen $f(0)=1$, $f'(0)=0$; $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$ von Wichtigkeit. Ist nämlich $A^2<1$, so sind alle Lösungen von (1) für jeden reellen Wert von x endlich. Der Verf. stellt A durch eine convergente Reihe dar, deren Glieder aus vielfachen Integralen bestehen, und gelangt durch Discussion derselben zu folgenden zwei Fällen, in denen $A^2<1$ ist: 1) wenn p nur positive oder Nullwerte annimmt und die Bedingung erfüllt: $\omega\int_0^\omega p(x)dx \leqq 4$; 2) wenn p eine ungerade Function ist und die durch die Relation $\int p dx = P$ mit der Be-

stimmung $\int_0^\omega P dx = 0$ eingeführte Function P die Eigenschaft hat, dass $\omega \int_0^\omega P^2 dx \leqq 4$.

Hr.

H. Gyldén. Sur une équation différentielle du second ordre, non-linéaire et à coefficients doublement périodiques. (Extrait d'une lettre à M. C. Hermite.) C. R. **122**, 160-165.

H. Gyldén. Remarques ultérieures relativement à ma dernière communication à M. Hermite. C. R. **122**, 585-588.

Es handelt sich um die für die Berechnung der planetarischen Ungleichheiten von langer Periode wichtige Integration der Gleichung:

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + (1+2g)k^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi . y - k^2 \sin 2\,\mathrm{am}\,\xi . (y^2 - g) - \tfrac{4}{3}k^2 \cos 2\,\mathrm{am}\,\xi . y^3 = -\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 X,$$

wo X eine Reihe von bekannten periodischen Gliedern bezeichnet; und zwar wird eine particuläre Lösung gesucht, indem man die willkürlichen Constanten gleich Null setzt. Hierfür werden verschiedene Approximationsmethoden angegeben, wobei die einzelnen Glieder y_0, y_1, ... der Reihe (1) $y = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots$ successive durch Auflösung von Lamé'schen Gleichungen vom einfachsten Typus bestimmt werden. Die Schwierigkeit bei diesem Verfahren besteht darin, die Operationen so einzuleiten, dass die Entwickelung (1) convergent wird. Die zweite Note enthält die Berichtigung eines Rechenfehlers in der ersten und die Hinzufügung einiger weiteren Bemerkungen. Hr.

A. Kneser. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen bei grossen reellen Werten des Arguments I, II. J. für Math. **116**, 178-212; **117**, 72-103.

Zunächst werden in einer allgemeinen Betrachtung über Differentialgleichungen der Form $y'' = f(x, y)$, worin f innerhalb eines Intervalls $a < x < b$ für beliebige y endlich und stetig ist und mit y stets dasselbe Zeichen besitzt, unter der Voraussetzung, dass ein reelles stetiges Integral der Differentialgleichung durch vorgeschriebene Werte für y und y' an irgend einer Stelle des Intervalls für den ganzen Umfang dieses Gebiets eindeutig bestimmt ist, folgende wichtige Resultate festgestellt: 1) Von den Functionen y und y' kann innerhalb des Intervalls höchstens eine verschwinden, und diese nicht mehr als einmal. 2) Unter der weiteren Annahme, dass f bei festgehaltenem Werte von x mit y zugleich wachse und abnehme und das Intervall nach der positiven Seite sich ins Unendliche erstreckt, besitzt die Differentialgleichung zwei,

und nur zwei Arten von Integralen y: A) y strebt, beständig wachsend oder beständig abnehmend, einem der Grenzwerte $\pm\infty$ zu; B) y und y' nähern sich der Grenze Null, indem die eine dieser Grössen beständig wächst, die andere beständig abnimmt. Zwei Integrale, die den Fall B) darbieten, sind identisch, wenn sie an einer Stelle des Intervalls gleich sind. Unter die betrachteten Differentialgleichungen fällt die lineare $y'' = y(a^2 + \varphi(x))$, wenn $\lim_{x=\infty} \varphi(x) = 0$. Wird noch angenommen, dass $\int_{x_0}^{\infty} \varphi(x)dx$ einen endlichen Wert habe, dann hat die Differentialgleichung die resp. den Fall A) und B) darbietenden Integrale: $y_1 = B_1 e^{ax}(1+\varepsilon_1)$, $y_2 = B_2 e^{-ax}(1+\varepsilon_2)$, wo B_1 und B_2 Constanten sind, a positiv ist, und für $x = \infty$ die Gleichungen $\lim\varepsilon_1 = \lim\varepsilon_2 = \lim\varepsilon'_1 = \lim\varepsilon'_2 = 0$ bestehen. Diese Resultate finden eine wichtige Anwendung auf die asymptotische Darstellung des Integrals einer linearen Differentialgleichung durch eine divergente Reihe, die derselben formal genügt. Nach der Poincaré'schen Bezeichnung stellt nämlich eine nach fallenden Potenzen fortschreitende Reihe $y = \alpha_0 + \alpha_1 x^{-1} + \cdots + \alpha_n x^{-n}$ die Function y asymptotisch dar und ist also semiconvergent, wenn für jeden Index n die Gleichung $\lim_{x=\infty} \{x^n(y - \alpha_0 - \alpha_1 x^{-1} - \cdots - \alpha_n x^{-n})\} = 0$ besteht. Speciell wird nun gezeigt, dass jedes Integral der Gleichung $y'' + y(-a^2 + a_2/x^2 + a_3/x^3 + \cdots) = 0$, wo der Coefficient von y eine reelle Potenzreihe von nicht verschwindendem Convergenzbereich ist, in der angeführten Weise asymptotisch dargestellt werden kann. Die Abhandlung II stellt analoge Untersuchungen für Differentialgleichungen an, deren reelle Integrale „oscillatorisch“ sind, d. h. für grosse reelle Werte des Argumentes unendlich oft verschwinden, speciell für die Gleichung: $y'' + y(a^2 + a_2/x^2 + a_3/x^3 + \cdots) = 0$. Nachdem vorher gezeigt worden, dass jedes Integral derselben für grosse Werte von x in der Form $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \varepsilon$, wo C_1 und C_2 Constanten sind und für $x = \infty$ die Gleichungen $\lim\varepsilon = \lim\varepsilon' = 0$ bestehen, dargestellt werden kann, wird die asymptotische Darstellung der Integrale gegeben. Die erhaltenen Resultate werden auf die Theorie der Bessel'schen Functionen angewandt. Hr.

A. Tresse. Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$. Leipzig 1896. 87 S. gr. 8°.

Preisschriften gekrönt und herausgegeben von der Fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig. Nr. 32 (13 der math.-naturw. Section).

In ihrem Preisausschreiben vom März 1890 hatte die Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft gewünscht, dass die Invariantenbestimmung einer ausgedehnteren Kategorie zunächst von gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Grund der Lie'schen Methoden in Angriff genommen werde. Die gegenwärtige, im März 1896 gekrönte Preisschrift

ist eine auf Wunsch der Gesellschaft vervollständigte Redaction der Bewerbungsschrift, die der Verf. im November 1893 eingereicht hatte. Sie enthält die vollständige Bestimmung aller Differentialinvarianten, welche die Differentialgleichung $y'' = \omega(x, y, y')$ gegenüber der unendlichen Gruppe aller Punkttransformationen der Ebene besitzt. In der Einleitung erfüllt der Verf. die in F. d. M. **25**, 641, 1893/94 ausgesprochene Erwartung. Die Arbeit selbst zerfällt in acht Kapitel. Die vier ersten enthalten Entwickelungen, die den Zweck haben, die allgemeine Lie'sche Methode zur Bestimmung von Differentialinvarianten so zu specialisiren, dass die erforderlichen Rechnungen in dem hier behandelten Falle praktisch durchführbar werden. Es ist nicht möglich, diese Entwickelungen, die dem Verf. durchaus eigentümlich und von hohem praktischen Werte sind, in der hier gebotenen Kürze wiederzugeben. Das Ergebnis ist, dass die Gleichung: $y'' = \omega(x, y, y')$ zwei relative Invarianten vierter Ordnung, drei von fünfter Ordnung und für $N \geqq 6$ $\frac{1}{2}(NN-N-8)$ von N^{ter} Ordnung in den Differentialquotienten von ω nach x, y, y' besitzt. Diese Invarianten werden nur in dem schon mehrfach untersuchten Falle illusorisch, wenn ω in Bezug auf y' eine ganze Function dritten Grades ist. In Kapitel 5 wird gezeigt, dass man, abgesehen von diesem Ausnahmefalle, mit Hülfe dreier Differentialparameter alle relativen Invarianten der Gleichung: $y'' = \omega$ aus höchstens drei bestimmten ableiten kann. In Kapitel 6 wird der erwähnte Ausnahmefall behandelt und gezeigt, dass die Gleichung $y'' = \omega$ durch Punkttransformation dann und nur dann auf die Form $y'' = 0$ gebracht werden kann, wenn ausserdem noch eine gewisse relative Invariante H verschwindet. Die Gleichungen von der Form: $y'' = \alpha(x, y) + \beta(x, y)y' + \gamma(x, y)y'^2 + \delta(x, y)y'^3$, für die $H = 0$ ist, sind die einzigen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die gegenüber der Gruppe aller Punkttransformationen der Ebene keine Invariante haben. Das Kapitel 7 entwickelt als Anwendung die Kriterien, an denen man erkennen kann, wann zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung von allgemeiner Beschaffenheit durch Punkttransformation in einander überführbar sind, d. h. es werden gewisse Invarianten angegeben, die man bilden und als Functionen von x, y, y' darstellen muss; sind diese Invarianten für beide Differentialgleichungen durch dieselben Relationen verknüpft, so ist die Ueberführung möglich, sonst nicht. In Kapitel 8 endlich werden die Kennzeichen dafür entwickelt, dass eine Differentialgleichung zweiter Ordnung gerade 0, 1, 2 oder 3 unabhängige infinitesimale Punkttransformationen gestattet. Den Beschluss bildet eine Formeltafel, auf der man die Werte der drei Differentialparameter und der Invarianten vierter bis sechster Ordnung zusammengestellt findet. Der Verf. hat sich durch seine Arbeit ein nicht zu unterschätzendes Verdienst erworben; denn es war von vorn herein gar nicht abzusehen, wie die praktischen Schwierigkeiten der von ihm behandelten Aufgabe überwunden werden sollten. El.

M. Petrowitch. Sur l'équation différentielle de Riccati et ses applications chimiques. Prag. Ber. 1896, 25 S.

Untersuchungen über den Wertverlauf des Integrals der Differentialgleichung $dy/dx = \varphi(y-f_1)(y-f_2)$ in einem Intervall $(0 \dots a)$, in welchem überall $\varphi > 0$, $f_2 > f_1 > 0$ ist, mit der Anfangsbedingung $y=0$ für $x=0$. Es werden verschiedene Hülfsmittel geschaffen, um das Integral in zwei Grenzen einzuschränken. Es wird dann gezeigt, wie man eine Approximation von y auf dem chemischen Wege erlangen kann; die bis jetzt realisirten Experimente entsprechen dem Falle der constanten Coefficienten. Lh.

W. Anissimow. Riccati's Gleichung allgemeiner Form. Warschau. Nachr. 1896, 1-33. (Russisch.)

Anissimow giebt eine Zusammenstellung von Eigenschaften der Gleichung (1) $y'+Py^2+Qy+R=0$, indem er zur Erleichterung sie an die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in bekannter Weise anknüpft. Dies giebt ihm Anlass, die Resultate der Fuchs'schen Theorie auf die Gleichung (1) zu übertragen. Unter anderem sind die Bemerkungen über die veränderlichen singulären Punkte der Gleichung hervorzuheben (vgl. indessen Painlevé's Vorlesungen 1897). Eine Liste der Litteraturnachweisungen ist vorangeschickt, welche aber leider nicht ganz vollständig ist. Si.

S. Maillard. Extrait d'une lettre. Nouv. Ann. (3) 15, 141-142.

In Beantwortung einer Frage, die in Nouv. Ann. (3) 15, 48 gestellt war, wird das allgemeine Integral der Gleichung $xy''-2y'+xy=0$ durch blosse Anwendung der Mac Laurin'schen Entwickelung in der Form $y=M(\cos x+x\sin x)+N(\sin x-x\cos x)$ abgeleitet. Hr.

A. A. Markow. Ueber eine Differentialgleichung. Petersb. Abhandl. (8) 3, No. 10.

Der Zweck der Abhandlung besteht darin, alle Fälle zu bestimmen, in welchen die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(1)\quad x^2(1-x^2)z'''+bx(1-x)(1-2x)z'' \\ +(dx(1-x)+e)z'+g(1-2x)z=0$$

Integrale zulässt, welche einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter oder erster Ordnung mit Coefficienten, die ganze Functionen von x sind, genügen. Es muss für diese Differentialgleichung oder für die mit ihr adjungirte z'/z eine rationale Function von z sein. Wenn die Gleichung (1) ein Integral zulässt, dessen logarithmische Ableitung eine rationale Function von x ist, so hat man das folgende Resultat. Es seien $b=\delta+\varepsilon+1$, $e=\varepsilon\delta$, $a=-2b=-\alpha-\beta-\omega-3$, $e=-d=\alpha\beta'+\alpha\omega+\beta\omega+\alpha+\beta+\omega+1$, $f=-2g=\alpha\beta\omega$. Dann ist die Existenz mindestens einer ganzen Zahl im System $\alpha/2$, $\beta/2$, $\omega/2$, $(\alpha/2)-\varepsilon$, $(\beta/2)-\varepsilon$, $(\omega/2)-\varepsilon$, $(\alpha/2)-\delta$, $(\beta/2)-\delta$, $(\omega/2)-\delta$ die

notwendige und hinreichende Bedingung, damit die Gleichung (1) gemeinschaftliche Integrale hat mit der homogenen linearen Differentialgleichung, deren Coefficienten rationale Functionen von x sind, und deren Ordnung kleiner als drei ist. Die entsprechenden Resultate hat man auch in dem Falle, dass die adjungirte Gleichung, die in der Form (2) $x^2(1-x^2)y''' + b_0 x(1-x)(1-2x)y'' + (d_0 x(1-x)+e_0)y' + g_0(1-2x)y = 0$ darstellbar ist, ein Integral hat, dessen logarithmische Ableitung eine rationale Function von x ist. Der Verf. betrachtet auch den Fall, wenn die Gleichung (1) zwei unabhängige Integrale zulässt, deren logarithmische Ableitungen rationale Functionen von x sind. Wi.

F. Enriques. Sopra le equazioni differenziali lineari del 4° ordine che divengono integrabili quando è noto un loro integrale particolare. Lomb. Ist. Rend. (2) **29**, 257-269.

Wenn eine lineare homogene nicht integrable Differentialgleichung dadurch integrabel wird, dass eines ihrer particulären Integrale bekannt ist, so sind folgende Fälle allein möglich: 1) Es existiren zwei Integrale der Form $y_1 = a\,e^{\int_0^x \varphi dx}$, $y_2 = ay_1 + b\int_0^x e^{\int_0^x \psi dx} dx$, wo a, b Constanten und φ, ψ algebraische Functionen der Coefficienten sind. 2) Die Lagrange'sche Adjungirte hat drei Integrale z_1, z_2, z_3, die durch die Gleichung $z_2^2 - z_1 z_3 = a\,e^{\int_0^x \varphi dx}$ verknüpft sind. 3) Die Gleichung ist durch Iteration einer algebraisch herstellbaren Differentialgleichung zweiter Ordnung zu erhalten. 4) Das allgemeine Integral ist die Summe der Integrale zweier algebraisch herstellbaren linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Zwischen vier Integralen eines Fundamentalsystems besteht eine Relation der Form $(y_1 y_4 - y_2 y_3)^2 - 4(y_1 y_3 - y_2^2)(y_2 y_4 - y_3^2) = ae^{\int_0^x \varphi dx}$, wo φ eine algebraische Function der Coefficienten ist. Hr.

F. Brioschi. Le equazioni differenziali lineari equivalenti alle rispettive equazioni differenziali aggiunte di Lagrange. Annali di Mat. (2) **24**, 339-346.

Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung der fünften Ordnung der Lagrange'schen Adjungirten äquivalent ist, so sind von ihren drei fundamentalen Invarianten diejenigen von ungeradem Grade gleich Null. Aber das Reciproke findet nicht statt; sondern es gilt folgender Satz, der mit Hülfe einer allgemeinen Derivationsformel für eine Form m^{ten} Grades $f(y_1, \ldots, y_n)$ mit constanten Coefficienten abgeleitet wird: Wenn die genannten Invarianten verschwinden, so kann die fragliche Gleichung fünfter Ordnung in folgende Form gebracht

werden: $\frac{d^5v}{dz^5}+10q_2\frac{d^3v}{dz^3}+10q_3\frac{d^2v}{dz^2}+5q_4\frac{dv}{dz}+q_5v=0$, worin

$$q_3=\tfrac{3}{2}\frac{dq_2}{dz},\quad q_4=\tfrac{5}{2}\frac{d^2q_2}{dz^2}+6q_2^2+K\quad (K=\text{const.}),$$

$q_5=\frac{3.5}{4}\frac{d^3q_2}{dz^3}+5.6q_2\frac{dq_2}{dz}$ und der Coefficient q_2 der Gleichung

$$\frac{1}{4^2.5}\frac{d^5q_2}{dz^5}+\tfrac{1}{2}q_2\frac{d^3q_2}{dz^3}+\frac{dq_2}{dz}\cdot\frac{d^2q_2}{dz^2}+6q_2^2\frac{dq_2}{dz}+K\frac{dq_2}{dz}=0$$

genügen muss. Hr.

N. Bugaiew. **Monogenität der Integrale von Differentialgleichungen.** Charkow Mitt. (2) **5**, 89-100. (Russisch.)

Eine Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung $(\mu>1)$ kann ausser monogenen Integralen noch nicht-homogene Integrale zulassen, welche dann höchstens von $\mu-2$ Constanten abhängen. — Einige Beispiele sind zur Erläuterung hinzugefügt. Si.

W. Anissimow. **Ueber die Form der Integrale der Differentialgleichungen mit periodischen Coefficienten.** Warschau Nachr. 1896 N, 1-23. (Russisch.)

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung erster Ordnung mit periodischen Coefficienten kann immer auf die Form gebracht werden: $y=J(Ax-C_1\varphi(x)_1 \,.\, \psi(C))$, „wo φ eine periodische Function und ψ eine solche Function ist, dass $\psi(A\omega+C)=\psi(C)$". Verallgemeinerung auf Differentialgleichungen beliebiger Ordnung und Anwendung auf lineare Differentialgleichungen, wie auch auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen mit periodischen Coefficienten. Si.

P. Nekrassow. **Imschenetsky's Regel zur Auffindung der algebraischen rationalen Integrale einer linearen Differentialgleichung.** Mosk. Math. Samml. **18**, 337-348. (Russisch.)

P. Nekrassow. **Methode von W. P. Ermakow zur Auffindung der rationalen Integrale der linearen Differentialgleichung.** Ibid. **18**, 275-288. (Russisch.)

In der ersten Note giebt der Verf. im Anschluss an seine früheren Arbeiten (vgl. F. d. M. **25**, 534ff. 1893/94) eine sehr einfache Darstellung der Methode von Imschenetsky zur Lösung der oben genannten Frage und einen neuen sehr eleganten Beweis, dass diese Methode wirklich alle rationalen Integrale geben kann, ferner zum Schluss einige Kriterien der Nichtexistenz solcher Integrale. Die zweite Note kritisirt die Arbeit von Ermakow (F. d. M. **25**, 534, 1893/94). Si.

F. H. Jackson. **A certain linear differential equation.** Edinb. M. S. Proc. **14**, 104-108.

Die Gleichung lautet:

$$\left[(\alpha)_n + n(\alpha)_{n-1} x D + \frac{n(n-1)}{1.2}(\alpha)_{n-2} x^2 D^2 + \cdots\right] y$$
$$-\frac{1}{x}\left[(\beta)_m x D + m(\beta)_{m-1} x^2 D^2 + \frac{m(m-1)}{1.2}(\beta)_{m-2} x^3 D^3 + \cdots\right] y = 0,$$

wo $(\alpha)_n = \Pi(\alpha)/\Pi(\alpha - n)$ und eine particulare Lösung durch die folgende Reihe gegeben wird, falls dieselbe convergirt:

$$y = 1 + \frac{(\alpha)_n}{(\beta)_m} \cdot \frac{x}{1!} + \frac{(\alpha)_n(\alpha+1)_n}{(\beta)_m(\beta+1)_m} \cdot \frac{x^2}{2!} + \cdots.$$

Gbs. (Lp.)

G. Chrystal. Fundamental theorem regarding the equivalence of systems of ordinary linear differential equations, and its application to the determination of the order and the systematic solution of a determinate system of such equations. Edinb. Trans. 38, 163-178.

Bekanntlich wird den Systemen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten seitens der englischen Mathematiker ein hervorragendes Interesse geschenkt, teils wegen ihrer Anwendung auf die Theorie der kleinen Schwingungen, teils vielleicht auch deshalb, weil sie den in England beliebten symbolischen Methoden besonders gut zugänglich sind. In vorliegender Abhandlung handelt es sich in erster Linie darum, die Ordnung eines solchen Systems, d. h. die Anzahl der erforderlichen willkürlichen Constanten, welche in die allgemeine Lösung eingehen, zu bestimmen. Man findet sie, wenn man für die in den ursprünglichen Gleichungen vorkommenden Differentiationszeichen d/dt, d^2/dt^2, ... (t = unabhängige Variable) die Symbole D, D^2, ... einführt und die abhängigen Variabeln eliminirt. Die Ordnung ist dann gleich dem Grade der so entstehenden Eliminationsdeterminante in D, der „determinirenden Gleichung" des Systems. Um für diesen Satz einen strengen Beweis zu liefern, stellt Verf. zunächst allgemein die Frage nach der „Aequivalenz" zweier solcher Systeme, d. h. er sucht ein Kriterium dafür, dass die Lösungen des einen Systems zugleich Lösungen des anderen sind und umgekehrt. Dieses Kriterium besagt, dass die Determinante derjenigen Substitutionen, durch welche man in symbolischer Form von dem einen System zu dem anderen übergeht, von D unabhängig sein muss. Sodann wird gezeigt, dass jedes der in Rede stehenden Differentialgleichungssysteme einem „Diagonalsysteme" äquivalent ist, d. h. einem Systeme, bei dem nur die in der Diagonale und rechts davon stehenden Terme von Null verschieden sind. Die Ordnung dieses speciellen Systems ist aber ersichtlich gleich dem Grade, bis zu welchem D in dem Product der Diagonalglieder vorkommt, d. h. gleich dem Grade der determinirenden Gleichung dieses Systems und also, wegen des genannten Satzes über die Substitutionsdeterminante zweier äquiva-

lenten Systeme, auch gleich dem Grade der determinirenden Gleichung des ursprünglichen Systems. A. S.

J. Horn. Ueber die Reihenentwickelung der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen. J. für Math. **116,** 265-306; **117,** 104-128.

Mit dem Systeme

$$(1) \qquad x\frac{dy_\alpha}{dx} = G_\alpha(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

worin $G_\alpha(x, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{\beta=1}^{\beta=n} a_{\alpha\beta}y_\beta + \cdots$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $x, y_1, \ldots, y_n$ darstellt, die für $x = 0$, $y_1 = 0, \ldots, y_n = 0$ verschwindet, hat sich Königsberger in seinem Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen (Kap. 5, IV) und Picard im Traité d'Analyse **3,** 1-22 beschäftigt. Doch wird dort nur der einfachste Fall erledigt. In den vorliegenden Arbeiten wird die Untersuchung weiter geführt. Die Form der Reihenentwickelungen hängt von den Elementarteilern der Determinante $\Delta(s) = |a_{\alpha\beta} - s\delta_{\alpha\beta}|$ ab. Hat diese lauter einfache Elementarteiler $s-a_1, \ldots, s-a_n$ und sind die reellen Teile von $a_1, \ldots, a_m$ $(m \leqq n)$ positiv, so hat das System (1), wofern zwischen den Grössen $a_1, \ldots, a_m$ keine Beziehungen von der Form $a_i = \varrho + \varrho_{i'}a_{i'} + \varrho_{i''}a_{i''} + \cdots$ mit ganzen positiven Coefficienten $\varrho, \varrho_{i'}, \varrho_{i''}, \ldots$ bestehen, eine Lösung von der Gestalt

$$y_\alpha = \Sigma C^{(\alpha)}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^{\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m}$$

$(\alpha = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda + \lambda_1 + \cdots + \lambda_m > 0)$, welche von $r_1 + r_2 + \cdots + r_m$ willkürlichen Constanten abhängt, wo r_k die Anzahl der Grössen a bedeutet, die gleich a_k sind. Bestehen solche Relationen, so treten im allgemeinen Logarithmen in den Reihenentwickelungen auf. Diese haben die Form $y_\alpha = \Sigma C^{\alpha}_{\lambda\lambda_1\ldots\lambda_m} x^{\lambda+\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_m a_m} (\log x)^{\lambda_1\nu_1+\cdots+\lambda_m\nu_m}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda + \lambda_1 + \cdots + \lambda_m > 0)$, wo $\nu_1, \ldots, \nu_m$ ganze positive Zahlen, einschliesslich Null, bedeuten, welche durch die zwischen $a_1, \ldots, a_n$ bestehenden Relationen bedingt sind. Diese Resultate werden durch einige Beispiele erläutert und für Systeme linearer Differentialgleichungen specialisirt. Alsdann wird die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung $x^n \frac{d^n y}{dx^n} = G\left(x, y, x\frac{dy}{dx}, \ldots, x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$, wo $G = c_1 x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + c_{n-1}x\frac{dy}{dx} + c_n y + \cdots$ eine gewöhnliche, für die Nullwerte der eingeschlossenen Argumente verschwindende Potenzreihe bedeutet, unter der Voraussetzung betrachtet, dass die der Fuchs'schen determinirenden Fundamentalgleichung entsprechende Gleichung n^{ten} Grades in r: $r(r-1)\ldots(r-n+1) = c_1(rr-1)\ldots(r-n+2) + \cdots + c_{n-1}r + c_n$ lauter einfache Wurzeln besitzt.

Der Fall mehrfacher Elementarteiler der Determinante $\Delta(s)$ wird in der zweiten Arbeit behandelt. Hr.

A. Guldberg. Zur Theorie der unbeschränkt integrablen totalen Differentialgleichungen. Monatsh. f. Math. **7**, 332-334.

Kennt man in einer solchen Gleichung: $\sum_{i=1}^{i=p} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, dx_i = 0$, die eine continuirliche Gruppe gestattet, eine infinitesimale Transformation, die das allgemeine Integral invariant lässt, so kennt man auch einen Multiplicator der Gleichung, und eine Lösung derselben ist: $\Sigma \xi_i X_i / \Sigma \eta_i X_i$, wo $\xi(x_1, \ldots, x_p)$ und $\eta(x_1, \ldots, x_p)$ derselben Bedingung genügen, dass $Uf = \Sigma \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ eine infinitesimale Transformation sei, welche die allgemeine Lösung $\varphi(x_1, \ldots, x_p) = \text{const.}$ invariant lässt. Dies wird hier bewiesen. H.

A. A. Markoff. Differenzenrechnung. Autorisirte deutsche Uebersetzung von Th. Friesendorff und E. Prümm. Mit einem Vorworte von R. Mehmke. Leipzig: B. G. Teubner. VI + 194 S. 8°.

Bei dem Mangel an Lehrbüchern über Interpolation und Differenzenrechnung, die dem heutigen Standpunkt entsprechen, ist die Uebersetzung des angeführten Lehrbuchs, über welches in F. d. M. **21**, 285, 1889 und **23**, 347, 1891 berichtet ist, mit Dank zu begrüssen. Wie die Uebersetzer bemerken, haben sie sich an das Original thunlichst wortgetreu angeschlossen, ohne irgend welche Aenderungen vorzunehmen oder Zusätze zu machen; doch suchten sie die Litteraturverzeichnisse möglichst zu vervollständigen. Hr.

G. Torelli. Forme lineari alle differenze con fattori di primo grado commutabili. Napoli Rend. (3) **2**, 238-250.

Stellt man einen linearen Differenzenausdruck $F(f_x)$ als Product von symbolischen Factoren dar:

$$F(f_x) = (\Theta - a_x^{(r-1)}) \ldots (\Theta - a_x^{(s)})(\Theta - a_x^{(s-1)}) \ldots (\Theta - a_x')(\Theta - a_x) f_x',$$
$$\Theta f_x = f_{x+1} - f_x, \quad \Theta^x f_x = \Theta^{x-1} \Theta f_x,$$

so sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die i letzten Factoren mit einander vertauschbar sind, durch die Gleichungen gegeben: $a_x' = a_x + \Phi$, $a_x'' = a_x + \Phi'$, $\ldots$, $a_x^{(i-1)} = a_x + \Phi^{i-2}$, wo die Φ periodische Functionen mit der Periode 1 bedeuten. Zur Entscheidung der weiteren Frage, wann eine gegebene Form $F(f_x)$ eine Zerlegung solcher Beschaffenheit zulässt, wird ein allgemeines Verfahren angegeben, und die Untersuchung für den Fall einer Form zweiter Ordnung $F(f_x) = \Theta^2 f_x + c_{1,x} \Theta f_x + c_{2,x} f_x$ durchgeführt. Hierbei ist es bemerkenswert, dass eine Discussion darüber nötig wird, ob der Weg, auf dem die complexe Variable x in der x-Ebene bei der Operation Θ von x zu $x+1$ gelangt, das Vorzeichen des Wurzelausdrucks $\sqrt{\frac{1}{4}\Phi^2 + c_{2,x}}$ ändert oder ungeändert lässt. Hr.

E. Bortolotti. **La forma aggiunta di una data forma lineare alle differenze.** Rom. Acc. L. Rend. (5) **5**$_1$, 349-356.

Mit der linearen Differenzenform:

$$A(f) = a_0(x)f(x)+a_1(x)\Theta f(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\,\Theta^{n-1}f(x)+\Theta^n f(x)$$

ist die von Pincherle (Bologna Mem. (4) **10**, 526; F. d. M. **21**, 413, 1889) als ihre „Inverse" bezeichnete Form

$$A_{-1}(f) = a_0(x+n)f(x+n)+a_1(x+n-1)f(x+n-1) + \cdots + f(x),$$

die auch folgende Schreibweise gestattet:

$$A_{-1}(f) = a_0(x)f(x)+\Theta^{-1}(a_1(x)f(x)) + \cdots + \Theta^{-(n-1)}(a_{n-1}(x)f(x)) + \Theta^{-n}f(x),$$

innig verbunden. Die Untersuchung der Beziehungen zwischen einer linearen Differenzenform und ihrer Inversen zeigt nun eine weitgehende Analogie zu den Beziehungen zwischen einer linearen Differentialgleichung und ihrer Lagrange'schen Adjungirten. Demgemäss wird nunmehr die Form $A_{-1}(f)$ als die „Adjungirte" der Form $A(f)$ bezeichnet.

Die erwähnte Analogie möge durch folgende Sätze gekennzeichnet werden: 1) Die Adjungirte der Adjungirten einer linearen Differenzenform stimmt mit der gegebenen Form überein. 2) Die Adjungirte der Summe oder Differenz zweier gegebenen Formen ist gleich der Summe oder Differenz der adjungirten Formen. 3) Die Adjungirte des Products $AB(f)$ zweier gegebenen Formen ist gleich dem in umgekehrter Factorenfolge genommenen Producte $B_{-1}A_{-1}(f)$ der adjungirten Formen. Dieser Satz liefert also unmittelbar das Analogon des sogenannten Frobenius-Thomé'schen Reciprocitätssatzes für adjungirte lineare Differentialausdrücke.

Mit Hülfe von Determinantenbetrachtungen, die sich nicht in Kürze andeuten lassen, werden jetzt Fundamentalsysteme von Integralen der linearen Differenzenformen hergeleitet, und es werden auch hier die Beziehungen zwischen einer Form und ihrer Adjungirten weiter verfolgt; insbesondere ergeben sich mehrere Sätze, von denen hier die folgenden Erwähnung finden mögen: Ein Fundamentalsystem von Integralen der gegebenen Form und das ihm adjungirte System sind contragredient; die Multiplicatoren einer linearen Differenzenform sind Integrale der adjungirten Form. Ferner ergiebt sich das Analogon des Frobenius'schen begleitenden bilinearen Differentialausdrucks, und zwar ist dieses Gebilde in demselben Sinne charakteristisch für adjungirte lineare Differenzenformen, wie dies in der bekannten Weise bei adjungirten linearen Differentialausdrücken der Fall ist (vergl. S. 225 dieses Bandes).

Schliesslich wird gezeigt, wie man mittels eines Fundamentalsystems von Integralen einer gegebenen linearen Differenzenform die letztere in ein Product von Formen erster Ordnung zerlegen kann. Auch hier tritt die durch den Reciprocitätssatz (eine Bezeichnung, die der Verf. übrigens nicht benutzt) ausgesprochene Beziehung zwischen adjungirten Differenzenformen in die Erscheinung.

Es liegt auf der Hand, dass sich die geschilderten Analogien noch

viel weiter verfolgen lassen, und Referent hofft, seine eigenen Untersuchungen hierüber demnächst bekannt geben zu können. Gz.

G. OLTRAMARE. Intégration des équations linéaires aux différences mêlées à coefficients constants. Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24**, 175-186.

Der Verf. wendet seinen „Calcul de généralisation" auf die Integration der folgenden Gleichungen an:

$$(1)\quad \frac{d^2\varphi(x,y)}{dxdy}+\varphi(x+1,y+1)=\frac{d}{dy}\varphi(x,y+1)+\frac{d}{dx}\varphi(x+1,y),$$

$$(2)\quad \frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}=\varphi(x+a),$$

$$(3)\quad \frac{d}{dx}\varphi(x,y+1)=\frac{d}{dy}\varphi(x,y),$$

$$(4)\quad \varphi(x+1,y)-\frac{d}{dy}\varphi(x,y)=F(x,y),$$

$$(5)\quad \frac{d^n\varphi(x,y)}{dy^n}-\varphi(x+a,y)=F(x,y),$$

$$(6)\quad \varphi(x+1,y+1)-\frac{d}{dy}\varphi(x,y)=F(x,y),$$

$$(7)\quad \frac{d\varphi(x+1,y)}{dx}-\frac{d^2\varphi(x,y)}{dy^2}=F(x,y).$$

Lp.

Weitere Litteratur.

M. BÔCHER. Regular points of linear differential equations of the second order. Cambridge: Harvard University. 24 S. 12mo.

N. W. BUGAIEW. Die Methode der successiven Annäherungen. Die Anwendung auf die Integration der Differentialgleichungen. Moskau. Math. Samml. **19**, 1-45. (Russisch.)

Bericht in Abschnitt II, Kapitel 1.

J. COLLET. Les équations linéaires et leurs applications. Grenoble Ann. **5**, 351-364 (1893).

J. COLLET. Sur l'intégration des équations simultanées linéaires à coefficients constants. Grenoble Ann. **6**, 309-342 (1894).

G. FLOQUET. Sur certaines fonctions à trois déterminations considérées comme solutions d'une équation différentielle linéaire. Nancy Bull. (2) **14**, 78-88.

A. ZUR KAMMER. Integration einer linearen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung, deren Integral in der Horizontalfläche Unstetigkeiten zweiter Art besitzt. Diss. Kiel. 54 S. 8° (1895).

Ch. Lagrange. Solution du problème universel de Wronski et d'un autre problème relatif à l'intégration des équations différentielles. Brux. Ann. astron. **7**, 48 S. 4°.

Vergl. F. d. M. **17**, 216-218, 1885. Mn.

E. Puchberger. Eine allgemeine Integration der Differentialgleichungen IV. u. V. (Supplement-) Heft. Wien: C. Gerold's Sohn. XV + 29, 30 S. 8°. Hr.

C. Spelta. Sull' integrazione dei sistemi di equazioni differenziali simultanee di qualunque ordine e grado. Nota I, II. Genova: Ciminago. 8 u. 6 S. 4°.

Kapitel 6.

Partielle Differentialgleichungen.

E. Goursat. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. Tome I: Problème de Cauchy. Caractéristiques. Intégrales intermédiaires. Paris: A. Hermann. VIII + 226 S. 8°.

Die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung desselben Verfassers, die in F. d. M. **22**, 348, 1890 nur kurz erwähnt werden konnte, hat sich eines allgemeinen Beifalls zu erfreuen gehabt. Vollkommene Strenge, grosse Klarheit und hohe Eleganz nebst völliger Beherrschung der bezüglichen Arbeiten rühmt Cosserat, der Recensent des vorliegenden neuen Buches in Darboux Bull. (2) **21**, 19-25, an der älteren Schrift, und gleiche Vorzüge erkennt er dem gegenwärtigen Werke zu: eine klare und vollständige Darstellung des ersten Teiles einer Theorie, zu welcher der Zugang mit Hülfe der Originalabhandlungen bisweilen schwierig war.

Als die beiden Gesichtspunkte, welche bei den Problemen der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zur Geltung gekommen sind, stellt Goursat die folgenden auf: Ein Integral derselben ist nach Cauchy bestimmt, wenn man eine auf der Integralfläche gelegene Curve und die Tangentialebene in jedem Punkte dieser Curve giebt, falls man dieses Integral durch eine Potenzreihe dargestellt annimmt. Die Untersuchung dieses besonderen Integrals bildet das „Cauchy'sche Problem." Weiter kann man aber unter Beschränkung auf reelle Veränderliche ein Integral durch die stetige Folge der Werte definiren, die es längs einer geschlossenen Umrandung annimmt, wobei dieses Integral mit seinen Ableitungen innerhalb der Umrandung stetig bleiben muss. Dies ist das „Dirichlet'sche Problem" für die Laplace'sche Gleichung. Der Verf. beschäftigt sich in dem ersten Bande seines Werkes ausschliesslich mit dem Cauchy'schen Problem und betrachtet demnach nur analytische Lösungen.

Vier Kapitel umfassen den Inhalt des Buches. Um zu gewissen besonderen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu gelangen,

leitet der Verf. diejenigen ab, welchen die durch die Curven eines Complexes erzeugten Oberflächen oder die von den Oberflächen eines Complexes eingehüllten Flächen genügen, und integrirt dieselben. Hierdurch wird er auf den Begriff des singulären Integrales erster Ordnung geführt und kann dann die Definition des allgemeinen Integrales geben.

„Ein Integral ist allgemein, wenn man über die in ihm vorkommenden willkürlichen Grössen, Functionen oder Constanten in unbegrenzter Zahl, so verfügen kann, dass man die Lösungen wieder finden kann, deren Existenz die Cauchy'schen Theoreme beweisen, d. h. so, dass man der unbekannten Function und einer ihrer ersten Ableitungen für alle Punkte einer Curve vorgegebene Werte beilegen kann, die nach einem beliebigen stetigen Gesetze auf einander folgen." Bemerkungen über die Variation der Constanten machen den Beschluss des ersten Kapitels.

Das zweite Kapitel (S. 39-123) über die Gleichungen von Monge und Ampère ist das umfangreichste. Das Studium des Cauchy'schen Problems für solche Gleichungen, die in r, s, t, $rt-s^2$ linear sind, führt unmittelbar zu einem fundamentalen Begriffe, dem der „charakteristischen Multiplicitäten", der die Grundlage der Arbeiten von Monge nnd Ampère bildet. Jede Gleichung von der hier angenommenen Form gestattet im allgemeinen zwei Systeme charakteristischer Multiplicitäten, deren Hauptrolle in der Theorie dieser Gleichung darin besteht, dass die Multiplicität M_2, welche durch eine Integralfläche und die Gesamtheit ihrer Berührungsebenen gebildet wird, als ein Ort charakteristischer Multiplicitäten angesehen werden kann, und umgekehrt. Wesentlich für eine neue Auffassung des Integrals der Gleichung sind nunmehr die linearen Gleichungen in dx, dy, dp, dq, welche die charakteristischen Multiplicitäten definiren. Wenn die Gleichungen der Charakteristiken des einen der Systeme zwei integrable Combinationen gestatten, so bringt die Monge'sche Methode die Lösung des Cauchy'schen Problems auf die Integration eines Systems gewöhnlicher Gleichungen. Das Ampère'sche Verfahren ist dehnbarer, obschon es auf dieselben Rechnungen führt, wie das Monge'sche, falls letzteres anwendbar ist. Doch hat jenes den Vorzug der Anwendbarkeit auf gewisse Gleichungen, die nach der Monge'schen Methode nicht integrirbar sind. Als ein Begriff, der im folgenden häufig wiederkehrt, ist derjenige der „intermediären Integrale" zu erwähnen. Wenn eine Gleichung zweiter Ordnung von beliebiger Form gegeben ist, so nennt der Verf. im allgemeinen „intermediäres Integral erster Ordnung" jede Gleichung erster Ordnung, $V(x, y, z, p, q) = 0$, von der alle Integrale, ausser etwa einigen Ausnahmeintegralen, der vorgelegten Gleichung angehören.

Im dritten Kapitel werden Anwendungen der bis dahin abgeleiteten Ergebnisse gemacht; hier ist eine umsichtige und glückliche Auswahl von Problemen aus der Theorie der krummen Oberflächen getroffen, und zuletzt sind auch 17 Uebungsaufgaben zusammengestellt.

Das letzte Kapitel dehnt den Begriff der Charakteristiken auf Gleichungen von beliebiger Gestalt aus und beweist in aller Strenge, dass

alle Elemente einer Charakteristik im allgemeinen einer Schar von Integralen angehören, die von einer Schar willkürlicher Constanten abhängen. Die Darstellung verweilt länger bei einer wesentlichen Unterscheidung zwischen den beiden Arten der Charakteristiken erster und zweiter Ordnung, einer schon von Ampère gemachten Unterscheidung, der von Betrachtungen a priori über die Gestalt der Integrale ausgegangen war. An die Theorie der Charakteristiken erster Ordnung knüpft sich die Untersuchung der intermediären Integrale. Die Erforschung desjenigen Falles, in welchem die jene intermediären Integrale bestimmenden Gleichungen ein Involutionssystem bilden, hat den Verf. auf eine neue und ziemlich ausgedehnte Klasse integrabler Gleichungen geführt, für welche die beiden Systeme von Charakteristiken verschmelzen. Lp.

K. Boehm. Allgemeine Untersuchungen über die Reduction partieller Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Leipzig: B. G. Teubner. 58 S. 8°.

Die von Königsberger angeregte, sehr gründliche und dankenswerte Arbeit sucht das im Titel angegebene Problem in möglichster Allgemeinheit zu lösen. Eine partielle Differentialgleichung heisst auf gewöhnliche Differentialgleichungen reducirbar, wenn die abhängige Variable V der $n+1$ unabhängigen Variabeln $\varrho, \varrho_1, \dots, \varrho_n$ gleich gesetzt werden kann dem Producte $V = R . R_1 \dots R_n$, und wenn für R_k jedes beliebige Integral einer bestimmten gewöhnlichen Differentialgleichung $f_k\left(R_k, \frac{dR_k}{d\varrho_k}, \dots, \frac{d^{m_k}R_k}{d^{m_k}\varrho_k}\right) = 0$ gesetzt wird, wo f_k eine ganze Function ihrer Argumente sein soll, während die Coefficienten beliebige Functionen der Variable ϱ_k sein dürfen.

Zunächst ergiebt sich, dass die Zahl, welche angiebt, wie oft V in der gegebenen partiellen Differentialgleichung nach ϱ_k differentiirt erscheint, mindestens so gross ist wie die Ordnung m_k der die Function R_k definirenden Differentialgleichung $f_k = 0$. Ist diese Bedingung erfüllt, so sind drei Fälle möglich:

1) Die partielle Differentialgleichung hat die Form:

$$\Psi = \prod_{h, h_1, \dots, h_n} \{ V - R^{(h)} . R_1^{(h_1)} \dots R_n^{(h_n)} \} = 0,$$

wenn mit $R_k^{(h_k)}$ die λ_k Lösungen einer in R_k algebraischen Gleichung bezeichnet werden, deren Coefficienten ganze homogene Functionen gleichen Grades von V, $\partial^{a_k} V / \partial^{a_k} \varrho_k$ sind.

2) Die partielle Differentialgleichung ist eine algebraische Folge von $n+1$ gewöhnlichen homogenen Differentialgleichungen

$$\Phi_k\left(V, \frac{\partial V}{\partial \varrho_k}, \dots, \frac{\partial^{m_k} V}{\partial \varrho_k^{m_k}}\right) = 0.$$

3) Die partielle Differentialgleichung lässt sich aus den beiden eben angegebenen Typen durch algebraische und analytische Operationen

und mit Benutzung der Relationen:

$$V^n \cdot \frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_n} V}{\partial\varrho^{\alpha}\ldots\partial\varrho_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha} V}{\partial\varrho^{\alpha}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n} V}{\partial\varrho^{\alpha_n}}$$

herleiten.

Im zweiten Abschnitt wird die gewonnene Theorie auf die Integration der Potentialgleichung angewandt, und es werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Reduction derselben aufgestellt. Auch die Aufgabe, alle diesen Bedingungen entsprechenden Flächensysteme herzuleiten, ist im wesentlichen gelöst. Es mag besonders hervorgehoben werden, dass bei früheren Arbeiten über die Reduction der Potentialgleichung das eingeführte krummlinige Coordinatensystem stets orthogonal gewählt wurde; die vorliegenden Untersuchungen ergeben, dass diese Annahme keine willkürliche und nur zweckmässige, sondern eine in dem Wesen des Problems begründete ist. Sh.

É. Delassus. Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **13**, 421-467; C. R. **122**, 772-775.

É. Delassus. Sur les systèmes algébriques et leurs relations avec certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. C. R. **123**, 546-548.

É. Delassus. Sur les transformations des systèmes différentiels. C. R. **123**, 1246-1248.

Die erste der vorliegenden Abhandlungen giebt eine Ausdehnung des Cauchy'schen Existenzbeweises für ein möglichst allgemeines System partieller Differentialgleichungen. Zunächst wird eine gewisse Reihenfolge unter den Ableitungen n^{ter} Ordnung von z hergestellt; es werden nämlich die Ableitungen $\frac{\partial^n z}{\partial x_1^{\alpha_1}.\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}}$ nach den fallenden Werten von α_1 geordnet; unter denen, welche denselben Wert von α_1 haben, wird geordnet nach den fallenden Werten von α_2 etc.; so dass demnach die p^{te} Ableitung n^{ter} Ordnung von z eine ganz bestimmte Bedeutung hat. Eine Gruppe von p Ableitungen n^{ter} Ordnung heisst kanonisch, wenn sie aus den p ersten dieser Ableitungen zusammengesetzt ist. Ist nun ein System Σ partieller Differentialgleichungen zwischen z_1, z_2, ..., z_q gegeben, so kann dies mit einer endlichen Zahl von Operationen umgeformt werden in ein System Σ^n, welches aufgelöst ist in Bezug auf solche kanonischen Gruppen, und dessen Integration auf die wiederholte Integration von m Systemen der von Frau von Kowalewsky behandelten Art zurückgeführt werden kann. Solche Systeme Σ^n werden als kanonische bezeichnet, und für diese wird schliesslich der Satz gefunden: Sind in der Umgebung von x_1^0, ..., x_m^0 und der Anfangswerte derjenigen Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung von z_1, ..., z_q, die nicht in den ersten Gliedern von Σ^n auftreten, die zweiten Glieder der Gleichungen Σ^n analytische Functionen von x_1, ..., x_m und der eben

erwähnten Ableitungen, so existirt ein und nur ein System von Integralen $z_1, \ldots, z_q$, welches in $x_1^0, \ldots, x_m^0$ analytisch ist, das System Σ^n befriedigt und ausserdem die genau angegebenen Anfangsbedingungen erfüllt.

Die beiden letzten Noten enthalten gewisse algebraische Relationen, die sich aus der Betrachtung der obigen kanonischen Systeme ergeben.
Sh.

J. Bendixson. Démonstration de l'existence de l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles linéaires. S. M. F. Bull. **24**, 220-225.

Es handelt sich um den Beweis der Existenz eines Integrals der Gleichung $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}f(x, y) = 0$, welches für $x = x_0$ in y_0 übergeht, unter der alleinigen Voraussetzung, dass für alle dem Gebiete $|x-x_0| < \delta$, $|y-y_0| < \delta$ angehörenden Werte von x und y die Functionen $f(x, y)$ und $f'_y(x, y)$ continuirlich sind. Nach dem Beweise von Cauchy existirt dann ein Integral der Differentialgleichung $dy/dx = f(x, y)$, $y = \psi(x, x_0, y_0)$, welches für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt. Von diesem Integral wird nun durch ein Approximationsverfahren gezeigt, dass es, als Function der Constanten x_0, y_0 betrachtet, der Gleichung $\frac{\partial y}{\partial x_0}+\frac{\partial y}{\partial y_0}f(x_0, y_0) = 0$ genügt. Das allgemeine Integral dieser Gleichung, das für $x_0 = x$ sich auf $\varphi(y_0)$ reducirt, wo φ eine beliebige Function bedeutet, erhält man, wenn man $z=\varphi[\psi(x, x_0, y_0)]$ setzt.
Hr.

S. Lie. Zur allgemeinen Transformationstheorie. II. Einige Bemerkungen über Pfaff'sche Ausdrücke und Gleichungen. Leipz. Ber. **48**, 1896, 405-412.

Die Arbeit hat den Zweck, gewisse Betrachtungen zu skizziren, die der Verf., als er 1877 in Bd. 2 seines norwegischen Archivs seine „Theorie des Pfaff'schen Problems. I. Abhandlung“ (F. d. M. **9**, 255, 1877) veröffentlichte, für die zweite, nicht erschienene Abhandlung bestimmt hatte. Ist eine Pfaff'sche Gleichung:

$$\varDelta = \sum_i^{1\cdots n} U_i(x_1, \ldots, x_n)\, dx_i = 0$$

vorgelegt, so ist es von Wichtigkeit, alle infinitesimalen Transformationen:

$$Xf = \sum_i^{1\cdots n} \xi_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

zu kennen, welche die Gleichung $\varDelta = 0$ invariant lassen; besonders ausgezeichnet sind dabei die infinitesimalen Transformationen, die der Gleichung $\Sigma U_i \xi_i = 0$ genügen. Andererseits kann man nach allen infinitesimalen Transformationen Xf fragen, die den Pfaff'schen Ausdruck $\varDelta$ entweder invariant lassen oder nur um ein vollständiges Diffe-

rential ändern, die also einer der beiden Gleichungen $X\Delta = 0$, $X\Delta = d\Omega$ genügen. Die Bestimmung dieser Transformationen wird ausgeführt. Ausserdem enthält die Arbeit noch Bemerkungen über die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, über die Theorie der Berührungstransformationen und über die Bedingungen, unter denen zwei Pfaff'sche Ausdrücke durch Punkttransformation in einander übergehen. S. 410, Z. 9 v. u. ist zu lesen: jede Elementmannigfaltigkeit. El.

Fr. Engel. Das Pfaff'sche Problem. Leipz. Ber. 48, 1896, 413-430.

Der Verf. beabsichtigt nicht, die Anzahl und Ordnung der Integrationsoperationen zu erniedrigen, die zur Zurückführung eines Pfaff'schen Ausdrucks auf eine Normalform erforderlich sind (das ist nach den Untersuchungen von Lie unmöglich); er will nur die Herleitung und Darstellung der Lösung vereinfachen durch Verwertung des Begriffs der infinitesimalen Transformation, also durch ähnliche Betrachtungen wie die von Lie in der oben besprochenen Abhandlung benutzten. Das Verfahren zur Lösung ist so eingerichtet, dass es auf jeden Pfaff'schen Ausdruck $a_1 dx_1 + \cdots + a_n dx_n$ anwendbar ist, mag nun n gerade sein oder nicht, und mag die Normalform des Ausdrucks eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Veränderlichen enthalten. El.

C. Russjan. Theorie der Integration der Differentialgleichung $\Sigma X dx = 0$ und die Methode von Pfaff. Odessa Univ. 67, III + 352 S. (Russisch.)

Aus der historischen Einleitung (S. 1-54), wo die Untersuchungen über die Gleichung $\Sigma X dx = 0$ von Euler bis Darboux und Mayer besprochen sind, erkennen wir in dem Verf. den Vertreter jener Richtung, welche die unmittelbare Zurückführung der Gleichung auf kanonische Formen vorzieht. Die früheren Untersuchungen, besonders die von Frobenius, haben die Wichtigkeit dieser Zurückführung gezeigt; nur sind die Beweismethoden von Frobenius der Theorie der bilinearen Formen entnommen und nach der Meinung des Verf. deshalb der Natur der Frage fremd. Er giebt daher eine eigene Darstellung. Das Werk ist in vier Kapitel geteilt. Im ersten wird der Beweis der Existenz kanonischer Formen gerader oder ungerader Ordnung gegeben, gegründet auf die Transformation des Differentialausdrucks $\Sigma X dx$ in neue Veränderliche, so dass nur eine derselben in dem gemeinschaftlichen Factor aller Coefficienten vorkommt. Kapitel 2 ist der Untersuchung der Eigenschaften kanonischer Formen gewidmet. Hier werden im § 5 die linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche zwischen den Veränderlichen zweier geraden kanonischen Formen bestehen, auf Grund der Gleichung $\Sigma F_i df_i = \Sigma \Phi_i d\varphi_i$ aufgestellt. Der § 6 leistet dasselbe für die ungeraden kanonischen Formen. Im Kapitel 3 werden dann die linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung aufgestellt, welchen die Veränderlichen der kanonischen Form

als Functionen der unabhängigen Veränderlichen der gegebenen Form genügen. § 1 betrachtet den Fall der geraden, § 2 den der ungeraden kanonischen Form. Kapitel 4 endlich beschäftigt sich mit der Integration des Differentialausdrucks $\sum_1^p X_k dx_k = 0$. Da man solche Ausdrücke aus dem System $f_i(x_1, \ldots, x_p) = C_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ durch Differentiation und Summirung $df_1 + \sum_{k=2}^{k=n} X^{(x)} df_k = 0$ entstanden denken kann, so erhellt, dass durch Zurückführung auf die kanonische Form die Integration geleistet ist. Man muss also die obigen linearen partiellen Differentialgleichungen integriren. Dies giebt vollständige Integrale des Differentialausdrucks $\sum_1^p X_k dx_k = 0$ (oder $\sum_1^n U_n du_n = 0$ in kanonischer Form): $u_1 = c_1, \ldots, u_n = c_n$. Es folgen dann singuläre Integrale (welche also nur für gerade Formen existiren) $U_1 = 0, \ldots, U_n = 0$. Endlich $u_1 = \varphi_1(u_{q+1}, \ldots, u_n)$, $u_2 = \varphi_2(u_{q+1}, \ldots, u_n)$, $\ldots$, $u_q = \varphi_q(u_{q+1}, \ldots, u_n)$,

$$U_{q+1} + \sum_1^q U_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_{q+1}} = 0, \quad \ldots, \quad U_n + \sum_1^q U_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_n} = 0,$$

wo die φ_i willkürliche Functionen sind; zuletzt vermischte Systeme von Integralen.

Zwei Beispiele dienen zur Erläuterung der Darstellung. — Im Nachtrag sind einige Sätze aus der Theorie der Determinanten zusammengestellt, welche für die Darstellung notwendig waren. Der Verf. hat die originalen Abhandlungen studirt, jedoch mit zwei Ansnahmen: mit den Leistungen von Sophus Lie und von Grassmann ist er nur durch die Vermittelung der Forsyth'schen Theory of differential equations bekannt. Dies erhellt aus dem Umstande, dass er der, wie Engel gezeigt hat, unrichtigen Ansicht von Forsyth ist, Grassmann hätte seine Methode nur für eine gerade Anzahl der Veränderlichen gegeben. Auch hat er nicht versucht, Grassmann's Resultate in der gewöhnlichen Bezeichnungsweise darzustellen. Aus den Arbeiten von S. Lie kennt der Verf. (wie er es selbst bemerkt) nur die im zweiten Band des Norwegischen Archivs veröffentlichte, da Forsyth nur diese citirt. Das ist aber in historischer Hinsicht nicht unwichtig, da die erste Lie'sche Arbeit: Neue Integrationstheorie des $2n$-gliedrigen Pfaff'schen Problems in Christiania Forhandlinger 1873 publicirt worden ist, also den Arbeiten von Frobenius vorangeht. Gewiss kann man den Verf. deshalb nicht anklagen; denn diese Lie'schen Arbeiten sind leider nur in wenig verbreiteten und schwer zugänglichen Zeitschriften publicirt. Es wäre zu wünschen, dass sie anderswo zum Wiederabdruck gelangen. Doch ist auf die bezüglichen Referate im Jahrbuche zu verweisen (F. d. M. **5**, 207, 1873) und auf die zusammenhängende Darstellung in Lie-Engel sowie Lie-Scheffers (F. d. M. **21**, 356ff., 1889 u. **23**, 351ff., 1891, besonders S. 366). Si.

A. J. Stodólkiewicz. Ueber das Pfaff'sche Problem. Prace mat.-fiz. **7**, 3-11. (Polnisch.)

Verallgemeinerung der in früheren Aufsätzen über dasselbe Problem (Prace mat.-fiz. **4**, **6**, F. d. M. **25**, 610, 1893/94 u. **26**, 378, 1895) aufgestellten Resultate und Angabe des Verfahrens zur Bestimmung der Integrale der Differentialgleichung $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_n dx_n = 0$, falls dieselbe 2, 3, ..., j Integrale hat. Dn.

J. Zantschewsky. Le problème de Pfaff. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **18**, 267-294.

Mit Hülfe von Sätzen über die Transformation eines Productes zweier Minoren einer Determinante, die der Verf. in einer früheren Arbeit (Mosk. Math. Samml. **17**, 585-597) entwickelt hat, bestimmt er zunächst die kleinste Anzahl der Functionen k in der Relation $X_1 dx_1 + \cdots + X_n dx_n = F_1 df_1 + \cdots + F_k df_k$ und darauf die Functionen $f_1, \ldots, f_k$ selbst nach einander. Hr.

---

1. W. G. Imschenetsky. Anwendung der Eigenschaften der Functionen einer complexen Veränderlichen zur Aufstellung gewisser Systeme kanonischer Gleichungen und vollständig integrirbarer partieller Differentialgleichungen. Mosk. Math. Samml. **18**, 625-646. (Russisch.)
2. W. G. Imschenetsky. Bemerkung über partielle Differentialgleichungen. Ebenda. 55-60.
3. P. A. Nekrassow. Zur Bemerkung von W. G. Imschenetsky über partielle Differentialgleichungen. Ebenda. 468-470.
4. P. A. Nekrassow. Ueber simultane kanonische Differentialgleichungen, welche mit gewissen, von Wurzeln einer irreductiblen algebraischen Gleichung abhängenden complexen Grössen zusammenhängen. Ebenda. 689-710.
5. P. A. Nekrassow. Zur Abhandlung über simultane kanonische Differentialgleichungen etc. Ebenda. 713-722.
6. J. V. Mestschersky. Bemerkungen über ein System durch Quadraturen integrirbarer kanonischer Gleichungen von W. G. Imschenetsky und über „analytische Kräfte" von Lecornu. Ebenda. 711-712.
7. P. A. Nekrassow. Einige Gleichungen der Dynamik, welche mit Hülfe der Methode der complexen Grössen integrirt werden können. Ebenda. 728-735.

Die beiden ersten Aufsätze sind Uebersetzungen der in Darboux Bull. **11** (F. d. M. **8**, 205, 1876) und in Liège Mémoires (2) **7** (F. d. M. **10**, 257, 1878) zuerst veröffentlichten Abhandlungen von Imschenetsky, in denen der Verf. eine Function z der $2n$ Veränderlichen x_i, y_i betrachtet: (1) $z = f(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$. Werden hier

(2) $x_i = q_i + q_i'\sqrt{-1}$, $y_i = p_i' + p_i\sqrt{-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gesetzt, so nimmt z die Gestalt an: (3) $z = H + G\sqrt{-1}$, und H, G genügen identisch der Gleichung:

$$(4)\quad (H, G) = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial G}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i'}\cdot\frac{\partial G}{\partial p_i'} - \frac{\partial H}{\partial p_i'}\cdot\frac{\partial G}{\partial q_i'}\right) = 0,$$

also sind für das kanonische System (wo $F = F(H, G)$; $i = 1, 2, \ldots, n$):

$$(5)\quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i},\quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i'}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i'},\quad \frac{dq_i'}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial p_i}$$

zwei Integrale $H =$ const., $G =$ const. bereits bekannt, und nur noch ein Integral ist nötig, um den Satz von Poisson unmittelbar anzuwenden. Ist $n = 1$ (wie in No. 1), so hat man schon die Hälfte der Integrale; die zweite Hälfte wird durch Quadraturen vermittelst des Satzes von Liouville (J. de Math. **20**, 1855) oder des letzten Multiplicators von Jacobi gefunden.

Diese Resultate werden von Nekrassow wesentlich verallgemeinert. Zunächst bemerkt er (Anmerkung zu No. 2), dass man anstatt (2) setzen kann $x_i = q_i + q_i'\sqrt{a}$, $y_i = p_i' + p_i\sqrt{a}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und also $z = H + G\sqrt{a}$ (H, G gerade Functionen in Bezug auf $\sqrt{a}$). H, G genügen denselben Gleichungen wie oben und besitzen deshalb dieselben Eigenschaften. In No. 4 wird dasselbe gezeigt, wenn (für $i = 1, 2, \ldots, n$) $x_i = \beta_i q_i + \beta_i' q_i'\sqrt{a}$, $y_i = \alpha_i' p_i' + \alpha_i p_i\sqrt{a}$, unter den Bedingungen $\alpha_i\beta_i = \alpha_i'\beta_i'$; oder $x_i = \gamma_i p_i' + \delta_i' q_i'\sqrt{a}$, $y_i = \delta_i q_i + \gamma_i' p_i'\sqrt{a}$, falls $\gamma_i\delta_i = -a\gamma_i'\delta_i'$.

Einen weiteren Schritt macht der Verf. in No. 4. Er beschränkt sich hier auf den Fall $n = 1$ (wie Imschenetsky in No. 1), also $z = f(a, x, y) = H + G\sqrt{a}$ (H, G = Functionen von p, p', q, q') und $x = \varphi(p, p', q, q') + \varphi'(p, p', q, q')\sqrt{a}$, $y = \psi(p, p', q, q') + \psi'(p, p', q, q')\sqrt{a}$. Er stellt die Bedingungen auf, damit die Gleichung (4) wieder bestehe. Diese Bedingungen erscheinen in etwas complicirter Form, und werden in No. 5 wesentlich vereinfacht, wo sie lauten: $(\varphi, \varphi') = 0$, $(\psi, \psi') = 0$, $(\varphi, \psi') + (\psi, \varphi') = 0$, $(\varphi, \psi) - a(\varphi', \psi') = 0$. Der Verf. bemerkt, dass auch Mlodzieiovski zu denselben Resultaten auf anderem Wege gekommen ist.

Abhandlung No. 4 enthält noch weitere Verallgemeinerungen: anstatt $\sqrt{a}$ führt Nekrassow eine Wurzel w der algebraischen irreductiblen Gleichungen (a) $F(w, a) = 0$ (a ein Parameter) ein und betrachtet analog (1) die Function $z = f(w, x_1, x_2, \ldots, x_k)$, welche die Gestalt annimmt $H_1 + H_2 w + \cdots + H_\nu w^{\nu-1}$, wenn wir setzen $x_i = \sum_{k=0}^{k=\nu-1} \varphi_{k,i} w^i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ (H_i, $\varphi_{k,i}$ ändern sich nicht, wenn w durch andere Wurzeln von (a) ersetzt wird). Damit die Gleichungen $(H_i, H_j) = 0$ existiren, müssen $\varphi_{k,i}$ gewissen Bedingungen unterworfen sein. Ist dem so, dann hat das dem (5) entsprechende kanonische System ν bekannte Integrale

$H_i =$ const., und damit ist das Integrationsproblem für dasselbe wesentlich vereinfacht.

Die Untersuchung der oben genannten Bedingungen für $\varphi_{k,i}$, welche Functionen von $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ sind, ist (No. 5) nur für den Fall $\nu = 3$ durchgeführt.

Im Anschluss an diese Untersuchungen bemerkt Mestschersky, dass die „analytischen Kräfte" von Lecornu (J. de l'Éc. Polyt. Cah. 55, 1885) zu den Gleichungen führen, welche nur einen speciellen Fall des Systems von W. G. Imschenetsky (No. 1, 2) bilden. In No. 7 giebt Nekrassow weitere mechanische Anwendungen der betrachteten Methode.

Si.

F. Marotte. Sur les singularités des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. C. R. **123**, 933-936.

In einer früheren Note war vom Verf. gezeigt worden, dass mit jedem singulären Punkte einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung eine algebraische lineare Transformationsgruppe verbunden ist, deren Differentialinvarianten völlig die Natur der Singularität charakterisiren. Hier wird gezeigt, dass mit jedem singulären Bereich (Punkt oder Curve) einer linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung eine Gruppe verbunden ist, deren Differentialinvarianten in der Umgebung des Bereichs völlig die analytische Form der Integrale bestimmen, und es werden einige Eigenschaften dieser Gruppen nachgewiesen. Sh.

M. Kowalsky. Neue Methode zur Integration der nicht-linearen partiellen Diffentialgleichungen erster Ordnung. Charkow Ges. (2) **5**, 124-135.

Kurzgefasste Darstellung der Methode von Cauchy-Jacobi. Weitere Litteratur (Ad. Mayer, S. Lie) wird nicht erwähnt. Etwas Neues konnte Referent nicht finden. Si.

E. Lindelöf. Sur les équations homogènes. S. M. F. Bull. **24**, 35-39.

In einer linearen partiellen Differentialgleichung

$$(1)\qquad X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+X_{n+1}\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}=0,$$

deren Coefficienten homogen und gleichen Grades m sind, wird substituirt: $x_i/x_{n+1} = y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $X_i = (x_{n+1})^m Y_i(y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$; dann kommt die Integration des Systems $dy_i/dt = Y_i - y_i Y_{n+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ zurück auf die der Gleichung (1). Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von Darboux für Differentiale von zwei Variabeln. H.

É. Delassus. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **13**, 339-365.

Die meisten Resultate, welche der Verf. in einer früheren Abhand-

lung (Ann. de l'Éc. Norm. (3) **12**, Suppl. 53-123; F. d. M. **26**, 385-386, 1895) für lineare partielle Differentialgleichungen gewonnen hatte, werden hier auch für Systeme partieller Differentialgleichungen abgeleitet; besonders mit Rücksicht auf die Singularitäten der analytischen Integrale. Sind in einem gewissen Bereiche alle Charakteristiken der Gleichung $F = 0$ reell, so können die den Gleichungen $F = 0$, $F_1 = 0$, ..., $F_q = 0$ gemeinsamen analytischen Integrale als wesentlich singuläre Linien nur feste singuläre Linien dieser Gleichungen haben oder Charakteristiken, welche allen diesen Gleichungen gemeinsam sind. Hieran schliesst sich dann die Beantwortung der Frage, ob in einem Gebiete, durch welches eine feste singuläre Linie der Gleichung $F = 0$ geht, ein Integral existirt, das in allen Punkten des Bereichs analytisch ist.
Sh.

J. Beudon. Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles dont les caractéristiques dépendent d'un nombre fini de paramètres. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **13**, Suppl. 3-51.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Bestimmung und dem Studium derjenigen Systeme von Differentialgleichungen, deren Charakteristiken von einer endlichen Anzahl willkürlicher Constanten abhängen. Im ersten Teil werden die von Lie herrührenden Bezeichnungen Element und Elementenmannigfaltigkeit im Raume von $n+1$ Dimensionen auf eine beliebige Ordnung verallgemeinert und die von Riquier (Mém. des Sav. étrangers **33**) früher erhaltenen Resultate über die Existenz der Integrale auf die behandelten Systeme angewandt. Im zweiten Teil werden diejenigen Systeme behandelt, deren Lösung nur eine willkürliche Function eines einzigen Arguments enthält, und die Integration derselben wird auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückgeführt. Die Hauptresultate sind vom Verf. schon früher angegeben und hier besprochen worden (C. R. **120**, 304-307, 902-903; **121**, 808-811; F. d. M. **26**, 383-384, 1895). Sh.

E. v. Weber. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles simultanées. C. R. **123**, 292-295.

Verf. zeigt gewisse Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung mit m unabhängigen Variabeln, die sich auf entsprechende Systeme mit nur $m-1$ Variabeln, schliesslich also auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen reduciren lassen. Sh.

E. v. Weber. Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen in drei Variabeln. Math. Ann. **47**, 229-262.

In der vorliegenden Arbeit wird die Charakteristikentheorie der partiellen Differentialgleichungen in zusammenhängender Darstellung und vorwiegend geometrischer Behandlungsweise entwickelt, ausgehend von den Begriffen Flächenelement und Streifen n^{ter} Ordnung, welche von Lie und Bäcklund eingeführt worden sind.

Zunächst wird der geometrische Inhalt, welcher den Definitionsgleichungen der Charakteristiken der verschiedenen Ordnungen zukommt, besprochen und darauf als wesentliche Grundlage aller folgenden Untersuchungen die Theorie der als Differentio-Differentialausdrücke bezeichneten Grössen entwickelt, wodurch man auf den Begriff des unbeschränkt integrablen Streifensystems geführt wird. Zum Schluss wird die Frage nach der Herstellung eines allgemeineren Integrals aus einem gegebenen vollständigen erörtert. Bei den letzten Untersuchungen tritt die Analogie dieser Betrachtungen mit der Integrationstheorie der Gleichungen erster Ordnung deutlich hervor. Sh.

E. v. Weber. **Ueber partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die sich durch gewöhnliche Differentialgleichungen integriren lassen.** Münch. Ber. **26**, 1896, 425-437.

Darboux hat in Ann. de l'Éc. Norm. **7** (F. d. M. **2**, 316ff., 1870) hinreichende Kriterien für die im Titel angegebene Reduction einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung in drei Variabeln angegeben; König (Math. Ann. **24**; F. d. M. **16**, 309ff., 1884) hat, ohne den Beweis zu veröffentlichen, behauptet, dass durch diese Kriterien sämtliche derartige Differentialgleichungen erschöpft seien. Diese Behauptung sucht der Verf. durch geometrische Ueberlegungen zu begründen und giebt dadurch eine Anwendung der durch die Geometrie der Flächenelemente hervorgerufenen Methoden. Damit eine Integration durch gewöhnliche Differentialgleichungen möglich sei, müssen die Charakteristiken der Gleichung eine gewisse Bedingung erfüllen, die im wesentlichen mit den Darboux'schen Kriterien gleichwertig ist. Sh.

P. Burgatti. **Di alcuni invarianti relativi alle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine e del loro uso.** Rom. Acc. L. Rend. (5) **5**$_2$, 433-439.

In dieser Note wird ein einfaches Kriterium dafür angegeben, dass die partielle Differentialgleichung

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+D\frac{\partial z}{\partial x}+E\frac{\partial z}{\partial y}+F.z=0$$

(A oder $C \gtrless 0$) durch eine Aenderung der Variabeln auf eine integrable Form gebracht werden kann. Bezeichnet man mit λ_1 und λ_2 die Wurzeln der Gleichung: $A\lambda^2-2B\lambda+C=0$ $(A\gtrless 0)$, so besitzen die Ausdrücke:

$$J_1=D\lambda_1-E+A\lambda_1\frac{\partial \log\lambda_1}{\partial x}+C\frac{\partial\log\lambda_1}{\partial y},$$

$$J_2=D\lambda_2-E+A\lambda_2\frac{\partial \log\lambda_2}{\partial x}+C\frac{\partial\log\lambda_2}{\partial y},$$

welche Partialinvarianten genannt werden, die Eigenschaft, dass alle Gleichungen des obigen Typus bei Aenderung der Variabeln dieselben

Partialinvarianten behalten. Ist nun $F = 0$, so ist die genügende und hinreichende Bedingung für die oben erwähnte Reduction, dass $J_1 = 0$ oder $J_2 = 0$ oder $J_1 = J_2 = 0$ sind. Die Formen, auf welche in jedem Falle die gegebene Gleichung reducirbar ist, sind genau angegeben.
Sh.

O. Niccoletti. Sulla trasformazione delle equazioni lineari omogenee alle derivate parziali del secondo ordine con due variabili independenti. Rom. Acc. L. Rend. (5) 5_2, 94-99.

In dieser Note wird ohne Beweis eine Reihe von Sätzen in Bezug auf die Differentialgleichung $ar+2bs+ct+2dp+2eq+f=0$ aufgestellt betreffs der Bestimmung aller Functionen, die homogen und linear aus z und seinen Derivirten zusammengesetzt sind, und die für jeden Wert z, welcher der obigen Gleichung genügt, einer analogen Gleichung genügen; und ebenso betreffs aller Functionen, deren Differentiale dieselbe Eigenschaft besitzen. Sh.

É. Picard. Sur la détermination des intégrales d'une équation aux dérivées partielles par ses valeurs sur un contour fermé. Journ. de Math. (5) **2**, 295-304.

In einer früheren Abhandlung (Journ. de Math. (4) **6**, 145-210; F. d. M. **22**, 357, 1890) hatte der Verf. gezeigt, dass ein stetiges Integral einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung in einem Gebiete der Ebene, in welchem die Charakteristiken imaginär sind, völlig bestimmt durch seine Werte längs einer geschlossenen Curve ist, falls diese Curve hinreichend klein ist, und mit Hülfe der successiven Approximationen konnte dieses Integral wirklich ermittelt werden. In verschiedener Hinsicht werden hier diese Resultate erweitert und vervollständigt. Was zunächst die Curve betrifft, so wurde unter hinreichend kleiner Curve eine solche verstanden, deren sämtliche Punkte sich nur hinreichend wenig von einem bestimmten Punkte entfernen; jetzt wird die Bedeutung dahin erweitert, dass darunter eine Curve verstanden wird, die eine hinreichend kleine Fläche umfasst. Was die wirkliche Ermittelung eines Integrals anbetrifft, so wird nachgewiesen, dass, wenn man ein Integral für eine Curve C ermitteln kann, man dasselbe für eine benachbarte Curve C', welche einen grösseren Inhalt als C umschliesst, finden kann; dass man also schrittweise zu beliebig grossen Umfängen fortschreiten kann, wenn man von einer hinreichend kleinen Curve, für welche das Problem gelöst ist, ausgeht. Schliesslich zeigt sich auf dem hier eingeschlagenen Wege, dass diese Methode sich auf Differentialgleichungen mit beliebig vielen Variabeln ausdehnen lässt.
Sh.

Le Roy. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires et du second ordre à caractéristiques imaginaires. C. R. **122**, 367-369.

É. Picard. Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques imaginaires. C. R. **122**, 417-420.

In der ersten Note wird gezeigt, wie ein Integral der Gleichung $\Delta U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial y} + cU = 0$, wo a, b, c gegebene Functionen bedeuten, derart, dass $c \geqq 0$ ist, aufgestellt werden kann, welches in einer Fläche D, die von einer geschlossenen Curve C begrenzt ist, endlich ist und auf dieser Curve gegebene Werte φ annimmt. Die bei der Ableitung benutzte, beschränkende Eigenschaft, dass a und b Ableitungen derselben Function μ sind, ist, wie vom Verf. am Schluss bemerkt wird, nicht wesentlich; der benutzte Weg lässt auch eine Verallgemeinerung auf drei Variabeln zu.

Angeregt durch diese Arbeit, zeigt Picard, wie auch der von ihm mehrfach benutzte Weg leicht durch Zuhülfenahme einer von H. A. Schwarz herrührenden Methode zum Beweise der Fundamentaltheoreme der Functionen auf einer Riemann'schen Fläche sich so umgestalten lässt, dass eine Ausdehnung auf drei Variabeln möglich ist. Sh.

E. Goursat. Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace. C. R. **122**, 169-172; American J. **18**, 347-385.

Für die Gleichung zweiter Ordnung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

wo a, b, c beliebige Functionen von x und y sind, wird folgender Satz bewiesen: Wenn zwischen $n+1$ linear unabhängigen Integralen von (1) eine lineare homogene Relation existirt, deren Coefficienten nur von einer einzigen der Variabeln x, y (es sei von y) abhängen, so führt die Laplace'sche Integrationsmethode nach höchstens $n-1$ Transformationen zum Ziel. Das allgemeine Integral hat dann zum Ausdruck $z = BY + B_1 Y' + \cdots + B_{n-1} Y^{(n-1)}$, wo B, B_1, ..., B_{n-1} bestimmte Functionen von x und y sind und Y eine willkürliche Function von y allein bedeutet. Von diesem Satz werden einige geometrische Anwendungen gemacht, die von der Thatsache ausgehen, dass, wenn auf einer Oberfläche, dargestellt in homogenen Coordinaten (x, y, z, t) durch die Gleichungen $x = \varphi(\varrho, \varrho_1)$, $y = \psi(\varrho, \varrho_1)$, $z = \chi(\varrho, \varrho_1)$, $t = \vartheta(\varrho, \varrho_1)$, die Curven $\varrho = \text{const.}$, $\varrho_1 = \text{const.}$ ein conjugirtes Netz bilden, dann x, y, z, t particuläre Integrale einer Gleichung von der Form (1) $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varrho \partial \varrho_1} + a\frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho} + b\frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_1} + c\vartheta = 0$ darstellen. Sind z. B. die Curven $\varrho = \text{const.}$ ebene Curven, so besteht die Gleichung $Ax + By + Cz + Dt = 0$, wo A, B, C, D Functionen von ϱ allein sind. Nach obigem Satze endet die bezügliche Laplace'sche Reihe in diesem Falle nach höchstens zwei Transformationen. Hr.

E. Goursat. Sur les systèmes en involution d'équations du second ordre. C. R. **122,** 1258-1260.

Zwei Gleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln x und y und einer unbekannten Function z bilden ein System in Involution, wenn die vier Gleichungen, die man durch Differentiation nach x und y erhält, sich auf drei unabhängige Gleichungen reduciren. Sowohl für die in Bezug auf die Ableitungen zweiter Ordnung linearen, als auch für die nicht-linearen involutorischen Systeme werden die allgemeinen Integrale angegeben und auch die Bedingungsgleichungen, welche die darin auftretenden Functionen erfüllen müssen. Sh.

E. Goursat. Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre. C. R. **123,** 680-683.

Wenn man auf eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln, für welche die Form gewählt wird $r+f(x, y, z, p, q, s, t) = 0$, die Darboux'sche Integrationsmethode anwendet, so muss zunächst untersucht werden, ob integrable Combinationen für die Differentialgleichungen der Charakteristiken höherer Ordnung existiren. In Bezug auf diese Combinationen wird eine Anzahl von Sätzen angegeben zunächst für den Fall, dass die zwei Wurzeln der Gleichung $m^2 - \frac{\partial f}{\partial s} m + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$ von einander verschieden, und dann, dass sie gleich sind. Im letzten Falle giebt es nur zwei Typen von Gleichungen, auf welche sich die Darboux'sche Methode anwenden lässt; nämlich die Gleichungen, die auf die Form $r = 0$ reducirbar sind, und zweitens eine Klasse von Gleichungen, die vom Verf. früher (Acta Math. **19,** C. R. **112;** vergl. F. d. M. **23,** 401, 1891 u. **26,** 389, 1895) behandelt worden sind. Sh.

E. Cotton. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables. C. R. **123,** 936-938.

Es wird eine Klassification der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei Variabeln gegeben, und zwar mit Hülfe zweier Ausdrücke H und K, welche den von Darboux (Leçons sur la théorie des surfaces, **2**) für die Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

eingeführten Grössen h und k analog gebildet sind und sich auf die allgemeine Gleichung zweiter Ordnung beziehen, und zu deren Berechnung die Differentialgleichung der Charakteristiken nicht integrirt zu sein braucht. Sh.

V. Jamet. Sur une équation aux dérivées partielles. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **13**, 95-106.

Bezeichnen a und b zwei reelle Constanten, so wird ein Integral der Differentialgleichung $(u-v)\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial\theta}{\partial u}-b\frac{\partial\theta}{\partial v}=0$ gesucht, welches für $u=u_0$ gleich einer Function V von v wird, die in der Umgebung von v_0 durch die Reihe $V=A+A_1(v-v_0)+A_2(v-v_0)^2+\cdots$ definirt ist, und welches entsprechend für $v=v_0$ gleich der Function $U=A+B_1(u-u_0)+B_2(u-u_0)^2+\cdots$ wird. Dasselbe wird erhalten in der Form:

$$\theta = A+\int_{c'}\frac{(u-\alpha)^b(v-\alpha)^a}{(u_0-\alpha)^b(v_0-\alpha)^a}\cdot\varphi(\alpha)d\alpha+\int_{c}\frac{(u-\alpha)^b(v-\alpha)^a}{(u_0-\alpha)^b(v_0-\alpha)^a}\cdot\psi(\alpha)d\alpha,$$

wenn bestimmt wird:

$$\varphi(v)=\frac{1}{2\pi i}\sum_1^\infty(-1)^p\frac{1.2.3\ldots p}{a(a-1)\ldots(a-p+1)}A_p(v-v_0)^{p-1},$$

und ähnlich $\psi(v)$. Diese Reihen verlieren ihre Bedeutung, wenn a resp. b eine positive ganze Zahl ist; auch für diesen Fall wird die Bestimmung der beiden Functionen durchgeführt. Sh.

J. Le Roux. Sur une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. C. R. **123**, 1052-1054.

Als Anwendung der allgemeinen Theorien giebt Verf. einige Bemerkungen über die Gleichung: $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{1}{x-a}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\varphi(x)}{x-a}\frac{\partial z}{\partial y}=0$, speciell über die auftretenden Singularitäten. Sh.

U. Dini. Sulle equazioni a derivate parziali del 2° ordine. Rom. Acc. L. Rend. (5) **5**$_2$, 381-392, 421-433.

Setzt man in der bekannten Gleichung:

$$\iint\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx\,dy=-\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds,$$

in der die Integration links sich auf ein Gebiet C erstreckt, innerhalb dessen alle vorkommenden Functionen regulär sind, während rechts sich die Integration auf die Begrenzung desselben bezieht und p die nach dem Innern gerichtete Normale bedeutet, für X und Y die Producte UV und U_1V_1, und vertauscht man dann U mit $\alpha\frac{\partial U}{\partial x}+\beta\frac{\partial U}{\partial y}+\gamma U+\delta$ und entsprechend U_1 mit $\alpha_1\,\partial U_1/\partial x+\cdots$, wo die Coefficienten beliebige reguläre Functionen von x und y bedeuten, so geht die obige Gleichung über in:

$$\iint\Big[\alpha\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\beta_1\frac{\partial U_1}{\partial y}\frac{\partial V_1}{\partial y}+\beta\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}+\alpha_1\frac{\partial U_1}{\partial x}\frac{\partial V_1}{\partial y}+\frac{\partial(\gamma UV)}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial(\gamma_1 U_1 V_1)}{\partial y}+\frac{\partial(\delta V)}{\partial x}+\frac{\partial(\delta_1 V_1)}{\partial y}+\alpha V\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\beta_1 V_1\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}+\beta V\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}$$

$$+\alpha_1 V_1\frac{\partial^2 U_1}{\partial x\partial y}+V\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x}+V_1\frac{\partial\beta_1}{\partial y}\frac{\partial U_1}{\partial y}+V\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}+V_1\frac{\partial\alpha_1}{\partial y}\frac{\partial U_1}{\partial x}\Big]dx\,dy$$

$$=-\int\Big[\Big(\alpha\frac{\partial U}{\partial x}+\beta\frac{\partial U}{\partial y}+\gamma U+\delta\Big)V\frac{\partial x}{\partial p}$$

$$+\Big(\alpha_1\frac{\partial U_1}{\partial x}+\beta_1\frac{\partial U_1}{\partial y}+\gamma_1 U+\delta_1\Big)V_1\frac{\partial y}{\partial p}\Big]ds,$$

und hieraus folgt, wenn U mit V und U_1 mit V_1 vertauscht und die so entstandene Gleichung von der ersten abgezogen wird, noch eine zweite ähnliche Gleichung. Durch Specialisirung der verschiedenen vorkommenden Grössen ergiebt sich aus diesen Gleichungen eine Reihe wichtiger Folgerungen, besonders rücksichtlich der eindeutigen Bestimmung eines regulären Integrals der Gleichung:

$$a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+2h\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}+l=0,$$

oder der anderen:

$$a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+2h\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}$$

$$+2d\frac{\partial U}{\partial x}+2e\frac{\partial U}{\partial y}+gU=g_0$$

durch die Werte desselben längs der Begrenzung des Gebiets, wobei der Verf. unter anderen auch auf manche schon von **Picard** gefundenen Resultate geführt wird. Sh.

M. Chini. Sulle equazioni a derivate parziali del 2° ordine. Torino Atti **31**, 568-578.

Die Differentialgleichung $a\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=2c\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y}$, wo a, b und c Functionen von x und y bedeuten, derart dass $ab-c^2 \gtrless 0$ ist, lässt sich auf eine der Formen $A\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\partial\beta}+B\frac{\partial Z}{\partial\alpha}=0$ oder $A\frac{\partial^2 Z}{\partial\alpha\partial\beta}+C\frac{\partial Z}{\partial\beta}=0$ transformiren, sobald zwischen den Coefficienten die Relation besteht:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{c\pm\sqrt{c^2-ab}}{a}\right\}=\frac{c\mp\sqrt{c^2-ab}}{a}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{c\pm\sqrt{c^2-ab}}{a}\right\};$$

und auf die Form $\partial^2 Z/\partial\alpha\partial\beta = 0$, wenn gleichzeitig die Relationen bestehen: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2c}{a}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b}{a}\right)$ und $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2c}{b}\right)$. Von diesen Resultaten werden einige geometrische Anwendungen gemacht.

Sh.

W. Wirtinger. Beiträge zu Riemann's Integrationsmethode für hyperbolische Differentialgleichungen, und deren Anwendungen auf Schwingungsprobleme. Math. Ann. **48**, 365-389.

Die Untersuchung knüpft an das Riemann'sche Verfahren zur Integration hyperbolischer Differentialgleichungen an [Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, Ges. W. 2. Aufl. S. 156-175, Art. 8 und 9] und beschäftigt sich mit dem speciellen Fall der sogenannten harmonischen Gleichungen. Die Differentialgleichung wird in der Form vorausgesetzt:

$$(1) \qquad g(t)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - h(x)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0,$$

wo $g(t)$, $h(x)$ eindeutige, endliche, stetige Functionen sind, welche in dem betrachteten Gebiete durchaus positiv sind, und deren erste und zweite Derivirten durchaus endlich und, mit Ausnahme einer endlichen Anzahl von Stellen, auch stetig sind. Die Gleichung (1) wird durch Einführung der Charakteristiken ξ, η derselben als neue Variabeln in die Form übergeführt: (2) $\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\partial\eta} = [\mu(\xi-\eta)+\nu(\xi+\eta)].\zeta$, wobei $\zeta = z\,.\,h(x)^{\frac{1}{4}}\,.\,g(t)^{\frac{1}{4}}$ gesetzt ist. In die Ausdrücke von μ und ν gehen die zweiten Derivirten von $g(t)$ und $h(x)$ ein. An der Form (2) wird im § 2 der Abhandlung das Riemann'sche Integrationsverfahren auseinandergesetzt unter der Annahme, dass die Werte von z, bezw. ζ längs einer Curve in der (x, t)-Ebene bekannt sind. Die Bedenken, zu welchen dieses Verfahren Veranlassung giebt, werden im § 3 dadurch beseitigt, dass ein directer Beweis für die Existenz einer gewissen, bei Riemann auftretenden Function geführt wird, welcher auf einer Methode von Picard (S. M. F. Bull. **22**; F. d. M. **25**, 612, 1893/94) beruht.

Nachdem die Form des Integrals somit sichergestellt ist, geht der Verf. zu Anwendungen über. Aus § 4 sei erwähnt die Untersuchung der kleinen Transversalschwingungen eines biegsamen, schweren, homogenen Fadens, der an einem Punkte aufgehängt und am anderen Ende mit einem Gewicht belastet ist. Es ergiebt sich unmittelbar, dass sich eine anfänglich auf ein kleines Gebiet beschränkte Störung mit der Zeit auf ein grösseres Gebiet ausbreiten wird. Nimmt man an, dass die angehängte Masse gleich Null ist, so findet man sofort das von Poisson (J. de l'Éc. Pol. **7**) auf complicirtem Wege gefundene Resultat, dass die Ausbreitung nach oben gleichförmig beschleunigt, nach unten gleichförmig verzögert erfolgt, und zwar ist die Beschleunigung gleich der halben Fallbeschleunigung.

Eine weitere Anwendung enthält § 5, in welchem eine schwingende Saite von variabler Dichte und begrenzter Länge l betrachtet wird. Anfangs- und Endpunkt der Saite werden als fest angenommen, und die Dichte wird als eine Function $\varrho(x)$ der Abscisse von derselben Beschaffenheit wie die Function $h(x)$ vorausgesetzt. Ist S die Spannung der Saite, so lautet die Differentialgleichung: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\varrho(x)}{S} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$. Unter der Annahme, dass für $t = 0$ und $0 < x < l$ vorgegeben sei: $z = \varphi(x)$, $\partial z/\partial t = \psi(x)$, wird das Integral gebildet. Die Schwierigkeit, welche darin liegt, dass Anfangszustand und Dichte nur innerhalb eines begrenzten Intervalles gegeben sind, und welche sich besonders bei der Bestimmung der in dem Integral auftretenden Function v erhebt, wird durch die Annahme behoben, dass die Functionen $\varrho(x)$, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ über das Intervall $(0 \dots l)$ hinaus fortgesetzt werden, indem $\varrho(x)$ als eine gerade, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ aber als ungerade Functionen mit der Periode $2l$ vorausgesetzt werden; es werden durch diese Annahme alle Bedingungen der Aufgabe erfüllt. In derselben Weise kann auch das Problem der Transversalschwingungen einer homogenen Saite in einem widerstehenden Mittel behandelt werden, und man kommt dann auf eine Differentialgleichung, die von der sogenannten Telegraphistengleichung (Poincaré, C. R. **117**, F. d. M. **25**, 1695, 1893/94) nicht wesentlich verschieden ist.

Die beiden nächsten Paragraphen beschäftigen sich nun eingehender mit der Function v; und zwar wird zunächst in § 6 Riemann's bestimmtes Integral für die Function v mit Hülfe Fourier'scher Integrale hergeleitet und einer näheren Discussion unterzogen, während in § 7 die Function v unter gewissen Voraussetzungen durch Normalfunctionen dargestellt wird. Die Betrachtungen, welche sich hier nicht in Kürze kennzeichnen lassen, werden in § 8 für die Differentialgleichung der schwingenden Saite näher ausgeführt.

Nach den merkwürdigen Beziehungen zwischen der Function v und den Normalfunctionen passend gewählter Gebiete, die unter Umständen beliebig gross sein können, wenn sie nur endlich sind, sollte erwartet werden können, dass bei der Ausdehnung der Gebiete ins Unendliche brauchbare Integraldarstellungen aus den Reihen entstehen; indessen führen die Grenzübergänge auf grosse Schwierigkeiten. Der Verf. kommt in § 9 „Ueber die Schwingungen einer unendlich langen Saite von variabler Dichte“ zu dem Ergebnis, dass die Schwingung einer solchen Saite, in der Sprache der Optik ausgedrückt, im allgemeinen einem Bandenspectrum entspricht. Die ausgesprochene Erwartung ist also im allgemeinen nicht erfüllt. Gz.

L. Bianchi. **Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore.** Rom. Acc. L. Rend. (5) 4_1, 89-99, 133-142.

Während in einer früheren Note eine Verallgemeinerung der Riemann'schen Integrationsmethode auf mehrere Variabeln gezeigt wurde,

wird in den beiden vorliegenden Abhandlungen eine Erweiterung auf die dritte Ordnung gegeben. Es handelt sich um die Integration der Gleichung:

$$\Omega(u) = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + b \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} + \gamma \frac{\partial u}{\partial z} + \delta u = 0.$$

Setzt man: $\Omega_1(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + b \frac{\partial u}{\partial z} + c \frac{\partial u}{\partial y} + \alpha u$ und entsprechend $\Omega_2(u)$ und $\Omega_3(u)$ durch cyklische Vertauschung der Buchstaben; ebenso $\Omega_{23}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} + au$ und entsprechend $\Omega_{13}(u)$ und $\Omega_{12}(u)$, so wird als Hauptintegral für den Punkt $P_0 \equiv (x_0\, y_0\, z_0)$ dasjenige bezeichnet, welches die Bedingungen erfüllt: 1) im Punkt P_0 den Wert 1 anzunehmen, 2) längs der drei durch P_0 gehenden Parallelen zu den Coordinatenaxen bezüglich die Gleichungen zu erfüllen $\Omega_{23}(u) = 0$, $\Omega_{13}(u) = 0$, $\Omega_{12}(u) = 0$, und 3) in den drei durch P_0 gehenden, zu den Axen parallelen Ebenen bezüglich die Gleichungen zu erfüllen $\Omega_1(u) = 0$, $\Omega_2(u) = 0$, $\Omega_3(u) = 0$.

Die Hauptaufgabe besteht nun darin, ein Integral zu ermitteln, welches auf den drei Coordinatenaxen beliebig gegebene Werte annimmt; dass ein solches Integral existirt, ist nach der Picard'schen Methode der successiven Approximationen leicht zu zeigen. Die wesentliche Aufgabe der vorliegenden Noten ist der Nachweis, dass zur Berechnung eines solchen Integrals für den Punkt P_0 es genügt, das Hauptintegral der adjungirten Gleichung

$$\Phi(v) = \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial z} - \frac{\partial^2 (av)}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 (bv)}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 (cv)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial (\alpha v)}{\partial x} + \frac{\partial (\beta v)}{\partial y} + \frac{\partial (\gamma v)}{\partial z} - \delta v = 0$$

für diesen Punkt zu ermitteln.

In der letzten Note zeigt der Verf. einen neuen Weg zur Ableitung dieser Sätze, der den Vorzug hat, sich auch auf Gleichungen n^{ter} Ordnung anwenden zu lassen. Sh.

B. O. Peirce. On a certain class of equipotential surfaces. American J. **18**, 130-134.

Es handelt sich analytisch um die gemeinsamen Lösungen der partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial \omega}{\partial y}} = \frac{1}{yF(\omega)}.$$

Dieselben sind von der Form:

$$\omega = A + B \log \{[x+yi-n \pm \sqrt{(x+yi-n)^2-\lambda^2}] \times [x-yi-n \pm \sqrt{(x-yi-n)^2-\lambda^2}]\};$$

$\omega = c$ oder

$$[x+yi-n \pm \sqrt{(x+yi-n)^2-\lambda^2}]\,[x-yi-n \pm \sqrt{(x-yi-n)^2-\lambda^2}] = c$$

stellt alle Curven (resp. die der z-Axe parallelen Cylinderflächen) dar. A, B, λ, n sind willkürliche, im allgemeinen complexe Constanten; schafft man die Wurzelzeichen fort und definirt a durch die Gleichung $c = \lambda^2 - 2a \pm 2i\sqrt{a(\lambda^2-a)}$, so erhält man $ax^2 + (a-l)y^2 - 2anx + a(a-l+n^2) = 0$. Wz.

P. Craig. Sur une suite d'équations linéaires aux dérivées partielles, provenant de la théorie des surfaces. C. R. **128**, 634-636.

Es werden für die reciproken Werte der Hauptkrümmungsradien Differentialgleichungen aufgestellt und zwei Reihen von Differentialgleichungen aus denselben abgeleitet, von denen gezeigt wird, dass eine bestimmte der einen und die in der Reihe vorhergehende der anderen dieselben Invarianten haben. Sh.

E. Almansi. Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^2\Delta^2 = 0$. Torino Atti **31**, 881-888.

G. Lauricella. Integrazione dell'equazione $\Delta^2(\Delta^2 u) = 0$ in un campo di forma circolare. Torino Atti **31**, 1010-1018.

V. Volterra. Osservazioni sulla nota precedente del prof. Lauricella e sopra una nota di analogo argomento dell'Ing. Almansi. Torino Atti **31**, 1018-1021.

Setzt man nach üblicher Bezeichnung $\Delta^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, so wird in den beiden ersten Abhandlungen dasselbe Problem, die Integration der Differentialgleichung $\Delta^2(\Delta^2) = 0$ für ein von einem Kreise begrenztes ebenes Gebiet behandelt. Bezeichnet man den Wert, welchen die gesuchte Function u auf dem Kreise annehmen soll, mit G und mit H den Wert, den die Ableitung von u nach der in das Innere gerichteten Normale auf dem Kreise annehmen soll; bezeichnet man ferner den Kreisradius mit R, den Abstand eines beliebigen Punktes A vom Mittelpunkte mit r, so erhält Lauricella als Lösung des Problems:

$$u = \frac{1}{4\pi R}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2-r^2)^2}{R^2+r^2-2Rr\cos\omega} H\,d\omega + \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi} \frac{(R^2-r^2)^2\,(R-r\cos\omega)}{(R^2+r^2-2Rr\cos\omega)^2} G\,d\omega,$$

während Almansi eine ähnliche, aber weniger elegante Lösung erhält, in der auch noch die Ableitungen von G auftreten. Es lässt sich aber die eine Formel, wie Volterra zeigt, ziemlich leicht in die andere überführen. Sh.

R. MARCOLONGO. Sulla equazione $\Delta_2 U + k^2 U = 0$ in uno spazio di n dimensioni. Annali di Mat. (2) **24,** 301-314.

In dieser Note wird eine Verallgemeinerung der Untersuchungen von von Helmholtz (Journ. für Math. **57**) über Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden und von Weber über obige Differentialgleichung (Math. Ann. **1**) auf einen n-dimensionalen Raum gegeben. Wie bei der gewöhnlichen Potentialgleichung die negativen Potenzen des Abstandes zweier Punkte eine besondere Wichtigkeit besitzen, so treten hier die Bessel'schen Functionen in ähnlicher Bedeutung auf. Sh.

A. THYBAUT. Sur certaines classes d'équations de Laplace à invariants égaux. C. R. **122,** 834-835.

A. THYBAUT. Sur une classe de surfaces isothermiques dépendant de deux fonctions arbitraires. C. R. **123,** 295-297.

Kennt man p Lösungen der Gleichung: $\partial^2\theta/\partial\alpha\partial\beta = k\theta$, welche die Bedingung erfüllen: $\sum\limits_p \theta_i^2 = 0$, und ist ω eine beliebige $(p+1)^{\text{te}}$ Lösung, so ist $\omega' = \sum\limits_p A_i\theta_i$ eine neue Lösung der gegebenen Gleichung; hierin ist zu setzen:

$$A_i = \int\left(\theta_i\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \omega\frac{\partial\theta_i}{\partial\alpha}\right)d\alpha - \left(\theta_i\frac{\partial\omega}{\partial\beta} - \omega\frac{\partial\theta_i}{\partial\beta}\right)d\beta.$$

Die zweite Note giebt noch eine Ergänzung dieses Satzes und seine Anwendung auf gewisse Flächen. Sh.

G. VIVANTI. Contributo alla teoria delle equazioni a derivate parziali del secondo ordine. Lomb. Ist. Rend. (2) **29,** 777-792.

Die Wichtigkeit der Gleichungen von Monge und Ampère, deren Integration auf ein System homogener linearer partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden kann, veranlasste den Verf., eine Verallgemeinerung für den Fall zu suchen, dass die Zahl der unabhängigen Variabeln grösser als zwei ist. In vorliegender Note wird die allgemeine Form dieser Gleichungen für eine beliebige Anzahl unabhängiger Variabeln aufgestellt und bei einer speciellen Klasse die Reduction auf ein lineares System erster Ordnung durchgeführt. Sh.

W. MÜLLER. Transformationstheorie der Monge-Ampère'schen Differentialgleichungen. Leipzig. 43 S. 8°. (1895.)

H. GRÖNVALL. Några användningar af de $2n$-periodiska funktionerna på teorin för system af lineära totala differentialekvationer. Stockh. Öfv. **53,** 295-314.

Der Verf. betrachtet Gleichungssysteme der Form:

$$\frac{\partial^m z}{\partial u_1^m} + p_{11}\frac{\partial^{m-1} z}{\partial u_1^{m-1}} + \cdots + p_{m1} z = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u_i} = p_{1i}\frac{\partial^{m-1} z}{\partial u_1^{m-1}} + \cdots + p_{mi} z \qquad (i = 2, \ldots, n),$$

wo die Coefficienten p_{ik} $2n$-fach periodische Functionen bedeuten. Es werden zuerst die Bedingungen untersucht, unter denen die Lösungen eindeutig und von rationalem Charakter sind. Für diesen Fall wird nachher eine allgemeine Form der Lösungen hergeleitet, sowie auch eine Methode für ihre Bestimmung entwickelt. Die Integration lässt sich in der That durch eine endliche Anzahl algebraischer Operationen ausführen. Zum Schluss wird der Fall $m = 2$ unter gewissen vereinfachenden Annahmen ausführlicher behandelt. Bdn.

A. Fabre. Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordre n, à deux variables x_1, x_2 et une fonction X. Ass. Franç. Bordeaux (1895) **24,** 136-144.

Der Verf. entwickelt ein Verfahren zur Zurückführung der partiellen Differentialgleichungen auf solche von niedrigerer Ordnung und wendet dann sein Verfahren auf einige Gleichungen zweiter und dritter Ordnung an. Die Methode besteht in rein formellen Umgestaltungen, deren Nutzen nicht recht ersichtlich ist. Lp.

G. Oltramare. Sur le nombre des fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale complète des équations linéaires aux différentielles ou aux différences partielles à coefficients constants. Ass. Franç. Bordeaux (1895) **24,** 171-175.

Durch den „Calcul de généralisation" ist der Verf. zur Erkenntnis gelangt, „dass man in manchen Fällen als vollständige Integrale einer Gleichung Werte gegeben hat, welche nicht die allgemeinsten waren. Als merkwürdiges Resultat findet man, dass die partielle Differentialgleichung $\partial^2 z/\partial x^2 = a\partial^2 z/\partial y^2$ in ihrem vollständigen Integrale fünf willkürliche Functionen gestattet, wenn a von 1 verschieden ist; wenn aber $a = 1$ ist, lässt sie nur noch vier willkürliche Functionen zu."

Lp.

S. Lie. Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Polnische Uebersetzung von K. Zorawski. Prace mat.-fiz. **7,** 69-136.

Uebersetzung der Abhandlung aus Leipz. Ber. 1895; F. d. M. **26,** 402-404, 1895. Dn.

J. Paczowski. Ueber Differentialgleichungen, welche infinitesimale Transformationen gestatten. Prace mat.-fiz. **7,** 178-211. (Polnisch.)

Im mathematischen Seminar der Universität Krakau unter der Leitung Zorawski's verfertigtes Résumé der „Vorlesungen über Differential-

gleichungen mit bekannten Transformationen" von G. Scheffers (F. d. M. **23**, 351 ff., 1891). Dn.

O. Biermann. Zur Lie'schen Theorie von den partiellen Differentialgleichungen. Leipz. Ber. **48**, 1896, 665-693.

Der Verf. beabsichtigt zu zeigen, warum das Lie'sche Verfahren zur Zurückführung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung auf gewöhnliche Differentialgleichungen bei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nicht mehr anwendbar ist. Er fragt deshalb zunächst nach allen Gleichungensystemen in den $2n+1+\frac{1}{2}n(n+1)$ Veränderlichen z, x_i, p_i, $p_{ik} = p_{ki}$ $(i, k = 1, \ldots, n)$, die im Sinne von Lie dem Systeme der $n+1$ Pfaff'schen Gleichungen:

$$(1)\quad dz - \sum_{\nu}^{1\ldots n} p_\nu dx_\nu = 0, \quad dp_i - \sum_{\nu}^{1\ldots n} p_{i\nu} dx_\nu = 0 \quad (i = 1\ldots n)$$

genügen, und er bestimmt die Form aller solchen Gleichungensysteme, die möglichst wenige von einander unabhängige Gleichungen enthalten. Insbesondere findet er dabei natürlich die $\frac{1}{2}n(n+1)$-gliedrigen Gleichungensysteme von der Form:

$$(2)\quad z = F(x_1, \ldots, x_n),\ p_i = \frac{\partial F}{\partial x_i},\ p_{ik} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k} \quad (i, k = 1, \ldots, n).$$

Jetzt fragt er, ähnlich wie Lie bei den Differentialgleichungen erster Ordnung, nach den Bedingungen dafür, dass ein $\frac{1}{2}n(n+1)$-gliedriges, nach den z, p_i und p_{ik} auflösbares Gleichungensystem:

$$\Phi_\tau(z, x_i, p_i, p_{ik}) = 0 \quad (\tau = 1, \ldots, \tfrac{1}{2}n(n+1))$$

auf die Form (2) gebracht werden könne, und es gelingt ihm, diese Bedingungen darin zu erkennen, dass jeder Ausdruck: $\{\Phi_i \Phi_k\}_2$, der in gewisser Weise aus den Φ_τ gebildet ist (ähnlich wie der Ausdruck $[F_i F_k]$ in der Lie'schen Theorie) vermöge der Gleichungen $\Phi_\tau = 0$ verschwinden muss. Nun aber erfüllen die früher gefundenen nicht nach den z, p_i, p_{ik} auflösbaren $\frac{1}{2}n(n+1)$-gliedrigen Gleichungensysteme $\Phi_\tau = 0$, die dem Systeme der Pfaff'schen Gleichungen (1) genügen, im allgemeinen die eben angegebene Bedingung nicht, und daraus, sowie auch aus einem zweiten Grunde schliesst der Verf., dass die Lie'sche Formulirung des Integrationsproblems einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung auf die allgemeine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung nicht anwendbar ist. El.

E. Vessiot. Sur la recherche des équations finies d'un groupe continu fini de transformations, et sur les équations de Lie. Toulouse Ann. **10** C, 1-26.

Die Arbeit ist eine Fortsetzung derjenigen, über die in F. d. M. **25**, 547, 1893/94 berichtet ist. Der Verf. hatte darin Differentialgleichungen von der Form: $Af = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k}^{1\ldots n} \theta_k(t) X_k f = 0$ betrachtet (équations

de Lie nennt er sie), bei denen die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen $X_k f = \sum_i^{1\dots n} \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}$ eine r-gliedrige Gruppe erzeugen, deren endliche Gleichungen bekannt sind. Jetzt denkt er sich bloss die infinitesimalen Transformationen $X_k f$ gegeben und fragt daher, wie die endlichen Gleichungen der Gruppe gefunden werden können. Diese Fiage, die auf eine besondere équation de Lie hinauskommt: $Bf = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_r^{1\dots r} \lambda_k X_k f = 0$, wo $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ Parameter sind, wird auf drei verschiedene Arten behandelt, wobei sich eine ganze Reihe älterer Sätze von Lie mit ergiebt. Am bemerkenswertesten ist die letzte Behandlungsweise, weil sie auf die allgemeinen équations de Lie anwendbar ist. Um nämlich die Gleichung $Bf = 0$ zu integriren, sucht der Verf. zunächst alle infinitesimalen Transformationen:

$$Yf = \sum_k^{1\dots r} \varrho_k(t) X_k f,$$

welche die Gleichung $Bf = 0$ invariant lassen, und bekommt zur Bestimmung der ϱ_k die linearen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten, die zur Bestimmung der endlichen Gleichungen der adjungirten Gruppe der Gruppe $X_1 f, \dots, X_r f$ führen. Ebenso sucht er nun bei der allgemeinen Gleichung $Af = 0$ alle Transformationen Yf, die $Af = 0$ invariant lassen, und findet für die ϱ_k lineare homogene Differentialgleichungen, deren Coefficienten bekannte Functionen von t sind. Hat man diese linearen Gleichungen integrirt, und ist überdies die Gruppe $X_1 f, \dots, X_r f$ transitiv, so kommt man auf ein von Lie so genanntes Normalproblem, dessen Erledigung ausser etwaigen Quadraturen nur die Integration einer Reihe von linearen Hülfsgleichungen erfordert. Damit ist das Ergebnis der früheren Arbeit des Verf. wiedergewonnen, dass die Integration jeder équation de Lie auf lineare Hülfsgleichungen führt, sobald die entsprechende Gruppe transitiv ist; diesmal aber ist dieses Ergebnis abgeleitet, ohne die endlichen Gleichungen der Gruppe als bekannt vorauszusetzen. El.

E. Cartan. Sur la réduction à sa forme canonique de la structure d'un groupe de transformations fini et continu. American J. **18**, 1-61.

Diese Arbeit schliesst sich an die These des Verf. an, die in F. d. M. **25**, 638, 1893/94 besprochen ist. § 1 enthält eine kurze Darstellung der Lie'schen Methode zur Integration eines vollständigen Systems, das eine Gruppe mit bekannten infinitesimalen Transformationen gestattet. Die Lie'sche Methode besteht darin, dass das Integrationsproblem reducirt wird auf eine Reihe von Problemen derselben Art, zu deren jedem eine einfache Gruppe gehört, also eine, die keine invariante Untergruppe enthält. In § 2 werden die Operationen besprochen, die zur wirklichen Ausführung dieser Reduction erforderlich sind. Es ergeben sich so drei verschiedene Probleme, von denen die beiden letzten rein algebraisch

sind, während das erste, bereits von Lie selbst erledigte, gewisse, im allgemeinen nicht algebraische Eliminationen und unter Umständen gewisse Quadraturen erfordert. Der Verf. stellt sich nun die Aufgabe, jene beiden ersten algebraischen Probleme zu lösen, und zwar bestehen diese Probleme darin, dass erstens, wenn die Zusammensetzung einer r-gliedrigen Gruppe gegeben ist, die Gruppe in eine Normalreihe von Untergruppen zerlegt werden soll (s. Lie, Theorie der Transformationsgruppen **3**, 704), und dass zweitens, wenn die Zusammensetzung einer einfachen Gruppe gegeben ist, diese Zusammensetzung auf eine kanonische Form gebracht werden soll, aus der man die endlichen und die infinitesimalen Transformationen einer Gruppe herstellen kann, welche die betreffende Zusammensetzung hat und möglichst wenige Veränderliche enthält. Nachdem der Verf. noch einige Sätze seiner Thèse zusammengestellt hat, die für das Folgende nötig sind, löst er in § 3 das erste Problem, das nach Absonderung der grössten integrabeln invarianten Untergruppe durch rationale Operationen zurückgeführt wird auf ein Problem derselben Art, bei dem die betreffende Zusammensetzung eine halbeinfache Gruppe darstellt. Enthält diese halbeinfache Gruppe gerade h einfache Untergruppen von verschiedener Zusammensetzung, und giebt es in ihr gerade α_i einfache Untergruppen von der i^{ten} unter diesen h Zusammensetzungen, so ist die Auflösung von h algebraischen Gleichungen erforderlich, die der Reihe nach die Grade $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$ besitzen, und die durch rationale Operationen aufgestellt werden können, aber im allgemeinen keinen Affect haben. In § 4 wird das zweite Problem erledigt, das auf Grund der Untersuchungen von Lie, Killing und Cartan selbst im wesentlichen darauf hinauskommt, die charakteristische Gleichung aufzulösen, die zu der Zusammensetzung einer r-gliedrigen einfachen Gruppe gehört. Ist die r-gliedrige Gruppe im Sinne Killing's vom Range l, so ist die charakteristische Gleichung nach Abscheidung der verschwindenden Wurzeln vom Grade $r-l$ und hat lauter verschiedene Wurzeln. Es handelt sich also darum, die Galois'sche Gruppe dieser charakteristischen Gleichung zu ermitteln, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereiche angehören, der durch die Constanten c_{iks} der Zusammensetzung der Gruppe und durch die Parameter $e_1, \dots, e_r$ der allgemeinen infinitesimalen Transformation $\Sigma e_k X_k f$ der Gruppe bestimmt ist. Hier kann man aber ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein e_k, etwa e_1, gleich 1 und alle übrigen gleich Null setzen, wenn man nur die Vorsicht beobachtet, dass jene Gleichung $(r-l)^{\text{ten}}$ Grades auch für $e_1 = 1$, $e_k = 0$ $(k = 2, \dots, r)$ noch $r-l$ verschiedene Wurzeln behält, von denen keine verschwindet. Die Bestimmung der Galois'schen Gruppe der so vereinfachten Gleichung gelingt nun mit Hülfe der linearen Relationen, die, wie Killing zuerst bemerkt hat, zwischen den Wurzeln der charakteristischen Gleichung einer einfachen Gruppe bestehen. Es ergiebt sich dabei, dass die Auflösung der charakteristischen Gleichung ausser Quadratwurzeln noch die Auflösung einer Gleichung l^{ten} oder $(l+1)^{\text{ten}}$ Grades ohne Affect erfordert. Ausgenommen sind fünf besondere Typen von einfachen Gruppen, zwei mit dem Range $l = 4$, bei denen man auf eine

Gleichung dritten und eine vierten Grades geführt wird, je eine vom Range $l = 6, 7, 12$, bei denen die charakteristische Gleichung äquivalent ist mit der Gleichung für die 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung, mit der Gleichung für die 28 Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung, mit der Gleichung 120. Grades, deren Galois'sche Gruppe die erste hypoabelsche Gruppe in 120 Buchstaben ist. El.

S. Lie. Zur Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen. Leipz. Ber. **48**, 1896, 466-477.

Es wird die Frage nach den Kriterien behandelt, an denen man erkennen kann, ob zwei Flächen des gewöhnlichen Raumes durch euklidische Bewegungen in einander überführbar, d. h. ob sie congruent sind. Die Beantwortung dieser Frage wird geleistet durch die Bestimmung der Systeme von partiellen Differentialgleichungen, die bei der Gruppe der euklidischen Bewegungen invariant bleiben. El.

G. Fano. Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni proiettive in sè. Torino Mem. (2) **46**, 187-218.

Der Verf. beschäftigt sich mit den dreigliedrigen einfachen projectiven Gruppen, also mit denen, die mit der allgemeinen projectiven Gruppe der Geraden gleichzusammengesetzt sind. Er thut dies deshalb, weil jede im Sinne von Lie nicht integrable projective Gruppe eine solche dreigliedrige Untergruppe enthält. Zunächst beweist er (in § 2) den zuerst von Study aufgestellten Satz, von dem bisher noch kein Beweis veröffentlicht worden ist, dass jede dreigliedrige einfache projective Gruppe des R_r eine Reihe von windschiefen ebenen Mannigfaltigkeiten invariant lässt, von denen keine eine kleinere invariante ebene Mannigfaltigkeit enthält, und die zusammengenommen in keinem niedrigeren ebenen Raume liegen als in dem R_r. In § 3 wird auf Grund des bewiesenen Satzes die allgemeine Form einer solchen Gruppe angegeben, und durch Zuziehung der Theorie der binären Formen gelingt es, alle bei einer solchen Gruppe invarianten algebraischen Mannigfaltigkeiten anzugeben. In § 4 werden die Mannigfaltigkeiten betrachtet, die bei der projectiven Gruppe einer rationalen Curve n^{ter} Ordnung des R_n invariant bleiben, und ausserdem die bei einer beliebigen dreigliedrigen einfachen projectiven Gruppe invarianten Curven, Flächen und M_3. In § 4 und 5 endlich werden die Fälle des R_3 und des R_4 besonders besprochen. El.

A. Emch. On the fundamental property of the linear group of transformation in the plane. Annals of Math. **10**, 3-4.

Eine allgemeine projective Transformation der Ebene kann man sich bestimmt denken durch zwei Kegelschnitte und durch eine der gemein-

samen Tangenten an diese. Bei einer linearen Transformation sind die beiden Kegelschnitte Parabeln. Die lineare Transformation hat überdies die Eigenschaft, parallele Gerade in parallele überzuführen, und daraus wird der Satz abgeleitet, dass sie alle Flächenräume in constantem Verhältnisse ändert. El.

G. H. Ling. On the solution of a certain differential equation which presents itself in Laplace's theory of the tides. Diss. Columbia Univ. City of New York. 31 S. 4°. (Annals of Math. **10**).

Kapitel 7.

Variationsrechnung.

H. Hancock. Calculus of variation. II. Annals of Math. **10**, 81-88.

H. Hancock. The calculus of variations: Derivation of some of the fundamental Weierstrassian formulae. Annals of Math. **11**, 20-32.

Fortsetzung der Vorlesungen über Variationsrechnung von Weierstrass-Schwarz (vgl. Annals of Math. **9**, 170—190; F. d. M. **26**, 413, 1895). Sh.

H. Hancock. On the number of catenaries that may be drawn through two fixed points. Annals of Math. **10**, 159-174.

Dieser Aufsatz bildet einen Teil der Veröffentlichungen des Verf. aus der Schwarz'schen Vorlesung über Variationsrechnung vom Sommer 1892. „Einige Resultate wurden von Goldschmidt, dem Assistenten von Gauss, entdeckt; aber in der jetzigen Darstellung wird das Problem mit grösserer Vollständigkeit discutirt. Es ist nicht nur an und für sich von grosser Bedeutung; sondern es dient auch als ein ausgezeichnetes Beispiel, um zu beleuchten, wie ungenau die früheren Methoden der Variationsrechnung waren". Drei Fälle werden unterschieden und genau analytisch und geometrisch untersucht: I. Zwei Kettenlinien können durch die beiden Punkte gelegt werden. II. Nur eine kann durch diese Punkte gelegt werden. III. Keine Kettenlinie kann durch die beiden Punkte gelegt werden. Lp.

A. Mayer. Die Kriterien des Minimums einfacher Integrale bei variabeln Grenzwerten. Leipz. Ber. **48**, 1896, 436-465.

Wie der Verf. schon in einer früheren Arbeit (vergl. F. d. M. **16**, 326, 1884) hervorgehoben hatte, stehen sich in Betreff des Weges, auf welchem man die Kriterien einfacher Integrale bei variabeln Grenzwerten

finden kann, zwei Ansichten gegenüber. Die eine will, dass man zuerst die Grenzwerte als fest gegeben, aber unbestimmt ansieht und unter dieser Annahme den Minimalwert des Integrals als Function der Grenzwerte bestimmt; dann sind weiter diese Grenzwerte so zu berechnen, dass die Function selbst wieder ein Minimum wird. Es werden also bei diesem Verfahren die bekannten Kriterien des Minimums einfacher Integrale mit festen Grenzwerten mit den gleichfalls bekannten Kriterien des gewöhnlichen Minimums combinirt. Die andere Ansicht hält diesen Weg für unbefriedigend und verlangt, dass das ganze Problem ungeteilt in Angriff genommen werde. In der oben angegebenen Arbeit hatte der Verf. die Gründe auseinandergesetzt, welche die Zerlegungsmethode als selbstverständlich und daher keines besonderen Beweises bedürftig erscheinen lassen. Um nun jeden Zweifel an der Zulässigkeit der Zerlegungsmethode zu beseitigen, ermittelt der Verf. in der vorliegenden Arbeit die gesuchten Kriterien nach beiden Methoden; es zeigt sich, dass beide Methoden zu ein und demselben Resultate führen, die erstere aber dasselbe auf einfacherem und klarerem Wege erlangt.

In dem ersten Paragraphen werden die Kriterien mittels der Zerlegungsmethode nach Jacobi, ohne aber die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung des Problems zu benutzen, aufgestellt. Um dann die Aufgabe auf eine solche eines gewöhnlichen Minimums zurückzuführen, ist es nicht notwendig, die Quadratur wirklich auszuführen, durch welche der Wert, den das vorgelegte Integral für die vollständigen Lösungen der Differentialgleichungen des Problems annimmt, bestimmt wird; denn es kommt im Grunde nicht auf den Integralwert selbst, sondern nur auf seine Variationen an. Schliesslich ergeben sich drei Bedingungen, welche notwendig und hinreichend für das sichere Eintreten eines Minimums sind.

In dem zweiten Paragraphen wird das Problem ungeteilt gelöst. Während sich auch auf diesem Wege die eine der vorigen Bedingungen leicht ergiebt, ist es schwieriger und umständlicher, nachzuweisen, dass dieselbe mit den beiden anderen Bedingungen zusammen auf diesem Wege sich ebenfalls als hinreichend erweist. Die Formeln werden hierbei sehr bedeutend complicirt durch die scheinbar nicht zu vermeidende Unbequemlichkeit, dass abwechselnd mit Variationen von Grenzwerten und Grenzwerten von Variationen operirt werden muss.

Da zwischen den beiden letzten von den drei aufgestellten Bedingungen möglicherweise noch ein gewisser Zusammenhang bestehen könnte, so zeigt der Verf. im letzten Paragraphen an einem einfachen Beispiele, dass im allgemeinen keine der beiden letzten Bedingungen eine blosse Folge der anderen und der ersten Bedingung ist. Das Beispiel ist: Bei gegebenen x_0 und y_0 und unter der vorgeschriebenen Grenzbedingung $y_1 = \varphi(x_1)$ ist die Function y aus der Forderung

$$V = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx = \text{Min.}$$

zu bestimmen.

Die in dieser Arbeit benutzten Kriterien des Minimums bei festen Grenzwerten sind durch Betrachtungen gewonnen, welche auf Weierstrass'schen Ideen basiren. Dadurch ist die Benutzung der in der früheren Arbeit verwendeten Kriterien vermieden worden, deren Ableitung auf der von Scheeffer als unhaltbar erkannten Annahme beruhte, dass auch bei den Integralen das Minimum gesichert sei, so oft die erste Variation verschwindet und die zweite definit positiv ist. Hau.

B. Turksma. **Begründung der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung durch Vergleich derselben mit einer neuen Methode, welche zu den nämlichen Lösungen führt.** Math. Ann. 47, 33-46.

Die in der Variationsrechnung früher üblichen Beweise für die Lagrange'sche Multiplicatorenmethode waren sämtlich nicht entscheidend, weil nur gezeigt wurde, dass die gefundenen Lösungen den Forderungen des Problems genügen, nicht aber, dass sie die einzigen sind. Zuerst hat dann A. Mayer (F. d. M. 17, 357-358, 1885) eine ganz befriedigende Begründung der Lagrange'schen Methode gegeben. Es kommt, wie Mayer erkannte, darauf an, die Bedingung, dass nicht allein die $n-m$ unabhängigen Variationen, sondern auch die m übrigen an den Grenzen Null werden sollen, in Rechnung zu bringen; hierbei bezeichnet n die Anzahl der unbekannten Functionen, welche nebst ihren ersten Ableitungen nach x sowohl in dem gegebenen Integrale, als in den m Bedingungsgleichungen vorkommen.

Während Mayer die Richtigkeit der Lagrange'schen Methode auf directem Wege nachweist, bedient sich der Verf. der vorliegenden Abhandlung einer neuen, von der Lagrange'schen unabhängigen Methode, welche zu Lösungen desselben Problems führt. Während bei der Lagrange'schen Methode, wie der Verf. zeigt, freier variirt wird, als eigentlich erlaubt ist, so dass also richtige Lösungen entschlüpfen können, schränkt er bei seiner Methode die Variationen mehr als nötig ein. Dadurch tritt die Möglichkeit ein, dass sich Lösungen des Problems ergeben können, welche bei geringerer Einschränkung der Variationen wegfallen würden; jedenfalls müssen unter diesen Lösungen die richtigen sich befinden. Schliesslich beweist der Verf., dass die nach seiner Methode erhaltenen Lösungen mit den nach der Lagrange'schen Methode gefundenen identisch sind.

Der Grundgedanke der neuen Methode besteht darin, dass man für die Variationen δy_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ setzt:

$$\delta y_k = \alpha_{k,0} z + \frac{d(\alpha_{k,1} z)}{dx} + \frac{d^2(\alpha_{k,2} z)}{dx^2} + \cdots + \frac{d^s(\alpha_{k,s} z)}{dx^s},$$

wobei $s \geqq m/(n-m)$ zu wählen ist, und die Hülfsfunctionen α so bestimmt, dass die m variirten Bedingungsgleichungen befriedigt werden und zugleich die Variation des gegebenen Integrales zum Verschwinden

gebracht wird. Man findet, dass es $m(s+2)$ Functionen λ geben muss, welche n Systemen von $s+1$ Gleichungen genügen. Durch Differentiation gewisser dieser Gleichungen und Combination mit gewissen anderen lässt sich dann die Uebereinstimmung der gefundenen Lösungen mit den nach der Lagrange'schen Methode erhaltenen zeigen. Hau.

A. C. DIXON. **On a point in the calculus of variations.** Messenger (2) **26**, 54-56.

Von Bertrand wurde bemerkt, dass die übliche Rechtfertigung für den Gebrauch eines willkürlichen Multiplicators bei Problemen aus der isoperimetrischen Klasse nicht ausreichend ist. Der Verf. giebt einen Beweis, den er für einfacher hält als den Bertrand'schen. Glr. (Lp).

A. C. DIXON. **The reduction of the second variation of an integral.** Messenger (2) **26**, 65-79.

Der Zweck der Abhandlung besteht in einer Vereinfachung des Verfahrens, durch welches die zweite Variation eines Integrals gewöhnlich reducirt wird. Die Ergebnisse stimmen mit denen überein, welche Clebsch im Journal für Math. **55** und **56** giebt; doch ist die Gültigkeit ein wenig allgemeiner, weil in diesen Arbeiten die Möglichkeit einer bei dem Integrationsverfahren auftretenden Function ohne ihre Ableitungen nicht in Betracht gezogen ist. Vielleicht ist nach des Verf. Ansicht auch in der Behandlung der Bedingungsgleichungen einiges neu. — Drei Fälle werden betrachtet: der erste ist der gewöhnliche mit einer abhängigen und einer unabhängigen Veränderlichen, der zweite der mit mehreren abhängigen Variabeln und einer unabhängigen, der dritte der eines vielfachen Integrals mit mehreren abhängigen Variabeln. Glr. (Lp.)

W. ZIMMERMANN. **Sprunglinien in der Variationsrechnung. Versuch einer Darstellung der Grundlagen der Variationsrechnung im Zusammenhange mit der Unstetigkeitsbedingung.** Odessa Univ. **68**, XXVIII + 270 S. (Russisch.)

Sprunglinie wird hier eine solche Linie genannt, welche die Bedingung nicht erfüllt, dass alle unter dem Integrationszeichen vorkommenden Ableitungen, bis auf die höchste, zwischen den Integrationsgrenzen stetig sind.

In der Einleitung werden die Arbeiten von Airy, Challis, Todhunter, Erdmann, Culverwell besprochen, und als Zweck der Arbeit wird die Untersuchung der Folgerungen bezeichnet, zu denen die principielle Betrachtung der Sprunglinien, unabhängig von den in den Lösungen vorkommenden, führen kann. Um diese Revision auf feste Grundlagen zu stellen, beginnt die Darstellung mit den ersten Begriffen. Hier kommen die Ansichten von O. Stolz und C. Jordan zur Geltung. Kap. 1 ist dem Beweise der Existenz der variirenden Functionen gewidmet, welche

gewissen Endlichkeits- und Stetigkeitsbedingungen genügen. In den Kapiteln 2 und 3 wird dann ein Ausdruck für die Variation δS des bestimmten Integrals S aufgestellt, wenn zwischen den Integrationsgrenzen p Punkte der Unstetigkeit liegen; δS wird als Summe der für die einzelnen Stücke aufgestellten Variationen definirt: $\delta S = \sum_{k=1}^{k=n} \lim_{x'_k = x_k} \lim_{x''_k = x_{k_1}} \delta S_k$. Eine ähnliche Formel gilt für den Fall, wenn unter dem Integrationszeichen zwei von einander unabhängige, oder durch $F(x, y, z) = 0$ verbundene Veränderliche vorkommen. Nach diesen Vorbereitungen werden im Kap. 4 die Begriffe des Extrems eines bestimmten Integrals, des vollständigen oder des unvollständigen Maximums erklärt, und als notwendige Bedingung für ihre Existenz wird $\delta S = 0$ erwiesen. Die Curven, welche die Bedingung erfüllen, werden (nach Culverwell) stationäre Curven genannt: die Extremcurven bilden eine besondere Klasse dieser Curven. Um zu ihnen aufzusteigen, müssen weitere Untersuchungen angestellt werden; hierauf geht der Verf. nicht ein, indem er sich mit den Fällen begnügt, wo nur eine stationäre Curve, also sicher ein Extrem vorliegt. Die schönen Untersuchungen von Jacobi u. a. über die zweite Variation werden somit nicht berücksichtigt. Zur Aufstellung der stationären Curven bedarf es einer vollständigen Integration der Differentialgleichung $(P) = 0$ (gewöhnliche Bezeichnung, vergl. Moigno-Lindelöf); die Integrationsconstanten werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt. Wenn aber die extremen Curven in einzelnen Punkten sprungweise veränderliche Ableitungen haben können, so treten noch weitere Gleichungen

$$(P) = 0, \quad \ldots, \quad (P_n) = 0$$

hinzu. — Auch der Fall zweier Functionen unter dem Integrationszeichen wird betrachtet.

Im Kap. 6 handelt es sich um bedingte Extreme, wenn zu den Grenzbedingungen noch die weitere Gleichung $F(x,y,z) = 0$ hinzutritt. Für jede der μ Curven, in welche die extreme Curve zerfällt, sind dann die Gleichungen $(P) + \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $(Q) + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} = 0$ zu erfüllen, mit Ausnahme einzelner Punkte, welche Unstetigkeitspunkte der Function λ sind. Vollständiger wird hier der Fall betrachtet, wenn z und seine Ableitungen unter dem Integrationszeichen nicht vorkommen. Auf diesen Fall lässt sich leicht die Aufgabe zurückführen, wenn die extreme Curve gewisse Grenzen nicht überschreiten kann.

Der letzte Teil der Arbeit (S. 169 - 270) ist den Anwendungen gewidmet. Hier werden der Reihe nach folgende Probleme discutirt: kürzeste Linie; Erdmann's Problem über die kleinste Cylinderfläche, Brachistochrone, kleinste Umdrehungsfläche, endlich die Curve, welche mit ihrer Evolute den kleinsten Flächeninhalt einschliesst. Si.

G. Koenigs. **Sur les problèmes de variations relatifs aux intégrales doubles.** C. R. **122**, 126-128.

Verfasser sucht eine Fläche S zu bestimmen, welche durch eine gegebene Curve hindurchgeht, und für welche die erste Variation von

$$J = \iint f(p,q)\, dx dy,$$

erstreckt über den durch die gegebene Curve begrenzten Teil der Fläche S, verschwindet. Diese Aufgabe ist schon von Kürschak (Math. Ann. **44**, 9-16; F. d. M. **25**, 617, 1893/94) zurückgeführt worden auf eine Laplace'sche Differentialgleichung mit gleichen Invarianten. In dieser Note wird die Rolle, welche diese Gleichung spielt, präcisirt und auf die enge Beziehung hingewiesen, die zwischen diesem Variationsproblem und dem einer unendlich kleinen Deformation einer Fläche besteht. Sh.

Siebenter Abschnitt.

Functionentheorie.

Kapitel 1.

Allgemeines.

D. Hilbert. Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen. Gött. Nachr. 1896, 179-183.

Anknüpfend an eine Untersuchung von Weierstrass (cf. F. d. M. **16**, 330, 1884), hatte Dedekind (cf. F. d. M. **17**, 365, 1885) einen fundamentalen Satz aufgestellt und bewiesen, der im wesentlichen besagt: „Gelten in einem aus n Haupteinheiten gebildeten Zahlengebiete A das associative, das commutative und das distributive Gesetz, und kann das Quadrat einer Zahl α des Gebietes nur mit α selbst verschwinden, so lassen sich solche linearen Combinationen e der ursprünglichen Haupteinheiten als neue einführen, dass die einfachen Multiplicationsregeln bestehen: $e_i^2 = e_i$, $e_i e_k = 0$ $(i \neq k;\ i, k = 1, 2, \ldots, n)$."

Der Verf. zeigt, wie der fragliche Satz fast ohne Rechnung aus einem von ihm (cf. F. d. M. **22**, 133, 1890; **23**, 113, 1891) behufs Untersuchung der algebraischen Invarianten aufgestellten allgemeinen Satze hervorgeht, wonach: „wenn eine Form $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ für alle Werte der x verschwindet, für die m gegebene Formen $f_1, f_2, \ldots, f_m$ der x verschwinden, eine Identität der Art gilt: $F^h = A_1 f_1 + A_2 f_2 + \cdots + A_m f_m$, wo h eine ganze Zahl ist, und die A geeignete Formen der x bedeuten." Der Satz kann nämlich leicht auf nicht-homogene Formen übertragen werden. My.

Frau E. Litwinowa. Aus dem Gebiete der höheren Arithmetik. St. Petersb. Päd. Samml. 1896, Hlb. **1**, 64-85, 244-256; **2**, 16-29, 376-398. (Russisch.)

Versuch einer gemeinverständlichen Darstellung der neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik bei Helmholtz, Kronecker, Dedekind, Grassmann und Weierstrass. Die Grundlage

der Darstellung bilden Hankel's Vorlesungen über complexe Zahlen. Da aber die Darstellung der Theorie der negativen Zahlen bei Hankel nach der Meinung der Verf. nicht einwandfrei sei, so sind die Arbeiten von Weierstrass zum Vergleich herangezogen. Die russische Litteratur ist nicht völlig ausgenutzt und erwähnt, was in solchen populären Darstellungen doch wünschenswert erscheint. Si.

A. P. Kotelnikow. **Die Schraubenrechnung und ihre Anwendungen auf Geometrie und Mechanik.** Kasan 1895. (Russisch.)

Das Kapitel 2 des ersten Abschnittes dieses wichtigen Werkes enthält die vollständige analytische Theorie der parabolischen Biquaternionen, gegründet auf die vorläufige Betrachtung der complexen Zahlen der Form $a_0+\omega a_1$, wo a_0 und a_1 reelle oder complexe Zahlen der Form $c+d\sqrt{-1}$ sind und ω die complexe Einheit bedeutet, deren Quadrat gleich Null ist. Wi.

J. Thomae. **Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.** Schlömilch Z. **41,** 231-232.

Es wird bemerkt, dass der Ausspruch Riemann's (Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, § 2), dass es ein wesentliches Kennzeichen einer einfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit sei, dass in ihr von einem Punkte nur nach zwei Seiten, vorwärts und rückwärts, ein stetiger Fortgang möglich sei, nicht ausreiche, und dafür folgende Fassung vorgeschlagen: „Eine einfach unendliche stetige Mannigfaltigkeit hat die Eigenschaft, dass sich eine abzählbar unendliche Mannigfaltigkeit in ihr überall dicht bestimmen lässt." Diese Fassung rührt von einem 1885 verstorbenen Studirenden der Mathematik Ballauf her. — Der Verf. teilt ausserdem noch einen einfachen Beweis desselben Mathematikers für folgenden Satz mit: „Ist $f(x)$ zwischen a und b stetig und $\lim [f(x+h)-f(x)]/h$ für positive abnehmende h gleich Null, so ist $f(h)=f(a)$". Bm.

T. Brodén. **Ueber das Weierstrass-Cantor'sche Condensationsverfahren.** Stockh. Öfv. **53,** 583-602.

Es sei $\varphi(x)$ eine reelle Function, welche für $-1\leqq x\leqq +1$ stetig ist, mit x durchgehends wächst und für $x=0$ verschwindet; die Ableitung $\varphi'(x)$ habe in demselben Intervalle überall einen bestimmten endlichen Wert >0, mit der Ausnahme, dass $\varphi'(0)=\lim\limits_{x=0}\varphi'(x)=\infty$ ist. Es sei ferner im Intervalle $(0\dots 1)$ $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ eine überall dichte (aber abzählbare) Wertmenge und $c_1+c_2+\cdots+c_n+\cdots$ eine convergente Reihe positiver Grössen.

Unter diesen Voraussetzungen ist die Function $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\varphi(x-\omega_n)$ offenbar stetig im Intervalle $(0\dots 1)$. In Bezug auf die Derivirte $f'(x)$

wird Folgendes bewiesen: 1) Es giebt immer eine nicht abzählbare, überall dichte x-Menge, für welche $f'(x) = +\infty$ ist; 2) für alle anderen x (im Intervalle $0 \dots 1$) hat $f'(x)$ einen bestimmten endlichen Wert > 0 und gleich $\sum_1^\infty c_n \varphi'(x-\omega_n)$, wenigstens unter der Voraussetzung, dass die Singularität von $y = \varphi(x)$ im Nullpunkte algebraischer Natur ist.

Aehnliches gilt, mit gewissen Modificationen, auch wenn man nicht ein endliches x-Gebiet voraussetzt, oder wenn $\varphi(x)$ nicht zwischen endlichen Grenzen bleibt.

Es wird überdies hervorgehoben, dass der erste Teil des obigen Satzes in einem allgemeinen Satze enthalten ist, welcher sich auf Reihen bezieht, deren Glieder unendlich gross werden können. Bdn.

L. Maurer. Ueber die Mittelwerte der Functionen einer reellen Variabeln. Math. Ann. **47**, 263-280.

Es sei $f(x)$ eine reelle Function der reellen unbeschränkt Veränderlichen x; der absolute Betrag von $f(x)$ sei beständig kleiner als eine feste Grösse, und $f(x)$ gestatte durchweg die Integration. Bildet man dann die Mittelwerte $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., indem man $f_0(x) = f(x)$, $f_n(x) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} f_{n-1}(x+\xi)d\xi$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ setzt, wobei h eine positive Grösse bezeichnet, so gilt der folgende Satz:

„Wenn n unbeschränkt zunimmt und h unbeschränkt abnimmt, derart, dass $\lim \frac{2}{3} h\sqrt{n} = k$, so convergirt $f_n(x)$ gegen das Integral

$$F(x, k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+u)e^{-\frac{u^2}{k^2}}du = \frac{1}{k\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-\frac{(u-x)^2}{k^2}}du.$$

Die Function $F(x, k)$ (welche auch in einer Abhandlung von Weierstrass auftritt, vgl. F. d. M. **17**, 384, 1885) ist eine transcendente ganze Function von x, welche mit verschwindendem k gegen $f(x)$ convergirt, falls $f(x)$ in der Umgebung des Punktes x stetig ist.

Für die Entwickelungscoefficienten von $F(x, k)$ ergeben sich einfache obere Grenzen, aus denen z. B. folgt, dass die Maximalschwankung von $F(x, k)$ in einem Intervalle von der Länge b kleiner als $(b/k).(S/\sqrt{\pi})$ ist, wo S die Hälfte der Maximalschwankung von $f(x)$ bedeutet. Diese Eigenschaft von $F(x, k)$ überträgt sich auch auf $f_n(x)$.

Bildet man die Mittelwerte

$$m = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} f(x+\xi)d\xi, \qquad M = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} F(x+\xi, k)d\xi,$$

so ist die Differenz $M - m$, absolut genommen, kleiner als $\frac{\sqrt{\pi}.k}{2a}\cdot G$,

wo G die obere Grenze von $|f(x)|$ bezeichnet. Diese Thatsache lehrt, dass man für grössere Werte von k die Function $f(x)$ durch $F(x, k)$ ersetzen darf, wenn es sich um den Mittelwert von $f(x)$ in einem grösseren Intervalle handelt. Auf Grund der erhaltenen Resultate zeigt der Verf. ferner, dass jede gleichmässig stetige Function $f(x)$ in eine Reihe der Gestalt $f(x) = \gamma\Phi(x/k) + \gamma_1\Phi_1(x/k_1) + \gamma_2\Phi_2(x/k_2) + \cdots$ entwickelbar ist. Hier bezeichnen $\gamma, \gamma_1, \ldots, k, k_1, \ldots$ positive Grössen, $\Phi(x)$, $\Phi_1(x)$, ..., transcendente ganze Functionen. Die Summe $\gamma + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots$ ist endlich; das Maximum des absoluten Wertes von $\Phi_\nu(x)$ ist gleich 1, und der Factor von x^n in der Entwickelung von $\Phi_\nu(x)$ liegt unter einer festen von k_ν unabhängigen Grenze. Eine Reihe von dieser Art ist die Weierstrass'sche Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} b^\nu \cos(a^\nu x\pi)$, welche eine stetige, nicht differentiirbare Function darstellt.

Schliesslich bemerkt der Verf. noch, dass die von ihm entwickelten Sätze auch auf Functionen einer discret veränderlichen Grösse anwendbar sind, weil die arithmetischen Mittel, welche dann die Mittelwerte der Function bilden, durch bestimmte Integrale dargestellt werden können.

Hz.

A. Pringsheim. Ueber Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Functionen. Math. Ann. 47, 121-154.

Der Verfasser entwickelt zunächst einen nur mit elementaren Hülfsmitteln operirenden Beweis des Laurent'schen Satzes, dessen Grundgedanke darin besteht, statt der complexen Integrale Mittelwerte zu betrachten. Mit Hülfe des Laurent'schen Satzes lassen sich dann leicht die fundamentalen allgemeinen Sätze beweisen, welche die Entwickelung der analytischen Functionen in Potenzreihen, die Abhängigkeit der Entwickelungscoefficienten von den Werten der Function auf einer Kreisperipherie, das Verhalten einer analytischen Function in der Umgebung einer isolirten singulären Stelle u. s. w. betreffen. Hz.

A. Pringsheim. Zur Theorie der synektischen Functionen. Münch. Ber. 26, 1896, 167-183.

Der Verfasser hat in einer früheren Mitteilung gezeigt, wie man die Laurent'sche Entwickelung einer im Weierstrass'schen Sinne analytischen Function durch die Betrachtung gewisser Mittelwerte ableiten kann. Hier wird die Anwendbarkeit der nämlichen Methode auch für den Fall nachgewiesen, dass man von der Cauchy'schen Definition der „synektischen" Function ausgeht. Die Entwickelbarkeit einer synektischen Function nach der Taylor'schen und der Laurent'schen Reihe ergiebt sich so durch einfache Betrachtungen, und im Anschluss hieran lässt sich auch der Cauchy'sche Integralsatz mit elementaren Mitteln beweisen. Hz.

W. F. Osgood. Some points in the elements of the theory of functions. American M. S. Bull. (2) **2**, 296-302.

Statt der Cauchy'schen Definition einer analytischen Function und des grundlegenden Satzes, dass, wenn $f(z)$ analytisch und $f'(z)$ stetig in einem ganzen Bereiche ist, dann $\int f(z)dz$, längs irgend einer geschlossenen Curve innerhalb des Bereiches genommen, verschwindet, stellt der Verf. umgekehrt die Definition auf: $f(z)$ ist eine analytische Function von z, wenn $f(z)$ stetig ist in einem ganzen Bereiche, und wenn $\int f(z)\,dz$, längs einer beliebigen geschlossenen Curve innerhalb des Bereiches genommen, verschwindet. Hieraus lassen sich manche elementaren Sätze leichter ableiten als aus der Cauchy'schen Definition, so z. B., dass eine gleichmässig convergirende Reihe analytischer Functionen eine analytische Function definirt, ferner das Fundamentaltheorem: Wenn $f(z)$ einwertig und analytisch ist in allen Punkten eines gewissen Bereiches mit Ausnahme des Punktes $z = c$, und wenn $f(z)$ nicht unendlich wird in c, dann ist $f(z)$ in c auch analytisch oder kann dazu gemacht werden, indem man $f(z)$ im Punkte c denjenigen Wert beilegt, dem sich $f(z)$ nähert, wenn z sich c nähert. Eine Kritik der vorhandenen Beweise dieses Satzes macht den Beschluss. Lp.

A. S. Chessin. On the singularities of single-valued and generally analytic functions. Annals of Math. **11**, 52-56.

Die Function $f(z)$ sei in einem Gebiete (D) der z-Ebene eindeutig und „im allgemeinen“ analytisch, d. h. es sei möglich, aus dem Gebiete (D) die Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$, deren Summe $\Sigma\sigma_i$ unter einer beliebig kleinen vorgeschriebenen Grösse liegt, auszuscheiden so, dass in dem übrig bleibenden Gebiete $f(z)$ analytisch ist. Wenn dann überdies $f(z)$ im ganzen Gebiete (D) endlich und stetig ist, so ist $f(z)$ auch im ganzen Gebiete (D) analytisch. Der Beweis, welchen der Verf. für diesen grundlegenden Satz giebt, ist kurz folgender: Unter den gemachten Voraussetzungen ist $F(z) = \int_{z_1}^{z} f(z)dz$ im Gebiete (D) zufolge des Green'schen Theorems analytisch, und folglich auch $F'(z) = f(z)$. Hz.

A. S. Chessin. On a point of the theory of functions. American J. **18**, 98.

Der Verf. lenkt die Aufmerksamkeit auf einen besonderen Fall, in dem die Frage, ob eine nicht gleichmässig convergente Reihe eine discontinuirliche Function darstellen kann, durch die bisherigen Feststellungen noch nicht erledigt ist. Hr.

F. Gerbaldi. Sulle serie di funzioni analitiche. Revue de Math. **6**, 24-30.

Historische Studie über die Frage, wann die Summe einer unendlichen Reihe, deren Glieder analytische Functionen sind, eine ebensolche Function darstellt, und wann eine solche Reihe gliedweise differentiirt, resp. gliedweise integrirt werden darf. Hz.

W. H. Echols. On the expansion of a function without use of derivatives. Annals of Math. **10**, 17-21.

Es handelt sich um Entwickelungen einer Function einer reellen Veränderlichen, bei welchen die Entwickelungs-Coefficienten nicht durch Differentiation, sondern durch Integration gewonnen werden. Setzt man allgemein $\int\limits_n f(x) = \int\limits_a^x dx \int\limits_{n-1} f(x)$ und $\int\limits_0 f(x) = f(x)$; so ist beispielsweise

$$f(x) = \sum_{r=0}^{n} A_r \frac{(-1)^r}{r!}\left(\frac{x-a}{c-a}\right)^r + \frac{(c-a)^{n+1}}{(n+1)!}\theta f^{(n+1)}(u)$$

$(0 < \theta < 1,\ a < u < c)$, wenn $f(x)$ und seine Ableitungen in dem Intervalle $a \leqq x \leqq c$ stetig sind.

Der Coefficient A_r hat den Wert

$$A_r = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{\Delta(r,p)}{\Delta} \cdot \frac{\int_p f(c)}{(c-a)^p},$$ und es ist $\Delta(r,p)$ die Unterdeterminante von

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{0!}, & \frac{1}{1!}, & \dots, & \frac{1}{n!} \\ \frac{1}{1!}, & \frac{1}{2!}, & \dots, & \frac{1}{(n+1)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n!}, & \frac{1}{(n+1)!}, & \dots, & \frac{1}{(2n)!} \end{vmatrix},$$

welche durch Streichung der $r$ten Colonne und der $p$ten Zeile entsteht. Hz.

S. Pincherle. Della validità effettiva di alcuni sviluppi in serie di funzioni. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{5}_1$, 27-33.

Der Gedanke, welcher dem Mittag-Leffler'schen Satze zu Grunde liegt, besteht darin, die Convergenz einer Summe von rationalen Functionen durch geeignete, diesen Functionen zugefügte Zusatzglieder zu bewirken, ohne den Charakter der Functionen, welcher in ihren Unstetigkeitspunkten zu erblicken ist, zu stören. Ein ähnlicher Gedanke lässt sich bei manchen anderen Summen anwenden, eine Bemerkung, welche der Verfasser in der vorliegenden Note an dem Beispiel der Summe

(1) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n \varphi}{dx^n}$$

illustrirt. Diese Summe genügt formal der Gleichung

(2) $$f - \frac{df}{dx} = \varphi,$$

convergirt indessen nur für besondere Wahl der Function φ. Eine nähere Untersuchung der Reihen von der Gestalt $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x) \frac{d^n \varphi}{dx^n}$ zeigt nun, dass durch eine solche Reihe für jede Wahl von φ eine Constante dargestellt wird, wenn man $\lambda_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a_{n-k} x^k$ setzt, wobei $a_0, a_1, a_2, \ldots$ beliebig anzunehmende Constanten bedeuten. Hieraus folgt, dass die Reihe

(3) $$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n \varphi}{dx^n} (1 + \lambda_n(x) e^x)$$

formal ebenfalls der Gleichung (2) genügt. Ueberdies convergirt nun aber die Reihe S für jede in der Umgebung von $x = 0$ reguläre Function $\varphi(x)$, falls man $a_n = -n!$, also

$$\lambda_n(x) = -1 + x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - + \cdots \pm \frac{x^n}{n!}$$

wählt. Hz.

E. Fabry. Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **13**, 367-399.

Die Abhandlung knüpft an Untersuchungen von Hadamard an, über welche in F. d. M. **24**, 359, 1892 berichtet wurde. Von der Thatsache ausgehend, dass der Convergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ der reciproke Wert der oberen Unbestimmtheitsgrenze der Wertmenge $|a_1|$, $\sqrt{|a_2|}$, $\sqrt[3]{|a_3|}$, ..., $\sqrt[n]{|a_n|}$, ... ist, beweist der Verf. zunächst folgenden Satz:

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit dem Convergenzradius 1. Ferner mögen λ, t zwei feste reelle Grössen bezeichnen, welche der Bedingung $0 < \lambda < t < 1$ genügen. Endlich seien m, p, ν positive ganze Zahlen, die gleichzeitig ins Unendliche wachsen, und zwar derart, dass stets $\nu \geqq \lambda m$ und $\lim p/mt = 1$ ist. Bildet man nun die Function $\varphi_m(t) = \sum_{k=-\nu}^{\nu} a_{m+k} t^k \cdot \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(m+k+1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(p+k+1)}$, so ist die obere

Unbestimmtheitsgrenze von $\sqrt[m]{|\varphi_m(t)|}$ kleiner als 1, falls $z=1$ kein singulärer Punkt der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ist.

Wenn also die genannte Unbestimmtheitsgrenze $=1$ ist, so wird $z=1$ sicher singulärer Punkt sein. — Der Verf. verallgemeinert diesen Satz noch weiter und zeigt, dass derselbe sich unter gewissen Einschränkungen auch umkehren lässt. Auf Grund dieser Ergebnisse gelingt es nun, sehr allgemeine Beispiele von solchen Potenzreihen zu bilden, die jeden Punkt ihres Convergenzkreises zum singulären Punkt haben und daher keine analytische Fortsetzung besitzen. Als besonders einfaches Beispiel heben wir das folgende hervor: Hat die Potenzreihe $\sum a_\nu z^{c_\nu}$ einen endlichen Convergenzradius, so gestattet sie keine Fortsetzung, wenn $c_{\nu+1}-c_\nu$ mit ν über alle Grenzen wächst. — Am Schluss bemerkt der Verf., dass wahrscheinlich „die allgemeinsten Potenzreihen diejenigen seien, welche eine Fortsetzung nicht besitzen.“ Hz.

F. G. Teixeira. Sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable. J. für Math. **116**, 14-32.

Die Curve $|\sin z| = c$ besteht, wenn $c \leqq 1$ ist, aus unendlich vielen congruenten Ovalen, die sich um die Punkte $z=0, \pm\pi, \pm 2\pi$, ... herumlegen. Ist $f(x)$ im Innern eines solchen Ovales holomorph, so lässt sich nach bekannten Principien $f(x)$ in eine Potenzreihe der Gestalt (1) $f(x) = A_0 + A_1 \sin x + A_2 \sin^2 x + \cdots + A_n \sin^n x + \cdots$ entwickeln, wobei (2) $A_n = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)\cos z\, dz}{\sin^{n+1} z} = \frac{1}{2ni\pi}\int \frac{f'(z)dz}{\sin^n z}$ ist, die Integrale durch die Kontur s des betreffenden Ovales erstreckt. Liegt der Punkt $z=m\pi$ im Innern des Ovales, so ergiebt sich für die Coefficienten A_n die Darstellung

$$(3)\begin{cases} A_0 = f(m\pi), \\ A_{2n} = \dfrac{1}{2n!} f^2(m\pi)[f^2(m\pi)+2^2]\dots[f^2(m\pi)+(2n-2)^2], \\ A_{2n+1} = \dfrac{(-1)^m}{(2n+1)!} f(m\pi)[f^2(m\pi)+1^2]\dots[f^2(m\pi)+(2n-1)^2], \end{cases}$$

wobei nach Ausführung der Multiplicationen die Potenzen von $f(m\pi)$ durch die entsprechenden Ableitungen, also allgemein $[f(m\pi)]^k$ durch $f^{(k)}(m\pi)$, zu ersetzen sind.

Ist $c>1$, so setzt sich die Curve $|\sin z| = c$ aus zwei symmetrisch zur Axe der reellen Zahlen gelegenen unendlichen Aesten zusammen, die einen Streifen der z-Ebene von endlicher Breite begrenzen. Ist die Function $f(x)$ in diesem Streifen holomorph und überdies $f(x+2\pi) = f(x)$, so zeigt der Verf. durch Betrachtung des Integrales

$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\sin(z+x)dz}{\sin z - \sin x}$, dass die Function $f(x)$ in folgender Form entwickelbar ist: $f(x) = A_0 + A_1 \sin x + \cdots + A_n \sin^n x + \cdots + \cos x[B_1 + B_2 \sin x + \cdots + B_n \sin^{n-1} x + \cdots]$. Für die Entwickelungscoefficienten gelten ähnliche Darstellungen, wie sie bei der Entwickelung (1) durch die Formeln (2) und (3) gegeben sind.

Die Anwendung dieser Resultate auf die elliptischen Functionen $f(x) = \operatorname{sn}\frac{2Kx}{\pi}$, $f(x) = \operatorname{sn}\frac{2K}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ beschliesst die Abhandlung. Hz.

F. G. Teixeira. Sur le développement de x^k en série ordonnée suivant les puissances du sinus de la variable. Nouv. Ann. (3) **15,** 270-274.

Im J. für Math. **116** hat sich der Verf. mit den Entwickelungen von x^{2m} und x^{2m+1} nach Potenzen von $\sin x$ beschäftigt. (Vgl. vorstehendes Referat.) Die vorliegende Arbeit giebt für die dort aufgestellten Entwickelungen einen neuen Beweis, welcher auf den Schluss von n auf $n+1$ gegründet ist. Hz.

Hamy. Note sur la série de Lagrange. Darboux Bull. (2) **20,** 213-216.

Wenn längs der geschlossenen Kontur S, welche den Punkt $z=a$ umgiebt, die Ungleichung $\left|\frac{\alpha f(z)}{z-a}\right| < 1$ erfüllt ist, so hat die Gleichung von Lagrange $F(z) \equiv z - a - \alpha f(z) = 0$ eine einzige Lösung $z=\zeta$ im Innern der Kontur S. Ist nun $\Pi(z)$ eine Function, die im Innern von S, abgesehen vom Punkte $z=a$, holomorph ist und den Punkt $z=a$ zum Pol von der Ordnung p besitzt, so ergiebt sich aus der Betrachtung des Begrenzungs-Integrales $\int \frac{\Pi(z)dz}{F(z)}$ die Entwickelung von $\frac{\Pi(\zeta)}{1-\alpha f'(\zeta)}$ nach aufsteigenden Potenzen von α. Diese Entwickelung geht für $p=0$ in die Reihe von Lagrange über. Hz.

E. Delassus. Sur les séries de puissances et les fonctions majorantes. Darboux Bull. (2) **20,** 73-80.

Ist $f(x,y) = \Sigma a_{ik}(x-x_0)^i(y-y_0)^k$ $(i, k = 0, 1, 2, \ldots)$ eine in der Umgebung des Punktes $m_0(x_0, y_0)$ absolut convergirende Reihe, so heisst die Reihe $\varphi(\xi, \eta) = \Sigma \alpha_{ik}(\xi-\xi_0)^i(\eta-\eta_0)^k$, welche in der Umgebung des Punktes $\mu_0(\xi_0, \eta_0)$ als absolut convergent und deren Coefficienten α_{ik} als positiv vorausgesetzt werden, eine Majorante der Reihe $f(x,y)$, wenn allgemein $\alpha_{ik} \geqq |a_{ik}|$ ist. Nach Poincaré wird

diese Beziehung zwischen den Functionen f und φ kurz durch die Schreibweise (1) $f(x, y)_{m_0} < \varphi(\xi, \eta)_{\mu_0}$ angedeutet. Besteht diese Beziehung, wenn m_0 eine beliebige Lage in dem Gebiete r der (x, y)-Ebene und μ_0 eine beliebige Lage in dem Gebiete ϱ der (ξ, η)-Ebene besitzt, so schreibt man (2) $f(x, y)_r < \varphi(\xi, \eta)_\varrho$. Die Beziehung (2) setzt natürlich voraus, dass $f(x, y)$ und $\varphi(\xi, \eta)$ in den Gebieten r, bez. ϱ analytische Functionen der reellen Veränderlichen (x, y), resp. (ξ, η) sind. Wenn nun (1) gilt, so ist es nicht unter allen Umständen möglich, ein Gebiet r um m_0 und ein Gebiet ϱ um μ_0 so abzugrenzen, dass für diese Gebiete (2) stattfindet. Dagegen kann man, falls $f(x, y)$ in einem ein Gebiet r einschliessenden Gebiete R analytisch ist, die Function $\varphi(\xi, \eta)$ und das Gebiet ϱ stets so bestimmen, dass die Beziehung (2) besteht. Der Nachweis dieser Sätze bildet den Hauptinhalt der vorliegenden Note. Hz.

E. Study. Ueber eine besondere Klasse von Functionen einer reellen Veränderlichen. Math. Ann. **47**, 298-316.

Es sei $f(x)$ eine für das Intervall $a \leqq x \leqq b$ definirte reelle Function. Das genannte Intervall werde in eine endliche Zahl an einander stossender Teilintervalle $\delta_i = x_{i+1} - x_i$ zerlegt, und es bezeichne $\varDelta_i$ die Schwankung von $f(x)$ im Intervalle δ_i (d. i. die Differenz der oberen und unteren Grenze der Functionswerte in diesem Intervalle), während $D_i = |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$ gesetzt werde. Wenn nun für jede Teilung des Intervalles $a \dots b$ die Summe $\varSigma D_i$, erstreckt über alle Teilintervalle δ_i, unter einer festen endlichen Schranke liegt, so nennt C. Jordan die Function $f(x)$ „à variation bornée". Auf diese Functionen „mit beschränkter Schwankung" bezieht sich die vorliegende Abhandlung. Der Verf. geht bei seiner Untersuchung von einer anderen Definition der behandelten Functionsklasse aus, als C. Jordan. Statt $\varSigma D_i$ betrachtet er die Schwankungssummen $\varSigma \varDelta_i$. Wenn diese für irgend eine Folge von Teilungen, deren Intervalle δ_i schliesslich alle unendlich klein werden, eine endliche obere Grenze haben, so besitzen sämtliche Schwankungssummen eine obere Grenze M, und $f(x)$ heisst eine Function „mit beschränkter Schwankung." Die Uebereinstimmung dieser Definition mit der von C. Jordan ergiebt sich im Verlauf der Untersuchung und geht übrigens aus den Sätzen von C. Jordan leicht hervor. Von den interessanten Resultaten, zu welchen der Verf. gelangt, können wir hier nur einige namhaft machen, da dieselben der Natur der Sache nach zumeist eine sorgfältige und weitläufige Formulirung erfordern. Es sei μ die untere Grenze der unteren Unbestimmtheitsgrenzen, welche zu den Schwankungssummen der verschiedenen Folgen von Intervallteilungen gehören. Dann ist $2\mu \geqq M$. Für die betrachteten Functionen existiren immer die Grenzwerte $f(x+0)$ und $f(x-0)$. Wenn nun für einen bestimmten Wert von x der Functionswert $f(x)$ ausserhalb des Intervalls $f(x-0) \dots f(x+0)$ fällt, so sagt der Verf., $f(x)$ besitze an der Stelle einen „äusseren Sprung", dessen Grösse durch die kleinere der

beiden Differenzen $|f(x)-f(x+0)|$ und $|f(x)-f(x-0)|$ gemessen wird. Es gilt dann der Satz: Die Differenz $M-\mu$ ist die Summe aller äusseren Sprünge der Function $f(x)$. Wird diese Grösse Null, so nähern sich die Schwankungssummen, die irgend einer Folge von Intervallteilungen mit schliesslich unendlich klein werdenden Intervallen entsprechen, unbegrenzt der Grösse M, welche dann „Gesamtschwankung" von $f(x)$ heisst. Gegen diese Gesamtschwankung convergiren dann auch die Summen ΣD_i gleichmässig. — Die Anwendung der entwickelten Sätze auf die Rectificirbarkeit der Curven und einige Erörterungen über die hierbei in Frage kommenden Begriffe beschliessen die Abhandlung.

Hz.

E. H. Moore. Concerning transcendentally transcendental functions. Math. Ann. **48**, 49-74.

Ist $\mathfrak{R}\{x\}$ ein functioneller Rationalitätsbereich, d. h. ein System von unendlich vielen Functionen von x, in welchem die Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division (abgesehen von der Division durch 0) unbeschränkt ausführbar sind, so heisst eine Function $\varphi(x)$ bekanntlich algebraisch oder transcendent bezüglich $\mathfrak{R}\{x\}$, je nachdem sie einer algebraischen Gleichung mit in $\mathfrak{R}\{x\}$ liegenden Coefficienten genügt oder nicht. Der Verf. teilt nun die transcendenten Functionen wieder in zwei Kategorien ein, die er als „algebraical transcendental" und „transcendentally transcendental" functions unterscheidet. Die ersteren Functionen genügen einer algebraischen Differentialgleichung mit in $\mathfrak{R}\{x\}$ liegenden Coefficienten, die letzteren Functionen genügen keiner solchen Differentialgleichung. Nach einigen grundlegenden allgemeinen Sätzen welche diese und einige weitere damit zusammenhängende Begriffsbildungen betreffen, beweist der Verf. insbesondere folgenden Satz:

„Die (nur für $|x|<1$ existirende) Function $\varphi(x)=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} x^{a^\nu}$ (a eine ganze Zahl >1) genügt keiner algebraischen Differentialgleichung, deren Coefficienten rational in x und $\log x$ sind."

Die wesentliche Grundlage des Beweises bildet die Thatsache, dass $\varphi(x)$ der Functionalgleichung $\varphi(x^a)=\varphi(x)-x$ genügt. In dem letzten Teil seiner Abhandlung giebt der Verf. einen neuen Beweis für den Hölder'schen Satz, dem zufolge die Γ-Function keiner algebraischen Differentialgleichung genügt, deren Coefficienten rationale Functionen sind.

Hz.

A. Köpcke. Eine Function mit Symmetrien in jedem Intervall. Hamb. Mitt. **3**, 258-263.

Der Verf. weist in der vorliegenden Arbeit an einem Beispiele die Existenz von stetigen Functionen $\Omega(x)$ einer reellen Variable x nach, welche in jedem Intervalle Symmetriepunkte x_n besizt, d. h. solche Punkte, für welche die Beziehung $\Omega(x_n+\delta)=\Omega(x_n-\delta)$ gilt, so lange δ unterhalb einer gewissen Grenze δ_n liegt. Bedeutet $[x]$ den positiv

genommenen Unterschied zwischen x und der zunächst gelegenen ganzen Zahl, so stellt sich das vom Verfasser angegebene Beispiel durch folgende Summe dar: $\Omega(x) = [x] + \frac{[2x+\frac{1}{2}]}{2} + \sum_{r=0}^{\infty} \omega_r(x)$, wobei zur Abkürzung $\omega_r(x) = \sum_{n=2^{2r+1}+1}^{2^{2r+2}} \frac{[n!x]}{n!} + \sum_{n=2^{2r+2}+1}^{2^{2r+3}} \frac{[n!x+\frac{1}{2}]}{n!}$ gesetzt worden ist. Hz.

E. Picard. Sur une classe de fonctions transcendantes. C. R. **123**, 1035-1037.

Die Note betrifft dieselben Transcendenten, welche der Verf. in einer früheren Arbeit (vgl. F. d. M. **25**, 713, 1893/94) behandelt hat. Der Nachweis der Existenz dieser Transcendenten gelang hier nur nach Ausschluss eines gewissen Falles, während der Verf. in der vorliegenden Note zeigt, dass dieser Nachweis auch in dem Ausnahmefalle leicht geführt werden kann. Hz.

M. Petrovitch. Sur les résidus des fonctions définies par les équations différentielles. Math. Ann. **48**, 75-80.

In seiner Thèse de doctorat, Paris 1894, hat der Verf. die Bedingungen dafür aufgestellt, dass das allgemeine Integral einer algebraischen Differentialgleichung (1) $F = \sum_{i=1}^{s} \varphi_i(x) y^{m_i} y'^{n_i} = 0$ Pole von der Ordnung λ besitzt, die mit der Integrationsconstante veränderlich sind. Man markire in einer Ebene die Punkte, deren rechtwinklige Coordinaten ξ, η die Werte $\xi_i = m_i + n_i$, $\eta_i = n_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ besitzen, und verbinde die der η-Axe nächstliegenden mit den von der η-Axe am weitesten abliegenden dieser Punkte durch einen polygonalen Linienzug, der die Punkte (ξ_i, η_i) teils als Ecken enthält, teils unter sich lässt. Die erwähnte Bedingung ist dann die, dass dieser Linienzug eine Seite mit dem Richtungscoefficienten $-\lambda$ enthält. Ist $\lambda = 1$, so wird die Entwickelung von y an dem betreffenden Pole die Gestalt besitzen $y = \frac{A}{x-a} + \mathfrak{P}(x-a)$, und es handelt sich nun darum, den Wert von A direct aus der Gleichung (1) zu bestimmen. Hierfür findet der Verf. folgende Vorschrift: Man bilde die Gleichung $\Sigma_i (-1)^{n_i} \varphi_i(a) A^{m_i+n_i} = 0$, wo die Summation nur auf diejenigen Indices i auszudehnen ist, deren entsprechende Punkte (ξ_i, η_i) der Seite des polygonalen Linienzuges angehören, welche den Richtungscoefficienten -1 besitzt. Dann ist der gesuchte Wert A eine von Null verschiedene Wurzel dieser Gleichung.

Der Verf. erläutert diesen Satz an einigen Beispielen und hebt besonders hervor, dass derselbe zur Berechnung der Residuen von doppeltperiodischen Functionen gute Dienste leistet. Hz.

V. Volterra. Sulla inversione degli integrali definiti. Rom. Acc. L. Rend. (5) **5**$_1$, 177-185.

V. Volterra. Sulla inversione degli integrali multipli. Rom. Acc. L. Rend. (5) **5**$_2$, 289-300.

V. Volterra. Sull'inversione degli integrali definiti. Torino Atti **31**, 311-323, 400-408, 557-567, 693-708.

Die Grundlage für die durch ihre Allgemeinheit bemerkenswerten Untersuchungen des Verfassers über die Umkehrung bestimmter Integrale bildet der folgende Satz:

Die Variabeln x, y seien auf das Intervall $\alpha \dots \beta$ eingeschränkt, $S(x, y)$ sei eine endliche und stetige Function derselben. Man setze nun

$$S_0(x, y) = S(x, y), \quad S_i(x, y) = \int_y^x S_{i-1}(x, \xi) S_0(\xi, y) d\xi$$

($i = 1, 2, 3, \dots$); dann sind auch die Functionen $S_1(x, y)$, $S_2(x, y)$, ... endlich und stetig, und die Summe $-\sum_0^\infty S_i(x, y)$ convergirt im Bereiche der Variabeln x, y gleichmässig und stellt also ebenfalls eine endliche und stetige Function vor. Diese werde, da sie durch einen bestimmten Process aus $S(x, y)$ hergeleitet ist, mit $\Phi[S(x, y)]$ bezeichnet, wo Φ als Operationssymbol zu betrachten ist. Dann gelten die Gleichungen

$$(1) \quad \Phi[\Phi[S(x,y)]] = S(x,y), \quad \int_y^x S(x,\xi) . T(\xi,y) d\xi = S(x,y) + T(x,y),$$

wobei zur Abkürzung $\Phi[S(x, y)] = T(x, y)$ gesetzt ist.

Für die Functionen $S_i(x, y)$ gilt noch die Thatsache, dass für jeden zwischen 0 und $i+1$ liegenden Index j

$$S_i(x, y) = \int_y^x S_{i-j}(x, \xi) S_{j-1}(\xi, y) d\xi$$

ist. — Aus der zweiten Gleichung (1) folgt nun leicht:

Bezeichnet $\varphi(y)$ eine endliche und stetige Function, so giebt es eine einzige ebenfalls endliche und stetige Function $f(y)$, welche der Gleichung (A) $\varphi(y) = f(y) + \int_\alpha^y f(x) S(x, y) dx \quad (\beta > y > \alpha)$ genügt, und zwar ist dieselbe durch die Formel

$$(\mathrm{A}') \qquad f(y) = \varphi(y) + \int_\alpha^y \varphi(x) T(x, y) dx$$

gegeben. Ist nun die Aufgabe vorgelegt, das Integral

$$(2) \qquad \theta(y) - \theta(\alpha) = \int_\alpha^y \psi(x) H(x, y) dx$$

umzukehren, d. h. $\psi(x)$ aus der vorstehenden Gleichung zu bestimmen, während $\theta(y)$, $H(x, y)$ gegeben sind, so ergiebt die Differentiation nach y und nachherige Division mit $H(y, y) = h(y)$:

$$\frac{\theta'(y)}{h(y)} = \psi(y) + \int_a^y \psi(x) \left\{ \frac{1}{h(y)} \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \right\} dx,$$

eine Gleichung, welche die Gestalt (A) besitzt. Es ist also vermöge (A') die Bestimmung von $\psi(x)$ unmittelbar gegeben, wobei allerdings vorausgesetzt werden muss, dass $h(y) = H(y, y)$ im Intervalle $\alpha \dots \beta$ endlich und von Null verschieden bleibt. Die Gleichung (2) kann übrigens auch durch Einführung der Function $\Psi(y) = \int_a^y \psi(x) dx$ und partielle Integration auf der rechten Seite von (2) auf die Form (A) gebracht werden. Der Fall, in welchem $H(y, y)$ Null oder unendlich wird im Intervalle $\alpha \dots \beta$, erfordert eingehendere Untersuchungen. In dieser Hinsicht hat der Verf. (unter 3)) insbesondere die Gleichung

$$(3) \qquad f(y) = \int_0^y \varphi(x) H(x, y) dx, \quad a > y > 0$$

unter folgenden Voraussetzungen behandelt: Es ist

$$f(y) = y^{n+1} f_1(y), \quad H(x, y) = \sum_0^n a_i x^i y^{n-i} + \sum_0^{n+1} x^i y^{n+1-i} L_i(x, y),$$

wo die a_i Constanten sind und $f_1(y)$, $L_i(x, y)$ und ihre nach y genommenen Ableitungen endlich und stetig in dem Intervalle $0 \dots a$ bleiben, während $h(y) = H(y, y)$ in diesem Intervalle nur für $y = 0$ verschwindet. Unter diesen Voraussetzungen findet der Verf. das merkwürdige Resultat, dass die Gleichung (3) dann durch eine, und nur durch eine, stetige Function $\varphi(x)$ befriedigt werden kann, wenn die Gleichung n^{ten} Grades in λ $\frac{a_0}{\lambda - 1} + \frac{a_1}{\lambda - 2} + \cdots + \frac{a_n}{\lambda - n - 1} = 0$ n endliche, von einander verschiedene Wurzeln besitzt, deren reelle Teile sämtlich positiv sind. Der Verf. hat die vorstehend besprochenen Untersuchungen auch auf die Umkehrung vielfacher Integrale (unter 2)), sowie auf die Umkehrung von mehreren simultan betrachteten, einfachen oder vielfachen Integralen ausgedehnt. Hz.

P. Painlevé. Sur l'inversion des systèmes de différentielles totales. C. R. **122**, 769-772.

Es handelt sich hier um eine Verallgemeinerung der Abel'schen Functionen, nämlich um die Umkehrung eines Systems von Gleichungen der Gestalt $J_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = u_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, wobei die linken Seiten Functionen bedeuten, deren partielle Ableitungen algebraische Functionen von $x_1, x_2, \dots, x_n$ sind. Der Verf. giebt nament-

lich an, unter welchen Bedingungen die Umkehrungsfunctionen ein Additionstheorem besitzen, und wann diese Functionen endlich-vieldeutig sind. Die Note enthält nur Resultate und keine Beweise. Hz.

P. Painlevé. Sur les fonctions uniformes définies par l'inversion de différentielles totales. C. R. **122**, 660-662.

Vollständige Aufzählung der Fälle, in welchen die Umkehrung der Gleichungen $Pdx + Qdy = du$, $P_1 dx + Q_1 dy = dv$ auf eindeutige Functionen von u und v führt. Dabei bedeuten P, Q, P_1, Q_1 algebraische Functionen von x, y, welche den Integrabilitätsbedingungen $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}$ genügen. Hz.

E. M. Lémeray. Sur les fonctions itératives et sur une nouvelle fonction. Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24**, 149-165.

Zuerst betrachtet der Verf. die Iteration der Functionen unter einem allgemeineren Gesichtspunkte und führt das Problem auf Lösungen von Gleichungen, auf Eliminationen und auf die Integration von Functionalgleichungen eines einzigen Typus: $\Xi\psi(w) = \psi\Xi(w)$ zurück. Den umgekehrten Process nennt er den der „Desiteration". Ueber die successiven Iterationen und Desiterationen enthält der § II einige allgemeine Sätze. Die fundamentalen Algorithmen des § III sind die Grundoperationen der Arithmetik von verschiedenen Stufen, in grösster Ausdehnung definirt. Hierbei werden dann die Superpotenz, die superexponentiale Function und der Hyperlogarithmus sowie die Superradix eingeführt. Dies ist die im Titel als neu bezeichnete Function, von der am Schlusse eine Anwendung auf die Integration einer Differentialgleichung gemacht wird. Lp.

A. Grévy. Étude sur les équations fonctionnelles. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **13**, 295-338.

Der Verf. setzt hier seine Untersuchungen über Functionalgleichungen fort. (Vgl. F. d. M. **25**, 671, 1893/94). Die Function $\varphi(z)$ sei holomorph in der Umgebung der Punkte $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$, und die Substitution $[z, \varphi(z)]$ führe diese Punkte cyklisch in einander über. Beschränkt man dann z auf die Umgebung von x_0, so werden sich $z_1 = \varphi(z)$, $z_2 = \varphi(z_1) = \varphi_2(z)$, $\dots$, $z_{k-1} = \varphi(z_{k-2}) = \varphi_{k-1}(z)$ in der Umgebung der Punkte $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ bezüglich befinden. Es handelt sich nun darum, die Functionalgleichung $p_0(z)f(z) + p_1(z)f(z_1) + \dots + p_n(z)f(z_n) = 0$ aufzulösen, in welcher $p_0(z), p_1(z), \dots, p_n(z)$ gegebene Functionen, $f(z)$ eine zu bestimmende Function bezeichnet. Die Lösung geschieht durch eine Reduction auf den Fall $k = 1$, welcher durch die früheren Arbeiten des Verf. direct erledigt ist.

Den allgemeinen Untersuchungen fügt der Verf. eine grössere Zahl von geometrischen Anwendungen seiner Theorie hinzu. Zur Kennzeich-

nung ihrer Art führen wir die folgenden beiden Fragen, mit denen sich der Verf. beispielsweise beschäftigt, an:

Welches sind diejenigen Curven, bei welchen die Ordinaten von n Punkten jedesmal eine vorgeschriebene lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten befriedigen, wenn die zugehörigen Abscissen eine geometrische Progression mit gegebenen Quotienten bilden?

Auf einer ebenen Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt nimmt man einen Punkt an. Wann nähern sich die successiven (vorwärts oder rückwärts genommenen) Tangentialpunkte dieses Punktes einem bestimmten Grenzpunkte? Hz.

M. Cantor. Functionalgleichungen mit drei von einander unabhängigen Veränderlichen. Schlömilch Z. **41,** 161-163.

Während eine grössere Anzahl von Functionalgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen behandelt ist, sind wohl noch keine Beispiele für Functionalgleichungen mit drei oder mehr von einander unabhängigen Veränderlichen gegeben. Der Verf. teilt die folgenden zwei Beispiele für drei Veränderliche mit, welche er mit Hülfe der Differentialrechnung löst.

1. Der Gleichung: $\varphi(x, y)+\varphi(y, z) = \varphi(x, z)$ genügt allein die Function: $\varphi(x, z) = \psi(x)-\psi(z)$, so dass also die einzige Lösung ist: $[\psi(x)-\psi(y)]+[\psi(y)-\psi(z)] = [\psi(x)-\psi(z)]$.

2. Die Gleichung: $\varphi(x, y)\,.\,\varphi(y, z) = \varphi(x, z)$ wird nur durch die Function: $\varphi(x, z) = \psi(x)/\psi(z)$ befriedigt und hat mithin die einzige Lösung: $\psi(x)/\psi(y)\cdot\psi(y)/\psi(z) = \psi(x)/\psi(z)$. Hau.

S. Pincherle. Sopra alcune equazioni simboliche. Bologna Mem. (5) **5,** 663-675.

Bezeichnen A, B, C, ... Functionaloperationen, so soll die Gleichung $\alpha A+\beta B+\gamma C+\cdots = 0$, in welcher α, β, γ, ... bestimmte Functionen bedeuten, die Thatsache ausdrücken, dass für jede Wahl der Function φ die Function $\alpha A(\varphi)+\beta B(\varphi)+\gamma C(\varphi)+\cdots$ identisch verschwindet. Die Aufgabe, mit der sich der Verf. in vorliegender Arbeit beschäftigt, lautet nun: Man soll die distributive Functionaloperation A so bestimmen, dass sie der Gleichung (1) $\lambda_0 A^{(n)}+\lambda_1 A^{(n-1)}+\cdots+\lambda_{n-1}A'+\lambda_n A = 0$ genügt. Hier bedeuten λ_0, λ_1, ..., λ_{n-1}, λ_n gegebene Functionen der Variable x und A', A'', ..., $A^{(n)}$ die successiven Ableitungen der Operation A. (Vgl. in Betreff der hier verwendeten technischen Ausdrücke F. d. M. **26,** 433, 1895).

Die Lösung dieser Aufgabe bietet die vollkommenste Analogie dar zur Lösung der linearen homogenen Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten. Der vorgelegten Gleichung (1) hat man nämlich die „charakteristische“ Gleichung (2) $f(z) \equiv \lambda_0(z-x)^n+\lambda_1(z-x)^{n-1}+\cdots+\lambda_{n-1}(z-x)+\lambda_n = 0$ zuzuordnen. Sind $z=\alpha_1(x)$, $z=\alpha_2(x)$, ..., $z=\alpha_n(x)$ die Wurzeln dieser Gleichung, und werden dieselben zunächst von einander verschieden vorausgesetzt, so ist die allgemeinste Lösung

der Gleichung (1) die folgende: $A = \gamma_1 S_{a_1(x)} + \gamma_2 S_{a_2(x)} + \cdots + \gamma_n S_{a_n(x)}$. Dabei bezeichnen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ willkürliche Functionen und $S_{a(x)}$ diejenige Functionaloperation, welche allgemein $\varphi(x)$ in $\varphi(\alpha(x))$ überführt. Finden sich unter den Wurzeln der charakteristischen Gleichung (2) einander gleiche, so modificirt sich die Lösung. Ist z. B. $\alpha_1(x) = \alpha_2(x) = \cdots = \alpha_r(x) = \alpha(x)$, so treten an die Stelle der Operationen $S_{a_1(x)}, S_{a_2(x)}, \ldots, S_{a_r(x)}$ die Operationen $S_{a(x)}, S_{a(x)}D, S_{a(x)}D^2, \ldots, S_{a(x)}D^{r-1}$, wo D die Operation der Derivation ($D\varphi(x) = \varphi'(x)$) bedeutet. An den Beweis dieser Sätze knüpft der Verf. noch einige Bemerkungen über die Operationen der Gestalt

$$E = \sum_{i=1}^{r} (\gamma_{i,0} S_{a_i} + \gamma_{i,1} S_{a_i} D + \gamma_{i,2} S_{a_i} D^2 + \cdots + \gamma_{i,k_i} S_{a_i} D^{k_i}),$$

deren Gesamtheit einen gegenüber der Addition, Multiplication und functionaler Derivation invarianten Operationsbereich bildet. Hz.

S. Pincherle. Operazioni distributive: l'integrazione successiva. Rom. Acc. L. Rend. (5) **5**$_1$, 236-242.

Reihenentwickelungen nach den Differentialquotienten und nach den wiederholten Integralen einer willkürlichen Potenzreihe. Bdt.

S. Pincherle. Operazioni distributive: le equazioni differenziali lineari non omogenee. Rom. Acc. L. Rend. (5) **5**$_1$, 301-306.

Anwendung der Resultate der vorhergehenden Arbeit auf die Entwickelung des Hauptintegrals einer linearen Differentialgleichung mit zweitem Glied. Bdt.

E. Pascal. Funzioni olomorfe nel campo ellittico (estensione di un celebre teorema di Weierstrass). Rom. Acc. L. Rend. (5) **5**$_1$, 319-323.

Aufstellung von Functionen, die auf einer Riemann'schen Fläche vom Geschlechte 1 überall regulär sind, abgesehen von einer wesentlich singulären Stelle. Bdt.

G. Koenigs. Sur un théorème de Kronecker. Journ. de Math. (5) **2**, 41-49.

Es seien F_1, F_2, F_3 drei Functionen von x, y, z, die in einem Bereiche des Raumes eindeutig und stetig sind. Ferner werde zur Abkürzung gesetzt:

$$\begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ F_1, & \frac{\partial F_1}{\partial x}, & \frac{\partial F_1}{\partial y}, & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ F_2, & \frac{\partial F_2}{\partial x}, & \frac{\partial F_2}{\partial y}, & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ F_3, & \frac{\partial F_3}{\partial x}, & \frac{\partial F_3}{\partial y}, & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{vmatrix} = u_1 \Delta + u_2 X + u_3 Y + u_4 Z,$$

wobei u_1, u_2, u_3, u_4 Unbestimmte bedeuten. Die allgemeinste Lösung M der Gleichung $\frac{\partial(MX)}{\partial x} + \frac{\partial(MY)}{\partial y} + \frac{\partial(MZ)}{\partial z} = 0$ ist dann eine beliebige homogene Function des Grades -3 von F_1, F_2, F_3. Das Integral $J = \iint M(X dy dz + Y dz dx + Z dx dy)$ verschwindet, wenn dasselbe über eine geschlossene Fläche S erstreckt wird, in deren Innern sich kein Unstetigkeitspunkt findet. Es bezeichne nun P eine homogene Function dritten Grades von F_1, F_2, F_3, die im Innern einer geschlossenen Fläche S nur in den Punkten verschwindet, wo gleichzeitig $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$ ist. Die Functionaldeterminante Δ sei in diesen Punkten von Null verschieden und besitze in p dieser Punkte einen positiven, in n einen negativen Wert. Dann besteht die Gleichung

$$\iint_S \frac{X dy dz + Y dz dx + Z dx dy}{P} = \alpha(p-n),$$

wo α den Wert des Integrales

$$\iint \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{P(x, y, z)}$$

bedeutet, letzteres erstreckt über die Oberfläche einer den Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ umgebenden Kugel. Die vorstehende Gleichung enthält die Verallgemeinerung eines Satzes von Kronecker. Dieser Satz selbst entspricht der speciellen Annahme $P = (F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^{\frac{3}{2}}$. Hz.

O. Biermann. Ueber Functionen zweier reellen Variabeln. Math. Ann. **48**, 393-400.

Die Arbeit knüpft an eine Abhandlung von A. Pringsheim an, welche Functionen $f(t)$ einer reellen Variable t betrifft, die endliche Differentialquotienten jeder Ordnung besitzen, aber nicht nach dem Taylor'schen Satze entwickelbar sind. Dem von Pringsheim eingeschlagenen Wege folgend, bildet der Verf. Functionen zweier reellen Variabeln t_1, t_2, welche an keiner Stelle eines endlichen Bereiches durch eine Taylor'sche Reihe darstellbar sind, aber an jeder Stelle des Bereiches endliche partielle Ableitungen jeder Ordnung besitzen. Wenn es dem Verf. nur darum zu thun war (was in der That der Fall zu sein scheint), derartige Functionen von t_1, t_2 wirklich herzustellen, so hätte er übrigens seine Arbeit auf zwei Zeilen beschränken können. Denn sind $f(t)$ und $\varphi(t)$ Functionen der reellen Veränderlichen t mit der oben erwähnten Eigenschaft, so ist offenbar $\psi(t_1, t_2) = f(t_1) \cdot \varphi(t_2)$ eine Function von t_1, t_2, wie sie der Verf. zu haben wünscht. Hz.

H. Grönwall. Ueber Integrale algebraischer Differentialausdrücke von mehreren Veränderlichen. Stockh. Öfv. **53**, 67-72.

Bei algebraischen Functionen von zwei unabhängigen Veränderlichen gilt, wie Picard gezeigt hat, der Satz, dass, wenn $\int(Pdx+Qdy)$ und $\int(P'dx+Q'dy)$ Integrale erster Gattung sind, das Doppelintegral $\iint(PQ'-P'Q)dxdy$ ebenfalls der ersten Gattung angehört. Der Verf. weist nach, dass auch für Functionen von mehreren (n) Veränderlichen ein ähnlicher Satz gilt: wenn ein r-faches und ein s-faches Integral erster Gattung gegeben sind, wo $r+s\leqq n$, so kann man stets aus ihnen in einfacher Weise ein $(r+s)$-faches Integral erster Gattung bilden. Bdn.

E. Borel. Sur les fonctions de deux variables réelles. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **13**, 79-94.

Der Verf. beweist in der vorliegenden Arbeit einen Satz, welchen er schon in C. R. **121**, mitgeteilt hatte (vgl. F. d. M. **26**, 456, 1895). Der Satz bezieht sich auf Functionen zweier reellen Variabeln x, y und lässt sich kurz folgendermassen aussprechen. Es bezeichne $\varphi_{\alpha\beta}$ eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten der neun Producte, die durch Multiplication jeder der Functionen x^α, $\sin\pi\alpha x$, $\cos\pi\alpha x$ in jede der Functionen y^β, $\sin\pi\beta y$, $\cos\pi\beta y$ entstehen. Ferner sei $f(x, y)$ eine Function, welche in dem Bereiche $-1\leqq x\leqq 1$, $-1\leqq y\leqq 1$ partielle Ableitungen aller Ordnungen besitzt. Dann lässt sich $f(x, y)$ in eine Reihe der Gestalt $f(x, y)=\sum\limits_{\alpha=0}^{\infty}\sum\limits_{\beta=0}^{\infty}\varphi_{\alpha\beta}$ entwickeln, die ebenso wie alle durch gliedweise Differentiationen aus ihr abgeleiteten Reihen in dem genannten Bereiche absolut und gleichmässig convergirt. Bedeutet $A_{\alpha\beta}$ irgend einen der neun Coefficienten von $\varphi_{\alpha\beta}$, so besteht überdies für alle Werte von p und q die Ungleichung $|\alpha^p\beta^q A_{\alpha\beta}|<m_{p,q}$, wo die Grössen $m_{p,q}$ von α und β unabhängig sind. Hz.

L. Autonne. Sur les pôles des fonctions uniformes à deux variables indépendantes. Palermo Rend. **10**, 196-228.

Sind x, y rechtwinkelige Coordinaten in einer Ebene, ξ_0, ξ_1, ..., ξ_N homogene Coordinaten in einem Raume von N Dimensionen, so wird durch die Gleichungen $\varrho\xi_j=F_j(x, y)$ $(j=0, 1, \dots, N)$, in welchen ϱ einen Proportionalitätsfactor bezeichnet und $F_j(x, y)$ in der Umgebung von $x=0$, $y=0$ holomorphe Functionen von x und y sind, eine gewisse Umgebung der Stelle $x=0$, $y=0$ der Ebene abgebildet auf ein zweifach ausgedehntes Continuum des Raumes von N Dimensionen. Wenn nun die Functionen F_j sämtlich für $x=0$, $y=0$ verschwinden, so wird im allgemeinen der Stelle $x=0$, $y=0$ selbst kein bestimmter

Punkt $\mathfrak{x}_j$ entsprechen, und es entsteht die Frage, wie das Bild der Stelle $x = 0$, $y = 0$ beschaffen ist. Diese Frage wird in der vorliegenden Abhandlung durch eine gründliche Untersuchung erledigt. Die Hauptresultate, zu welchen der Verf. gelangt, sind folgende: Wenn man (x, y) auf bestimmtem Wege in den Coordinatenanfangspunkt hineinrücken lässt, so wird, allgemein zu reden, der entsprechende Punkt $\mathfrak{x}_j$ eine bestimmte Grenzlage erreichen. Die Gesamtheit dieser Grenzlagen bildet eine gewisse Zahl von unicursalen Curven. Betrachtet man die zu kleinen Werten von x gehörigen kleinen Werte von y, welche eine der Gleichungen $F_j(x, y) = 0$ befriedigen, so lassen sich dieselben nach gebrochenen Potenzen von x entwickeln und zerfallen dem entsprechend in „Cyklen“, wie dies aus der Theorie der algebraischen Curven bekannt ist. Die erwähnten unicursalen Curven sind nun gewissen Systemen derartiger Cyklen zugeordnet und durch diese in einfacher Weise bestimmt. Von den erhaltenen Resultaten macht der Verf. Anwendungen auf die Cremona-Transformationen der Ebene, indem er genau das Verhalten eines Fundamentalpunktes von beliebiger Singularität feststellt.

Hz.

H. Poincaré. La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. Acta Math. **20**, 59-142.

Versteht man unter einer „harmonischen Function“ eine Function V der reellen Variabeln x, y, z, die mit ihren Ableitungen endlich und stetig ist, im Unendlichen verschwindet und überdies der Laplace'schen Differentialgleichung $\Delta V = 0$ genügt, so lässt sich das Problem von Dirichlet so aussprechen:

Man soll eine Function bestimmen, die in einem gegebenen Gebiete harmonisch ist und auf der Begrenzung des Gebietes gegebene Werte annimmt.

Bei der Behandlung dieses Problems spielen bekanntlich die Potentiale von einfachen und Doppelbelegungen eine wichtige Rolle. Bezeichnen S eine geschlossene Fläche, x', y', z' die Coordinaten eines Punktes auf S, ferner μ' die Dichte in diesem Punkte, $d\omega'$ das Oberflächenelement, r die Entfernung der Punkte (x, y, z) und $(x', y' z')$, endlich $d\sigma'$ den räumlichen Winkel, unter welchem $d\omega'$ vom Punkte (x, y, z) aus erscheint, so sind $W = \int \frac{\mu' d\omega'}{r}$, bez. $W = \int \mu' d\sigma'$ die Definitionsgleichungen für die Potentiale einer einfachen, bez. einer Doppelbelegung. Diese Potentiale sind im ganzen Raume, abgesehen von den Punkten der Fläche S, harmonische Functionen. Im übrigen haben sie folgende charakteristische Eigenschaften: Man betrachte einen Punkt (x', y', z') auf S und bezeichne mit V, bez. V' die Werte, von W in einem im Innern von S, bez. ausserhalb S liegenden Punkte, der dem Punkte x', y', z' unendlich nahe liegt; ferner bezeichne entsprechend dV/dn, bez. dV'/dn die in denselben Punkten stattfindenden Werte von dW/dn (der nach der äusseren Normale n der Fläche S

genommenen Ableitung von W). Dann ist für das Potential einer einfachen Belegung: $V=V'$, $\frac{dV}{dn}=\frac{dV'}{dn}+4\pi\mu'$, dagegen für das Potential einer Doppelbelegung: $V=V'+4\pi\mu'$, $\frac{dV}{dn}=\frac{dV'}{dn}$.

Die Methode von Neumann zur Lösung des Dirichlet'schen Problems geht nun von folgender Aufgabe aus: Man soll auf der gegebenen Fläche S eine Doppelbelegung bestimmen, deren Potential der Gleichung (1) $V-V'=\lambda(V+V')+2\Phi$ genügt, wo Φ eine auf S gegebene Function bedeutet. Die Lösung dieser von Poincaré als „Neumann'sches Problem" bezeichneten Aufgabe giebt zugleich (indem man $\lambda=\pm 1$ annimmt) die Lösung des Dirichlet'schen Problems. Versucht man der Gleichung (1) durch den Ansatz (2) $W=W_0+\lambda W_1+\lambda^2 W_2+\cdots$ zu genügen, so ergeben sich für die Coefficienten W_0, W_1, W_2, ... die Bestimmungsgleichungen $V_0-V_0'=2\Phi$, $V_1-V_1'=V_0+V_0'$, $V_2-V_2'=V_1+V_1'$, ..., welche zeigen, dass W_0 das Potential einer Doppelbelegung von der Dichte $\Phi/2\pi$, W_1 dasjenige einer Doppelbelegung von der Dichte $(V_0+V_0')/4\pi$ u. s. w. ist. Man kann also successive die verschiedenen Terme der Reihe (2) bestimmen. Es bleibt nur die Frage, ob die Reihe convergirt. Für den Fall, wo S eine nirgends concave Fläche ist, hat Neumann bewiesen, dass bei geeigneter Wahl der Constante C die Reihe $(W_0-C)+\lambda(W_1-C)+\lambda^2(W_2-C)+\cdots$ convergirt, so lange $|\lambda|\leqq 1$, und hierdurch ist dann auch das Problem von Dirichlet erledigt.

Gilt der nämliche Convergenz-Satz auch dann noch, wenn S nicht convex ist? Dies zu entscheiden, ist der Zweck der vorliegenden Abhandlung. Der Verf. gelangt zu dem Resultate, dass die aufgeworfene Frage zu bejahen ist unter folgenden Voraussetzungen:

1) Die Fläche S ist einfach zusammenhängend.

2) Die Fläche hat in jedem Punkte eine Tangentialebene und zwei bestimmte Hauptkrümmungsradien.

3) Die gegebene Function Φ besitzt Ableitungen aller Ordnungen.

Der Beweis hierfür, welcher die ersten fünf Kapitel der Abhandlung einnimmt, stützt sich vornehmlich auf die Untersuchung der Integrale der Form

$$\int\left\{\frac{\partial W^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial W^{(2)}}{\partial x}+\frac{\partial W^{(1)}}{\partial y}\frac{\partial W^{(2)}}{\partial y}+\frac{\partial W^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial W^{(2)}}{\partial z}\right\}d\tau,$$

wo $W^{(1)}$, $W^{(2)}$ Potentiale (einfacher oder doppelter Belegungen) bedeuten und die Integration auf den inneren oder auf den äusseren von der Fläche S begrenzten Raum auszudehnen ist.

In dem sechsten Kapitel giebt der Verf. sehr interessante Entwickelungen, deren Richtigkeit er allerdings nicht streng nachzuweisen, sondern nur plausibel zu machen vermag. Diesen Entwickelungen zufolge giebt es zu jeder geschlossenen Fläche eine unendliche Reihe von „Fundamentalfunctionen", welche Potentiale einfacher Belegungen sind und durch

gewisse Eigenschaften charakterisirt sind, vermöge welcher jede willkürlich auf der Fläche gegebene Function nach diesen Fundamentalfunctionen entwickelbar ist. Ist die geschlossene Fläche eine Kugel, so fallen die Fundamentalfunctionen mit den Kugelfunctionen zusammen. Allgemein werden die Coefficienten in der Entwickelung einer willkürlichen Function nach den Fundamentalfunctionen durch bestimmte, über die geschlossene Fläche ausgedehnte Integrale dargestellt (ähnlich wie die Coefficienten in den Fourier'schen Reihen). Sind die Fundamentalfunctionen einer Fläche bekannt, so bietet die Lösung des Dirichlet'schen und Neumann'schen Problems für die betreffende Fläche keine Schwierigkeit. Die bei dieser Lösung erhaltenen Formeln werfen ein helles Licht auf die in den ersten fünf Kapiteln der Abhandlung verwendeten Betrachtungen. Im siebenten und letzten Kapitel beschäftigt sich endlich der Verf. mit dem Probleme von Robin. Dieses verlangt die Bestimmung einer einfachen Belegung, deren Potential die Bedingung

$$\frac{dV}{dn} - \frac{dV'}{dn} = \lambda\left(\frac{dV}{dn} + \frac{dV'}{dn}\right) + 2\Phi$$

befriedigt, wo die Zeichen die oben erklärte Bedeutung haben. Auf dieses Problem lassen sich analoge Betrachtungen anwenden, wie sie der Verf. für das Problem von Neumann durchgeführt hat. Hz.

D. A. Grave. Sur le problème de Dirichlet. Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24,** 111-136.

Der Verf. will einige allgemeine Regeln geben, um explicite Ausdrücke der Lösung des Dirichlet'schen Problems für gewisse gegebene algebraische Randcurven zu bilden. Zu diesem Behufe wird zuerst die folgende „complexe Transformation“ einer algebraischen Curve $f(x, y) = 0$ definirt. Setzt man $\xi_1 = x + iy$, $\xi_2 = x - iy$, also $x = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2)$, $iy = \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2)$, so folgt nach Einsetzung dieser Werte in $f(x, y)$ für x und y eine Gleichung in ξ_1, ξ_2, die, nach ξ_1 aufgelöst, $\xi_1 = F(\xi_2)$ ergebe; im allgemeinen hat F n verschiedene Werte, wenn n der Grad der Gleichung in ξ_1 war. Man betrachte eine complexe Grösse $\eta = F(x - yi) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = x_1 + iy_1$, so geben die Gleichungen $x_1 = \varphi(x, y)$, $y_1 = \psi(x, y)$ eine Transformation ebener Figuren. Der Punkt $N_1(x_1, y_1)$ heisst das Bild des Punktes $N(x, y)$. Betrachtet man alle n Wurzeln für ξ_1, so erhält man für jeden Punkt N der Ebene n complexe Bilder. Bei Anwendung dieser Transformation auf eine Gerade erhält man die bekannten Spiegelungen; auf den Kreis angewandt, ist sie die Methode der reciproken Radien.

Nach einem genaueren Studium der Haupteigenschaften dieser Transformation lehrt der Verf. ihre Anwendung auf das Dirichlet'sche Problem, also auf die Bestimmung einer Function u von x und y, die der Gleichung $\Delta u = 0$ genügt, mit ihren Ableitungen der beiden ersten Ordnungen eindeutig, endlich und stetig ist und für alle Punkte einer geschlossenen Randlinie vorgegebene Werte annimmt. Die Methode wird

zunächst an den beiden Fällen einer Geraden und eines Kreises erläutert, wobei der Verf. auf das Poisson'sche Integral kommt. Darauf werden Randcurven von einem beliebigen Geschlechte λ behandelt, mit Anwendung auf die gleichseitige Hyperbel und die Bernoulli'sche Lemniskate, wo die Lösungen durch die Methode der reciproken Radien auf einander zurückführbar sind. Die Methode besteht darin, dass man von dem Integrale

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} \frac{f(s)dz}{z-\xi_1} - \frac{1}{2\pi i}\int^{(C)} \frac{f(s)dz}{z-\eta},$$

erstreckt über die gegebene Randlinie (C), auf der die Function u die als Function des Bogens s gegebenen Werte $f(s)$ annimmt, den reellen Teil $K(J)$ beibehält. Dieser Teil ist die gesuchte Lösung. Bei eindeutiger complexer Transformation, d. h. für Kreis und Gerade, ist dieses die definitive Form der Lösung. Bei mehrdeutigen Transformationen, wie für gleichseitige Hyperbel und Lemniskate, wo diese Randcurven endliche Gruppen geben, ist für η jede der Wurzeln $\eta^{(x)}$ zu nehmen, und die λ somit sich aus dem zweiten Integrale in J ergebenden Integrale sind mit abwechselnden Vorzeichen zu versehen. Für Randcurven der dritten Gattung mit unendlicher Gruppe wird der einzuschlagende Weg zur Umgestaltung von J zunächst an dem Beispiele des Kreisquadranten gezeigt, dann aber für einen beliebigen Kegelschnitt, wobei längere Rechnungen erforderlich sind. Lp.

Le Roy. Sur le problème de Dirichlet et les fonctions harmoniques fondamentales attachées à une surface fermée. C. R. **123**, 986-988.

Wenn das Gebiet T durch eine endliche Zahl von regulären analytischen geschlossenen Flächen S begrenzt wird und die auf den Flächen S vorgeschriebene Function Φ Ableitungen aller Ordnungen besitzt, so lässt sich die innerhalb T harmonische Function, welche auf S mit Φ übereinstimmt, in Form einer Reihe herstellen. Es giebt nämlich, dem Gebiete T zugehörig, eine Reihe von Newton'schen Potentialen W_p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, welche die Relationen

$$\frac{\partial W_p}{\partial n_i} + \frac{\partial W_p}{\partial n_e} + \xi_p W_p = 0, \quad \int_{(S)} W_p^2 d\omega = 1, \quad \int_S W_p W_q d\omega = 0$$

befriedigen, wobei ξ_p positive, unbegrenzt wachsende Constanten bedeuten, n_i, n_e die Richtungen der inneren und äusseren Normalen von S bezeichnen. Offenbar ist $\Phi_1 = \Sigma A_p W_p$, wenn $A_p = \int_{(S)} \Phi W_p d\omega$ genommen wird, eine harmonische Function, die auf S mit Φ übereinstimmt, die Convergenz der Reihe vorausgesetzt. — Die Note enthält noch weitere Verallgemeinerungen dieses Ansatzes. Die Beweise (welche in der Note nicht gegeben werden) schliessen sich, wie der Verf. bemerkt, an die Methoden von Poincaré an. Hz.

Ch. A. Noble. **Lösung der Randwertaufgabe für eine ebene Randcurve mit stückweise stetig sich ändernder Tangente und ohne Spitzen.** Gött. Nachr. 1896, 191-198.

Sind die im Titel der Arbeit genannten Eigenschaften der Randcurve vorhanden, und ist überdies die Randcurve nirgends concav, so ergiebt bekanntlich die Neumann'sche Methode des arithmetischen Mittels die Lösung der Randwertaufgabe. Der Verf. befreit sich nun von der Voraussetzung, dass die Randcurve nirgends concav sei, indem er einerseits nach einer von Hilbert herrührenden Idee die Neumann'sche Configurationsconstante der Randcurve genauer bestimmt und andererseits das Schwarz-Neumann'sche alternirende Verfahren zu Hülfe zieht. Hz.

Zaremba. **Contribution à la théorie de la fonction de Green.** S. M. F. Bull. **24**, 19-24.

Der Beitrag ist folgender Satz. Sei $G(x, y, z, x', y', z')$ die Green'sche Function, bezüglich auf ein Gebiet D innerhalb einer geschlossenen convexen Fläche S von bestimmten Krümmungsradien in jedem ihrer Punkte. Bezeichne d die grösste Entfernung zweier Punkte auf S und a die untere Grenze der Krümmungsradien der Fläche S in einem variabeln Punkte. Dann ist das Integral

$$J = \iiint \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| dx'\, dy'\, dz'$$

über das ganze Gebiet D kleiner als eine Zahl N von folgenden Eigenschaften. Erstens hängt sie allein von der Fläche S ab. Zweitens verschwindet sie, wenn d verschwindet, während d/a nie eine feste Zahl überschreitet. — Dieser hier für drei unabhängige Variabeln aufgestellte und bewiesene Satz gilt ersichtlicherweise für beliebig viele und lässt sich nach gleicher Methode beweisen. H.

F. Lindemann. **Die analytische Fortsetzung derjenigen Functionen, welche das Innere eines Kegelschnitts conform auf die Halbebene abbilden.** Münch. Ber. **26**, 401-424.

Wird das Innere einer Ellipse conform auf die eine Halbebene abgebildet, so ergeben sich über beiden Halbebenen abwechselnd zweiblätterige Riemann'sche Flächen, denen je ein durch confocale Ellipsen begrenzter Ring entspricht. Die Fortsetzung der Abbildung des Hyperbelinnern auf eine Halbebene ergiebt im allgemeinen über jeder von beiden Ebenen unendlich viele Blätter. Bdt.

Larose. **Démonstration du théorème de M. Vaschy sur une distribution quelconque de vecteur.** S. M. F. Bull. **24**, 177-180.

E. Carvallo. **Généralisation et extension à l'espace du théorème des résidus de Cauchy.** Ibid. 180-184.

Der von Vaschy aufgestellte Satz (C. R. **116**, 1355; F. d. M. **25**,

1687, 1893/94) wird in der ersten Abhandlung mit Hamilton'scher, in der zweiten mit Grassmann'scher Symbolik bewiesen. Bdt.

E. Borel. Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Picard sur les fonctions entières. C. R. **122**, 1045-1048.

E. Picard. Remarques sur la communication de M. Borel. C. R. **122**, 1048.

Es handelt sich um den Satz, nach welchem eine ganze Function, welche zwei endliche Werte nicht annehmen kann, sich notwendig auf eine Constante reducirt. Der Satz lässt sich leicht auch in die andere Form bringen, dass eine Gleichung der Gestalt (1) $e^{G(z)}+e^{G_1(z)}=1$ nicht bestehen kann, wenn $G(z)$, $G_1(z)$ ganze Functionen bedeuten, welche sich nicht auf Constanten reduciren. Borel beweist die Unmöglichkeit der Gleichung (1), indem er die Werte z von ein und demselben absoluten Betrag $|z|=r$ betrachtet und die entsprechenden Maxima und Minima der absoluten Beträge und der reellen Teile von $G(z)$, $G_1(z)$ und $\log(G_1(z)-2ni\pi)$ abschätzt. Dabei bedeutet n eine ganze Zahl. Picard weist auf die allgemeineren Sätze hin, die er im Anschluss an den von Borel bewiesenen Satz aufgestellt hat, und spricht die Vermutung aus, dass es schwierig, wenn nicht unmöglich sein dürfte, auch diese elementar zu beweisen. Hz.

E. Borel. Sur l'extension aux fonctions entières d'une propriété importante des polynômes. C. R. **123**, 556-557.

Bezeichnen G_i und H_i Polynome, und reducirt sich keine der Differenzen H_i-H_j auf eine Constante, so kann eine Identität der Form $\sum_{i=1}^{i=n} G_i(z)e^{H_i(z)}=0$ nicht bestehen. Diesen Satz dehnt der Verf. auf den Fall aus, dass G_i, H_i transcendente ganze Functionen sind, welche gewissen Bedingungen genügen. Hz.

Hadamard. Sur les fonctions entières. S. M. F. Bull. **26**, 186-187.

Die Arbeit schliesst sich an die kürzlich im Journ. de Math. (4) **9**, 171-215 (F. d. M. **25**, 698, 1893/94) erschienene an; der Verf. nimmt aus derselben die Untersuchung der Beziehungen zwischen der Grössenfolge der Entwickelungscoefficienten einer ganzen Function und der Grössenfolge der Function für unendlich grosse Argumente wieder auf, um sie zu vereinfachen. H.

Hadamard. Sur les fonctions entières. (Extrait d'une lettre adressée à M. Picard). C. R. **122**, 1257-1258.

Sei $\Gamma(x)$ eine ganze Function von endlichem Geschlecht, $S(x)$ eine um den Nullpunkt reguläre Function. Dann lässt sich $\Gamma(x^{-1})+S(x)$ nur auf eine Weise als Summe zweier Functionen darstellen, von denen

die eine in der Umgebung von $x = 0$ nirgends 0 wird, die andere im Nullpunkt höchstens einen Pol hat. Bdt.

W. Weiss. Zum Noether'schen Fundamentalsatze der Theorie der algebraischen Functionen. Monatsh. f. Math. **7**, 321-324.

Sind $\varphi(s, z)$ und $f(s, z)$ zwei ganze Functionen, die in $s = 0$, $z = 0$ bezw. einen r-fachen und k-fachen Punkt mit getrennten Tangenten haben, und hat $F(s, z)$ dort einen r-fachen Punkt und mit jedem Zweig von φ noch $k-1$ weitere Punkte gemein, so sind die auf diesen Punkt bezüglichen Bedingungen für die Darstellbarkeit von F in der Form $A\varphi + Bf$ erfüllt. Bdt.

F. de Brun. Till teorien för algebraiska funktioner. Stockh. Öfv. **58**, 315-322.

Die Weierstrass'sche Theorie für die Transformation algebraischer, irreductibler Gleichungen $f(x, y) = 0$ auf Normaltypen will der Verf. durch eine in gewisser Hinsicht vollständigere Beweisführung ergänzen. Die Sache kommt darauf hinaus, nachzuweisen, dass eine gewisse Determinante, deren Elemente Functionen $H(a, b)_{ik}$ sind, sich niemals mittels der Gleichung $f(a, b) = 0$ auf eine Constante reduciren lässt. Bdn.

K. Hensel. Ueber den grössten gemeinsamen Teiler aller Zahlen, welche durch eine ganze Function von n Veränderlichen darstellbar sind. J. für Math. **116**, 350-356.

Die rationale ganze Function $\overline{U}_i(u) = u(u-1)\dots(u-i+1)$ erhält für jeden ganzzahligen Wert von u einen durch $i!$ teilbaren Wert. Jede ganzzahlige rationale ganze Function $F(u)$ lässt sich eindeutig in der Form $A_0 + A_1\overline{U}_1 + \dots + A_n\overline{U}_n$ darstellen, in der die $A_0, \dots, A_n$ ganze Zahlen bedeuten; sind dabei alle Producte $i!A_i$ durch eine ganze Zahl Q teilbar, dann, und nur dann, ist Q Teiler aller durch $F(u)$ darstellbaren Zahlen. Diese Sätze werden auf n Variabeln verallgemeinert. Auch werden Vereinfachungen angegeben, die auf Grund des Fermat'schen Satzes eintreten, wenn es sich nur um Teilbarkeit durch die Potenzen einer bestimmten Primzahl handelt.

Bdt.

K. Hensel. Ueber die Darstellung der Integrale erster Gattung durch ein Fundamentalsystem. J. für Math. **117**, 29-41.

Die „Formen erster Gattung“ charakterisirt der Verf. dadurch, dass ihr Teiler eine gebrochene Wurzelfunction ist, in der aber alle negativen Exponenten echte Brüche sind. Er beweist, dass man für diese Formen, wie für die ganzen Formen, Fundamentalsysteme $\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_n$ aufstellen kann, durch die jede solche Form in der Gestalt $\bar{\eta} = u_1\bar{\eta}_1 + \dots + u_n\bar{\eta}_n$ sich darstellen lässt, mit rationalen ganzen Formen als Coeffi-

cienten; dabei ist jedes Fundamentalsystem der Formen erster Gattung reciprok zu einem Fundamentalsystem der ganzen Formen, und umgekehrt. Es wird dann noch ein einfaches Verfahren angegeben, um aus den Elementarteilern eines beliebig gegebenen algebraischen Systems die Elementarteiler der Fundamentalsysteme beider Arten zu finden, und zur wirklichen Bestimmung der zu einer binomischen Gleichung gehörenden Integrale erster Gattung benutzt. Bdt.

K. Hensel. Ueber die Reduction algebraischer Systeme auf die kanonische Form. J. für Math. **117,** 129-139.

Der Verf. hatte früher (J. für Math. **115;** F. d. M. **26,** 449, 1895) den Satz bewiesen: „Jedes algebraische System kann in ein äquivalentes kanonisches transformirt werden, wenn man sich auf die Untersuchung einer einzigen Stelle $x=a$ beschränkt.“ Jetzt zeigt er, dass diese Beschränkung nicht erforderlich ist, dass man vielmehr äquivalente Systeme angeben kann, die gleichzeitig für jede Stelle kanonisch sind. Durch diesen Satz ist in der arithmetischen Theorie der algebraischen Functionen ein wesentlicher Fortschritt über den Punkt hinaus erreicht, bis zu dem Kronecker gelangt war. Bdt.

K. Fischer. Ueber kanonische Systeme algebraischer Functionen einer Veränderlichen, die einem Gattungsbereich dritter oder vierter Ordnung angehören. J. für Math. **117,** 1-23; auch Diss. Berlin.

Auf Grund der von Hensel angegebenen Vorschriften werden Fundamentalsysteme für die durch die Gleichungen: $y^3+f_2(x)y-f_3(x)=0$, bezw. $y^4+f_2(x)y^2-f_3(x)y+f_4(x)=0$ definirten Gattungen algebraischer Functionen wirklich aufgestellt. Bdt.

L. Baur. Zur Theorie der algebraischen Functionen. J. für Math. **116,** 167-170.

Die Aufstellung eines Fundamentalsystems für eine Gattung algebraischer Functionen wird durch die Bemerkung vereinfacht, dass man dabei nur auf mehrfache Factoren der Discriminante zu achten braucht. Bdt.

M. Petrovitch. Sur les fonctions symétriques et périodiques des diverses déterminations d'une fonction algébrique. Darboux Bull. (2) **20,** 108-114.

Sei $F(z)$ eine meromorphe periodische Function, $y_1, y_2, \dots, y_m$ die m Zweige einer m-wertigen algebraischen Function von x; dann entwickelt Verf. die Summe: $F(y_1)+F(y_2)+\cdots+F(y_m)$ in eine Reihe, deren Glieder rationale Functionen von x sind. Bdt.

E. Vessiot. Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions algébriques. Toulouse Ann. **10** D, 1-14.

I. Beweis des Satzes: Jede ebene algebraische Curve kann birational

in eine andere transformirt werden, die keine anderen vielfachen Punkte als gewöhnliche Punkte mit getrennten Tangenten hat. Verf. bedient sich dazu der Transformation: $\xi = x$, $\eta = dy/dx$, die birational ist, wenn bestimmte specielle Lagen des Coordinatensystems ausgeschlossen sind.

II. Geometrische Anwendungen des Abel'schen Theorems, sowohl mit adjungirten, als mit nicht adjungirten Curven.

III. Ein-m-deutige Beziehung zweier Curven auf einander; Ableitung des Poincaré'schen Satzes: wenn unter den p Integralen ersten Grades, die zu einer Curve vom Geschlechte p gehören, ϖ sich auf das Geschlecht ϖ reduciren lassen, so existirt ein complementäres System von $p-\varpi$ Integralen, die sich auf das Geschlecht $p-\varpi$ reduciren. Bdt.

J. C. Marx. **Over de ontbinding in priemfuncties van geheele transcendentale functies.** Utrecht 1896, 128 S. Inauguraldissertation.

Zerlegung einer transcendenten ganzen Function in Primfunctionen nach den Methoden von Weierstrass, Mittag-Leffler und Frenzel. Geschlecht einer Function. Bestimmung des exponentiellen Factors.

Mo.

P. Hoyer. **Partialbruchzerlegung rationaler Functionen eines algebraischen Gebildes zweier Veränderlichen.** Math. Ann. 47, 113-120.

Verf. denkt sich aus einem algebraischen Gebilde (x, y) eine Anzahl Stellen ausgeschieden und bezeichnet dann als „Partialbruchformen“ solche rationalen Functionen von x und y, die in dem übrigen Gebiete höchstens an einer Stelle unendlich gross werden. Er führt ihre Bestimmung auf die Auflösung linearer Gleichungen zurück, deren Unabhängigkeit und Verträglichkeit in jedem speciellen Falle untersucht werden muss. Bdt.

P. Hoyer. **Ueber Riemann'sche Flächen mit beschränkt veränderlichen Verzweigungspunkten.** Math. Ann. 47, 47-71.

Anwendung früherer Untersuchungen des Verfassers „Ueber den Zusammenhang in Reihen“ (Math. Ann. 42; F. d. M. 25, 695, 1893/94) auf die Untersuchung des Zusammenhanges Riemann'scher Flächen.

Bdt.

E. Ritter. **Ueber Riemann'sche Formenscharen auf einem beliebigen algebraischen Gebilde.** Math. Ann. 47, 157-219.

Die Abhandlung knüpft an Riemann's Arbeit über die P-Function an, sowie an dessen nachgelassenes Fragment „Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten.“ Demzufolge werden als gegeben angesehen: 1) ein bestimmtes algebraisches Gebilde vom Geschlechte p und auf diesem eine endliche Anzahl von singulären Punkten e_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$; 2) $2p$ lineare homogene Substitutionen A_k, B_k von n Variabeln, welche bestimmten $2p$ unabhängigen

Periodenwegen, und s ebensolche Substitutionen S_i, die den Umkreisungen der singulären Punkte entsprechen; 3) im Einklang mit den Substitutionscoefficienten, die Exponenten λ_{ik} der Schar in jedem Punkte.

Wie in früheren Arbeiten des Verfassers (Math. Ann. **44**; F. d. M. **25**, 1893/94, 723) werden vor allem homogene Variabeln eingeführt, also statt der Functionenscharen Formenscharen betrachtet. Eine solche besitzt in jeder von den e_i verschiedenen Stelle ganzzahlige Exponenten, von denen keine zwei einander gleich sind; sind sie 0, 1, 2, ..., $n-1$, so heisst die Stelle eine gewöhnliche, andernfalls ein Nebenpunkt. Es wird vorausgesetzt, dass die Anzahl der Nebenpunkte endlich sei, und in jedem die Exponenten endliche Werte haben; dann besteht zwischen den Exponenten der singulären und der Nebenpunkte eine Relation, in der noch das Geschlecht p des algebraischen Gebildes und der (in den multiplicativen Primformen gemessene) Grad δ der Formenschar auftritt (§ 2).

Zwei Formenscharen heissen „verwandt" oder „zur selben Klasse gehörig", wenn ihre entsprechenden Substitutionen sich höchstens um simultane Multiplicationen aller Zweige mit Constanten unterscheiden. Durch Multiplication mit Producten multiplicativer Primformen kann man erreichen, dass solche Constanten höchstens bei den A_k, B_k auftreten. Dann kann man, wenn n Formenscharen Π', Π'', ..., $\Pi^{(n)}$ der Klasse so ausgewählt sind, dass die Determinante $\Pi_h^{(k)}$ nicht identisch 0 ist, jede Formenschar der Klasse in der Gestalt darstellen: $\Pi = \Sigma\varphi_k\Pi^{(k)}$, in der die φ_k unverzweigte multiplicative Formen bedeuten; daraus folgt, dass jede solche Formenschar einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung genügt, deren Coefficienten algebraische Formen des Gebildes sind (§ 3).

Was unter einer „ganzen Formenschar" zu verstehen sei, wird S. 164 durch eine willkürliche Festsetzung von Normalexponenten für die singulären Punkte fixirt; dann gelten Sätze, die als Verallgemeinerungen des Brill-Noether'schen und des Riemann-Roch'schen Satzes in der Theorie der algebraischen Functionen anzusehen sind (§ 9). Hierauf wird eine „Elementarformenschar erster Art" $A^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$ als eine solche definirt, die in z_1, z_2 wie in x_1, x_2 homogen ist, als Function von z_1, z_2 ausser an gewissen festen Stellen b nur für $z = x$ unendlich wird, und zwar so, dass nur der k^{te} Zweig $A_k^{(k)}$ mit dem Coefficienten 1 unendlich wird, die übrigen Zweige endlich bleiben (§ 11). Die Zweige A_k', A_k'', ..., $A_k^{(n)}$ bilden dann zusammen, als Functionen von z_1, z_2 betrachtet, eine Elementarformenschar „zweiter Art" für die zu der zuerst betrachteten „reciproke" Formenschar, im allgemeinen ohne selbst zu ihr zu gehören (§ 12). In § 13 wird dann noch eine Normirung der Elementarscharen durchgeführt.

Eine Note der Annalenredaction teilt mit, dass der Verf. am 23. September 1895 verstorben ist; ausführlicherer Nekrolog: Deutsche Math. Ver. **4**, 52. Bdt.

R. Fricke. **Notiz über die Discontinuität gewisser Collineationsgruppen.** Math. Ann. **47**, 557-563.

Es giebt bekanntlich ∞^3 reelle Collineationen einer einteiligen C_2 (Ellipse) in sich. Eine in dieser Gruppe enthaltene Untergruppe ohne infinitesimale Substitutionen ist im Innern der Ellipse eigentlich discontinuirlich. Ist sie es auf der Curve nicht, so ist sie es auch ausserhalb nirgends; ist sie es aber auch auf der Curve, so wird es notwendig, die projective Ebene mit F. Klein (Math. Ann. **7**, 550, 1874; F. d. M. **6**, 307, 1874) als eine Doppelfläche aufzufassen. Man erhält so als Discontinuitätsbereich ausserhalb der Ellipse ein von einem Ellipsenbogen und den Tangenten in seinen Endpunkten begrenztes Zweieck, von dem freilich noch unendlich viele gerade Strecken auszunehmen sind.

Bdt.

R. Fricke. **Ueber die Theorie der automorphen Modulgruppen.** Gött. Nachr. 1896, 91-101.

Im Anschluss an seine Note in den Gött. Nachr. 1895, 360 (F. d. M. **26**, 465, 1895) untersucht der Verf. die Transformationen der kanonischen Polygone, die dem Uebergang von einem kanonischen Polygon der geschlossenen Riemann'schen Fläche zu einem anderen entsprechen. Bei jeder solchen Transformation erfährt das System der Moduln des Polygons eine rationale und rational umkehrbare Transformation; man erhält so Gruppen birationaler Transformationen, die zu den Gruppen linearer Transformationen ebenso stehen, wie die „elliptische Modulgruppe" zur „doppeltperiodischen Gruppe". Einige specielle Ausführungen für den Fall ($p = 1$, $n = 1$) schliessen die Note.

Bdt.

A. Astor. **Sur le nombre des périodes d'une fonction uniforme.** Nouv. Ann. (3) **15**, 227-232.

Der Hülfssatz, auf welchen Jacobi den Satz stützt, dass eine einförmige Function einer Variable nicht zwei Perioden haben kann, deren Verhältnis reell ist, und nicht mehr als zwei Perioden, deren Verhältnis imaginär ist, wird hier verallgemeinert und folgendermassen aufgestellt und bewiesen: Sind $n-1$ lineare Functionen von n Variabeln gegeben, so kann man jede Function besonders durch Systeme variabler ganzer Werte, die nicht alle zugleich verschwinden, nach absolutem Werte kleiner machen als eine beliebig gegebene Grösse.

H.

S. Lie. **Die Theorie der Translationsflächen und das Abel'sche Theorem.** Leipz. Ber. **48**, 1896, 141-198.

In der Einleitung erklärt der Verf. zunächst den Begriff Translationsfläche (vgl. F. d. M. **24**, 745, 1892) und giebt dann ein ausführliches Verzeichnis seiner bisherigen Abhandlungen über Translationsflächen. Die Arbeit selbst, der noch eine zweite folgen soll, zerfällt in sieben Kapitel. Das erste enthält aus den Jahren 1869-70 stammende Entwickelungen über Flächen, die in unendlich vielen Weisen als Translationsflächen auf-

gefasst werden können. In Kap. II wird gezeigt, dass die Transformation: $\mathfrak{x} = \lg x$, $\mathfrak{y} = \lg y$, $\mathfrak{z} = \lg z$ die Flächen zweiter Ordnung $Axy + Byz + Czx + Dz + Ex + Fy = 0$ $(A, B, C, D, E, F \neq 0)$ in Flächen verwandelt, die in vierfacher Weise als Translationsflächen aufgefasst werden können. Sodann wird der Begriff einer q-fach ausgedehnten Translationsmannigfaltigkeit des R_n aufgestellt, und es wird die Aufgabe formulirt, für $q = n - 1$ alle derartigen Mannigfaltigkeiten zu bestimmen, die sich in mehrfacher Weise als Translationsmannigfaltigkeiten auffassen lassen. Die Erledigung dieser Aufgabe, die der Verf. für $n = 3$ schon 1882 ausgeführt und für beliebiges n bereits 1892 skizzirt hatte, wird jetzt in den folgenden Kapiteln zunächst wieder für $n = 3$ gegeben, aber wesentlich einfacher als 1882. Die Vereinfachung ist eine Folge der ausdrücklichen Verwendung des Abel'schen Theorems, dessen Zusammenhang mit der Aufgabe der Verf. erst 1891-92 bemerkt hat. Der Verf. beginnt damit, dass er zeigt, wie das Abel'sche Theorem über die zu einer ebenen Curve vierter Ordnung gehörigen Integrale erster Gattung unmittelbar solche Flächen des gewöhnlichen Raumes liefert, die in vier oder in ∞^1 Weisen durch Translation einer Curve erzeugt werden können. Soweit das Kap. III. In Kap. IV wird sodann das Problem, alle derartigen Flächen zu bestimmen, analytisch formulirt, und in Kap. V wird die Aufgabe für abwickelbare Flächen erledigt, was nur auf die Cylinderflächen führt. In Kap. VI werden die Flächen bestimmt, die sich auf drei Weisen durch Translation ebener Curven erzeugen lassen, und es ergiebt sich, dass jede solche Fläche sich auf sechs Weisen durch Translation einer ebenen Curve längs einer anderen ebenen Curve erzeugen lässt. In Kap. VII endlich wird das allgemeine Problem erledigt. Es handelt sich dabei um die Bedingungen dafür, dass zwei in r, s, t lineare homogene partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die in ganz bestimmter Weise aus den Gleichungen von vier ebenen Curven gebildet sind, gemeinsame nicht abwickelbare Integralflächen besitzen. Als notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ergiebt sich die, dass die vier Curven Zweige einer algebraischen Curve vierter Ordnung sein müssen. Gerade bei der Begründung dieses Satzes bewirkt die Zuziehung des Abel'schen Theorems eine wesentliche Vereinfachung, und zwar ergiebt sich, dass durch die Flächen, die das Abel'sche Theorem liefert, alle nicht abwickelbaren Flächen erschöpft werden, die in mehr als zwei Weisen als Translationsflächen aufgefasst werden können. Von besonderem Interesse ist die rein analytische Formulirung dieses Ergebnisses: Liefern drei Gleichungen $\varphi_k = f_{k1}(t_1) + f_{k2}(t_2) + f_{k3}(t_3) + f_{k4}(t_4) = 0$ $(k = 1, 2, 3)$ nur zwei unabhängige Relationen zwischen $t_1, \ldots, t_4$, und enthält keine dieser Relationen nur zwei Argumente, so besteht entweder zwischen den φ_k eine Relation: $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + a_3\varphi_3 = 0$ mit constanten Coefficienten a_1, a_2, a_3, oder die f_{ki} sind Abel'sche Integrale, die zu einer Curve vierter Ordnung gehören, und die Gleichungen $\varphi_k = 0$ sind einfach der Ausdruck des Abel'schen Theorems. El.

S. KEMPINSKI. Ueber Fuchs'sche Functionen zweier Variabeln. Math. Ann. **47**, 573-578.

Fuchs hat 1880 in zwei Noten (Gött. Nachr.), dann in demselben Jahre in der Abhandlung: „Ueber eine Klasse von Functionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale von Lösungen linearer Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten entstehen" (Journ. für Math. **89**, 1880; F. d. M. **12**, 241-243, 1880) und endlich 1881 in einer Note (ebenda **90**, 1881) gewisse eindeutige Functionen zweier Variabeln auf Grund zweier Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten in ganz analoger Weise definirt, wie die Abel'schen Functionen auf Grund der algebraischen gebildet werden. Für diese Functionen, welche der Verf. Fuchs'sche Functionen zweier Variabeln nennt, im Gegensatz zu den gewöhnlichen Fuchs'schen Functionen, die einen speciellen Fall der allgemeinen automorphen Functionen bilden, hat Fuchs die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ihre Eindeutigkeit anzugeben versucht. Da aber sowohl in den angeführten Arbeiten, als auch in der 1890 erschienenen Inauguraldissertation von Lohnstein: „Ueber lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung etc." ein wichtiger Fall unerörtert geblieben ist, untersucht der Verf. die ganze Frage nach diesen Bedingungen noch einmal und kommt zu folgendem Schlusse: „Die Bedingungen von Fuchs, welche sich auf Functionen zweier Variabeln beziehen, die ihre Entstehung den Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten verdanken, sind notwendig und hinreichend. Es existiren aber nur einige Fälle solcher Differentialgleichungen, welche alle durch Heranziehung der doppelt-periodischen Functionen erledigt werden und bis auf einen Fall schon von Fuchs in der zweiten Note der Göttinger Nachrichten angeführt worden sind." Bm.

F. BAGNERA. Sul teorema dell'esistenza delle funzioni Fuchsiane. Revue de Math. **6**, 31-34.

Gleichmässige Convergenz der Poincaré'schen Thetareihen, auch bezüglich der Substitutionscoefficienten. Bdt.

Weitere Litteratur.

N. W. BUGAIEW. Die Methode der successiven Annäherungen. Seine Anwendungen auf die Entwickelung der Functionen in stetige Reihen. Mosk. Math. Samml. **48**, 471-507. (Russisch.)

Bericht auf S. 70 dieses Bandes.

C. BURALI-FORTI. Sur quelques propriétés des ensembles d'ensembles et leurs applications à la limite d'un ensemble variable. Math. Ann. **47**, 20-32.

Die Arbeit ist in der Logikschrift von Peano geschrieben. Lp.

CELS. Note sur les fonctions implicites. Rev. de Math. spéc. **6**, 300-302.

P. COUSIN. Sur les fonctions d'une variable complexe admettant des singularités de nature quelconque. Grenoble Ann. **7,** 225-238 (1895).

J. CLERK MAXWELL. Análisis armonico. Archivo de Mat. **1,** 92-97.

Artikel aus der Encyclopaedia Britannica **11,** 481, ins Spanische übersetzt. Tx. (Lp.)

H. DURÈGE. Elements of the theory of functions of a complex variable, with special reference to the methods of Riemann. Authorized translation from the fourth German edition by G. E. Fischer and J. J. Schwatt. Philadelphia. 288 S. [Nature **54,** 101].

G. FLOQUET. Sur certaines fonctions à trois déterminations considérées comme solutions d'une équation différentielle linéaire. Nancy: Berger-Levrault. 11 S. 8°.

A. MARKOW. Neue Theoreme zu den analytischen Functionen. St. Pétersb. Mém. 50 S. gr. 4°. (Russisch.)

FR. ROGEL. Die Entwickelung nach Bernoulli'schen Functionen. Prag. Ber. 1896, No. 31. 48 S.

FR. ROGEL. Note zur Entwickelung nach Euler'schen Functionen. Prag. Ber. 1896, No. 43. 11 S.

SCHATUNOWSKY. Beweis der Existenz der transcendenten Zahlen (nach G. Cantor). Spaczinski's Bote. No. 233. (Russisch.)

Kapitel 2.
Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen (einschliesslich der Gammafunctionen und der hypergeometrischen Reihen).

F. MERTENS. Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π. Wien. Ber. **105,** 839-855.

Der Verf. giebt hier eine Bearbeitung der Beweise für die Transcendenz von e und π und für den Lindemann'schen Satz, welche nur von einfachen algebraischen Sätzen, dagegen nicht von zahlentheoretischen Hülfsmitteln Gebrauch macht. Dem entsprechend benutzt der Verf. bei seinen Beweisen wesentlich die in Weierstrass' bekannter Abhandlung entwickelten Hülfssätze, welche er indessen auf elementarem Wege (ohne Benutzung der Integrale) ableitet. Im einzelnen bietet die Arbeit mancherlei Interessantes. So wird von den Ausdrücken $F(e)$, $F(\pi)$, $A_1 e^{\xi_1} + A_2 e^{\xi_2} + \cdots + A_q e^{\xi_q}$, (wo $F(x)$ eine ganze ganzzahlige Function, $A_1, \ldots, A_q, \xi_1, \ldots, \xi_q$ algebraische Zahlen bezeichnen) nicht nur bewiesen, dass dieselben von Null verschieden sind, sondern auch gezeigt, dass die absoluten Beträge jener Ausdrücke angebbare Grenzen übersteigen.

Hz.

M. Laporte. Simple contribution à l'étude des fonctions additives. Théorème inédit et applications à propos des systèmes additifs équivalents. Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24**, 63-69.

Unter „additiven äquivalenten Systemen" werden Additionsgruppen ganzer Zahlen verstanden, deren Summationsbetrag derselbe ist, obgleich, wenn man zwei beliebige dieser Additionen betrachtet, man in jeder wenigstens zwei verschiedene Zahlen antrifft. Es handelt sich übrigens nur um die Aequivalenz, welche aus den in den verticalen Columnen vorgenommenen Permutationen hervorgeht, falls Ziffern derselben Ordnung in ihnen vorkommen. Folgender Satz wird bewiesen: Jede Addition aus N Zahlen von je M Ziffern liefert $(1.2.3\ldots N)^{M-1}$ äquivalente Systeme mit Wiederholung und nur N^{M-1} ohne Wiederholung. Lp.

A. Tagiuri. Di una nuova formula per calcolare la somma delle potenze simili dei numeri naturali. Periodico di Mat. **11**, 45-47.

Aus der Gleichung $n^k = n.n^{k-1} = n^{k-1}+n^{k-1}+\cdots+n^{k-1}$ leitet der Verf. durch Einsetzung von 1, 2, 3, ..., n und Summation die Formel ab: $\sigma_{k,n} = n\sigma_{k-1,n} - \Sigma\sigma_{k-1,s}$ $(s=1, 2, \ldots, n-1)$, wo $\sigma_{k,n} = \Sigma x^k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ gesetzt ist. Hieraus findet er recurrente Beziehungen zur Lösung der Aufgabe. Lp.

De Tilly. Sur les valeurs principales des radicaux. Mathesis (2) **6**, 5-7.

Wenn $a+bi = r.e^{\varphi i}$, $r = +\sqrt{a^2+b^2}$, so ist

$$\sqrt[m]{a+bi} = \sqrt[m]{r}\left\{\cos\frac{\varphi+2k\pi}{m} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{m}\right\}.$$

Keiner der m Werte dieser Wurzel ist eine stetige Function von a und b, wenn a und b von $-\infty$ bis $+\infty$ variiren. Wenn man k constant lässt, so hat man das Maximum der Einfachheit für die Variation jeder Wurzel, wenn a und b variiren. „Hauptwurzel" kann man diejenige nennen, welche zu $k=0$ gehört und derartig ist, dass, wenn $m=pq$ ist, die $(pq)^{\text{te}}$ Wurzel gleich der q^{ten} Wurzel aus der p^{ten} oder gleich der p^{ten} Wurzel aus der q^{ten} ist. Will man das Maximum der Stetigkeit haben, so muss man der Zahl k verschiedene Werte beilegen, je nachdem m von der Form $2p+1$, $2p$ oder $4p$ ist. Wenn a und b positiv sind, so setze man $k=0$; dagegen setze man es gleich $m-1$, wenn a positiv, b negativ ist; endlich wenn a negativ ist, setze man k gleich p, $\frac{1}{2}(p-1)$ oder 0, je nachdem m ungerade, das Doppelte einer ungeraden Zahl oder durch 4 teilbar ist. Diese Bemerkungen lassen in der elementaren Algebra eine Anwendung auf den Fall der Ausdrücke von der Form $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ zu. Mn. (Lp.)

N. Nielsen. Om Definitioner for Lie^{-x}. Nyt. Tidss. f. Math. **7** B, 27-29.

Es wird gezeigt, dass der Integrallogarithmus von e^{-x} durch die Gleichung $\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(1-(x/n))^{n+\nu}}{n+1} = -\mathrm{Li}\, e^{-x}$ definirt werden kann.

V.

W. Puchewicz. Nota sobre las aproximaciones en el cálculo logarithmico. Archivo de Mat. **1,** 193-199.

Uebersetzt aus Nouv. Ann. (3) **10,** 393-399; vergl. F. d. M. **23,** 443 u. 173, 1891.

S. W. Holman. Computation rules and logarithms. New York and London: Macmillan and Co. XIV + 73 S. [Nature **54,** 76.]

E. León y Ortiz. Tablas logarítmicas de adición y sustracción. Archivo de Mat. **1,** 6-10.

Ein kurzer Artikel über die Construction und den Gebrauch der Logarithmentafeln für Summen und Differenzen. Tx. (Lp.)

P. Barbarin. Polygones spiraux, définition géométrique des logarithmes. Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24,** 257-264.

Die Betrachtung von Spiralpolygonen, hervorgehend aus um einen Pol neben einander gelagerten ähnlichen Dreiecken, führt auf die logarithmische Spirale und kann daher zum Ausgangspunkte für eine geometrische Definition der Logarithmen genommen werden. Von da aus gelangt man auch zur geometrischen Begründung des Satzes, dass $n(\sqrt[n]{q}-1)$ und $(1+1/m)^m$ eine Grenze haben. Ferner kann man auf elementare Weise folgern: die Länge des Bogens der Spirale, den Flächeninhalt ihres Sectors und ihren Krümmungsradius. Lp.

J. Brill. On a set of functions derivable from the exponential function. Messenger (2) **25,** 176-180.

Die betrachteten Functionen sind diejenigen, welche aus $e^{\alpha x}$ ableitbar sind, wo α eine primitive n^{te} Einheitswurzel ist. Glr. (Lp.)

P. Mansion. Teoría sucinta de las funciones hiperbólicas. Archivo de Mat. **1,** 29-34, 46-50, 65-71, 86-88, 106-108, 125-127, 150-153, 170-172, 191-192, 211-213.

Spanische Uebersetzung des Précis de la théorie des fonctions hyperboliques (vergl. F. d. M. **16,** 393, 1884), mit Nachträgen vom Verf. Tx. (Lp.)

R. F. Muirhead. On deducing the properties of the trigonometrical functions from their addition equations. Edinb. M. S. Proc. **14,** 127-134.

Lehrreiche Erläuterungen zu einem Unterrichtsgange, den man in den höheren Teilen der Analysis öfter wählt. Gbs. (Lp.)

P. Mansion. Sur une formule de Newton. Mathesis (2) **6**, 84-85.

Zur Berechnung der Länge eines Kreisbogens hat Newton mit Hülfe der Reihen eine Regel gegeben, die mit der folgenden Formel gleichbedeutend ist: $x = \sin x \frac{14 + \cos x}{9 + 6\cos x}$. Mansion zeigt, dass, falls $x < \frac{1}{4}\pi$ ist (was man immer annehmen kann), diese Formel, die für x immer einen zu kleinen Wert giebt, einen Fehler bedingt, der unter $20\frac{1}{4}$ Secunden bleibt (Lampe hat 1897 nachgewiesen, dass der Fehler kleiner als 20 Secunden ist). Die Newton'sche Formel ersetzt eine Tabelle trigonometrischer Linien, die für viele praktischen Rechnungen vollkommen ausreicht. Dml. (Lp.)

A. A. Nyland. Over een bijzondere soort van geheele functiën. Utrecht 1896. (Inauguraldissertation). 78 S.

Untersuchung der Function

$$\varphi_n(x) = 1 - nx + \binom{n}{2}\frac{x^2}{2!} - \binom{n}{3}\frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!},$$

welche zuerst von Abel erwähnt wurde, und von welcher Laguerre neue Eigenschaften entdeckte. Es wird hier gezeigt, wie die fragliche Function sich analog wie die Kugelfunction behandeln lässt. Beispielsweise ergiebt sich, dass die Functionen φ_n Sturm'sche Reihen bilden. Mo.

J. de Vries. Ueber eine gewisse Klasse ganzer Functionen. Amsterdam. Sitz.-Ber. **4**, 133-144.

Für die ganze Function Y_n von y, welche für $y = 2\cos[2k\pi/(2n+1)]$ ($k = 1$ bis n) verschwindet, ergiebt sich, dass ihre Sturm'sche Reihe gebildet wird durch die abgeleiteten Functionen Y'_k ($k = n$ bis 1). Die Function genügt der Gleichung $Y_n - yY_{n-1} + Y_{n-2} = 0$. Die allgemeine Lösung dieser Functionalgleichung wird dargestellt durch $(ay+b)Q_{n-1} + cQ_{n-2}$, wo Q_n für $y = 2\cos[k\pi/(n+1)]$ verschwindet; sie schliesst die Functionen U_n und V_n ein, deren Wurzeln $2\cos\frac{2k+1}{2n+1}\pi$ und $2\cos\frac{2k+1}{2n}\pi$ ($k = 0$ bis $n-1$) sind. Die Bildung der Sturm'schen Reihen für Q_n, U_n und V_n ist der von Y_n analog. Mo.

U. Bigler. Ueber die Isotimen und Isophasen der Function $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$. Hoppe Arch. (2) **14**, 337-359.

Es werden die Curven in der Ebene des complexen Argumentes x bestimmt, welche Kreisen und geraden Linien in der Functionsebene

entsprechen, und welche ihre Mittelpunkte in den Verzweigungspunkten derselben haben, bez. sich in diesen Punkten schneiden. Für diese Curven führt der Verf. die obigen, sonst nicht üblichen Namen ein.

Hau.

Fr. Rogel. Theorie der Euler'schen Functionen. Prag. Ber. 1896, No. 2. 45 S.

M. Lerch. Verschiedenes über die Gammafunction. Rozpravy **5**, No. 14. 37 S. (Böhmisch.)

Ausgehend von der Integralformel:

$$-\int_0^1 \log\sin x\pi . \cos(1-2x)u\pi\,dx$$

$$=\frac{\sin u\pi}{u\pi}\left[\log 2-\Gamma'(1)+\frac{1}{2u}-\frac{\pi}{2}\operatorname{cotg} u\pi+\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}\right],$$

leitet der Verf. auf's neue folgende Formel ab:

$$\sin u\pi\left[\log 2\pi-\Gamma'(1)+\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}\right]+\frac{\pi}{2}\cos u\pi$$

$$=\Sigma\log\frac{n}{n+1}\cdot\sin(2n+1)u\pi.$$

Ein anderes Integral, welches sich von dem vorhergehenden durch die obere Grenze $\frac{1}{2}$ und dadurch unterscheidet, dass darin der Cosinus durch den Sinus ersetzt ist, giebt dann zur Herleitung einer trigonometrischen Entwickelung der Function Anlass:

$$\sin^2\frac{u\pi}{2}D\log\Gamma\left(\frac{u}{2}\right)-\cos^2\frac{u\pi}{2}D\log\Gamma\left(\frac{u+1}{2}\right).$$

Eine weitere Consequenz der ersten Integralformel ist die Entwickelung der rechten Seite derselben nach den Functionen $\cos u\pi G_\nu(u)$ und $\sin u\pi H_\nu(u)$, wo gesetzt ist $G_\nu(u)=\Pi(\alpha^2-4u^2)$, $H_\nu(u)= 2u\,\Pi(\beta^2-4u^2)\,[\alpha=0, 2, 4, \ldots, 2\nu-2$ und $\beta=1, 3, 5, \ldots, 2\nu-1]$.

Die Methode, welche Gauss zur Reduction des Ausdrucks $\Gamma'(\mu/q):\Gamma(\mu/q)$ auf elementare Transcendenten benutzt hat, wird dann zur Summation der unendlichen Reihe $\Sigma e^{2\nu x\pi i}(w+\nu)^{-1}$ $(\nu \gtrless 0)$ für den Fall eines rationalen echt gebrochenen w verwendet.

Eine Untersuchung des Integrals $\int_0^\infty \frac{u^{a-1}-x^{a-1}}{u-x}\frac{dx}{(1+x)^a}$, die sich kaum kurz andeuten lässt, führt dann zu mehreren Formeln, darunter auch zu einer Darstellung der Bernoulli'schen Functionen. Von den übrigen Resultaten der Notiz möge noch eine Darstellung von $D\log\Gamma(w)$ durch ein bestimmtes Integral, in welchem die Thetafunction vorkommt, erwähnt werden.

Lh.

E. Ritter. Ueber die hypergeometrische Function mit einem Nebenpunkt. Math. Ann. **48**, 1-36.

Die von F. Schilling druckfertig gemachte, nachgelassene Arbeit des früh verschiedenen Verfassers behandelt Functionen Q, die allen Bedingungen der Riemann'schen P-Function genügen, nur dass die Exponentensumme nicht 1, sondern 0 ist, was das Auftreten eines „Nebenpunktes" bedingt. In § 1 wird die Differentialgleichung aufgestellt, der eine solche Function genügt; es zeigt sich, dass zu jeder Lage des Nebenpunktes im allgemeinen zwei verschiedene solche Functionsscharen gehören. In § 2 werden Ausnahmefälle untersucht. § 3 handelt von den linearen Relationen zwischen benachbarten Q-Functionen, § 4 von der durch den Quotienten zweier linear unabhängigen Zweige einer Q-Function vermittelten conformen Abbildung; man erhält Kreisbogenvierecke, in denen jedesmal ein Winkel $= 2\pi$ ist, so zwar, dass die beiden ihn einschliessenden Seiten auf demselben Kreise liegen. Eine Figurentafel veranschaulicht die verschiedenen hier möglichen Fälle. In § 5 wird die Untersuchung der Frage aufgenommen, wie der Verzweigungspunkt des Fundamentalbereichs von dem Nebenpunkt abhängt.

Bdt.

A. A. Markow. Ueber die Nullwerte der ganzen Functionen von Hermite und der Functionen von Lamé. Chark. Ges. **5**, 74-81. (Russisch.)

Es sei $\varphi(x) = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)$; ferner $e_1 < e_2 < e_3$, $A = n(n+1)$, $F(x, B)$ eine ganze Function von x, gleich dem Producte $y_1\, y_2$ zweier Integrale der Differentialgleichung $2\varphi y''+\varphi' y' -2(Ax+B)y = 0$. Der Verf. untersucht die Verteilung der reellen Wurzeln der Gleichung $F(x, B) = 0$ in den Intervallen $(-\infty, e_1)$, (e_1, e_2), (e_2, e_3), $(e_3, +\infty)$. Die dazu angewandte Methode ist identisch mit der Methode der Abhandlung: „Ueber eine ganze Function

$$x^n F\left(\frac{-n-\varDelta}{2}, \frac{2k-n+1-\varDelta}{2}, 1-\varDelta, \frac{1}{x}\right)$$
$$\times F\left(\frac{-n+\varDelta}{2}, \frac{2k-n+1+\varDelta}{2}, 1+\varDelta, \frac{1}{x}\right)$$

und die allgemeinere Function" (F. d. M. **25**, 752, 1893/94). Wi.

F. Deruyts. Rapport sur un mémoire de M. Beaupain intitulé: Sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. Belg. Bull. (3) **32**, 669-670.

Besprechung der Fortsetzung der Beaupain'schen Untersuchungen.

Mn. (Lp.)

J. Beaupain. Sur les fonctions hypergéométriques de seconde espèce et d'ordre supérieur. Belg. Mém. c. et sav. étr. **64**, 46 et 47 pages 4°.

Die Abhandlungen werden nach dem Erscheinen einer dritten Arbeit über denselben Gegenstand näher besprochen werden. Mn. (Lp.)

B. Elliptische Functionen.

JULES TANNERY et JULES MOLK. Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Tome II. Calcul différentiel (II[e] partie). Paris: Gauthier-Villars et Fils. 300 S. 8°.

Dem ersten Teile dieses Lehrbuches, das sich durch Klarheit der Darstellung, Strenge der Beweise und Reichhaltigkeit des Stoffes auszeichnet, ist rasch der zweite gefolgt. Während dort (F. d. M. **25**, 758-762, 1893/94) in engem Anschluss an Weierstrass die Theorie der eindeutigen doppeltperiodischen Functionen auf Grund der σ-Functionen behandelt wurde, gliedert sich der zweite Teil des Calcul différentiel in zwei Kapitel, von denen das erste die Jacobi'schen ϑ-Functionen, das zweite die Quotienten der σ-Functionen und der ϑ-Functionen betrifft.

Dabei kommt auch die Jacobi'sche Theorie zur Geltung; ist es doch die Absicht der Verf., die Leser ihres Buches nicht nur in den Stand zu setzen, die elliptischen Functionen auf Geometrie und Mechanik anzuwenden, sondern sie auch zu befähigen, „in die reiche und bewunderungswürdige Litteratur einzudringen und im besonderen die Untersuchungen von Kronecker und Hermite verstehen zu lernen".

In der That behalten auch nach der Einführung der σ-Functionen die ϑ-Functionen ihr Interesse und ihren Nutzen, einmal für die numerische Rechnung, wo sie wegen ihrer raschen Convergenz unentbehrlich sind, und dann wegen ihrer Bedeutung für Analysis, Algebra und Arithmetik.

Von den σ-Functionen gelangen die Verf., wieder dem Vorgange von Weierstrass folgend, durch die Entwickelung in unendliche Reihen zu den ϑ-Functionen. Sie weichen jedoch in der Bezeichnung mehrfach von Weierstrass ab. Schon im ersten Bande fanden sich solche Abweichungen, und zwar bei den Perioden. Merkwürdiger Weise hatte fast gleichzeitig Study denselben Aenderungsvorschlag gemacht, ein Zeichen, dass es sich hier um eine wirkliche Verbesserung und gesunde Fortbildung der Weierstrass'schen Theorie handelte. Auch im zweiten Bande finden sich Aenderungen, die allgemeine Einführung verdienten, so zum Beispiel, dass die Verf. zwar bei dem Periodenverhältnisse die Weierstrass'sche Bezeichnung τ festgehalten haben, dagegen für $e^{\tau\pi i}$ zu der Jacobi'schen Bezeichnung q zurückgekehrt sind und dem entsprechend auch q_0, q_1, q_2 an Stelle von h_0, h_1, h_2 schreiben. Ob es dagegen zweckmässig ist, mit Tannery und Molk ϑ_4 statt ϑ zu schreiben, das möge dahingestellt sein.

Besondere Anerkennung verdient auch, dass der Uebergang von den Bezeichnungen des Textes zu den Bezeichnungen anderer Autoren durch ausführliche Formeltabellen ermöglicht und erleichtert worden ist,

sowie dass auf Abweichungen, die den Anfänger leicht verwirren können, aufmerksam gemacht wird, so zum Beispiel auf die verschiedene Bedeutung des Zeichens $\vartheta_a(v)$ bei Jacobi und bei Weierstrass und der Zeichen sn, cn, dn bei Jacobi und bei Hermite.

Nachdem die ϑ-Functionen gewonnen sind, gilt es, ihre Eigenschaften abzuleiten, die teils eine unmittelbare Folge der Eigenschaften der σ-Functionen, teils den ϑ-Functionen eigentümlich sind. Den Anfang bildet die Betrachtung der linearen Transformation, die zu den Hermite'schen Functionen $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ und $\chi(\tau)$ und damit in das Gebiet der elliptischen Modulfunctionen führt; nach dem Vorgange von Hermite, Schläfli und Dedekind wird die lineare Transformation von $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ und $\chi(\tau)$ eingehend untersucht.

Die Discussion der zu diesen Functionen gehörigen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen geschieht auf analytisch-arithmetischem Wege. Hurwitz, Klein, Poincaré, H. A. Schwarz werden nur citirt, und die Leser erfahren nicht einmal andeutungsweise, dass diese Theorie der schönsten geometrischen Interpretation fähig ist. Die Heranziehung der geometrischen Methoden wäre nicht nur der Darstellung zu Gute gekommen; sie hätte auch in dem Programm der Verf. gelegen, die doch eine allseitige Darstellung der Theorie der elliptischen Functionen geben wollen, welche den Leser für eine fruchtbringende Beschäftigung mit der Litteratur vorbereitet.

Nach Erledigung der linearen Transformation werden die Transformationen höherer Ordnung behandelt, und das Kapitel endet mit der Theorie der Additionstheoreme der ϑ- und σ-Functionen. Zu bedauern ist, dass an dieser Stelle Study's Arbeiten keine Berücksichtigung gefunden haben, durch die Kronecker's Untersuchungen erst zum vollständigen Abschlusse gebracht worden sind.

Das zweite Kapitel des ersten Bandes, an Umfang wenig mehr als ein Drittel des ersten, beginnt mit der Einführung der 12 σ-Quotienten $\sigma_\beta(u)/\sigma_\gamma(u) = \xi_{\beta\gamma}(u)$ $(\sigma_0(u) = \sigma(u))$, deren Untersuchung nach dem Vorbilde von Weierstrass erfolgt. Parallel damit geht die Einführung der Jacobi'schen Functionen sn, cn, dn. Der Uebergang von Jacobi zu Weierstrass und umgekehrt wird sorgfältig erörtert, und der Formelapparat entwickelt, der den Leser in den Stand setzt, diesen Uebergang, der so häufig notwendig wird, bequem und rasch auszuführen. Auch Kronecker's Function $\mathrm{El}(v, \tau)$ hat in diesem Zusammenhange ihren Platz gefunden.

Den Schluss des Kapitels bildet eine Einleitung in die Theorie der Transformation der elliptischen Functionen, die wesentlich von dem Standpunkte Jacobi's aus behandelt wird. Gewiss ist die Kenntnis der hier vorgetragenen Sätze für jeden unentbehrlich, der in die moderne Theorie der Transformation eindringen will, aber auch hier würde die Heranziehung der geometrischen Methoden das Interesse des Lesers für den Gegenstand vermehrt und sein Verständnis vertieft haben; denn es hätte so bereits an dieser Stelle der Begriff der elliptischen Function n^{ter} Stufe eingeführt und aus den Functionen der Weierstrass'schen

und der Jacobi'schen Theorie erläutert werden können, die in diesem Bande beständig neben einander auftreten, über deren wahres Verhältnis der Leser ganz im Dunkeln bleibt; bereits an dieser Stelle, denn eine Andeutung auf S. 232 lässt vermuten, dass die Verf. auf diesen Gegenstand in einem späteren Kapitel eingehen werden.

Die letzten 65 Seiten enthalten eine Sammlung der in dem ersten und in dem zweiten Bande abgeleiteten Hauptformeln; auf diese Weise ist es möglich, den zweiten Band zu lesen, ohne den ersten in die Hand nehmen zu müssen. Hohes Lob verdient die Schönheit der Typen und die Correctheit des Satzes, in dem der Referent trotz wiederholter Stichproben keinen Fehler zu entdecken vermochte. St.

C. Juel. Ueber die Parameterbestimmung von Punkten auf Curven zweiter und dritter Ordnung. Eine geometrische Einleitung in die Theorie der logarithmischen und elliptischen Functionen. Math. Ann. 47, 72-104.

A. Seiffert. Ueber eine neue geometrische Einführung in die Theorie der elliptischen Functionen. Pr. (No. 127) Realsch. Charlottenburg. 29 S. 4°. Mit 1 Fig.-Taf.

Die von Clebsch herrührende Parameterdarstellung der Punkte einer Curve dritter Ordnung mittels elliptischer Functionen ist nicht nur für die Theorie dieser Curven höchst fruchtbar geworden, sondern kann auch umgekehrt dazu benutzt werden, um eine geometrische Einleitung in die Theorie der elliptischen Functionen zu gewinnen. Es wird alsdann darauf ankommen, durch geometrische Betrachtungen den Satz abzuleiten, dass eine Curve dritter Ordnung, in der Gesamtheit ihrer reellen und imaginären Punkte aufgefasst, eindeutig und continuirlich auf ein Parallelogramm abgebildet werden kann. Dieser Beweis bildet den Hauptinhalt der Abhandlung von Juel, die sich folgendermassen gliedert:

§ 1. Um das Gebiet aller Punkte der Curve zu übersehen, ist ein geeignetes doppelt unendliches Substrat unbedingt erforderlich. Zu diesem Zwecke wird die von F. Klein als „metrische Fläche" bezeichnete Darstellung eingeführt (Vorlesungen über Riemann'sche Flächen. I, S. 221).

§ 2. Es wird eine Parameterbestimmung der Punkte eines reellen, nicht geschlossenen Curvenbogens gegeben. „Die Darstellung kann als eine kurz gefasste moderne Formulirung der euklidischen Zahlenbestimmung aufgefasst werden."

§ 3. Es folgt die Parameterdarstellung auf einem Kegelschnitt, die zur allgemeinen projectiven Definition des Winkels leitet. Sie beruht auf einer eigentümlichen Art geometrischer Addition, die sich übrigens unter anderem Namen schon bei v. Staudt findet. Ist nämlich E ein fester Curvenpunkt, so stehen die drei Curvenpunkte A, B, C in der Beziehung $A+B=C$, wenn die Geraden AB und EC sich auf einer festen Geraden OU schneiden.

§ 4. Für die Parameterbestimmung der Punkte einer reellen Curve

dritter Ordnung — auf solche Curven beschränkt sich der Verf. — werden nunmehr folgende Forderungen aufgestellt.

a) Jeder Zahl $a+ib$ soll nur ein Punkt der Curve entsprechen, während das Umgekehrte nicht verlangt wird. Wohl aber soll

b) die Zahlenbestimmung innerhalb eines hinreichend kleinen Gebietes eindeutig und continuirlich sein. Hieraus folgt, dass die Zahlen, die einem Punkte entsprechen, bis auf Vielfache der beiden „Perioden" 2ω und $2\omega_1$ eindeutig bestimmt sind.

c) Sind α, β, γ die Parameter der Punkte A, B, C, und ist $A+B=C$, so soll auch $\alpha+\beta\equiv\gamma$ (modd. 2ω, $2\omega_1$) sein. Dabei bedeutet $A+B=C$, dass die Geraden AB und OC sich in einem Punkte der Curve selbst schneiden; O ist ein beliebig gewählter fester Punkt.

Hierdurch ist bereits „der gewöhnliche Ansatz für die Anwendung der elliptischen Functionen auf die Geometrie innerhalb einer Curve dritter Ordnung vollständig gegeben, insofern die Division ausgeschlossen wird."

§§ 5 und 6. Jetzt wird gezeigt, dass eine solche Parameterbestimmung nicht nur hypothetisch denkbar ist, sondern auch wirklich existirt, und zwar zunächst für die reellen, dann für alle Punkte der Curve. Hier hat die vorliegende Abhandlung wesentliche Berührungspunkte mit einer kurze Zeit vor ihr erschienenen Arbeit von E. Kötter (Journ. für Math. **114**), der jedoch nur reelle Punkte in Betracht zieht.

§ 7. Den Schluss bildet ein analytisches Résumé. Dabei zeigt sich, „dass die geometrische Theorie — die ja im grossen und ganzen einer analytischen Theorie auf Grundlage des Additionstheorems gleichkommt — so einfach zu dem allgemeinen Ausdrucke des Integrals erster Gattung führt."

Ohne Zweifel verdient, rein methodisch betrachtet, die geometrische Einführung der elliptischen Functionen von den Curven dritter Ordnung aus vor allen anderen durchaus den Vorzug.

Allein man wird nicht leugnen können, dass die genaue Durcharbeitung dieses Gedankens erhebliche Anforderungen an Vorbildung und Zeit kostet, und daher werden elementare Lehrbücher und Vorlesungen darauf verzichten müssen. Nun sind zwar verschiedene Versuche gemacht worden, diesem Mangel abzuhelfen; aber alle, auch Halphen's sinnreiche Construction, können nicht als befriedigend gelten. Um so beachtenswerter ist es, dass Seiffert in seiner Programmabhandlung eine neue geometrische Einführung in die Theorie der elliptischen Functionen vorschlägt, die für pädagogische Zwecke recht geeignet ist.

Diese neue Einführung beruht auf der Betrachtung einer Gattung sphärischer Curven, die zu den Loxodromen in einfacher Beziehung stehen. Bedeutet nämlich φ das Complement der geographischen Breite, u die geographische Länge eines Punktes auf einer Kugel vom Radius 1 und s die Bogenlänge der Curve, so werden die Loxodromen durch die Differentialgleichung $d\varphi = cds$, die von dem Verf. betrachteten „Kugelspiralen erster Gattung" durch $du = kds$ definirt, wo c und k Con-

stanten sein sollen. Es ist leicht, auf Grund dieser Gleichung eine Vorstellung von dem Verlaufe dieser Kugelspiralen zu gewinnen.

Zählt man s von dem Punkte $u = 0$, $\varphi = 0$ an, so wird

$$s = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi)}$$

ein elliptisches Integral erster Gattung und daher $\varphi = \operatorname{am}(s, k)$. Mithin sind $\operatorname{sn}(s, k)$ und $\operatorname{cn}(s, k)$ die rechtwinkligen Coordinaten des Curvenpunktes (u, φ) in der zugehörigen Meridianebene, während $\operatorname{dn}(s, k)$ den Cosinus des Winkels τ darstellt, unter dem die Curve den Meridian durchschneidet. Man erkennt jetzt sofort, dass $\operatorname{sn}(s)$ und $\operatorname{cn}(s)$ die reelle Periode $4K$ besitzen und $\operatorname{dn}(s)$ die Periode $2K$; dabei ist K die Länge der Curve vom Pol bis zum Aequator. Aber auch die imaginären Perioden finden ihre geometrische Veranschaulichung, indem man die imaginären Spiralbogen durch reelle Bogen auf dem die Kugel im Aequator berührenden gleichseitigen ein-, bez. zweischaligen Rotationshyperboloide ersetzt.

Weiter gelangt man von hier aus zum Beweise des Additionstheorems; ist nämlich

$$\int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi)} + \int_0^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi)} = \int_0^{\varphi_3} \frac{d\varphi}{\varDelta(\varphi)},$$

so zeigen einfache geometrische Betrachtungen, dass ein sphärisches Dreieck mit den Seiten φ_1, φ_2, φ_3, ein „Amplitudendreieck", existirt, dessen Winkel τ_1, τ_2 und τ_3 sind.

Endlich ergiebt sich aus der Betrachtung von Amplitudendreiecken, die zu verschiedenen Moduln gehören, eine schöne geometrische Deutung der Landen'schen Transformation.

So sehr der Ref. den Wert dieser Betrachtungen anerkennt und so sehr er wünscht, durch die vorhergehenden Ausführungen das Interesse weiterer Kreise für die vorliegende Abhandlung zu erwecken, so wenig kann er sich mit den Schlussbemerkungen des Verfassers einverstanden erklären. Es ist gewiss interessant, dass die Bogen der Kugelspiralen $du = ld\varphi$ und $du = md\varphi + nds$, wo l, m, n Constanten bedeuten, durch elliptische Integrale zweiter und dritter Gattung berechnet werden; aber keineswegs ergeben die Umkehrungen dieser Integrale „diejenigen Gebilde, welche man bisher als elliptische Functionen zweiter und dritter Gattung bezeichnet hat" (S. 11). Noch weniger aber ist die Ansicht begründet, dass die „Spiralen höherer Ordnung", bei denen nämlich zwischen du, $d\varphi$ und ds algebraische Gleichungen höheren Grades bestehen, für die Ableitung und Deutung der Haupteigenschaften der Abel'schen Functionen von Nutzen sein werden; denn diese Functionen sind nicht, wie der Verf. annimmt, die Umkehrungen hyperelliptischer Integrale, sie werden vielmehr durch Systeme von Differentialgleichungen definirt und lassen sich daher nicht als „Coordinaten gewisser Kugelspiralen höherer Ordnung" definiren. Für eine geometrische Deutung

der Abel'schen Functionen würden vielmehr Betrachtungen weit höherer Natur erforderlich sein, und es würden bereits für das Geschlecht $p=2$ nicht Curven, sondern krumme Oberflächen herangezogen werden müssen.
St.

O. BIERMANN. Zur Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische. Wien. Ber. **105**, 924-931.

S. Kowalevski hat (Acta Math. **4**; F. d. M. **16**, 426, 1884) einen Satz von Weierstrass mitgeteilt, der sich auf die Frage bezieht, wann unter den Integralen erster Gattung, die zu einer algebraischen Gleichung $f(x,y)=0$ gehören, ein Integral existirt, das auf ein elliptisches $\int \frac{d\xi}{\eta}$ $(\eta^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3)$ zurückgeführt werden kann, indem man für ξ und η rationale Functionen von x und y setzt, und zwar giebt Weierstrass die Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit dies eintritt, in transcendenter Form. Der Verf. entwickelt einen einfachen Beweis der Weierstrass'schen Relationen, der sich auf die Darstellung der Integrale erster und zweiter Gattung durch Logarithmen von Primfunctionen gründet. St.

W. R. W. ROBERTS. On elliptic and hyperelliptic systems of differential equations and their rational and integral algebraic integrals, with a discussion of the periodicity of elliptic and hyperelliptic functions. Lond. M. S. Proc. **26**, 379-430.

Jacobi hat im Jahre 1846 ein Verfahren angegeben (Werke, **2**, S. 137-144), mittels dessen man die $m-1$ algebraischen Integralgleichungen eines Systems hyperelliptischer Differentialgleichungen:

$$\frac{dz_1}{\sqrt{A_0 f(z_1)}} + \frac{dz_2}{\sqrt{A_0 f(z_2)}} + \cdots + \frac{dz_m}{\sqrt{A_0 f(z_m)}} = 0,$$

$$\frac{z_1\, dz_1}{\sqrt{A_0 f(z_1)}} + \frac{z_2\, dz_2}{\sqrt{A_0 f(z_2)}} + \cdots + \frac{z_m\, dz_m}{\sqrt{A_0 f(z_m)}} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{z_1^{m-2}\, dz_1}{\sqrt{A_0 f(z_1)}} + \frac{z_2^{m-2}\, dz_2}{\sqrt{A_0 f(z_2)}} + \cdots + \frac{z_m^{m-2}\, dz_m}{\sqrt{A_0 f(z_m)}} = 0$$

mit $f(z) = z^{2m} + P_1 z^{2m-1} + \cdots + P_{2m-1} z + P_{2m}$ in rationaler Form darstellen kann. Setzt man $\varphi(z) = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\ldots(z-z_m) = z^m + p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + \cdots + p_{m-1} z + p_m$, so ergiebt sich auf diese Weise eine Gleichung zwischen p_1 und p_2, die in jeder dieser Grössen bis zum zweiten Grade aufsteigt, während die übrigen $m-2$ Gleichungen besagen, dass $p_3, p_4, \ldots, p_m$ linear durch p_1 und p_2 ausgedrückt werden können.

Jacobi's Verfahren ist in theoretischer Beziehung durchaus befriedigend. Aber die wirkliche explicite Aufstellung jener rationalen Integralgleichungen erfordert einen grossen Aufwand von Rechnung, und insofern

es sich um diese Aufgabe handelt, wird man die von Roberts in der vorliegenden Abhandlung entwickelte neue Methode als einen Fortschritt bezeichnen können.

Die Methode von Roberts lässt sich so darstellen. Man bilde die ganze rationale Function $(2m-2)^{\text{ten}}$ Grades:

$$F(z) = A_0\{f(z)+\varphi^2(z)-2\varphi(z)L(z)\},$$
$$L(z) = z^m+\tfrac{1}{2}P_1 z^{m-1}+\lambda_2 z^{m-2}+\lambda_3 z^{m-3}+\cdots+\lambda_m.$$

Bestimmt man jetzt $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$ so, dass $F(z)$ das vollständige Quadrat einer ganzen rationalen Function vom Grade $m-1$ wird, so erhält man $m-1$ Bedingungsgleichungen zwischen $p_1, p_2, \ldots, p_m$; $P_1, P_2, \ldots, P_{2m}$; $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$, und diese sind, wenn man λ_2, $\lambda_3, \ldots, \lambda_m$ als willkürliche Constanten ansieht, genau die gesuchten Integralgleichungen.

Es kommt also alles darauf an, die Bedingungen dafür zu ermitteln, dass eine binäre Form vom Grade 2μ das Quadrat einer Form vom Grade μ wird, und hier entwickelt der Verf. ein Verfahren, wie man aus einer dieser Bedingungsgleichungen alle übrigen durch wiederholte Anwendung eines operativen Processes δ erhalten kann; Hilbert's Abhandlung: Ueber die notwendigen und hinreichenden covarianten Bedingungen für die Darstellbarkeit einer binären Form als vollständiger Potenz (Math. Ann. **27**, 158-160, 1884) scheint ihm entgangen zu sein.

Es folgt noch die Durchführung der Rechnungen für $m = 2, 3, 4$, und den Schluss bilden Betrachtungen über die Periodicität der hyperelliptischen Functionen. St.

Matz, H. J. Woodall, N. Sarkar. Solution of question 9547. Ed. Times **65**, 87.

Reduction des Integrals $\int\sqrt{a^4\pm 2b^2x^2+x^4}\,dx$ auf die Fundamentalformen der elliptischen Integrale. Lp.

R. Hargreaves. Expansion of elliptic integrals by zonal harmonics, with some derived integrals and series. Messenger (2) **26**, 89-98.

Entwickelung elliptischer Integrale vermittelst Legendre'scher Coefficienten. Die Werte von $\int_0^1 E(k)k'^{2n}\,dk'$, $\int_0^1 K(k)k'^{2n}\,dk'$ und anderer Integrale werden abgeleitet. Glr. (Lp.)

A. G. Pszeborski. Ueber die Functionen eines Arguments, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen. Kiew Physiko-math. Ges. 1895; Kiew Nachr. No. 4, 1896. (Russisch.)

Weierstrass hat in seiner Theorie der elliptischen Functionen den wichtigen Fundamentalsatz gegeben: Jede analytische Function $\varphi(u)$,

welche ein Additionstheorem besitzt, oder mit anderen Worten, welche so beschaffen ist, dass eine algebraische Beziehung zwischen den Werten der Function besteht, welche den Worten des Arguments $u, v, u+v$ entsprechen, ist entweder 1) eine algebraische Function von u, oder 2) eine algebraische Function von $e^{\frac{\pi i u}{\omega}}$, wo ω eine passend gewählte Constante bezeichnet, oder endlich 3) eine algebraische Function von $\wp(u|\omega, \omega')$, wenn ω, ω' zwei passend gewählte Constanten sind. Die vorliegende Note enthält die Darstellung des Beweises, welchen Forsyth in seiner „Theory of functions of a complex variable, Cambr. 1893" gegeben hat, mit einigen Vereinfachungen. Wi.

P. S. Nasimow. Besprechung von Halphen's „Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications". Kasan Univ. Nachr. 1896. Wi.

J. C. Kluyver. Solution of a problem. Nieuw Archief (2) **3**, 36-39.

Elementare Methode zur Bestimmung der Invarianten für die $\wp$-Function, wenn zwei primitive Perioden $\sqrt{-7}$ als Quotienten haben. Mo.

J. de Vries. Over optellingstheorema's voor elliptische integralen. Amsterdam Sitz.-Ber. **4**, 96-103.

Herleitung der Additionstheoreme für die elliptischen Integrale mittels einer veränderlichen Parabel. Mo.

P. Stäckel. Das Additionstheorem der Function $\wp(u)$. Math. Ann. **47**, 604.

Das Additionstheorem der Function $\wp(u)$ in seiner klassischen Gestalt: $\wp u_1 + \wp u_2 + \wp u_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2}\right)^2$ $(u_1 + u_2 + u_3 = 0)$ und der Satz, dass das Residuum für $u = 0$ der einfachsten elliptischen Function dritten Grades $f(u) = \frac{\sigma(u+u_1)\sigma(u+u_2)\sigma(u+u_3)}{\sigma^3(u)}$ verschwindet, sind mit einander gleichbedeutend. St.

J. Hadamard. Sur une forme de l'intégrale de l'équation d'Euler. Darboux Bull. (2) **20**, 263-266.

Der elegante Satz von Stieltjes (F. d. M. **20**, 443, 1888), dass das allgemeine Integral der Euler'schen Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}} = \frac{dy}{\sqrt{a_0 y^4 + 4a_1 y^3 + 6a_2 y^2 + 4a_3 y + a_4}}$$

auf die Form gebracht werden kann:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -\frac{x+y}{2} & xy \\ 1 & a_0 & a_1 & a_2-2c \\ -\frac{x+y}{2} & a_1 & a_2+c & a_3 \\ xy & a_2-2c & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = 0,$$

wird bewiesen und geometrisch gedeutet. St.

G. FONTENÉ. Sur l'addition des arguments dans les fonctions périodiques du second ordre. C. R. **122,** 172-175.

G. FONTENÉ. Expression de la quantité $\wp(u_1+u_2+\cdots+u_{2n})$ au moyen d'un pfaffien. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **13,** 469-487.

CH. HERMITE. Sur une formule de M. Fontené. Darboux Bull. (2) **20,** 218-220.

Den beiden Noten von Fontené ist der Gedanke gemeinsam, Sätze, die für die Function $\wp(u)$ gelten, auf beliebige doppeltperiodische Functionen zweiten Grades auszudehnen.

In der ersten Note wird gezeigt, wie der Beweis des Additionstheorems der Function $\wp(u)$ mittels der σ-Function sich verallgemeinern lässt zu einem Beweise für das Additionstheorem einer elliptischen Function zweiten Grades $f(x)$ mit den Polen p und p'. Es ist nämlich

$$2f(x+y) = f(p-y)+f(p'-y) + R\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\log\frac{f(x)-f(p-y)}{f(x)-f(p'-y)};$$

R bedeutet das Residuum, das zu dem Pole p gehört.

Hermite weist dann nach, dass diese interessante Formel als Grenzfall einer Gleichung aufgefasst werden kann, die er in seiner bekannten „Note sur la théorie des fonctions elliptiques" hergeleitet hatte, und die folgendermassen lautet:

$$\frac{2\varphi'(a)}{\varphi(x+y)-\varphi(a)} = \frac{\varphi'(a+y)+\varphi'(a)}{\varphi(a+y)-\varphi(a)} + \frac{\varphi'(a-y)+\varphi'(a)}{\varphi(a-y)-\varphi(a)} - \frac{\varphi'(a+y)+\varphi'(x)}{\varphi(a+y)-\varphi(x)} - \frac{\varphi'(a-y)+\varphi'(x)}{\varphi(a-y)-\varphi(x)}.$$

Hierin bedeutet a eine willkürliche Constante. Setzt man nun $a=p+\varepsilon$, wo ε eine sehr kleine Grösse bedeutet, und entwickelt nach steigenden Potenzen von ε, so ergiebt sich nach einigen Reductionen für $\varepsilon=0$ genau die Formel von Fontené.

In der zweiten Note handelt es sich zunächst um die Aufgabe, die Function $\wp(u_1+u_2+\cdots+u_{2n-1}+u_{2n})$ in möglichst übersichtlicher Weise durch die Grössen $\wp(u_\alpha)=\wp_\alpha$ $(\alpha=1, 2, \cdots, 2n)$ auszudrücken. Durch Induction ist der Verfasser auf die folgende merkwürdige Formel geführt

worden:

$$\text{(I)}\quad \wp(u_1+u_2+\cdots+u_{2n}) = \tfrac{1}{4}\,\frac{VP^{\frac{1}{2}}}{N},$$

$$V = \begin{vmatrix} \wp_1^{2n} & \wp_1^{2n-1} & \dots & \wp_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \wp_{2n}^{2n} & \wp_{2n}^{2n-1} & \dots & \wp_{2n} \end{vmatrix},$$

$$N = \begin{vmatrix} \wp_1^{n-2}.\wp_1' & \wp_1^{n-3}.\wp_1' & \dots & \wp_1.\wp_1' & \wp_1' & \wp_1^n & \wp_1^{n-1} & \dots & \wp_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \wp_{2n}^{n-2}.\wp_{2n}' & \wp_{2n}^{n-3}.\wp_{2n}' & \dots & \wp_{2n}.\wp_{2n}' & \wp_{2n}' & \wp_{2n}^n & \wp_{2n}^{n-1} & \dots & \wp_{2n} & 1 \end{vmatrix},$$

$$P = \begin{vmatrix} 0 & (1,2) & (1,3) & \dots & (1,2n) \\ (2,1) & 0 & (2,3) & \dots & (2,2n) \\ (3,1) & (3,2) & 0 & \dots & (3,2n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (2n,1) & (2n,2) & (2n,3) & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

wo $(\alpha,\beta) = 4\wp(u_\alpha+u_\beta)\,(\wp_\alpha-\wp_\beta)$ zu setzen ist. Mithin ist P ein vollständiges Quadrat und $P^{\frac{1}{2}}$ gleich dem Pfaff'schen Ausdrucke $(1, 2, 3, \dots, 2n)$.

Die rechte Seite der Gleichung (I) hat den Charakter einer Covariante. Setzt man nämlich $\wp(u) = \dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ (α, β, γ, δ sollen Constanten bedeuten), so wird x eine doppeltperiodische Function zweiten Grades von u, die der Differentialgleichung:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = A_0x^4+4A_1x^3+6A_2x^2+4A_3x+A_4$$

genügen möge. Nun sei wieder $x(u_\alpha) = x_\alpha$, dann wird $(\alpha,\beta) = \dfrac{2\,G_{\alpha\beta}-2\wp_\alpha'\wp_\beta'}{\wp_\alpha-\wp_\beta}$, wo $G_{\alpha\beta} = 2\wp_\alpha\wp_\beta(\wp_\alpha+\wp_\beta)-\frac{1}{2}g_2(\wp_\alpha+\wp_\beta)-g_3$ Polare von $4\wp^3(u)-g_2\wp(u)-g_3 = \left(\dfrac{d\wp}{du}\right)^2$ ist. Entsprechend sei

$$[\alpha,\beta] = \frac{2F_{\alpha\beta}-2x_\alpha'x_\beta'}{x_\alpha-x_\beta},\ \text{wo}\ F_{\alpha\beta} = A_0x_\alpha^2x_\beta^2+2A_1x_\alpha x_\beta(x_\alpha+x_\beta)$$
$$+A_2(x_\alpha^2+x_\beta^2+4x_\alpha x_\beta)+2A_3(x_\alpha+x_\beta)+A_4$$

Polare von $\left(\dfrac{dx}{du}\right)^2$ ist (vergl. Halphen, Traité, t. 2, S. 359).

Bildet man nunmehr

$$\mathfrak{V} = \begin{vmatrix} x_1^{2n} & x_1^{2n-1} & \dots & x_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{2n}^{2n} & x_{2n}^{2n-1} & \dots & x_{2n} \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{N} = \begin{vmatrix} x_1^{n-2}.x_1' & x_1^{n-3}.x_1' & \dots & x_1.x_1' & x_1' & x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{2n}^{n-2}.x_{2n}' & x_{2n}^{n-3}.x_{2n}' & \dots & x_{2n}.x_{2n}' & x_{2n}' & x_{2n}^n & x_{2n}^{n-1} & \dots & x_{2n} & 1 \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{P} = \begin{vmatrix} 0 & [1,2] & [1,3] & \dots & [1,2n] \\ [2,1] & 0 & [2,3] & \dots & [2,2n] \\ [3,1] & [3,2] & 0 & \dots & [3,2n] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [2n,1] & [2n,2] & [2n,3] & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

so wird

$$\text{(II)} \quad \tfrac{1}{4}\,\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{P}^{\frac{1}{2}}}{\mathfrak{N}} = \wp(u_1+u_2+\dots+u_{2n}-ns),$$

wenn s die Summe der Pole von $x(u)$ bedeutet. St.

A. G. Greenhill. **The transformation and division of elliptic functions.** Lond. M. S. Proc. **27**, 403-486.

Die Freude am Rechnen als solchem und das Bedürfnis der numerischen Verification „as a check upon the accuracy of the formulas“ ist eine specifische Eigentümlichkeit der Engländer, und wie früher die Theorie der Formen, so giebt ihnen jetzt die Lehre von den elliptischen Functionen Gelegenheit zu ihrer Bethätigung. Ein Beispiel hiervon ist die vorliegende umfangreiche Abhandlung von Greenhill (vergl. F. d. M. **24**, 410, 1892 und **25**, 772, 1893/94). Die Theorie der Transformation und Teilung der elliptischen Functionen wird in ihr keinen Schritt weiter geführt. Der Verf. will vielmehr nur einen Commentar zu den neueren Untersuchungen über diesen Gegenstand geben, und zwar in dem Sinne, dass er die verschiedenen Parameter, die bei der Darstellung der Transformationsgleichungen durch Klein, Kiepert, Fricke u. a. auftreten, explicite durch einen einzigen Parameter ausdrückt und seine Resultate durch ausführliche Discussion numerischer Beispiele erläutert. Er erfreute sich dabei der Hülfe von T. I. Dewar; dieser benutzte eine neue Rechenmaschine von Macfarlane Gray, die 16-ziffrige Zahlen mit einander zu multipliciren erlaubt.

Auf Einzelheiten einzugehen, ist an dieser Stelle unmöglich, steigt doch die Anzahl der numerirten Gleichungen bis 485; es möge nur noch bemerkt werden, dass alle Transformationsgrade bis 20 mit Beispielen bedacht worden sind. St.

J. Jack. **Development of sn$x$, cn$x$, dn$x$ by means of their addition theorems.** Edinb. M. S. Proc. **14**, 35-36. Gbs.

E. Lacour. **Décomposition en facteurs de la fonction $\Theta[u^{(i)}(z)-G_i]$.** Ann. de l'Éc. Norm. (3) **13**, 415-420.

Clebsch und Gordan geben in der „Theorie der Abel'schen Functionen“ eine Formel, die in der Bezeichnung von Appell und Goursat sich folgendermassen schreiben lässt:

$$2\log\frac{\Theta[u^{(i)}(z)-u^{(i)}(z_1)-u^{(i)}(z_2)-\cdots-u^{(i)}(z_p)+C_i]}{\Theta[u^{(i)}(a)-u^{(i)}(z_1)-u^{(i)}(z_2)-\cdots-u^{(i)}(z_p)+C_i]}$$
$$=\sum_k(u^{(k)}(z)-u^{(k)}(a))+\sum_k[\Pi_{z'_k z_k}(z)-\Pi_{z'_k z_k}(a)];$$

hierin sind $z'_1, z'_2, \ldots, z'_p$ algebraische Functionen von $z_1, z_2, \ldots, z_p$ einerseits und a und z andererseits, die eine einfache geometrische Bedeutung haben.

Im Anschluss an eine dem Referenten unzugängliche Arbeit über Functionen mit Exponentialmultiplicatoren (Ann. de l'Éc. Norm. (3) **12**, Suppl.; F. d. M. **26**, 451, 1895) beweist der Verf. diese Formel, indem er das Integral $\int \Pi_{a z}(x)\, d\log\Phi(x)$ über die Begrenzung der durch die bekannten Schnitte einfach zusammenhängend gemachten Riemann'schen Fläche erstreckt und alsdann die Verallgemeinerung des Cauchy'schen Theorems auf Riemann'sche Flächen anwendet. St.

E. Pascal. Sopra due relazioni rimarchevoli fra i valori delle derivate delle funzioni ϑ ellittiche per argomento zero. Annali di Mat. (2) **24**, 23-28.

Der bekannten Formel (1) $\vartheta'_1(0)=\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)$ lassen sich zwei andere an die Seite stellen, die ihr aufs engste verwandt sind; es gelten nämlich die Gleichungen:

$$(2)\qquad -3\frac{\vartheta_1^{\mathrm{V}}}{\vartheta'_1}+5\frac{\vartheta_1'''^2}{\vartheta_1'^2}=\vartheta^8+\vartheta_2^8+\vartheta_3^8,$$

$$(3)\quad -9\frac{\vartheta_1^{\mathrm{VII}}}{\vartheta'_1}+63\frac{\vartheta_1^{\mathrm{V}}}{\vartheta'_1}\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta'_1}-70\frac{\vartheta_1'''^3}{\vartheta_1'^3}$$
$$=-8(\vartheta^4+\vartheta_3^4)(\vartheta_3^4+\vartheta_2^4)(\vartheta_2^4-\vartheta^4).$$

Auf den linken Seiten aller dieser Gleichungen kommen allein die Ableitungen der ungeraden Thetafunction ϑ_1 vor, während die rechten Seiten nur die geraden Thetafunctionen ϑ, ϑ_2 und ϑ_3 selbst enthalten. Die rechten Seiten haben aber noch eine weitere Aehnlichkeit: sie lassen sich bis auf einen von den Perioden abhängigen Factor durch die Invarianten g_2 und g_3 ausdrücken; denn es ist:

$$\sqrt[8]{\varDelta}\equiv\sqrt[8]{g_2^3-27g_3^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^3}\cdot\vartheta\cdot\vartheta_2\cdot\vartheta_3,$$

$$g_2=\tfrac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^4(\vartheta^8+\vartheta_2^8+\vartheta_3^8),$$

$$g_3=-\tfrac{4}{27}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^6(\vartheta^4+\vartheta_3^4)(\vartheta_3^4+\vartheta_2^4)(\vartheta_2^4-\vartheta^4).$$

Der Beweis erfolgt zuerst durch directe Ausrechnung, indem (1) wiederholt differentiirt wird. Zum Schluss wird ein indirecter Beweis mittels der Halphen'schen Operation D angedeutet. Man hat

$$D = -2\eta \frac{\partial}{\partial \omega} - 2\eta' \frac{\partial}{\partial \omega'} \equiv 12 g_3 \frac{\partial}{\partial g_2} + \tfrac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial}{\partial g_3},$$

und daher ist $D\eta = \frac{1}{6} g_2 \omega$, $DD\eta = -\frac{1}{3} g_2 \eta + 2 g_3 \omega$. Drückt man in diesen Formeln alles durch Thetafunctionen aus, so gelangt man gerade zu den Gleichungen (2) und (3). Für die Gleichung (2) hat der Verf. diesen Beweis in seiner „Teoria delle Funzioni ellittiche" (F. d. M. **26**, 487, 1895) ausführlich dargestellt (vergl. daselbst S. 45, 99 und 117). St.

E. B. Christoffel. Die Convergenz der Jacobi'schen ϑ-Reihe mit den Moduln Riemann's. Zürich. Naturf. Ges. **41**, 2. Teil, 3-6.

Es sei $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \sum_{\mu,\nu} b_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p)$ eine definite positive quadratische Form mit reellen Coefficienten $b_{\mu\nu} = b_{\nu\mu}$. Dann hat φ unter der Bedingung $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 = 1$ als Minimum eine von Null verschiedene positive Zahl α, nämlich die kleinste Wurzel der Gleichung

$$|b_{\mu\nu} - u\varepsilon_{\mu\nu}| = 0 \quad \left(\varepsilon_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \mu \gtrless \nu \\ 1 & \mu = \nu \end{cases}\right) \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, p),$$

und in Folge dessen ist, wenn man den Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_p$ willkürliche Werte erteilt: $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p) \leqq \alpha(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2)$.

Betrachtet man jetzt die p-fach unendliche Summe

$$\Theta = \sum e^{-\varphi(m_1, m_2, \ldots, m_p) + 2(m_1\zeta_1 + \cdots + m_p\zeta_p)},$$

in der $m_1, m_2, \ldots, m_p$ alle ganzzahligen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen, und wo $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$ reelle Grössen bedeuten, so ist

$$\begin{aligned} \Theta &\leqq \sum e^{-\alpha(m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_p^2) + 2(m_1\zeta_1 + \cdots + m_p\zeta_p)} \\ &\leqq \sum e^{-\alpha m^2 + 2m\zeta_1} \cdot \sum e^{-\alpha m^2 + 2m\zeta_2} \ldots \sum e^{-\alpha m^2 + 2m\zeta_p}, \end{aligned}$$

und da $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha m^2 + 2m\zeta}$ convergirt, so convergirt auch Θ. Nun ist aber Θ nichts anderes als die Summe der absoluten Beträge der Riemann'schen p-fach unendlichen ϑ-Reihe, und damit ist nachgewiesen, „aus welchem Grunde die Convergenz [dieser Reihe] sich so zu sagen von selbst versteht."

Ueber die Stellung dieses Beweises zu den anderen von Rosenhain, Weierstrass, Riemann, Prym u. a. vergleiche man Krazer's inhaltreiche Abhandlung: Ueber die Convergenz der Thetareihe, Math. Ann. **49**, 400-416. St.

P. Appell. Quelques exemples de séries doublement périodiques. Nouv. Ann. (3) **15**, 126-129.

Convergirt die unendliche Summe: $\Phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[\Theta(x + 2nK'i)]$

mit $\Theta(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (-1)^\nu q^{\nu\nu} e^{\frac{\nu\pi i x}{K}}$ $(q = e^{-\pi\frac{K'}{K}})$, so stellt sie eine doppeltperiodische Function von x dar. Ist im besonderen $f(u) = u^p$ und p eine positive ganze Zahl, so findet Convergenz statt, und man erhält eine elliptische Function von x. Setzt man allgemeiner $f(u) = a+u^p$ $(a \neq 0)$, so bleibt zwar die Convergenz erhalten, aber $\Phi(x)$ besitzt im Periodenparallelogramme unendlich viele Pole und ist daher keine elliptische Function von x. St.

M. Krause. Zur Transformation der Thetafunctionen V. Leipz. Ber. **48**, 1896, 291-310.

In früheren Abhandlungen (Leipz. Ber. **45**, F. d. M. **25**, 779, 1893/94) hat der Verf. jene Additionstheoreme zwischen Thetafunctionen mit verschiedenen Moduln untersucht, welche für die Transformationen dritter und fünfter Ordnung in Betracht kommen. In der vorliegenden Arbeit wird, zu den Transformationen beliebiger Ordnung übergehend, die systematische Aufstellung aller jener Additionstheoreme unternommen, welche zwischen Producten von je zwei und von je drei Thetafunctionen bestehen, und für welche links nur die Moduln τ, 2τ, $n\tau$ oder $2n\tau$, rechts die Moduln $2^r\tau$ oder $2^s n\tau$ auftreten. Kr.

F. Brioschi. La moltiplicazione complessa per $\sqrt{-23}$ delle funzioni ellittiche. Annali di Mat. (2) **24**, 335-338.

Das Problem der complexen Multiplication mit $\sqrt{-23}$ hat Halphen (Traité, **3**, 174) zurückgeführt auf die Gleichung

$$\text{(I)} \qquad 7i\sqrt{23}\,(4.19.t^3-3^2.7.t)+\tfrac{1}{2}(4.317.t^2-3^3)=0,$$

in der t durch die beiden äquivalenten Relationen $e_1 = \frac{1}{2}(2t-1)e_2$, $e_3 = -\frac{1}{2}(2t+1)e_2$ definirt ist. Um den Zusammenhang dieser Gleichung mit der Transformation sechsten Grades darzulegen, geht Brioschi aus von der Modulargleichung für $n=6$ (vergl. F. d. M. **25**, 782, 1893/94) und gewinnt daraus durch eine Reihe von Umformungen die Gleichung: (II) $\gamma_3 + 3^4.5.g_3 + 7\,[\frac{1}{2}\varepsilon_3^3 + 3.5.e_1\varepsilon_3^2 + 2.3^2.5.e_1^2\varepsilon_3 - 2\gamma_2 e_1 - 12 g_2\varepsilon_3 + 3^3 g_2 e_1] = 0$, in der g_2, g_3, e_1, e_2, e_3 die ursprünglichen, $\gamma_2, \gamma_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ die transformirten Grössen bezeichnen. Bei der Multiplication mit $\mu = \frac{1}{2}(1+\sqrt{-23})$ ist nun $\varepsilon_3 = \mu^2 e_3$, $\gamma_2 = \mu^4 g_2$, $\gamma_3 = \mu^6 g_3$, und es geht daher (II) über in: (III) $7(17\mu^2+4.3^2)(4.19.t^3-3^2.7.t) + \frac{1}{2}(5\mu^2+4.3^2)(4.317t^2-3^3) = 0$, wo t dieselbe Bedeutung hat wie vorhin. Jetzt braucht man (III) nur noch mit $5\mu^2+19$ zu multipliciren, damit die Halphen'sche Gleichung (I) herauskommt. St.

B. Igel. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Monatsh. f. Math **7**, 149-164.

1. Weierstrass hat, einer Andeutung Abel's folgend, in seiner

1840 verfassten, aber erst 1856 veröffentlichten Abhandlung „Ueber die Entwickelung der Modularfunctionen" bewiesen, dass die elliptischen Functionen als Quotienten von zwei beständig convergenten Potenzreihen des Argumentes dargestellt werden können, deren Coefficienten ganze Functionen des Moduls sind. Später hat Hermite in seiner „Note sur la théorie des fonctions elliptiques" eine andere Herleitung dieses Satzes skizzirt, die der Verf. vollständig durchführt.

2. Die Entwickelung der Zähler und Nenner der elliptischen Functionen in Fourier'sche Reihen geschieht bei Weierstrass mit Hülfe einer partiellen Differentialgleichung, der diese Functionen genügen. Der Verf. macht darauf aufmerksam, dass dieselbe Methode von Jacobi in der Abhandlung „Ueber die partielle Differentialgleichung, welcher die Zähler und Nenner der elliptischen Functionen Genüge leisten" angedeutet worden ist. Er scheint aber nicht zu wissen, dass diese Abhandlung Jacobi's erst 1848 erschienen ist; denn wie könnte er sonst behaupten, dass diese Aeusserung Jacobi's „Weierstrass entgangen zu sein scheint"? — Es folgt noch

3. eine Formel, die sich aus den bekannten Beziehungen zwischen den Functionen Al, Al_1, Al_2, Al_3 und σ_3, σ, σ_1, σ_2 ergiebt.

4. Eine Bemerkung zu Borchardt's Arbeit „Ueber das arithmetisch-geometrische Mittel".

5. Die Interpretation einer Stelle in § 31 der Fundamenta nova.

St.

A. Cayley. Vier Briefe über elliptische Modulfunctionen. Herausgegeben und erläutert von H. Weber. Math. Ann. **47**, 1-5.

H. Weber. Bemerkungen zu den vorstehenden Briefen. Math. Ann. **47**, 6-19.

„Als kostbares Andenken an Arthur Cayley", so äussert sich der Herausgeber, „bewahre ich vier Briefe des grossen Mathematikers an mich aus seinem letzten Lebensjahre, die eine mit den elliptischen Modulfunctionen in nahem Zusammenhange stehende Frage aus der Reihenlehre in Anregung bringen, die, so interessant und wichtig sie ist, bis jetzt noch wenig behandelt worden ist. Ich glaube, den Mathematikern einen Dienst zu erweisen, wenn ich diese Briefe, aus denen zu ersehen ist, mit welchen Fragen und Gedanken Cayley in der letzten Zeit seines Lebens beschäftigt war, in wortgetreuem Abdruck veröffentliche. Meine Antworten lasse ich nicht mit abdrucken. Ihr Inhalt ist aber in den am Schlusse zugefügten Bemerkungen enthalten."

Setzt man nach dem Vorgange von Weber

$$f(\omega) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_1^\infty (1+q^{2\nu-1}), \quad f_1(\omega) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_1^\infty (1-q^{2\nu-1}),$$

$$f_2(\omega) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{12}} \prod_1^\infty (1+q^{2\nu}), \qquad (q = e^{\pi i \omega}),$$

so gelten die Relationen

$$\text{(A)} \quad f(-1/\omega) = f(\omega), \quad f_1(-1/\omega) = f_2(\omega), \quad f_2(-1/\omega) = f_1(\omega).$$

Die erste dieser Relationen wird in Evidenz gesetzt durch die Darstellung

$$\log f(\omega) = i\pi\left\{-\frac{\omega}{24}+\frac{1}{24\omega}-\frac{1}{12}S_1+\frac{1}{24}S_2+\frac{1}{24}S_3\right\},$$

welche auch die Unendlichkeitsstellen von $f(\omega)$ unmittelbar erkennen lässt. Es sind nämlich S_1, S_2 und S_3 gleich $\Sigma\frac{1}{\nu^2\omega-\mu^2\omega^{-1}}$, wo μ/ν alle positiven Brüche durchläuft, in denen μ und ν beziehungsweise ungerade, ungerade; ungerade, gerade; gerade, ungerade sind, jedoch mit der Beschränkung, dass im Unendlichen $\mu/\nu=\infty$ wird.

Dieser Darstellung von $f(\omega)$, die Cayley bereits 1893 in den C. R. gegeben hatte (F. d. M. **25**, 785, 1893/94), lassen sich an die Seite stellen die entsprechenden Darstellungen von $f_1(\omega)$ und $f_2(\omega)$:

$$\log f_1(\omega) = i\pi\left\{-\frac{\omega}{24}-\frac{1}{12\omega}+\frac{1}{24}S_1+\frac{1}{24}S_2-\frac{1}{12}S_3\right\},$$

$$\log f_2(\omega) = \log\sqrt{2}+i\pi\left\{+\frac{\omega}{12}+\frac{1}{24\omega}+\frac{1}{24}S_1-\frac{1}{12}S_2+\frac{1}{24}S_3\right\},$$

und der Beweis der beiden letzten Relationen (A) wäre geliefert, wenn sich zeigen liesse, dass identisch

$$\log\sqrt{2}+\frac{i\pi}{24}\{(S_1-S_1')-2(S_2-S_2')+(S_3-S_3')\}=0$$

ist; hierin sind S_1', S_2' und S_3' dieselben Summen wie S_1, S_2 und S_3, jedoch mit der Beschränkung, dass im Unendlichen $\mu/\nu=0$ wird. „But I am not able to verify this equation", so sagt Cayley am Schlusse seines ersten Briefes.

H. Weber stellt sich nun die Aufgabe, die Natur dieser merkwürdigen Reihenentwickelungen genauer zu ergründen und dadurch die Frage Cayley's zu beantworten. Ausgehend von der Kronecker'schen Formel

$$\lim_{s=1}\left[\sum_{x,y}\frac{1}{(Ax+2Bxy+Cx^2)^s}-\frac{\pi}{(s-1)\sqrt{m}}\right]$$
$$=-\frac{2\pi\Gamma'(1)}{\sqrt{m}}+\frac{\pi}{\sqrt{m}}\log\frac{A}{4m}-\frac{2\pi}{\sqrt{m}}\log\eta(\omega_1)\eta(\omega_2),$$

$$m=AC-B^2,\quad \omega_1=\frac{B+i\sqrt{m}}{A},\quad \omega_2=\frac{-B+i\sqrt{m}}{A}$$

$$(\sqrt{m}\text{ positiv}),\qquad \eta(\omega)=q^{\frac{1}{12}}\prod_1^\infty(1-q^{2\nu}),$$

leitet er die streng gültigen Formeln her:

$$\text{(B)}\quad\begin{cases}\dfrac{2\pi}{\beta}\log f(\alpha+i\beta)f(-\alpha+i\beta)=-\Sigma\dfrac{(-1)^{x+y}}{(x-\alpha y)^2+\beta^2y^2},\\ \dfrac{2\pi}{\beta}\log f_1(\alpha+i\beta)f_1(-\alpha+i\beta)=-\Sigma\dfrac{(-1)^{x}}{(x-\alpha y)^2+\beta^2y^2},\\ \dfrac{2\pi}{\beta}\log f_2(\alpha+i\beta)f_2(-\alpha+i\beta)=-\Sigma\dfrac{(-1)^{y}}{(x-\alpha y)^2+\beta^2y^2},\end{cases}$$

in denen x, y alle ganzzahligen Werte ausser $x = y = 0$ durchlaufen. Für reelles $i\omega$ ergeben sich aus ihnen die Formeln:

$$\text{(C)}\quad\begin{cases}\log f(\omega)=\frac{1}{3}\log\sqrt{2}+\dfrac{\pi i}{24}\left(-\omega+\dfrac{1}{\omega}-4S_1+2S_2+2S_3\right),\\ \log f_1(\omega)=\frac{1}{3}\log\sqrt{2}+\dfrac{\pi i}{24}\left(-\omega-\dfrac{2}{\omega}+2S_1+2S_2-4S_3\right),\\ \log f_2(\omega)=\frac{1}{3}\log\sqrt{2}+\dfrac{\pi i}{24}\left(\ 2\omega+\dfrac{1}{\omega}+2S_1-4S_2+2S_3\right),\end{cases}$$

in denen die Summen S_1, S_2, S_3 so zu verstehen sind, dass μ, ν an die Bedingung $\mu^2-\nu^2\omega^2 < n$ gebunden sind, und dann n ins Unendliche wächst. „Da die Art des Grenzübergangs von ω abhängt, so wird man diese Formeln wohl nicht als eine „Darstellung“ der Functionen $\log f(\omega)$ bezeichnen dürfen.“ „Diese Formeln unterscheiden sich von den Cayley'schen durch das Glied $\frac{1}{3}\log\sqrt{2}$. Wenn man aber andere Arten des Grenzüberganges wählt, so können natürlich ganz andere Werte herauskommen.“

Mittels der Formeln (C) lassen sich die Relationen (A) unmittelbar verificiren; denn bei Vertauschung von ω mit $-1/\omega$ gehen die Summen S_2 und S_3 in einander über, während S_1 ungeändert bleibt.

Wollte man für complexes ω ähnliche Formeln aufstellen, so wäre so zu verfahren. Die Formeln (B) lassen sich auch auf die Gestalt bringen:

$$\text{(B}'\text{)}\quad\begin{cases}\dfrac{4\pi i}{\omega}\log f(\omega)=-\lim\limits_{s=1}\Sigma\dfrac{(-1)^{x+y}}{(x^2-\omega^2y^2)^s},\\ \dfrac{2\pi i}{\omega}\log f_1(\omega)=-\lim\limits_{s=1}\Sigma\dfrac{(-1)^{x}}{(x^2-\omega^2y^2)^s},\\ \dfrac{2\pi i}{\omega}\log f_2(\omega)=-\lim\limits_{s=1}\Sigma\dfrac{(-1)^{y}}{(x^2-\omega^2y^2)^s};\end{cases}$$

in den Nennern steht in der Abhandlung selbst irrtümlich als Exponent 3 statt s. Jetzt müsste man in der xy-Ebene eine nach einem bestimmten Gesetz sich ins Unendliche vergrössernde geschlossene Curve finden (boundary curve nach Cayley), derart, dass man eine bis $s = 1$ einschliesslich stetige Function von s erhält, wenn man die in (B′) vorkommenden Summen so auffasst, dass zunächst nur die Werte x, y genommen werden, deren repräsentirende Punkte im Innern jener Curve liegen, und dann die Curve ins Unendliche ausdehnt. „Diese Curve

wird, wenn sie überhaupt existirt, von ω abhängig sein, und für den Fall eines rein imaginären ω ist es eben die Ellipse $x^2-\omega^2y^2=n$, die sich selbst ähnlich ins Unendliche rückt. Für ein complexes ω bin ich nicht im Stande, die Frage zu beantworten."

Eine andere Auffassung der Cayley'schen Formeln ergiebt sich aus den streng gültigen Gleichungen

$$(\mathrm{D})\quad\begin{cases}\sum\limits_{y=1}^{\infty}\sum\limits_{x=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{x+y}\omega}{\omega^2y^2-x^2}=+\dfrac{\pi^2}{24\,\omega}-\dfrac{\pi^2\omega}{24}+\pi i\log f(\omega),\\[2ex] \sum\limits_{y=1}^{\infty}\sum\limits_{x=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{x}\omega}{\omega^2y^2-x^2}=-\dfrac{\pi^2}{12\,\omega}-\dfrac{\pi^2\omega}{24}+\pi i\log f_1(\omega),\\[2ex] \sum\limits_{y=1}^{\infty}\sum\limits_{x=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{y}\omega}{\omega^2y^2-x^2}=+\dfrac{\pi^2}{24\,\omega}-\dfrac{\pi^2\omega}{12}+\pi i\log f_2(\omega),\end{cases}$$

in denen zuerst nach x, dann nach y zu summiren ist. Hiernach sind die Formeln (C) auch dann richtig, wenn man die Summen S_1, S_2 und S_3 in folgender Weise definirt: für μ und ν sind alle Paare positiver relativ primer Zahlen zu setzen, die den Bedingungen $0<\mu<m$, $0<\nu<n$ genügen, und dann sollen m und n so ins Unendliche wachsen, dass auch $m:n$ unendlich wird. Dabei ist ω keiner Beschränkung unterworfen.

Veranlasst durch diese Ausführungen von Weber, weist Cayley in seinem vierten Briefe darauf hin, dass auch in der Theorie der Weierstrass'schen σ-Function eine ähnliche Frage gestellt werden kann. Nimmt man in $\mathop{\Pi'}\limits_{(w)}\left(1-\dfrac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}$ $(w=2\mu\omega+2\mu'\omega')$ die Exponentialfactoren für sich und die binomischen Factoren für sich, so erhält man divergente oder wenigstens nur bedingt convergente Producte. Stellt man nun wieder die Zahlenpaare μ, μ' als Gitterpunkte in einer Coordinatenebene dar, so kann man in dieser Ebene eine der Einfachheit halber in Bezug auf die Coordinatenaxen symmetrische „boundary curve" ziehen und erhält alsdann

$$\sigma(u)=-\lim\frac{\Pi(w-u)}{\Pi'(w)}e^{\frac{1}{2}u^2\Sigma'\frac{1}{w^2}},$$

wenn die begrenzende Curve allseitig sich ins Unendliche ausdehnt. Unter diesen Umständen wird

$$\frac{\sigma(u+2\omega)}{\sigma(u)}=\frac{\Pi(-u-2\omega+w)}{\Pi(-u+w)}e^{(u+\omega)2\omega\,\Sigma'\frac{1}{w^2}}=-e^{2\eta(u+w)},$$

also wenn man mit Cayley den Productfactor $=-e^{(u+w)M}$ setzt, $2\eta=M+2\omega\Sigma'\dfrac{1}{w^2}$, und es kommt darauf an, für jede besondere Art der Grenzcurve die Grenze M zu bestimmen, was demnach ausser von der Natur dieser Curve nur von ω und ω', nicht von u abhängt.

Für die Grenze M giebt Weber eine bemerkenswerte Dar-

stellung; es ist $M = 2\omega\left(\lim_{s=1} \Sigma' \frac{1}{w^{2s}} - \Sigma' \frac{1}{w^2}\right)$. „$M$ würde sich also dann $= 0$ ergeben, wenn man die Glieder der Reihe $\Sigma' w^{-2s}$ durch die Wahl der Grenzcurve so anordnen könnte, dass man eine bis $s = 1$ stetige Function von s erhält.“ St.

F. Brioschi. Sulle equazioni modulari. Rom. Acc. L. Rend. (5) **5**$_2$, 333-340.

Eine Methode zur Aufstellung der Modulargleichungen, die Brioschi 1893 angegeben und auf den Fall $n = 5$ angewandt hatte, war, geeignet modificirt, von Greenhill (F. d. M. **25**, 772, 1893/94) auch für $n = 7$ als brauchbar befunden worden. Brioschi nimmt nun zunächst die Rechnungen für $n = 7$ wieder auf und corrigirt einen Rechenfehler von Greenhill. Alsdann zeigt er, dass man in entsprechender Weise auch die Fälle $n = 9$ und $n = 13$ behandeln kann.
St.

J. Rougier. Sur quelques sous-groupes de 11e classe du groupe modulaire. Marseille Ann. **6**, 112 S.

Ch. Hermite. Sur une extension du théorème de Laurent. (Extrait d'une lettre adressée à M. L. Fuchs). J. für Math. **116**, 85-89.

Betrachtet man die Wurzeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$ einer algebraischen Gleichung $G(y, x) = 0$ und beschreibt in der x-Ebene um $x = 0$ alle Kreise, die durch singuläre Punkte der $y_1, \ldots, y_n$ gehen, so sind diese innerhalb der so entstehenden Kreisringe endliche, stetige, jedoch nicht eindeutige Functionen von x. Setzt man jedoch $x = \xi^p$, so werden bei geeigneter Wahl der ganzen positiven Zahl p die Wurzeln $y_1, \ldots, y_n$ Functionen von ξ, die innerhalb des entsprechenden Kreisringes der ξ-Ebene eindeutig sind. Man kann daher auf einen solchen Kreisring das Laurent'sche Theorem anwenden und erhält auf diese Weise convergente Entwickelungen der $y_1, \ldots, y_n$, die nach positiven und negativen Potenzen von $\xi = x^{\frac{1}{p}}$ fortschreiten.

Hierin besteht die beabsichtigte Verallgemeinerung des Satzes von Laurent, die noch an dem Beispiel der Function $y = \frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$ ausführlich erläutert wird. St.

X. Stouff. Sur une application des fonctions elliptiques. Nouv. Ann. (3) **15**, 262-266.

Da bei den Flächen positiven Krümmungsmasses die Asymptotenlinien imaginär werden, so hat man neuerdings vorgeschlagen, an ihrer

Stelle diejenigen Curven zu betrachten, deren Tangenten mit einer der Krümmungslinien einen Winkel ω bilden, der durch die Gleichung $\operatorname{tg}\omega = \pm\sqrt{+\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}$ besimmt wird; ϱ_1 und ϱ_2 bedeuten die beiden Hauptkrümmungsradien.

Für das dreiaxige Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ lautet die Differentialgleichung dieser Curven bei Einführung elliptischer Coordinaten: $\frac{d\lambda^2}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}+\frac{d\mu^2}{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)}=0$, und in der vorliegenden Abhandlung wird ihre Discussion durchgeführt für den Fall, dass $b^2=\frac{a^2+c^2}{2}$ ist, einen Fall, der sich dadurch auszeichnet, dass er auf lemniskatische Functionen führt. St.

G. B. Mathews. The division of the lemniscate. Lond. M. S. Proc. **27**, 367-383.

Ausführliche Behandlung der Teilung der Lemniskate in fünf gleiche Teile. St.

K. Carda. Zur Quadratur des Ellipsoids. Monatsh. f. Math. **7**, 129-132.

Die bekannten Formeln für die Complanation des Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

leiden an dem Mangel, dass eine der drei Axen bevorzugt ist. Der Verfasser zeigt im Anschlusse an die elegante Methode, die von H. Weber herrührt, wie man durch Einführung einer Hülfsveränderlichen einen Ausdruck herleiten kann, der die Symmetrie bezüglich der Axen in Evidenz setzt. Die gesamte Oberfläche des Ellipsoids ist nämlich gleich

$$2\pi\xi+2\pi\int_{-\infty}^{0}\frac{s_x^2 s_\xi^2}{(x\xi)^2}\frac{(x\,dx)}{\sqrt{s_x^4}}-\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{3}\pi\int_{-\infty}^{0}\frac{(x\,dx)}{\sqrt{s_x^4}},$$

wo $s_x^4=x(x-a^2)(x-b^2)(x-c^2)$ zu setzen ist; ξ kommt nur scheinbar in diesem Ausdrucke vor, der für $\xi=a^2$ in den Weber'schen übergeht. St.

P. Patrassi. Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche quale applicazione degli integrali abeliani. Batt. G. **34**, 195-208.

Die elliptische Normalcurve gestattet unendlich viele eindeutige Transformationen in sich; im allgemeinen Falle sind dies diejenigen Transformationen, welche sich in der transcendenten Gestalt $u'=\pm u+c$

darstellen; im harmonischen und äquianharmonischen Falle aber kommen noch die Substitutionen $u' = \pm iu + c$ und $u' = \pm \alpha^{\pm 1} u + c$ hinzu. Die vorliegende Abhandlung ist der genaueren Untersuchung dieser Transformationen gewidmet und stellt sich insbesondere die Aufgabe, die von Segre (Torino Atti **24**, 734; F. d. M. **21**, 620, 1889) auf geometrischem Wege gewonnenen Resultate auf transcendentem Wege abzuleiten. Kr.

C. Hyperelliptische, Abel'sche und verwandte Functionen.

H. Stahl. Theorie der Abel'schen Functionen. Leipzig: B. G. Teubner. X + 354 S. gr. 8°.

Das vorliegende Buch enthält eine einheitliche und zusammenhängende Darstellung nicht nur der von Riemann selbst geschaffenen Theorie der Abel'schen Functionen, sondern auch der seither hinzugekommenen Ausführungen derselben und füllt damit eine Lücke aus, welche jeder, der bis jetzt die genannte Theorie zum Gegenstande, sei es seines Studiums, sei es seiner Vorträge, gemacht hat, empfindlich fühlte. Insofern möchte es der Ref. fast bedauern, dass der Verf. an einigen, allerdings nur wenigen Stellen, „um längere Einschaltungen, welche die Uebersicht über die Hauptteile erschweren konnten, zu vermeiden", sich mit der historischen Anführung von Erklärungen und Sätzen begnügt hat. Andererseits muss aber ganz besonders die grosse Uebersichtlichkeit in der Anordnung und Darstellung des Stoffes hervorgehoben werden, welche durch Vorausschickung der wichtigsten Sätze und Formeln aus der Lehre von den elliptischen Functionen (zum Zwecke des Hinweises auf ihre Analogie mit den Sätzen und Formeln der Theorie der Abel'schen Functionen), durch Inhaltsangaben am Anfange jedes der beiden Teile und in ausführlicher Weise am Anfange jedes der 8 Abschnitte und in den einzelnen Abschnitten durch scharfe Hervorhebung der wichtigen Sätze und Formeln erreicht wird.

Das ganze Buch ist in zwei Teile (1. die rationalen Functionen und Abel'schen Integrale, 2. das Jacobi'sche Umkehrproblem) und in 8 Abschnitte geteilt. Der Inhalt der einzelnen Abschnitte lässt sich folgendermassen angeben, wobei der Ref. an vielen Stellen den eigenen Angaben des Verf. folgen konnte.

Der erste Abschnitt untersucht die algebraische Grundgleichung $F(x, y) = 0$ und die zugehörige Verzweigungsfläche T. Speciell giebt § 1 eine geometrische Untersuchung der Gleichung $F(x, y) = 0$, welche in § 2 zur Construction der Riemann'schen Fläche T führt; für diese wird in § 3 die Lüroth-Clebsch'sche Normalform angegeben. Eine strengere Definition und Unterscheidung der verschiedenen Arten von kritischen Punkten, sowie die Bestimmung der Zahl und Lage dieser Punkte ist aber erst durch eine analytische Untersuchung der Gleichung $F(x, y) = 0$ möglich; diese wird in § 4 und § 5 durchgeführt. Der

erste Abschnitt schliesst sodann mit dem in § 6 durch functionentheoretische Betrachtungen erbrachten Beweis des Hauptsatzes, dass jede wie T verzweigte Function eine rationale Function von x und y ist, und dessen Umkehrung.

Der zweite Abschnitt untersucht sodann eingehend die Eigenschaften einer rationalen Function von x und y und ihre Bildung aus gewissen Elementen. Dieser Stoff ist in folgender Weise gegliedert. Die §§ 7—9 enthalten die Untersuchung der Nullpunkte einer ganzen rationalen Function von x und y und der Kriterien für eine ganze rationale Function, die §§ 10 und 11 die Untersuchung der Null- und Unendlichkeitspunkte einer gebrochenen rationalen Function von x und y und der Abhängigkeit dieser Punkte von einander. Die §§ 12 und 13 geben die Bildungsweise der rationalen Functionen von x und y aus gewissen Elementen und die Abhängigkeit dieser Elemente von einander. Die Untersuchungen dieses Abschnittes schliessen sich im wesentlichen an die wichtige Arbeit von Brill und Nöther im 7. Bande der Math. Annalen an. Sie sind an sich rein algebraisch; um aber den algebraischen Processen und Resultaten eine kurze Fassung zu geben, wird jene geometrische Ausdrucksweise benutzt, nach welcher $F(x, y) = 0$ eine algebraische Curve vom Grade n und vom Geschlechte p ist, und den 0- und ∞-Punkten einer rationalen Function von x und y die Schnittpunkte der Curve $F(x, y) = 0$ mit zwei anderen algebraischen Curven $M = 0$, $N = 0$ entsprechen. Dabei lässt der Verf., um eine die Uebersicht erschwerende Ausdehnung der Untersuchung zu vermeiden, (ausser gewissen Voraussetzungen über die zu untersuchende rationale Function) die Beschränkung eintreten, dass $F(x, y) = 0$ nur einfache Verzweigungspunkte und von singulären Punkten nur Doppelpunkte enthalte. Doch ist die Untersuchung so geführt, dass eine Verallgemeinerung derselben nur ein tieferes Eindringen in die singulären Punkte von $F(x, y) = 0$ und das Verhalten von $M = 0$ und $N = 0$ in denselben erfordert.

Der dritte Abschnitt ist den Abel'schen Integralen gewidmet. Nachdem in § 14 die allgemeinen Eigenschaften der Abel'schen Integrale entwickelt sind, wird die weitere Untersuchung zunächst auf jene bekannten drei „Gattungen“ von Integralen beschränkt, welche sich durch besonders einfache und charakteristische Eigenschaften auszeichnen; davon untersucht § 15 die Integrale erster Gattung, die Systeme von p linear unabhängigen Integralen erster Gattung und insbesondere das der p Riemann'schen Normalintegrale, während § 16 von den Integralen zweiter und dritter Gattung und ihren Normalformen handelt. § 17 bringt sodann die Zusammensetzung des allgemeinen Abel'schen Integrals aus Integralen der drei Gattungen. Die letzten Paragraphen (18—20) des Abschnittes betrachten die Beziehungen zwischen Abel'schen Integralen unter sich oder zwischen ihnen und wie T verzweigten Functionen. Nachdem in § 18 eine allgemeine Formel zwischen den Elementen zweier beliebigen Abel'schen Integrale abgeleitet ist, werden aus ihr einige specielle Formeln und insbesondere in § 19 das Abel'sche Theorem

gewonnen; § 20 behandelt sodann speciell das Abel'sche Theorem für die Integrale erster Gattung und seine Umkehrung.

Der vierte Abschnitt behandelt die eindeutigen rationalen Transformationen der Gleichung $F(x, y) = 0$, d. h. jene, bei welchen sowohl die neuen Variabeln x_1, y_1 rational durch x, y wie auch umgekehrt ausgedrückt werden. Für die Theorie der Abel'schen Functionen sind diejenigen Formen besonders wichtig, die einer solchen eindeutigen Transformation gegenüber invariant sind. Man unterscheidet invariante Constanten (die Geschlechtszahl p und gewisse aus den Coefficienten von $F(x, y)$ gebildete Combinationen, die Klassenmoduln) und invariante Functionen (die Quotienten der zu $F = 0$ adjungirten Functionen $(n-3)^{\text{ten}}$ Grades und die durch sie darstellbaren Functionen und Integrale). Der Untersuchung dieser Invarianten sind die §§ 22 und 23 gewidmet, während der Schlussparagraph (24) jene Clebsch'sche Darstellung der in x, y rationalen Functionen und ihrer Integrale behandelt, bei welcher die Gleichung $F(x, y) = 0$ durch $\varrho - 1$ homogene Gleichungen zwischen $\varrho + 1$ Variabeln ersetzt wird.

Der fünfte Abschnitt behandelt die Eigenschaften der Thetafunctionen von p Variabeln. Die Einführung derselben geschieht (dem Beispiele von Weber für $p = 3$ folgend) in der Weise, dass zunächst die Thetafunctionen höherer Ordnung durch ihre Functionalgleichungen definirt werden und daraus ihre Darstellung durch die Thetafunctionen erster Ordnung abgeleitet wird (§ 25). Nachdem § 26 die Eigenschaften der Thetafunctionen erster Ordnung mit „zweiteiliger" Charakteristik eingehend behandelt hat, beziehen sich § 27 auf die Zahl und Lage der Nullpunkte einer Thetafunction, deren Argumente aus den p Normalintegralen erster Gattung gebildet sind, und § 28 auf das identische Verschwinden dieser Functionen.

Der sechste Abschnitt enthält die Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems. Als Vorbereitung hierzu wird im Anschlusse an die Untersuchungen des vorhergehenden Abschnittes in § 29 und § 30 der Zusammenhang zwischen den Thetafunctionen $\vartheta_\mu((u))$ und gewissen algebraischen Wurzelfunctionen $\sqrt{\psi_\mu}$ untersucht, der sich auf die gemeinsamen Nullpunkte dieser Functionen gründet. § 31 giebt alsdann die Grundformeln zur Lösung des Umkehrproblems, § 32 und § 33 eine Discussion dieser Formeln in der Weise, dass in § 32 die algebraische Bestimmung der Wurzelfunctionen $\sqrt{\psi_\mu}$ und ihre Zuordnung zu den zweiteiligen Charakteristiken μ, § 33 die Aufstellung der Normalintegrale erster Gattung und die Bestimmung der Thetamoduln durch die Klassenmoduln behandelt.

Die im vorigen Abschnitte gegebene Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems beruht auf der Darstellung von einfachen Thetaquotienten mit p Argumenten V_h durch algebraische und symmetrische Functionen der Coordinaten von $q + 1$ Punkten x_k, welche die oberen Grenzpunkte in den Integralsummen V_h sind.

Der siebente Abschnitt (§§ 34-37) beschäftigt sich mit der Verall-

gemeinerung dieser Darstellungen, nämlich mit der Aufstellung der allgemeinsten Beziehungen zwischen Thetafunctionen mit den p Argumenten V_h einerseits und algebraischen Functionen oder Abel'schen Integralausdrücken, die symmetrisch gebildet sind in den Coordinaten der $q+1$ Punkte x_k, andererseits.

Im achten Abschnitte wird der Einfluss untersucht, den der Uebergang von einem kanonischen Querschnittsystem zu einem anderen auf die Darstellungen des Umkehrproblems hat, oder mit anderen Worten die Lehre von der linearen Transformation, und zwar behandeln die §§ 38-41 der Reihe nach die lineare Transformation der Perioden, der Periodencharakteristiken, der Thetafunctionen und der Thetacharakteristiken.

Kr.

W. A. Poort. **Een bijzondere klasse van Abel'sche integralen.** Inaug.-Diss. Groningen 1896, 56 S.

Ueber die Abel'schen Integrale $\int f(x, y)\, dx$, wo:

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{n+1}) = y^4(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_{n+1}),$$

und die zugehörige Riemann'sche Fläche. Mo.

J. Dolbnia. **Sur la réduction des intégrales abéliennes dépendant d'une équation algébrique binôme.** Darboux Bull. (2) **20**, 156-184.

Der Verf. hat schon in einer früheren Abhandlung (Darboux Bull. (2) **19**; F. d. M. **26**, 508, 1895) das Geschlecht eines Integrals: $J = \int \frac{dx}{\sqrt[m]{(x-a)^\alpha \dots (x-l)^\lambda}}$ durch Abzählung der allenthalben endlichen Integrale von der Form: $A = \int \frac{x^p F(x) dx}{\sqrt[m]{[(x-a)^\alpha \dots (x-l)^\lambda]^q}}$ bestimmt. In der vorliegenden Abhandlung wird diese Abzählung an einer Reihe von Beispielen durchgeführt; es werden die auftretenden Integrale A einer näheren Betrachtung unterworfen, und insbesondere wird gezeigt, dass diejenigen unter ihnen, bei denen m und q keinen Teiler gemeinsam haben, stets durch ein und dieselbe Substitution in elliptische Integrale übergeführt werden können. Kr.

J. P. Dolbnia. **Ueber die Reduction der Abel'schen Integrale, welche von den Wurzeln der binomischen algebraischen Gleichungen abhängen.** Mosk. Math. Samml. **18**, 647-689. (Russisch.)

In der ersten Abhandlung betrachtet der Verf. das Integral

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x^2-a)(x^2-b)}} \quad \text{(s. Bertrand, Calcul intégral, p. 67).}$$

Wenn $x^2 - a = 1/y$, $y = 6\wp^2(z) - \beta$, so ist

$$J = -\tfrac{1}{2}\log\frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z+z_0)} + \frac{i}{2}\log\frac{\sigma(z-z_0 i)}{\sigma(z+z_0 i)}.$$

Wenn $z_0 = \frac{1}{4}\varpi$ oder $z_0 = \frac{1}{3}\varpi$ ist, wo ϖ eine Periode der Function $\wp(z)$ ist, so ist J durch Logarithmen integrirbar. Solcher Art sind die Integrale $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^4-1}}$ und $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x^2-a)(x^2+3a\pm 2a\sqrt{3})}}$.

In der zweiten Abhandlung betrachtet der Verf., indem er auch die Weierstrass'schen Functionen benutzt, das Integral $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x^6+px^3+q}}$ und zeigt z. B. die Behandlung des Integrals $\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(x^3-a)(x^3-2a)}}$.

In der dritten Abhandlung beschäftigt sich der Verf. mit vielen hyperelliptischen Integralen, welche sich durch Logarithmen ausdrücken; alle diese Integrale haben die Form $\int\frac{dx}{\sqrt[m]{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\dots(x-l)^\lambda}}$.

Speciell untersucht sind von dem Verf. die Integrale

$$\int\frac{dx}{\sqrt[12]{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta(x-c)^\gamma}} \text{ und } \int\frac{dx}{\sqrt[8]{(x-a)^\alpha(x-b)^\beta(x-c)^\gamma}}.$$

Wi.

J. P. Dolbnia. Ueber den logarithmischen Ausdruck des Integrals $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+px^2+q}}$. Mosk. Math. Samml. **18**, 108-121. (Russisch).

J. P. Dolbnia. Neuer Fall der Integration in Logarithmen. Mosk. Math. Samml. **18**, 150-160. (Russisch.)

J. P. Dolbnia. Untersuchungen aus der Theorie der Abel'schen Integrale. These, vorgelegt dem Berginstitut in St. Petersburg. 1896. (Russisch.)

Zusammenstellung der früheren Arbeiten des Verfassers, die teils im „Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan, 3" (F. d. M. **25**, 805, 1893/94), teils in der Moskauer Mathematischen Sammlung (siehe die vorangehenden Referate) veröffentlicht waren. Wi.

M. A. Tichomandritzky. Ueber die adjungirten Functionen dritter Art. Chark. Ges. (2) **5,** 182-189. (Russisch.)

Eine Ergänzung zu § 54 der „Elemente der Theorie der Abel'schen Integrale“ (F. d. M. **26,** 506, 1895). Es wird bewiesen, dass der Quotient von $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})\,dx/dt$ durch $(ax+by+e)\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ endlich bleibt für $x=\infty$, $y=\infty$, wenn man die adjungirte Function $\psi(\overset{m-1}{x}, \overset{n-1}{y})$ gemäss den neuen, in diesem Artikel gegebenen Bedingungen bestimmt. Die Anwendung der Fundamentalgleichung $F(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = 0$ auf den hyperelliptischen Fall führt zu der gewöhnlichen Form dieser Function. Wi.

P. M. Pokrowsky. Die Grundlagen der Lehre von den transcendenten Functionen, welche ein Additionstheorem besitzen. Kiew Phys.-Math. Ges. Ber. 1895; Kiew Univ. Nachr. No. 5, 1896. (Russisch.)

P. M. Pokrowsky. Das Additionstheorem der transcendenten Functionen. Mosk. Math. Samml. **18,** 121-136. (Russisch.)

P. M. Pokrowsky. Ueber die Functionen von zwei Argumenten, welche den Weierstrass'schen elliptischen Transcendenten analog sind. Mosk. Math. Samml. **18,** 598-625. (Russisch.)

Die erste Abhandlung hat zum Gegenstand die Grundlagen der Theorie der Transcendenten, welche ein Additionstheorem besitzen, indem der Verf. die Riemann'sche Theorie der algebraischen Integrale und die Weierstrass'sche Lösung des Umkehrproblems combinirt; eingehend wird der besondere Fall des Abel'schen Theorems betrachtet, den Weierstrass in seiner Abhandlung: „Zur Theorie der Abel'schen Functionen“ (Werke **1,** 139) benutzt hat. Hierzu ist zu bemerken, dass Tichomandritzky in seiner Arbeit: „Ueber das Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale“. Charkow, 1885 (F. d. M. **17,** 471, 1885) das Umkehrproblem auf die Grundlage dieses besonderen Falls des Abel'schen Theorems gestellt hat, der ihm von Weierstrass persönlich mitgeteilt war, und auch in seinen letzten Arbeiten über die Theorie der elliptischen und Abel'schen Functionen hat er die Weierstrass'schen Theorien mit der Betrachtung der Riemann'schen Flächen combinirt (F. d. M. **26,** 489, 506). Indem die erste Abhandlung alle wichtigsten Eigenschaften sowohl der elliptischen, als der hyperelliptischen Functionen erster Klasse erledigt (inclusive der Theorie der Functionen Al und Θ), bilden die zwei anderen Abhandlungen nur einen Auszug aus der ersten Abhandlung. Wi.

P. M. Pokrowsky. Sur les fonctions ultra-elliptiques à deux arguments. Darboux Bull. (2) **20,** 86-103.

Die vorliegende Arbeit, welche eine kurze Theorie der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung enthält, schliesst sich im wesentlichen an die Darstellung von Weierstrass an. Es werden nach einander die ultra-elliptischen Integrale, das Abel'sche Theorem, das Jacobi'sche Umkehrproblem und die ultra-elliptischen Functionen behandelt, und es wird insbesondere auf die Analogien hingewiesen, welche zwischen der behandelten Theorie und der Theorie der elliptischen Functionen bestehen.

Kr.

P. Epstein. Zur Lehre von den hyperelliptischen Integralen. Acta Math. **20**, 1-58.

In einer Abhandlung von Wiltheiss (J. f. M. **99**; F. d. M. **17**, 480, 1885) findet sich für die Integranden der hyperelliptischen Fundamentalintegrale erster und zweiter Gattung eine Form erwähnt, welche aus der Entwickelung der Function $s/(z-\zeta)$ im Unendlichen entspringt. Die Untersuchung dieser ganzen Functionen φ und der mit ihrer Hülfe gebildeten Integrale ω ist der Ausgangspunkt der vorliegenden Abhandlung.

Nachdem in § 1 das hyperelliptische Gebilde definirt ist, werden in § 2 einige Eigenschaften der Functionen φ abgeleitet. Aus diesen ergiebt sich dann in § 3, dass die Derivirten sämtlicher Hauptintegrale nach den Verzweigungspunkten sich in einfachster Weise durch die Derivirten $\partial\omega/\partial e_i$ eines einzigen Hauptintegrals ω ausdrücken, woraus dann weiter partielle Differentialgleichungen für die Periodicitätsmoduln der Hauptintegrale fliessen. In § 4 werden die Integrale $\partial\omega/\partial e_i$ durch die Hauptintegrale dargestellt, das Integral dritter Gattung eingeführt, das nur in den unendlich fernen Gebieten und einem Punkt im Endlichen unstetig wird, und aus diesem wird das algebraisch normirte Integral dritter Gattung mit Vertauschbarkeit von Argument und Parameter gewonnen. In § 5 leitet der Verf. die Weierstrass'schen Relationen für die Periodicitätsmoduln der Hauptintegrale ab und zeigt, dass die in ihnen auftretenden bilinearen Verbindungen als Periodicitätsmoduln von $2p$ Integralen A_μ und B_μ aufgefasst werden können, die ein zweites System von Fundamentalintegralen bilden. Diese Integrale sind selbst wieder Periodicitätsmoduln des Integrals dritter Gattung. Mit Hülfe der Weierstrass'schen Relationen wird dann der Wert der Determinante $(2p)^{\text{ten}}$ Grades ermittelt, welche die Verallgemeinerung der Legendre'schen Relation für $p=1$ darstellt. Am Schluss dieses Paragraphen werden die Bedingungen untersucht, unter welchen bei einer gegebenen Reihe von ganzen Functionen $\psi_1(z)$, $\psi_2(z)$, ... der Ausdruck $\frac{1}{\psi_k(e_i)}\frac{\partial}{\partial e_i}\left(\frac{\psi_k(z)}{s}\right)$ für jedes k denselben Wert hat. Es besteht nämlich der merkwürdige Umstand, dass die Integranden sämtlicher in dieser Arbeit auftretenden Integrale erster und zweiter Gattung (diejenigen der Hauptintegrale A_μ und B_μ und der Normalintegrale erster und zweiter Gattung) diese Eigenschaft besitzen.

Im zweiten Teile wird zu den bekannten Riemann'schen Normal-

integralen erster Gattung als notwendige Ergänzung ein System von Normalintegralen zweiter Gattung hinzugefügt und eine Reihe von $2p+2$ Integralen T_i aufgestellt, die zu den Derivirten dieser Normalintegrale in eben derselben Beziehung stehen, wie die Integrale $\partial\omega/\partial e_i$ zu den Derivirten der Hauptintegrale. Es gelingt dabei, zu der eleganten, von Thomae gefundenen Relation zwischen den Derivirten der Periodicitätsmoduln $a_{\mu\nu}$ der Normalintegrale erster Gattung und deren Integranden eine Reihe gleichartiger Relationen hinzuzufügen und als gemeinsame Quelle derselben ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung nachzuweisen, zu deren Lösungen die Integrale T_i gehören. Ein sehr allgemeiner Satz, der für je zwei Lösungssysteme dieser partiellen Differentialgleichungen besteht, führt dazu, eine enge Beziehung zwischen den Integralen T_i und den Derivirten des transcendent normirten Integrals dritter Gattung aufzufinden, und eine Specialisirung dieser Beziehung liefert eine Function Ω von z, die genau der Function $\bar{Q}_{xy}^{xy}$ entspricht, mit deren Hülfe Klein eine Primform bildet. Eine kurze Erörterung des Zusammenhangs dieser Function Ω mit der hyperelliptischen Thetafunction bildet den Schluss der Arbeit. Kr.

F. Brioschi. Relations différentielles entre les périodes des fonctions hyperelliptiques $p=2$ (Extrait d'une lettre à M. L. Fuchs). J. für Math. **116**, 326-330.

Bezeichnet man mit ω_{1m}, ω_{2m} $(m = 1, 2, 3, 4)$ die Perioden der beiden zum Geschlechte $p = 2$ gehörigen Fundamentalintegrale erster Gattung und setzt allgemein $p_{rs} = \omega_{1r}\omega_{2s} - \omega_{1s}\omega_{2r}$ $(r, s = 1, 2, 3, 4;\ r < s)$, so giebt es in Folge der Beziehung $p_{12} + p_{34} = 0$ nur fünf wesentlich verschiedene Grössen p_{rs}. Dieselben sind die Integrale einer linearen Differentialgleichung fünften Grades, für welche die Invarianten ungeraden Grades verschwinden, welche also ihrer adjungirten äquivalent ist.

Kr.

A. Tauber. Ueber das specielle Zweiteilungsproblem der hyperelliptischen Functionen. Monatsh. f. Math. **7**, 97-110.

Der Verf. stellt in § 1 die Aufgabe, eine in z und $u = \sqrt{R(z)}$ (wobei u weder im Nullpunkte, noch im Unendlichen einen Verzweigungspunkt habe) rationale Function so zu bestimmen, dass sie nicht in zwei conjugirten Punkten verschwinde, dass sie ferner, wo sie verschwindet, Null von gerader Ordnung werde, und dass sie endlich nur in dem einen Punkte $(0, u_0)$ unendlich werde (die Ordnungszahl heisse ν), und zeigt, dass die Lösung dieser Aufgabe darauf hinauskommt, R in zwei Factoren R_1, R_2 geraden Grades zu zerspalten und dazu zwei ganze rationale Functionen Q_1, Q_2 so zu bestimmen, dass $Q_1^2 R_1 - Q_2^2 R_2 = z^{\nu/2}\psi(z)$ wird, wo ψ eine ganze rationale Function bezeichnet. Er zeigt ferner, dass zu dem kleinsten möglichen Werte, den ν für eine gegebene Zerlegung $R = R_1 R_2$ annehmen kann, von einem constanten Factor ab-

gesehen, nur ein Paar Functionen Q_1, Q_2, also nur eine Function ψ existirt. Die so für die $2^{2p}-1$ Zerlegungen von R definirten Functionen ψ werden in § 2 in einfacher Weise durch $2p$ Indices $z_1, z_2, ..., z_{2p}$ charakterisirt, und es wird sodann die Gruppe Γ jener Substitutionen, welche durch die Vertauschungen der $2p+2$ Verzweigungspunkte unter den Functionen ψ hervorgerufen werden, explicit dargestellt. Kr.

G. Bertolani. Sulle derivate logaritmiche di ordine superiore delle funzioni theta iperellittiche a due argumenti. Batt. G. **34**, 135-145.

Die vorliegende Note behandelt die Darstellung der zweiten, dritten und vierten logarithmischen Derivirten der Thetafunctionen zweier Variabeln durch die Quotienten dieser Functionen. Kr.

E. Pascal. Sulla ricerca del secondo termine dello sviluppo in serie delle funzioni sigma abeliane pari di genere tre. Annali di Mat. (2) **24**, 193-212.

Die Coefficienten der Reihenentwickelung der geraden Sigmafunctionen dreier Variabeln sind Invarianten eines gewissen Netzes von Oberflächen zweiter Ordnung, und speciell ist der Coefficient des zweiten Gliedes eine Combinante achten Grades der Coefficienten dieses Netzes. In der vorliegenden Abhandlung wird die Berechnung dieser Combinante durchgeführt; als Ausgangspunkt dienen dem Verf. dabei die Resultate seiner früheren Arbeiten (Annali di Mat. (2) **18**, F. d. M. **22**, 491, 1890), in denen er den gesuchten Coefficienten durch die Coefficienten eines aus dem oben erwähnten Oberflächennetze abgeleiteten Connexes ausgedrückt hat. Kr.

E. Jahnke. Ueber ein allgemeines aus Thetafunctionen von zwei Argumenten gebildetes Orthogonalsystem und seine Verwendung in der Mechanik. Berl. Ber. 1896, 1023-1030.

Anknüpfend an die Arbeiten von Caspary, stellt der Verf. ein System von 16 Coefficienten einer orthogonalen Substitution und 12 dazu gehörigen Differentialgrössen auf, welche durch passende Specialisirung das von F. Kötter (Berl. Ber. 1895; F. d. M. **26**, 517, 1895 und J. für Math. **116**, s. das folgende Ref.) angegebene Orthogonalsystem liefern. Dabei gewinnt der Verf. die vorher erwähnte orthogonale Substitution durch Composition von zwei, die Bedingungen der Orthogonalität identisch erfüllenden Substitutionen. Kr.

F. Kötter. Ueber eine Darstellung der Richtungscosinus zweier orthogonalen Coordinatensysteme durch Thetafunctionen zweier Argumente, welche die Lösungen mehrerer Probleme der Mechanik als Specialfälle umfasst. J. für Math. **116**, 213-246.

Nähere Ausführung jener Untersuchungen (Berl. Ber. 1895) des Verf., über welche schon F. d. M. **26**, 517, 1895 berichtet wurde.

Kr.

W. Wirtinger. Zur Theorie der $2n$-fach periodischen Functionen (2. Abhandlung). Monatsh. f. Math. **7**, 1-25.

In der ersten Abhandlung (Monatsh. f. Math. **6**, F. d. M. **26**, 513, 1895) hat der Verf. gezeigt, dass jede $2n$-fach periodische Function f (der dort bezeichneten Art) durch Einführung passend gewählter Variabeln in eine mit den Perioden $P_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} d_\mu^{-1}$, $P_{\mu,n+\nu} = \tau_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$ periodische Function verwandelt werden kann, wobei $\delta_{\mu\nu} = 1$, wenn $\mu = \nu$, und $= 0$, wenn $\mu \neq \nu$ ist, die d_μ positive ganze Zahlen, die $\tau_{\mu\nu}$ Grössen von der Art der Thetamoduln sind. Da die Function f dann auch die Perioden $P_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$, $P_{\mu,n+\nu} = \tau_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$ besitzt, so ergab sich mit Hülfe eines Weierstrass'schen Satzes sofort, dass sie sich stets rational durch Thetafunctionen darstellen lässt.

Im ersten Teile der vorliegenden Abhandlung zeigt der Verf., dass man Functionen mit den Perioden $P_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} d_\mu^{-1}$, $P_{\mu,n+\nu} = \tau_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \ldots, n)$ direct mit Hülfe von Thetafunctionen herstellen kann, indem man solche Thetafunctionen R^{ter} Ordnung bildet, welche den Gleichungen:

$$\psi(v_1 | \ldots | v_\nu + d_\nu^{-1} | \ldots | v_n) = \psi(v_1 | \ldots | v_\nu | \ldots | v_n),$$
$$\psi(v_1 + \tau_{1\nu} | \ldots | v_n + \tau_{n\nu}) = \psi(v_1 | \ldots | v_n) e^{-(2Rv_\nu + R\tau_{\nu\nu})\pi i}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen. Er erkennt dabei, dass man R durch die Zahlen d_μ teilbar annehmen muss, gelangt unter dieser Annahme zur Darstellung der allgemeinsten Function ψ durch Thetafunctionen und findet weiter, dass alle diese Functionen durch $R^n/d_1 d_2 \ldots d_n$ unter ihnen linear und homogen darstellbar sind. Diese von dem Verf. im Anschlusse an die Untersuchungen von Frobenius (J. für Math. **97**, F. d. Math. **16**, 378, 1884) abgeleiteten Resultate ergeben sich übrigens einfacher, wenn man von der Thomae-Prym'schen Darstellung einer Thetafunction R^{ter} Ordnung in der Gestalt:

$$\Theta((v)) = \sum_{\varrho_1, \ldots, \varrho_n}^{0, 1, \ldots, R-1} A_{\varrho_1 \ldots \varrho_n} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{\varrho}{R} \\ 0 \end{bmatrix} ((Rv))_{Ra}$$

ausgeht.

Hierauf folgt die Untersuchung des Verhaltens der Functionen ψ, wenn für die Argumente v einzelne Integrale erster Gattung gewisser algebraischer Gebilde oder Summen von solchen substituirt werden.

Zum Schlusse wird die Anzahl der Lösungen der hier dem Jacobi'schen Umkehrproblem entsprechenden Aufgabe bestimmt, und dadurch werden im Zusammenhange mit dem Vorhergehenden zwei Sätze Poincaré's

(S. M. F. Bull. **11**, F. d. M. **15**, 430, 1883 und Am. J. **8**, F. d. M. **18**, 421, 1886) neuerdings auf einem ganz verschiedenen Wege bewiesen. Kr.

H. GRÖNWALL. **Några användnigar af de $2n$-periodiska funktionerna på teorien för system af lineära totala differential equationer.** Stockh. Öfv. **53**, 20 S.

Bericht auf S. 285 dieses Bandes.

D. Kugel- und verwandte Functionen.

E. BELTRAMI. **Sulla teoria delle funzioni sferiche.** Lomb. Ist. Rend. (2) **29**, 793-799.

Der Verf. wirft zuerst die Frage auf, unter welchen Bedingungen der Differentialgleichung der Kugelfunctionen mit zwei Variabeln durch eine Function einer Variable u genügt werden kann. Bedenkt man, dass für $n = 1$ die Variable u selbst eine Lösung der Differentialgleichung sein muss, dass andererseits jene Lösung dann eine lineare Function von ζ, $\sqrt{1-\zeta^2}.\cos w$, $\sqrt{1-\zeta^2}\sin w$ ist, so ergiebt sich

$$u = (a\cos w + b\sin w)\sqrt{1-\zeta^2}+c\zeta,$$

und die Constanten a, b, c müssen der Gleichung $a^2+b^2+c^2 = 1$ genügen. Diese Gleichung wird erfüllt durch $c = 1$, $a^2+b^2 = 0$, und man erhält als Lösung die einfache Kugelfunction P_n mit dem Argumente $\zeta + k\sqrt{1-\zeta^2}\,e^{iw}$. Die Entwickelung dieser Function nach dem Taylor'schen Satze führt unmittelbar, da k willkürlich ist, auf die fundamentalen Functionen: $P_n(\zeta)$, $P_{nm}(\zeta)\cos(mw)$, $P_{nm}(\zeta)\sin(mw)$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$, und damit hat man auch die allgemeinste Form der Kugelfunction n^{ter} Ordnung. Hieran schliesst der Verf. einen einfachen Beweis für das Additionstheorem der Kugelfunctionen.

Ferner wird Folgendes erörtert. Die Differentialgleichungen zweier Kugelfunctionen einer Veränderlichen mit zwei auf einander folgenden Indices bilden ein System von zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, das man nach Einführung von zwei Hülfsfunctionen H, K durch ein System von vier Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzen kann. Durch $H = 0$ und $K = 0$ wird zweien dieser vier Gleichungen genügt, und die beiden anderen gehen dadurch in die Recursionsformeln über, die Beltrami in anderem Zusammenhange schon früher abgeleitet hatte (cf. F. d. M. **19**, 505, 1887 und **22**, 505, 1890; es handelt sich um die an beiden Stellen mit 2) bezeichneten Gleichungen). Wn.

L. GEGENBAUER. **Notiz über die Kugelfunctionen.** Monatsh. f. Math. **7**, 35-36.

Für die Function $C_n^\nu(x)$, den Coefficienten von α^n in der Entwickelung von $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu}$, stellt der Verf. eine nach Potenzen von $x-1$ fortschreitende Reihe auf und wendet dieselbe auf den Fall

$\nu = r + \frac{1}{2}$ an, wo r eine ganze Zahl ist. Aus der Form der Coefficienten dieser Reihe, die nur Potenzen von 2 im Nenner haben, ergiebt sich die Congruenz $C_n^{r+\frac{1}{2}}(2y+1) \equiv \binom{n+2r}{n} (\text{mod.} 2)$; und da $C_n^{r+\frac{1}{2}}$ gleich der r^{ten} Ableitung der Kugelfunction $P_n(x)$ ist, so folgt der von Bauer aufgestellte Satz (cf. F. d. M. **25**, 310, 1893/94), dass für ein ganzzahliges ungerades Argument $P_n(x)$ eine ungerade ganze Zahl und alle Ableitungen von $P_n(x)$ sowie $\int_1^x P_n(x)dx$ ganze Zahlen sind.

Ausserdem wird bemerkt, dass ein von Bauer in der citirten Arbeit abgeleiteter zahlentheoretischer Satz ein specieller Fall eines von dem Verf. gefundenen Theorems ist. Wn.

E. W. Hobson. **On a type of spherical harmonics of unrestricted degree, order and argument.** Lond. Phil. Trans. **187** A, 443-531; Lond. R. S. Proc. **59**, 189-196. (Abstract.)

Die Lösungen der Differentialgleichung, der die Zugeordneten P_n^m der Kugelfunctionen genügen, werden bei beliebigen Werten von m und n untersucht. Darstellung der Lösungen durch Integrale auf complexem Wege (Doppelumläufe), Reihenentwickelungen, asymptotische Werte, Recursionsformeln. „Die Arbeit hat den Zweck, die verschiedenen Typen der Kugelfunctionen, wie Ring-, Kegelfunctionen etc., in eine gemeinsame Behandlung einzureihen", was namentlich durch das altbewährte Hülfsmittel der complexen Integration gelingt. A. S.

J. H. Graf. **Ableitung der Formeln für die Bessel'schen Functionen, bei welchen das Argument eine Distanz darstellt.** Schweiz. Naturf. Ges. Verh. 1896, 3 S.

Die Entwickelung der Bessel'schen Function J_n mit dem Argumente $p = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi}$ (d. i. nach Heine's Bezeichnung das Additionstheorem der Bessel'schen Functionen) ist zuerst für den Fall, dass der Index $n = 0$, von C. Neumann gegeben, für beliebige n von Gegenbauer und Sonine und in einer der Neumann'schen analogen Form vom Verf. (s. F. d. M. **25**, 844, 1893/94). Für die letztgenannte Formel wird hier eine neue Ableitung mitgeteilt, die auf einer Transformation des Schläfli'schen Integrals für J_n beruht.

Wn.

L. Crelier. **Sur quelques propriétés des fonctions Besséliennes, tirées de la théorie des fractions continues.** Annali di Mat. (2) **24**, 131-163.

Im **23.** Bande der Annali di Mat. (cf. F. d. M. **26**, 526, 1895) hat

Graf eine Anzahl bemerkenswerter Relationen hergeleitet zwischen Bessel'schen Functionen einerseits und Kettenbrüchen, deren Nenner eine arithmetische Reihe bilden, andererseits. Die vorliegende Arbeit vervollständigt und erweitert die Graf'schen Resultate, indem sie neue, allgemeinere Beziehungen aufstellt, in denen die Graf'schen Gleichungen als besondere Fälle enthalten sind. Der Verf. stützt sich dabei auf Sätze von Catalan über Kettenbrüche (cf. F. d. M. **15**, 155, 1883), sowie auf den Satz von Kramp. Von den Ergebnissen der Arbeit mögen die folgenden hier Platz finden. Wenn P dieselbe Bedeutung hat wie bei Graf, so ist

$$(1) \quad P_{p+1}^{a-1}(x)P_s^a(x) - P_{s+1}^{a-1}(x)P_p^a(x) = P_{s-p-1}^{a+p+1}(x),$$

$$(2) \quad P_{k+1}^{m-1}(x)P_{l-n-1}^{n}(x) - P_{l-m}^{m-1}(x)P_{k+m-n}^{n}(x) = -P_{n-m}^{m-1}(x)P_{k+m-l}^{l}(x),$$

$$(3) \quad J_n(x)P_{l-m}^{m-1}(x) - J_{m-1}(x)P_{l-n-1}^{n}(x) = J_l(x)P_{n-m}^{m-1}(x),$$

und die letzte Gleichung bleibt auch richtig, wenn an Stelle der Bessel'schen Function erster Art J die Bessel'sche Function zweiter Art K tritt. Ferner ist

$$P_{n-m}^{m-1}(x) = \frac{\pi x}{2}(J_n(x)K_{m-1}(x) - J_{m-1}(x)K_n(x)).$$

Der Schluss der Arbeit betrifft die von C. Neumann eingeführte Function $O_n(z)$, den Coefficienten von $2J_n(x)$ bei der Entwickelung von $1/(z-x)$ nach Bessel'schen Functionen $J_n(x)$. Es wird gezeigt, wie man aus dem Integralausdruck für $O_n(z)$ durch Benutzung von Sätzen über Kettenbrüche zu der Entwickelung dieser Functionen nach fallenden Potenzen von z gelangen kann. Der Verf. adoptirt Neumann's Benennung dieser Functionen als Bessel'sche Functionen zweiter Art, ein Name, der deshalb nicht zweckmässig erscheint, weil $O_n(z)$ nicht der Differentialgleichung der Bessel'schen Functionen genügt. Wn.

Nash, H. W. Curjel, Gopalachniar. Solution of question 11457. Ed. Times **64**, 79-80.

In Forsyth's Differential equations Chap. V, ex. 18 (Deutsche Ausgabe von Maser S. 208) ist als zu beweisen die von Lommel gegebene Formel $Y_n I_{n+1} - Y_{n+1} I_n = 1/x$ vorgelegt. Nash hatte die Richtigkeit dieser Formel bezweifelt und ein anderes Resultat vermutungsweise mitgeteilt. Curjel zeigt, dass beide Formeln auf einander zurückführbar sind. Vergl. auch den Beweis bei Maser S. 569-570 a. a. O.

Lp.

B. A. Smith. Table of Bessel's functions Y_0 and Y_1. Messenger (2) **26**, 98-101.

Tabelle von $Y_0(x)$ und von $Y_0'(x) = -Y_1(x)$ auf vier Decimalen von $x=0$ bis $x=1$ in Schritten von je 0,01 und von $x=1$

bis $x = 10,2$ in Schritten von je 0,1. Die Werte von $Y_0(x)$ wurden aus der Formel berechnet:

$$Y_0(x) = J_0(x) \log x + \frac{x^2}{2^2} - (1+\tfrac{1}{2}) \frac{x^4}{2^2 . 4^2} + \cdots,$$

die der Y_1-Function aus der Ableitung. Glr. (Lp.)

Mathematical functions. Report of committee appointed for the purpose of calculating tables of certain mathematical functions. Brit. Ass. Rep. 1896, 98-119.

Dieser Bericht enthält eine Tabelle von $I_0(x)$ von $x = 0$ bis $x = 5,100$ in Schritten von je 0,001 auf neun Decimalstellen, wobei die letzte Stelle angenähert gilt. Die Tafel ist nach denselben Grundsätzen entworfen wie die von $I_1(x)$ (F. d. M. **25**, 837, 1893/94).

Gbs. (Lp.)

Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

begründet

von

Carl Ohrtmann.

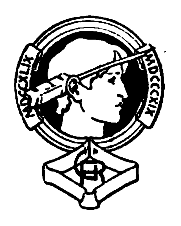
Im Verein mit anderen Mathematikern
und unter besonderer Mitwirkung der Herren
Felix Müller und **Albert Wangerin**

herausgegeben

von

Emil Lampe.

Band XXVII.
Jahrgang 1896.
(In 3 Heften.)
Heft 2.



Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1898.

Bogen 24 bis 36.

Mathematischer Verlag von Georg Reimer in Berlin.

Baer, O., Éléments d'algèbre à l'usage des classes moyennes du collège royal français. 8. 1885 . . . . geb. 2.50

— — Éléments de géométrie plane à l'usage des élèves du collège royal français. 8. 1887 . . . . geb. 3.—

Ball, Rob. S., theoretische Mechanik starrer Systeme. Auf Grund der Methoden und Arbeiten Ball's herausgegeben von H. Gravelius. Mit 2 Abbildungen. 8. 1889 . . . . 14.—

Borchardt, C. W., gesammelte Werke. Auf Veranlassung der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften herausgeg. von G. Hettner. Mit Borchardt's Bildniss. 4. 1888 . . . . 17.—

Bork, H., und **Fr. Poske,** Hauptsätze der Arithmetik für die Unter- und Mittelklassen des Gymnasiums. 3. Aufl. 8. 1892 . . . . —.60

Budde, E., allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme. Ein Lehrbuch für Hochschulen. I. Band: Mechanik der Punkte und Punktsysteme. 8. 1890 . . . . 7.—

— — II. Band. Mechanische Summen und starre Gebilde. 8. 1891 . 8.—

Crelle, A. L., Rechentafeln, welche alles Multipliciren und Dividiren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei grösseren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Mit einem Vorwort von C. Bremiker. A. u. d. T. — Tables de calcul etc. 7 te Stereotyp-Ausgabe. 4. 1895 . . . . geb. 15.—

Dirichlet, G. Lejeune, Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften. 4.

I. Band. Herausg. v. L. Kronecker. Mit Dirichlet's Bildniss. 1889 21.—

— — II. Band. Herausg. v. L. Kronecker, fortgesetzt v. L. Fuchs. 1897 18.—

Eisenstein, G., mathemat. Abhandlungen, besonders aus dem Gebiete der höheren Arithmetik und der elliptischen Functionen. Mit einer Vorrede von Gauss. 4. 1847 . . . . 4.—

— Tabelle der reducirten positiven ternären quadratischen Formen nebst den Resultaten neuer Forschungen über diese Formen in besond. Rücksicht auf ihre tabellarische Rechnung. 4. 1851 . . . 1.—

Emmerich, Dr. A., die Brocardschen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks. Mit 50 Figuren im Text und einer lithographischen Tafel. 8. 1891 . . . . 5.—

Gravelius, H., fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln für die Decimaltheilung des Quadranten, mit ausführlichen Tafeln zum Uebergang von der neuen Theilung des Quadranten in die alte und umgekehrt. Nebst vierstelligen Tafeln der Zahlenwerthe der trigonometrischen Functionen, sowie gewöhnlichen Logarithmentafeln und Quadrattafeln. Mit einem Vorworte von Professor Dr. W. Förster, Direktor der Königl. Sternwarte zu Berlin. 8. 1886. . . . . geb. 6.—

Haentzschel, E., Studien über die Reduction der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Ein Anhang zu Heine's Handbuch der Kugelfunctionen. 8. 1893 . . . . 6.—

Heine, E., Handbuch der Kugelfunctionen. 2. Auflage.
Erster Band. Theorie. 1878 . . . . 8.—
Zweiter Band. Anwendungen. 1881 . . . . 6.—



Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Kapitel 1.

Principien der Geometrie.

E. Study. Ueber Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie. Leipz. Ber. **48**, 1896, 649-664.

Zur Ableitung der Invarianten, die beliebig viele Punkte und Gerade gegenüber der Gruppe der euklidischen Bewegungen besitzen, bildet der Verf. zunächst die Invarianten der Punkte und Geraden gegenüber der Gruppe aller Schiebungen und lässt dann zwei von den Punkten mit den imaginären Kreispunkten zusammenfallen. Auf diese Weise ergeben sich unter Beobachtung einer einfachen Regel alle ganzen Bewegungsinvarianten im Sinne des Verfassers als ganze Functionen gewisser Hauptinvarianten, und es wird zugleich eine präcise Fassung der Thatsache gewonnen, die man gewöhnlich, aber unexact, so ausdrückt: Die Sätze der euklidischen Geometrie sind Beziehungen geometrischer Figuren zu den Kreispunkten. Aus Bewegungsinvarianten werden nunmehr die Invarianten der projectiven Gruppen zusammengesetzt, welche die Gruppe der Bewegungen als Untergruppe enthalten. Ferner werden alle irreducibeln Identitäten aufgestellt, die zwischen den vorhin erwähnten Hauptinvarianten einer Anzahl von Punkten und Geraden bestehen. Das Rechnen mit diesen Identitäten macht in einem gewissen, genau angebbaren Umfange die Anwendung explicite hingeschriebener Coordinaten entbehrlich und eröffnet daher einen Weg zu einer systematischen Behandlung der euklidischen Geometrie. Dies wird erläutert durch Aufstellung der Ausdrücke, die sich mit Hülfe der Hauptinvarianten für die in der Elementargeometrie gebräuchlichen Grössen ergeben, also für den Dreiecksinhalt, den Winkel zweier Geraden u. s. w.; ferner durch Angabe der Lösung der Aufgabe, die Bedingung aufzustellen, unter der vier Punkte auf einem Kreise liegen; endlich durch Aufstellung der Gleichung des

Feuerbach'schen Kreises, der zu einem gegebenen Dreiecke gehört. Vor den in der analytischen Geometrie üblichen Methoden hat das Rechnen mit jenen Identitäten namentlich den Vorzug, dass die Gleichungen, zu denen man kommt, niemals durch fremde Factoren entstellt sein können. El.

G. Veronese. **Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti e infinitesimi attuali.** Math. Ann. **47**, 423-432.

Die Arbeit ist polemischer Natur und richtet sich gegen Einwürfe, welche Cantor und Killing gegen die in den Fondamenti di geometria etc. (cfr. F. d. M. **24**, 483, 1892) niedergelegten Lehren des Verfassers geltend gemacht haben. Wegen der Einzelheiten dieser Controverse muss auf die Arbeiten selbst verwiesen werden. E. K.

L. Bianchi. **Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica.** Annali di Mat. (2) **24**, 93-129.

Wie durch Klein's Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie bekannt geworden ist, hat Clifford 1873 in einem nicht veröffentlichten Vortrage den Vorschlag gemacht, den Begriff der parallelen Geraden für den dreifach ausgedehnten elliptischen Raum in einer anderen Weise zu verallgemeinern, als das bisher, bei Benutzung der unendlich fernen Punkte, geschehen war. Unter den Bewegungen des elliptischen Raumes sind ausgezeichnet die „Schiebungen“ (scorrimenti), die in vieler Hinsicht den Translationen des euklidischen Raumes entsprechen. Diese Schiebungen haben die Eigenschaft, dass nach ihrer Ausführung alle Punkte dieselbe Entfernung von ihrer Anfangslage haben. Jeder Punkt beschreibt bei ihnen eine gerade Linie, und alle diese Geraden gehören einer „Clifford'schen Congruenz“ an; entsprechend den beiden Scharen von erzeugenden Geraden der Fundamentalfläche giebt es zwei Arten von Schiebungen, links- und rechtsgewundene, und zwei Arten von Clifford'schen Congruenzen. Clifford schlägt nun vor, zwei Gerade parallel zu nennen, wenn sie gleichzeitig derselben Clifford'schen Congruenz angehören, und diese Definition hat gegenüber der bisher üblichen den grossen Vorteil, dass „fast alle geometrischen Sätze und Eigenschaften, die in der Elementargeometrie über Parallellinien aufgestellt werden, sich wiederfinden.“

Von besonderem Interesse sind die geradlinigen Flächen, deren erzeugende Geraden alle einer und derselben Clifford'schen Congruenz angehören, und unter ihnen wieder die „Clifford'schen Flächen“, die ein doppeltes System solcher Geraden besitzen; diese haben nämlich das Krümmungsmass Null, und da ausserdem ihr Gesamtflächeninhalt endlich ist (denn im elliptischen Raume haben die Geraden eine endliche Länge), so geben sie das erste Beispiel geschlossener endlicher Mannigfaltigkeiten vom Krümmungsmasse Null.

Es gilt sogar der Satz, dass eine jede zu einer Clifford'schen Congruenz gehörige geradlinige Fläche das Krümmungsmass Null hat.

Nimmt man nämlich als Curven $u =$ const. die Geraden selbst und als Curven $v =$ const. ihre orthogonalen Trajectorien, so zeigen einfache Ueberlegungen, dass $ds^2 = du^2 + dv^2$ wird. Weit schwerer ist es, die Umkehrung dieses Satzes zu beweisen, also zu zeigen, dass alle geradlinigen Flächen vom Krümmungsmasse Null zu einer Clifford'schen Congruenz gehören, und hierhin zielen die Untersuchungen des ersten Teiles der vorliegenden Abhandlung, über die sogleich berichtet werden soll. Vorher ist jedoch noch folgende Bemerkung erforderlich. Bei einer Fläche des elliptischen Raumes muss man die „absolute Krümmung" K von der „relativen Krümmung" k unterscheiden. Jene ist das Krümmungsmass, das der zugehörigen quadratischen Differentialform ds^2 zukommt, diese ist das Product der beiden Hauptkrümmungen. Während im euklidischen Raume diese beiden Grössen identisch sind, besteht im elliptischen Raum vom Krümmungsmasse $1/a^2$ zwischen ihnen die Relation $k = K - 1/a^2$.

Um den eben erwähnten Beweis zu führen, entwickelt Bianchi in kurzen Zügen eine allgemeine Theorie der krummen Oberflächen und gewundenen Curven im elliptischen Raume, die auch an sich von grossem Interesse ist. Hier wie beim euklidischen Raume gehören zu jeder Fläche S zwei fundamentale quadratische Differentialformen, deren sechs Coefficienten wieder durch drei Differentialrelationen verknüpft sind, und wie bei dem Satze von Bonnet ist auch hier durch die Angabe dieser sechs Fundamentalgrössen die Fläche S bis auf eine Bewegung im Raume vollständig bestimmt. Ebenso lässt sich auch für gewundene Curven ein System von Formeln aufstellen, das den Frenet'schen durchaus entspricht.

Jetzt ergeben sich der Reihe nach folgende Sätze: Die Flächen der Binormalen von Curven constanter Torsion sind auf Rotationsflächen abwickelbar, wobei die erzeugenden Geraden in Meridiane übergehen. Ist die Torsion $T = \pm 1/a$, so ist die Fläche der Binormalen eine geradlinige Fläche von der absoluten Krümmung Null, und umgekehrt sind bei einer jeden geradlinigen Fläche vom Krümmungsmasse Null die orthogonalen Trajectorien der erzeugenden Geraden congruente Curven der constanten Torsion $T = \pm 1/a$. Nimmt man jetzt hinzu, dass die Binormalen jeder Curve dieser Art im Sinne von Clifford parallel sind, so ist damit der verlangte Beweis geliefert.

Im zweiten Teile der Abhandlung wird die Aufgabe gelöst, alle Flächen vom Krümmungsmasse Null im elliptischen Raume zu bestimmen. Es stellt sich hier ein wesentlicher Unterschied gegenüber der euklidischen Geometrie heraus, in der alle Flächen vom Krümmungsmasse Null, alle „abwickelbaren" Flächen geradlinig sind. Denn die geradlinigen Flächen von der „absoluten" Krümmung Null im elliptischen Raum entsprechen nur den euklidischen Cylindern; im besonderen entspricht die Clifford'sche Fläche dem geraden Kreiscylinder. Daneben giebt es auch im elliptischen Raume „abwickelbare" Flächen, nämlich abwickelbar auf die Ebene der elliptischen Geometrie; sie haben die „relative" Krümmung $k = 0$, dagegen ist ihre „absolute" Krümmung $K = 1/a^2$.

Diese Flächen sind, wie in der euklidischen Geometrie, der Ort der Tangenten von gewundenen Curven, also ebenfalls geradlinig.

Zunächst ergiebt sich, dass das Quadrat des Linienelementes einer Fläche der Krümmung Null — der Zusatz „absolut" soll von jetzt an weggelassen werden —, bezogen auf die Asymptotenlinien u, v, die Form annimmt $ds^2 = du^2 + 2\cos[U(u) + V(v)]\,du\,dv + dv^2$, und dass umgekehrt bei willkürlich angenommenen $U(u)$ und $V(v)$ zu diesem ds^2 eine Fläche vom Krümmungsmasse Null gehört, bei der u, v die Parameter der Asymptotenlinien sind; ist eine der Functionen U und V eine Constante, so erhält man eine geradlinige Fläche; sind beide gleich Constanten, die Clifford'sche Fläche.

Hieraus folgt dann eine höchst elegante geometrische Erzeugungsweise dieser Flächen. Der Begriff der „Translationsfläche" lässt sich nämlich sofort in die Geometrie des elliptischen Raumes übertragen, und es ist aus den am Anfange dieses Berichtes gemachten Bemerkungen unmittelbar ersichtlich, wie sich so die „Schiebungsflächen" (superficie di scorrimento) des elliptischen Raumes ergeben. Dies vorausgeschickt, gilt der Satz: Die Flächen vom Krümmungsmasse Null sind im elliptischen Raume die Schiebungsflächen, deren erzeugende Curven zwei Curven der constanten Torsion $T = 1/a$ und $T = -1/a$ sind.

Zu diesem Hauptergebnisse kommt noch eine Reihe schöner Theoreme, von denen hier nur die folgenden angeführt werden können: In der elliptischen Geometrie sind die Curven constanter Krümmung und Torsion die geodätischen Linien der Clifford'schen Fläche, die also auch in dieser Beziehung dem geraden Kreiscylinder entspricht. — Die beiden Schalen der Evolute einer Fläche der Krümmung Null sind selbst von der Krümmung Null; den Asymptotenlinien der Evolvente entsprechen auf beiden Schalen wieder die Asymptotenlinien. Die geodätischen Linien, die auf einer jeden Schale der Evolute von den Normalen der Evolvente eingehüllt werden, sind im euklidischen Sinne parallel, und zieht man umgekehrt auf einer Fläche der Krümmung Null irgend eine Schar paralleler Geodätischer, so gehören zu den Tangenten dieser Geodätischen als orthogonale Flächen Flächen von der Krümmung Null. Trägt man auf den Tangenten einer Schar paralleler Geodätischer einer Fläche S der Krümmung Null von dem Berührungspunkte aus immer die Strecke eines Quadranten ab $(a\pi/2)$, so ist der Ort S' der Endpunkte dieser Strecken wieder eine Fläche der Krümmung Null.

Nunmehr wendet sich Bianchi drittens zu den dreifach orthogonalen Systemen im elliptischen Raume und stellt sich die Aufgabe, alle Systeme dieser Art zu ermitteln, die eine Schar von Flächen der Krümmung Null enthalten. Er findet das bemerkenswerte Resultat, dass zu jedem willkürlich gewählten Paare von pseudosphärischen Flächen des euklidischen Raumes ein dreifach orthogonales System der verlangten Art gehört, und dass jeder einzelnen pseudosphärischen Fläche des gewöhnlichen Raumes ein dreifach orthogonales System des elliptischen Raumes zugeordnet ist, bei dem die eine Schar der Flächen geradlinig

und vom Krümmungsmasse Null ist; die orthogonalen Trajectorien dieser Flächen sind Curven der constanten Torsion $T = \pm 1/a$.

Wird der elliptische Raum in der bekannten Weise conform auf den euklidischen abgebildet, so haben die soeben betrachteten dreifach orthogonalen Systeme Systeme derselben Art zu Bildern. Dabei entsprechen den Geraden des Objectes Kreise, die eine feste Kugel in diametral entgegengesetzten Punkten schneiden, und diese Kreise bilden zusammen mit ihren orthogonalen Trajectorien ein isothermes Netz; sie sind jedoch keine Krümmungslinien.

Den Schluss der inhaltreichen Abhandlung bildet der Nachweis, dass die Transformation von Bäcklund auch auf die betrachteten dreifach orthogonalen Systeme des elliptischen Raumes Anwendung findet und ebenfalls nur die Processe der Elimination und Differentiation erfordert. St.

W. Kagan. Abriss des geometrischen Systems von Lobatschefsky. Spaczinski's Bote No. 234, 23 S. (Russisch.)

Fortsetzung der in F. d. M. **26**, 533, 1895 besprochenen Arbeit. Ausdrücke der Bogen- und Flächenelemente in der Geometrie von Lobatschefsky, sowie Betrachtungen über Volumina einiger Rotationsflächen, wodurch Lobatschefsky selbst zu einigen Integraltransformationen geführt wurde. Si.

P. Nasimow. Ueber Definition der Ebene bei Lobatschefsky. Kasan Univ. No. II, Abt. 2, 1-4. (Russisch.)

Ein Bedenken gegen die von Lobatschefsky in den „Neuen Anfängen" S. 28 gegebene Definition der Ebene als geometrischer Ort der Durchschnittspunkte zweier gleichen Kugeln, deren Mittelpunkte zwei Pole der Ebene bilden. Der Verf. hebt hervor, dass diese Definition zur vollständigen Charakterisirung der Ebene nicht ausreicht; man muss noch als Axiom der Ebene die Möglichkeit, die Pole der Ebene zu ändern, ausdrücklich hinzufügen. Si.

W. Sikstel. Einige Folgerungen des XI. Axioms. Pädag. Samml. **6**, 533-545. (Russisch.)

Es werden die folgenden, meistens stillschweigend angenommenen Sätze bewiesen:

1) Es giebt keine Dreiecke mit einem oder zwei Winkeln grösser als $2R$.

2) Die durch eine Ecke eines Dreiecks parallel der gegenüberliegenden Seite gezogene Gerade liegt nicht innerhalb, sondern ausserhalb des Dreiecks.

3) Der eine der beiden Teile, in welche eine in sich zurücklaufende Linie die Ebene zerteilt, ist endlich.

Das Parallelenaxiom wird verdoppelt:

1) Durch einen gegebenen Punkt einer Ebene kann man zu einer gegebenen Geraden nur eine Parallele ziehen.

2) Wenn zwei Gerade sich schneiden, so liegen ihre von dem Schnittpunkt auslaufenden Stücke auf einer Seite einer beliebigen Secante, welche nicht durch den Schnittpunkt geht. Si.

P. MANSION. Sur une nouvelle démonstration du postulatum d'Euclide. Mathesis (2) **6**, 109-112.

Widerlegung des Versuches zum Beweise des euklidischen Postulats, den Frolow in der Broschüre „Démonstration de l'axiome XI d'Euclide" gemacht hatte (F. d. M. **26**, 535, 1895). Dml. (Lp.)

M. FROLOW. Réponse aux observations de M. Mansion concernant la Démonstration de l'axiome XI d'Euclide. Mathesis (2) **6**, 225-228. Dml.

P. MANSION. Premiers principes de la métagéométrie ou géométrie générale. Mathesis (2) **6**, Suppl. IV, 47 S.; Revue néoscolastique **3**, 143-170, 242-259.

1. Vorbegriffe. Die drei Geometrien, ihre philosophische Tragweite. 2. Historische Skizze. Thales, Pythagoras, Eudoxus, Archimedes; Euklides, Legendre; Saccheri, Lambert, Taurinus, Legendre; Gauss, Schweikart; Lobatschefsky, Bolyai, Riemann, De Tilly. 3. Definitionen nach Euklides; die vier ersten euklidischen Postulate. 4. Das fünfte und sechste Postulat; zufolge der Definition wird die Geometrie nach Lobatschefsky, nach Riemann oder nach Euklides benannt, je nachdem sie die Definition der Geraden vermittelst des Postulates 6, des Postulates 5 oder der Postulate 5 und 6 ergänzt. 5. 26 elementare, den drei Geometrien gemeinsame Lehrsätze (Euklid's Elemente **1**, 1-26). 6-7. Charakteristische Sätze der euklidischen und der Lobatschefsky'schen Geometrie. 8. Charakteristische Sätze der Riemann'schen Geometrie. 9. Die Postulate sind Ergänzungen zur Definition und nicht synthetische Urteile a priori. 10. Skizze der Hauptsätze der Metageometrie. Unbeweisbarkeit der Postulate. 11. Die physische Geometrie ist näherungsweise euklidisch; aber es ist unmöglich, zu wissen, ob sie es absolut ist. 12. Die Metageometrie und der Kantianismus. Kant giebt a priori zu, dass es nur eine mögliche ideale Geometrie giebt, was widersinnig ist, da es ja unendlich viele giebt, die sich in drei Klassen teilen. Anhang. Die Geometrie als mathematische Physik der Entfernungen. Ueberblick über die Methode von De Tilly. Vereinbarkeit der Postulate mit den Definitionen. Mn. (Lp.)

P. MANSION. La géométrie non-euclidienne avant Lobatschefsky.

A. DEMOULIN. Compte rendu de l'ouvrage intitulé: La géométrie réglée et ses applications par G. Koenigs. Mathesis (2) **6**, Suppl. I, 15 S.

Beide Artikel sind der Revue des questions scientifiques **8**, 603-613 und 613-617 (1895) entnommen. Das erste ist eine Anzeige des Werkes von Engel und Stäckel: Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Der Verf. fasst die vor Lobatschefsky gewonnenen Ergebnisse in sechs Sätze zusammen, von denen er zwei Legendre, einen Lambert, einen Taurinus, einen gleichzeitig Gauss und Schweikart zuschreibt. Mn. (Lp.)

F. Dauge. Sur la géométrie non euclidienne. Mathesis (2) **6**, 7-13.

P. Mansion. Note. Ebenda.

Nach Dauge ist die nichteuklidische ebene Geometrie nichts weiter als die euklidische Geometrie der Geodätischen der Kugel und der Pseudosphäre; die nichteuklidische räumliche Geometrie ist unmöglich oder kommt auf die euklidische Geometrie als die wahre Geometrie zurück. — Für Mansion ist die nichteuklidische, ebene oder räumliche Geometrie eine Geometrie, welche ein Postulat (das fünfte oder sechste euklidische Postulat) weniger braucht als die euklidische Geometrié, und welche denselben philosophischen Wert wie diese besitzt. Mn. (Lp.)

G. Lechalas. Identité des plans de Riemann et des sphères d'Euclide. Brux. S. sc. **20** B, 167-177.

P. Mansion. Sur la non-identité du plan riemannien et de la sphère euclidienne. Brux. S. sc. **20** B, 178-182.

Die beiden Widersacher sind über den folgenden Punkt einig: Die Riemann'sche Ebene hat dieselben inneren Eigenschaften wie die euklidische Kugel; die anderen Eigenschaften weichen ab. Der Zwiespalt erstreckt sich wahrscheinlich nur auf eine Frage der Definition.

Mn. (Lp.)

P. Mansion. Une nouvelle forme de la relation entre les distances de cinq points en géométrie non-euclidienne. Brux. S. sc. **20** A, 62-63.

Diese Relation ist $|x_i, y_i, z_i, u_i, 0| = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$; x_i, y_i, z_i bedeuten die Sinus der Abstände des Punktes i von drei Coordinatenebenen, u_i den Cosinus des Abstandes vom Anfangspunkte.

Mn. (Lp.)

W. H. L. Janssèn van Raay. Sur une formule de la géométrie non-euclidienne. Nieuw Archief (2) **3**, 77-79.

Einfacher Beweis der Formel $\operatorname{ctg} \frac{1}{2}\pi(x) = e^{\frac{x}{k}}$, wo $\pi(x)$ den Parallelwinkel für die Distanz x und k die charakteristische Constante der Geometrie von Lobatschewsky darstellt. Mo.

K. Traub. **Der verjüngte Magister Matheseos. Ein Beitrag zur Sphärik und absoluten Geometrie.** Lahr: M. Schauenburg. 12 S. 8°. Mit 1 Taf.

Der pythagoreische Satz lässt sich in der Form aussprechen: Im rechtwinkligen Dreieck ist der Inhalt des mit der Hypotenuse als Radius beschriebenen Kreises das arithmetische Mittel aus den mit Summe und Differenz der Katheten als Radien beschriebenen Kreisen. In dieser, wie auch in anderen Formen, von denen der Verf. Beispiele giebt, gilt der Satz in allen drei Geometrien. Schg.

Leray. **Sur la nature de l'espace.** Brux. S. sc. **20** A, 1-6.

E. Vicaire. **Observations sur cette note.** Ebenda, 6-7.

Leray nimmt den Raum als ein reelles und passives Ding an, Vicaire als ein reelles und actives. Mn. (Lp.)

O. Stolz. **Bemerkung zum Aufsatze „Die ebenen Vielecke und die Winkel mit Einschluss der Berührungswinkel als Systeme von absoluten Grössen“.** Monatsh. f. Math. **7,** 296.

Im ersten Bande der Stolz'schen „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“ finden sich Erörterungen, welche die Auffassung begründen, dass die ebenen Vielecke als solche ein System von absoluten Grössen im engeren Sinne bilden. Darauf bezüglich hatte Schur in einem auf der Dorpater Naturf. Vers. (Jahrg. 1892) gehaltenen Vortrage behauptet, dass dieselben noch eine Lücke darbieten. Nachdem Stolz dann in den Monatsh. f. Math. **5,** 233-240 (F. d. M. **25,** 859, 1893/94) nachgewiesen zu haben glaubte, wie bei gehöriger Begründung der Definitionen die empfundene Lücke verschwinden müsste, giebt er hier zu, das Referat über Schur's Vortrag nicht richtig verstanden zu haben. Schur hatte nämlich in dem Vortrage richtig angegeben, wie bei der Betrachtung der ebenen Vielecke das Axiom: „Das Ganze ist grösser als sein Teil“, zu beseitigen ist. Scht.

F. Giudice. **Comunicazione.** Periodico di Mat. **11,** 171-172.

Behufs Beseitigung der Schwierigkeiten in den Beweisen über die Flächengleichheit von Figuren unterscheidet der Verf. zwischen „endlichen“ und „unendlichen“ Figuren, je nachdem der Nachweis eine endliche oder unendliche Zahl von Zerschneidungen erfordert. Lp.

G. Sforza. **Comunicazione.** Periodico di Mat. **11,** 203-204.

Unter Bezugnahme auf die Note von Frattini in Periodico **10** (F. d. M. **26,** 538, 1895) zeigt der Verf., dass, wenn man beweisen kann, jede unendliche Grösse genüge nicht dem De Paolis'schen Postulate, man auch den Satz über das Archimedische, auf die Abschnitte bezügliche Postulat beweisen könnte. Lp.

AUBRY. Lettre adressée à M. G. de Longchamps. J. de Math. élém. (4) 5, 128-132.

Ausführungen über den Gedanken, dass man unterscheiden müsse zwischen einer didaktischen Geometrie für Anfänger und einer philosophischen Geometrie zur Beleuchtung der Begriffe, zur Hinweisung auf die Schwierigkeiten und zur richtigen Einordnung dessen, was sonst falsch gedeutet werden könnte. Lp.

RAFFALLI. Sur les commencements de la géométrie. J. de Math. élém. (4) 5, 152-154.

Praktische Vorschläge für die Anfangsgründe einer didaktischen Geometrie in dem Sinne des Aubry'schen, vorstehend angezeigten Briefes. Lp.

A. POULAIN. Sur une nouvelle définition des perpendiculaires. J. de Math. élém. (4) 5, 122-124.

Von dem Begriffe einer vollständigen Drehung einer Geraden AB um einen Punkt A ausgehend, definirt der Verf. den rechten Winkel als den vierten Teil einer vollständigen Drehung. Dann folgt die Definition: Zwei Gerade sind senkrecht zu einander, wenn sie einen rechten Winkel bilden. Das Neue dieser Definition ist nicht erkennbar.

Lp.

O. NESTLER. Ein Entwurf der geometrischen Elemente bis zu den Parallelen. Pr. Realsch. Meerane. 20 S. 4° Mit 1 Fig.-T.

Ein namentlich terminologisch recht geschickter Aufbau der allerersten Begriffe der Planimetrie. Scht.

C. BURALI-FORTI. Il metodo del Grassmann nella Geometria proiettiva. Nota 1ª. Palermo Rend. 10, 177-195.

Der Verf. charakterisirt in Uebereinstimmung mit Carvallo die Ausdehnungslehre als diejenige Methode, welche mit gleicher Leichtigkeit und Einfachheit die metrischen und die projectivischen Beziehungen zur Darstellung bringt und somit als ein den übrigen Methoden überlegenes geometrisches Forschungsinstrument sich erweist. Zur Erläuterung entwickelt er sodann nach Grassmann'scher Darstellung in vier Abschnitten die Grundbegriffe und einfachsten Beziehungen der projectivischen Geometrie, projectivische Elemente, lineare und projectivische Systeme, Doppelverhältnisse und homographische Beziehungen. Die v. Staudt'schen Arbeiten werden vielfach zum Vergleich herangezogen; hinsichtlich der Grassmann'schen Definitionen wird auf Peano's Calcolo geometrico verwiesen. Schg.

E. MÜLLER. Die Geometrie der Punktepaare und Kreise im Raume nach Grassmann'schen Principien. Monatsh. f. Math. 7, 77-89.

Im Anschluss an frühere Arbeiten, in denen der Verf. die Prin-

cipien der Linien- und der Kugelgeometrie in einfachster Weise mittels der Grassmann'schen Methoden entwickelt, leistet er hier das Gleiche für die Geometrie der Punktepaare und der Kreise im Raume. Kreise und Punktepaare werden als Einheiten betrachtet, aus denen einerseits die durch drei Kreise darstellbare „Kreissumme" (K), andererseits die durch drei Punktepaare darstellbare „Punktepaarsumme" (X) numerisch abgeleitet wird. Die Einheitskreise lassen sich selbst wieder aus den zehn äusseren Producten ableiten, die aus je zweien von fünf beliebigen Kugeln des Raumes gebildet werden können. Dabei ist das äussere Product von zwei Kugeln ein Kreis, von drei Kugeln ein Punktepaar. Jede Kreissumme K bestimmt ein Punktepaar-System Γ, welches aus allen Punktepaaren X besteht, die der Gleichung $[KX] = 0$ genügen. Da Kreise und Punktepaare im Sinne der Ausdehnungslehre einander ergänzende Gebilde sind, so liefert jede Gleichung über Kreise (K) durch Uebergang zu den Ergänzungen eine Gleichung über Punktepaare (P). Hiernach steht dem Punktepaar-System Γ ein Kreissystem Π gegenüber. Beide Systeme heissen apolar zu einander, wenn $[KP] = 0$ ist. Endlich bilden Systeme, zwischen denen eine Zahlbeziehung besteht, ein „Gebiet" und können gegenseitig aus einander abgeleitet werden. Auf dieser Grundlage ergeben sich zunächst die bereits von Stephanos, Königs und Cosserat gefundenen, den gleichen Gegenstand betreffenden Resultate, jedoch in neuem, systematischem Zusammenhange und mit dem unmittelbaren Ausblick auf weitere Untersuchungen und Resultate, wie es allgemein die Anwendung der Ausdehnungslehre durch die Möglichkeit rein deductiven Verfahrens mit sich zu bringen pflegt.

Schg.

H. Vollprecht. Zur Uebertragung der Rechnungsarten auf die Geometrie, insbesondere über die Möglichkeit der Multiplication von Strecken mit Strecken. Schlömilch Z. **41,** 276-280.

Diese Notiz kritisirt die Darlegung, welche der in der Ueberschrift angegebene Gegenstand bei verschiedenen Autoren und besonders bei Schotten in seinem Buche: Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts (Leipzig 1890) gefunden hat, um dann eine eigene Ansicht darüber zu geben. Mz.

Weitere Litteratur.

J. Bonnel. Les hypothèses dans la géométrie; éléments de la théorie atomique. Lyon Mém. (3) **3,** 241-261, 351-364; auch sep. Paris: Gauthier-Villars et Fils.

L. Couturat. Études sur l'espace et le temps de MM. Lechalas, Poincaré, Delboeuf, Bergson, L. Weber et Évelin. Rev. de métaphys. **4,** 646-669.

A. Del Re. Sulla struttura geometrica dello spazio in relazione al modo di percepire i fatti naturali. Discorso. Annuario della R. Università di Modena. 1896-97, 15-51.

T. S. Fiske. The straight line as a minimum length. Science (4) **4**, 533.

M. Gremigni. Aggiunte e note alla teoria dei poligoni equivalenti. Firenze: Bemporad. 8 S. 8° (1895).

Vergl. F. d. M. **26**, 538, 1895.

C. Juel. Om Punktets Definition i Geometrien. Nyt Tidss. 7 B, 7-10.

Ueber die Definition des Punkts in der Geometrie. V.

F. Klein. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Kasan Ges. (2) **5**, 4; **6**, 1. (Russisch.)

Von D. Sintzow verfasste russische Uebersetzung des bekannten Erlanger Programms (F. d. M. **4**, 229-231, 1872). Si.

G. Lechalas. Note sur la géométrie non-euclidienne et le principe de similitude. Rev. de métaphys. **1**, 199-201 (1893).

G. Lechalas. La courbure et la distance en géométrie générale. Rev. de métaphys. **4**, 194-202.

P. Mansion. Analyse de l'ouvrage de Engel et Stäckel sur l'histoire de la théorie des parallèles. Brux. S. sc. **20** A, 7-8. Mn.

H. Poincaré. L'espace et la géométrie. Rev. de métaphys. **3**, 631-646 (1895).

H. Poincaré. Réponse à quelques critiques. Ebenda **4**, 59-70.

Kapitel 2.

Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs, Topologie).

A. Schoenflies. Ueber einen Satz aus der Analysis situs. Gött. Nachr. 1896, 79-89.

Der Verf. beweist, dass unter gewissen Bedingungen eine durch analytische Gleichungen gegebene „Curve“ die Ebene in zwei Teile zerlegt, die sich als „innere“, resp. „äussere“ Punkte charakterisiren lassen, und zwar so, dass man von einem inneren zum äusseren Punkte nicht gelangen kann, ohne die Curve zu überschreiten, während je zwei innere oder zwei äussere Punkte durch einen geradlinigen Linienzug verbunden werden können, der keinen Punkt der Curve trifft. Die Bedingungen des Beweises sind folgende. Die Curve soll aus einer endlichen Zahl von Curvenstücken bestehen, gegeben durch Gleichungen $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$, wo f und φ in den Grenzen $t_1 \leqq t \leqq t_2$ endliche stetige Functionen sind, die für jeden dieser Werte von t eine bestimmte Ableitung besitzen, die selbst stetig und monoton sich ändert. Einen noch allgemeineren Satz findet man übrigens im Cours d'analyse von Cam. Jordan. Das Besondere des vom Verf. gegebenen Beweises ist, dass er nur Sätze über Teilungen der Ebene durch gerade Linien voraussetzt. Sfs.

W. Kapteyn. **Over een vraagstuk uit de Analysis situs.** Amsterdam. Sitz.-Ber. **4,** 199-202.

Wird eine $(p+1)$-fach zusammenhängende Fläche in V einfach zusammenhängende Polygone zerlegt, wobei H Eckpunkte und G Grenzlinien auftreten, so gilt der Satz $V+H-G=2(1-p)$. Diesen Lhuilier'schen Satz beweist der Verf. mittels einer symmetrischen Fläche mit p Oeffnungen. Mo.

A. Emch. **A special class of connected surfaces.** Kansas Univ. Quart. **3,** 153-157. (1894.)

Der Verf. beschäftigt sich mit dem Zerschneiden der einfachsten aus gewundenen Streifen hergestellten einseitigen und zweiseitigen berandeten Flächen durch Rückkehrschnitte und ihrer Ausbreitung in eine Ebene durch Faltung und stellt darüber einige Sätze auf, z. B. dass die Zahl der Faltungen bei einer einseitigen Fläche ungerade, bei einer zweiseitigen gerade ist, u. s. w. Sfs.

K. Zindler. **Eine Methode, aus gegebenen Configurationen andere abzuleiten.** Wien. Ber. **105,** 311-316.

Die sämtlichen zu einander projectivischen Punktreihen bilden nach Reye einen linearen R_7. Deutet man irgend eine bekannte aus Punkten, Geraden und Ebenen bestehende Configuration in diesem R_7, so ergiebt sich eine Configuration von Punktreihen, Regelscharen und Congruenzen, die demselben tetraedralen Complex angehören. Greift man aus der Punktreihe einen Punkt heraus, so gehört dazu auf der Regelschar ein Leitstrahl, in der Congruenz eine Ebene, und diese Elemente bilden eine neue Configuration im R_3. Dies ist die eine Methode des Verfassers. Die andere geht von einem linearen Complexraum R_5 aus, in dem wiederum eine gewöhnliche Configuration angenommen wird, und ersetzt die in diesem linearen R_5 enthaltenen Incidenzen, die zwischen den Büscheln, Bündeln und Gebüschen stattfinden, durch die Incidenzen ihrer Träger; so erhält man ebenfalls neue Configurationen des gewöhnlichen Raumes, und zwar solche zwischen Geradenpaaren und Hyperboloiden. Der Verf. betrachtet z. B. eine Configuration $(20_4, 30_6)$ von 20 Hyperboloiden und 30 Geradenpaaren, die als Configuration von Geraden allein eine 60_{12} ist. Sfs.

J. Feder. **Die Configuration $(12_6, 16_3)$ und die zugehörige Gruppe von 2304 Collineationen und Correlationen.** Diss. Strassburg. 35 S. 8°; zugl. Math. Ann. **47,** 375-407.

Der Verf. giebt eine vor ihm noch nicht ausgeführte eingehende Untersuchung der Collineationsgruppe, die zu der genannten Configuration sowie zur Configuration $(24_9, 18_4)$ gehört. Einerseits liefert er eine Einteilung, resp. Beschreibung aller Collineationen, resp. Correlationen nach ihrem verschiedenen geometrischen Charakter, andererseits giebt er eine genaue Erörterung der Zusammensetzung der Gruppe. Die Gruppe

der Collineationen ist für die erste Configuration eine G_{576}, für die zweite eine G_{1152}. Nur die Zahlen 2 und 3 treten als Factoren der Zusammensetzung auf, und zwar ist der erste Factor notwendig 2.

Es giebt ferner noch 144 Flächen zweiter Ordnung derart, dass jede in sich übergeht durch diejenige Untergruppe G_{48} von G_{576}, welche einen Punkt der Configuration in sich überführt, und diese 144 Flächen lassen sich wieder in 12 Büschel anordnen, so dass je 12 dieser Flächen durch die G_{576} selbst in sich übergehen.

Endlich gehört zu derjenigen Untergruppe G_{96}, welche die drei Tetraeder in sich selbst überführt, eine für sie invariante desmische Fläche vierter Ordnung, welche die 16 Configurationen enthält und die 12 Configurationspunkte zu Doppelpunkten hat, was der Verf. noch des weiteren ausführt.

Schliesslich ist zu bemerken, dass die G_{2304}, die zur Configuration $(24_9, 18_4)$ gehört, als Untergruppe der G_{2304} erscheint, die zu den Klein'schen sechs Fundamentalcomplexen gehört; es ist diejenige Untergruppe, welche die Polarfläche der für die $(12_6, 16_3)$ grundlegenden Correlation ungeändert lässt. Sfs.

E. Bertini. Sulle configurazioni di Kummer più volte tetraedroidali. Lomb. Ist. Rend. (2) **29**, 566-570.

Den Sätzen über die mit der Kummer'schen Configuration zusammenhängenden Punkte, Geraden und Tetraeder fügt der Verf. als neu hinzu, dass es ausser den bereits bekannten, von Stephanos angegebenen Punkten keine anderen giebt, in denen sich drei Tetraederflächen schneiden, und giebt im Anschluss hieran eine vollständige Aufzählung der bekannten Resultate über die Zahlen Kummer'scher Configurationen, die das Singularitätensystem eines Tetraeders einfach, zweifach, dreifach, vierfach und sechsfach darstellen. Zum Schluss dehnt der Verf. diese Sätze auf die ∞^4 quadratischen Complexe aus, die in Bezug auf das System der sechs Fundamentalcomplexe sich selbst entsprechen, und aus denen jede Kummer'sche Configuration wieder einen Complexbüschel heraushebt, der die Configuration zur Singularitätenfläche hat. Für diese Büschel bestehen also analoge Sätze, wie für die Kummer'schen Configurationen. Sfs.

E. Ciani. Sopra la configurazione di Kummer. Batt. G. **24**, 177-180.

V. Martinetti. Un osservazione relativa alla configurazione di Kummer. Batt. G. **24**, 192-194.

Ciani zeigt, dass jede Configuration 16_6 notwendig eine Kummer'sche Configuration ist. wenn man noch voraussetzt, dass keine Geraden existiren, die mehr als zwei Configurationspunkte enthalten, resp. in denen sich mehr als zwei Configurationsebenen schneiden.

Martinetti knüpft daran die Bemerkung, dass ausser den elementaren Configurationen $(2_2, 2_2)$ und $(4_3, 4_3)$ die Kummer'sche Con-

figuration die Configuration (n_m, n_m) mit nächstgrösserem m ist; d. h. es existiren weder Configurationen $(7_4, 7_4)$ noch $(11_5, 11_5)$. Sfs.

K. SPINDELER. Ein Beitrag zur Einführung in das Gebiet der räumlichen Configurationen. (Fortsetzung.) Pr. (No. 518) Gymn. Diedenhofen. 22 S. 4°.

Ableitung der bekannten Eigenschaften der Configuration $(12_6, 16_3)$ resp. $(24_9, 18_4)$ ohne neue Resultate. Sfs.

DE TILLY, NEUBERG. Rapport sur un Mémoire de M. Cesáro intitulé: Des polyèdres superposables à leur image. Belg. Bull. (3) **32,** 226-231.

In dieser Abhandlung und in drei anderen, früher veröffentlichten löst Cesáro vollständig folgende drei Probleme: Alle Systeme P von starr mit einander verbundenen Punkten zu finden, welche zusammenfallen können 1) auf mehr als eine Weise mit sich selbst, 2) mit einem Systeme P_1, das zu P bezüglich eines Punktes symmetrisch ist. 3) Wenn ein System P dieser zweiten Kategorie gegeben ist, eine solche Axe zu finden, dass P nach einer Rotation um dieselbe bezüglich einer Ebene symmetrisch zu seiner ersten Lage ist. Mn. (Lp.)

L. LÉVY. Sur la question 393. J. de Math. élém. (4) **5,** 159-160.

Litterarische Bemerkungen über die vom Verf. gestellte Aufgabe, welche sich an seinen in F. d. M. **23,** 544, 1891 besprochenen Artikel über Mosaikpflaster aus regelmässigen Polygonen anschloss. Lp.

T. NÜSSLEIN. Ueber die ebenen Configurationen 9_3. Leipzig. 35 S. 8° u. 2 Taf. (1895).

Kapitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonometrie, Stereometrie).

N. BÖDIGE. Kanon der Planimetrie. Pr. (No. 329) Progymn. Duderstadt. 24 S. 8°.

Eine übersichtliche Zusammenstellung der wichtigsten Lehrsätze und Aufgaben aus der Planimetrie für die vier Stufen Quarta bis Untersecunda; „einmal als Leitfaden beim Unterricht und bei der häuslichen Vorbereitung der Schüler, vor allem aber als ein Hülfsmittel bei der Wiederholung des Lernstoffes gedacht.“ Zur Notirung der erledigten Nummern sind praktisch eingerichtete Tabellen beigefügt. Lg.

K. Fink. Die elementare systematische und darstellende Geometrie der Ebene in der Mittelschule. Erster und zweiter Curs, für die Hand des Lehrers bearbeitet. Tübingen: H. Laupp. XVII + 151 S. 8°.

K. Fink. Sammlung von Sätzen und Aufgaben zur systematischen und darstellenden Geometrie der Ebene in der Mittelschule. Erster und zweiter Curs, für die Hand des Schülers bearbeitet. Tübingen: H. Laupp. IV + 108 S. 8°.

K. Fink und Auer. 10 Figurentafeln und 84 Uebungsblätter als Beilage zu der elementaren systematischen und darstellenden Geometrie der Ebene. Tübingen: H. Laupp. 8°.

Das Werk behandelt die elementare ebene Geometrie in dem gewöhnlichen Umfange mit massvoller und ungezwungener Einfügung der Grundbegriffe der projectiven Geometrie. Seine Bedeutung liegt wesentlich in didaktischer Richtung. Es zerfällt äusserlich in die oben genannten drei Hefte. Das erste Heft, lediglich für die Hand des Lehrers bestimmt, ist in der Form von fortlaufenden Lehrproben nach heuristischer Methode gehalten. Es bietet sehr viel Anregendes und mag namentlich jüngeren Collegen angelegentlich empfohlen sein. Das zweite Heft ist für die Hand des Schülers bestimmt. Dieser soll zunächst ausschliesslich den Ausführungen und Fragen des Lehrers folgen. Erst nachträglich „wird der zugehörige kurze Ausdruck der Betrachtung im Buche nachgesucht, gelesen und nochmals in aller Kürze an der Hand der zugehörigen Figurentafel erläutert.“ Ausserdem soll das Schülerbuch der Befestigung des Gelernten durch häufige Repetitionen sowie der Anregung zu selbständigen Uebungen dienen, zu welchem Zwecke es eine grosse Zahl von Fragen, Aufgaben und Uebungssätzen darbietet. — Einer der wichtigsten Grundsätze des Verfassers besteht weiter darin, dass dem theoretischen Unterricht das geometrische Zeichnen oder, wie es der Verf. auch für die Ebene nennt, — die „darstellende Geometrie“ eine unerlässlich notwendige Begleiterin bilden soll. Diesem Zweck dient das dritte Heft, welches ausser den 10 zu Heft 1 und 2 gehörigen Figurentafeln 84 Blätter für die darstellend-geometrischen Uebungen enthält. Diese laufen dem Entwickelungsgang in Heft 1 und 2 parallel und sind nach Anleitung des Lehrers fortlaufend von den Schülern zu bearbeiten.

Der Lehrstoff ist auf zwei Jahrescurse verteilt. Der erste umfasst die Sätze und Constructionen bis einschliesslich Flächenverwandlung. Als Hauptmittel für die Entwickelung der geometrischen Wahrheiten dient hier durchweg die unmittelbare Anschauung, indem an naheliegende Objecte des praktischen Lebens oder an Modelle, zu deren eigenhändiger Anfertigung der Schüler Anregung empfängt, angeknüpft wird. Vielfach werden Betrachtungen im dreidimensionalen Raum hereingezogen. Parallelverschiebung, Drehung, inverse Umlegung der Figuren kommen als Beweismittel ausgiebig zur Verwendung. — Der zweite Curs beginnt mit der Erörterung der euklidischen Axiome und Beweisformen sowie des

Wesens der Aufgabenlösung, bringt dann Erweiterungen zur Flächenberechnung, die Aehnlichkeitslehre, regelmässige Vielecke und Kreisberechnung, harmonische Elemente, Transversalen, Potenzlinie u. s. w. und schliesst mit dem Apollonischen Problem. — Dem ersten Heft ist als Anhang ein kurzer historischer Abriss der Entwickelung der Geometrie beigefügt. Hk.

J. Lengauer. Die Grundlehren der Stereometrie. Kempten: J. Kösel. 111 S. 8°.

Dieses Lehrbuch enthält das geometrische Pensum der achten Klasse der bayerischen Gymnasien, nämlich die räumliche Geometrie und die sphärische Trigonometrie, welche letztere mit der Lehre vom Dreikant verknüpft ist. Die Berechnung der Körper wird durch den Satz von Cavalieri in bekannter Weise vereinfacht. Eine sehr reichhaltige Aufgabensammlung, in der auch Constructionen vorkommen, und welche für mehrere Jahre ausreicht, erhöht den Wert des Lehrbuchs. Druck und Figuren sind gut. Mz.

F. Meigen. Lehrbuch der Geometrie (Technische Lehrhefte. Mathematik. Heft 4). Hildburghausen: O. Petzoldt. IV + 82 S. gr. 8°.

Dieses Buch behandelt die Planimetrie in gewöhnlicher Weise; es zerfällt in 10 Abschnitte: Einführung in die Geometrie, Winkel und Parallelen, Dreieck, Viereck, Vieleck, Kreis, Gleichheit und Ausmessung geradliniger Figuren, Proportionalität gerader Linien, Aehnlichkeit der Figuren und Ausmessung des Kreises. Die Darstellung ist sehr deutlich; auch sind zahlreiche Uebungsbeispiele gegeben. Der Druck ist gross zu nennen; noch besonders im Druck sind die Wortlaute der Lehrsätze hervorgehoben. Auch die Figuren sind befriedigend. Mz.

F. Meigen. Lehrbuch der Trigonometrie. (Technische Lehrhefte. Mathematik. Heft 5.) Hildburghausen: O. Petzoldt. 59 S. gr. 8°.

Das Buch ist in vier Abschnitte geteilt: Die trigonometrischen Functionen einfacher Winkel, die trigonometrischen Functionen zusammengesetzter Winkel, Berechnung rechtwinkliger Dreiecke und Berechnung schiefwinkliger Dreiecke. Der Lehrgang giebt das Notwendige, welches dieser Inhaltsangabe entspricht, in genügender und deutlicher Darstellung; bei den Uebungsaufgaben sind aber vorzugsweise Fragen aus der Praxis, z. B. Brückenbogen, Bahngeleise, Schiffahrt, einfache Maschinen u. dgl., herangezogen, und dies macht das Buch um so nützlicher. Druck und Figuren sind gut. Mz.

E. Rouché et Ch. de Comberousse. Leçons de géométrie, rédigées suivant les derniers programmes officiels et accompagnées, pour chaque leçon, d'exercices et de problèmes gradués. Première Partie. A l'usage des élèves de la classe de quatrième (moderne). Paris: Gauthier-Villars et Fils. X + 173 S. 8°.

E. Rouché et Ch. de Comberousse. Solutions détaillées des exercices et problèmes énoncés dans les leçons de géométrie. Première Partie. Paris: Gauthier-Villars et Fils. X + 168 S. 8°.

Der moderne Elementarunterricht in Frankreich weicht in wesentlichen Punkten von dem klassischen ab; diese „Vorlesungen über Geometrie", die nach den neuen Unterrichtsprogrammen bearbeitet sind, sollen in den Lycées und Colléges benutzt werden. Vorliegender Band mit Aufgabenlösungen ist von den in Aussicht genommenen vier Teilen der erste und ist für die vierte Klasse bestimmt. Er enthält die Elemente der Planimetrie bis zur Kreislehre einschliesslich; den Schluss bilden die dem Dreiecke um-, ein- und angeschriebenen Kreise und die zweien Kreisen gemeinsamen Tangenten. Ausser den bekannten Vorzügen der französischen Lehrbücher zeichnet sich das vorliegende durch eine Fülle sehr geschickt gewählter Uebungen und Aufgaben zu jeder der dreissig Vorlesungen aus. Die Lösungen dieser Uebungen und Aufgaben sind in dem zweiten Bande enthalten. Sie sind, ohne den Schüler durch Breite zu ermüden, möglichst detaillirt durchgeführt. Dadurch eignet sich das Buch auch vorzüglich zum Selbstunterricht. M.

A. Sickenberger. Leitfaden der elementaren Mathematik. Zweiter Teil. Planimetrie. 3. Auflage. München: Th. Ackermann. VI + 123 S. 8°.

Es ist dies ein unveränderter Abdruck der zweiten Auflage dieses Werkes; über dasselbe ist bereits in F. d. M. **25**, 887, 1893/94 berichtet worden. Mz.

H. M. Taylor. Euclid's elements of geometry. Books XI and XII. Cambridge: University Press. VIII + (499-657) S.

Die Erscheinung dieses Teiles vervollständigt die Euklidausgabe Taylor's für die Pitt Press Mathematical Series (vergl. F. d. M. **25**, 888, 1893/94). In dem Texte des XI. Buches sind gemäss der in England üblichen Praxis nur die ersten 21 Sätze aus den Elementen des Euklid beibehalten, und auch von diesen sind die Sätze 1, 2, 3 und 7 nicht dieselben wie bei Euklid. Die getroffenen Aenderungen sind sicherlich Verbesserungen. Den 21 Sätzen folgen 19 hinzugefügte Sätze, von denen einige sich auf demselben Boden bewegen wie die gewöhnlich nicht gelesenen Teile der Bücher XI und XII. Ausserdem werden kurze Anweisungen gegeben für perspectivisches Zeichnen, sowie Ueberblicke über die Eigenschaften der Tetraeder, der Parallelepipeda, der Kugel und der Kugelsysteme u. dergl. m. Ein allgemeines Inhaltsverzeichnis für das ganze Buch wird am Schlusse geliefert. Die somit vollendete Ausgabe wird sich als wohl geeignet für solche erweisen, die schon einigen vorgängigen Unterricht in der Geometrie gehabt haben; sie scheint uns zu schwierig, wenn sie in die Hände eines unvorbereiteten Anfängers gegeben wird, wenigstens in Betreff der Uebungsaufgaben. Gbs. (Lp.)

H. D. Thompson. Elementary solid geometry and mensuration. London: Macmillan and Co. XI + 199 S.

Ein sehr sorgfältig durchdachtes Buch über Stereometrie. Die Anordnung des Stoffes ist gut, die Beweise sind klar und bündig, die Figuren schön entworfen. Die Durchschnitte von Geraden und Ebenen, die Winkel zwischen Geraden und Ebenen, körperliche Winkel und Ecken bilden den ersten Teil des Buches. Dann werden Polyeder, Cylinder und Kegel behandelt, hiernach die Kugel und die sphärischen Dreiecke. Das letzte Kapitel erledigt die Ausmessung der einfacheren Körper. Die Prismoidformel Steiner zuzuschreiben, beruht auf einem Irrtum; in Wahrheit ist es die Simpson'sche Regel, wenn man sie nicht schon bei Newton findet [nach Aubry vielleicht bei Torricelli, vergl. F. d. M. **26**, 64, 1895. Lp.]. Gbs. (Lp.)

C. A. Laisant. Recueil de problèmes de mathématiques. Géométrie du triangle. À l'usage des classes de mathématiques spéciales. Paris: Gauthier-Villars et Fils. X + 136 S. gr. 8°.

Nach denselben Grundsätzen wie früher (vergl. F. d. M. **24**, 631, 1892; **25**, 897 u. 925, 1893/94; **26**, 186, 1895) hat der Verf. aus den in französischer Sprache erscheinenden Zeitschriften diejenigen Aufgaben zusammengestellt, welche sich auf die neuere Dreiecksgeometrie beziehen, indem er die Quelle, den Aufgabensteller und, falls eine Lösung veröffentlicht ist, den Namen des Lösers hinzugefügt hat, sowie des Ortes, wo die Lösung erschienen ist. Weder hat er sich dabei verhehlt, dass dieses Gebiet kein streng zu begrenzendes ist, noch auch, dass gegen die Liebhaberei, die sich hier stark breit macht, manche triftigen Einwände erhoben werden können. Ref. muss hier, wie schon bei den früheren Sammlungen, wiederholt das Bedauern aussprechen, dass der Plan der Beschränkung auf französische Zeitschriften es verhindert hat, dass diese Sammlungen umfassende Repertorien geworden sind, obschon auch in ihrer jetzigen Gestalt jeder Lehrer viel Brauchbares finden wird. Die 454 Aufgaben, welche in dem vorliegenden Buche zusammengebracht sind, stehen unter folgenden Rubriken geordnet: Merkwürdige Punkte (No. 1-37). Merkwürdige Gerade und Winkel (No. 38-80). Merkwürdige Kreise (No. 81-176). Merkwürdige Kegelschnitte (No. 177-192). Systeme von Dreiecken (No. 193-206). Verschiedene Aufgaben (No. 207 bis 333). Geometrische Oerter und Hüllcurven (No. 334-379). Metrische und trigonometrische Beziehungen (No. 380-451). Die Brauchbarkeit des Buches für Lehrer wie für Schüler würde erhöht worden sein, wenn der Verf. eine Erklärung der grossen Menge technischer Ausdrücke hinzugefügt hätte. Lp.

P. A. Nekrassow. Algebraische Methode der Auflösung der geometrischen Constructionsaufgaben. Anwendung der Algebra auf die Geometrie. 2. Aufl. Moskau. X + 262 S. 8°. (Russisch.)

Da dieses Werk zum ersten Male zur Besprechung gelangt, so sei

es gestattet, dessen Inhalt hier genauer anzuführen. Im ersten Abschnitt, welcher der Anwendung der Algebra auf die Geometrie gewidmet ist, findet man folgende vier Kapitel: 1. Ueber homogene Formeln im allgemeinen. 2. Das Gesetz der Homogeneität in der Geometrie. 3. Construction der Linien, welche durch gegebene Formeln und Gleichungen bestimmt sind; Construction der Winkel. 4. Anwendung der algebraischen Methode der Auflösung der geometrischen Constructions-Aufgaben an einigen Beispielen; über Untersuchung der Auflösung eines Problems.

Der zweite Abschnitt bespricht verschiedene systematische Methoden der Auflösung von Constructionsaufgaben (in Verbindung mit der Anwendung der Algebra auf Geometrie): Kapitel 5. Methoden der Aehnlichkeit und der geometrischen Oerter. Kapitel 6. Methode der Transformation der Figuren. Den Schluss bildet das umfangreiche Kapitel 7 (181-262), welches der concreten Interpretation der Geometrie von Lobatschefsky gewidmet ist und in dieser Auflage zum ersten Male erscheint. Hier folgt nach der Erklärung der geometrischen Darstellung der complexen Grössen und der ersten Begriffe über conforme Abbildung und lineare Transformation die Interpretation der nichteuklidischen Geometrie gemäss den Ideen von Cayley und F. Klein. Der Verf. erklärt sich gegen die Empiriker, indem er sich an eine Rede von Zinger anlehnt (vgl. F. d. M. **25**, 864, 1893/94). Si.

Weitere Lehrbücher.

H. Angel. Practical plane and solid geometry, including graphic arithmetic. New edition. London: Collins. 248 S. 12mo.

X. Antomari et A. Maluski. Manuel du baccalauréat: Mathématiques. Paris. 368 S.

W. W. Beman and D. E. Smith. Plane and solid geometry. Boston: Ginn. X + 320 S. 12mo (1895).

C. F. E. Björling. Lärobok i nyare Plan-Geometri. Lund: Gleerup. XI + 335 S. + 2 Taf.

J. Blaikie and W. Thomson. Text-book of geometrical deductions. Book I, corresponding to Euclid, book 1. New edition. Book II, corresponding to Euclid, book 2, with miscellaneous deductions from books I and II. London: Thin. 150, 66 S. 8°.

F. Bolte. Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie zum Gebrauche an Navigationsschulen. Hamburg: W. Peuser. 48 S. 8°.

A. D. Capel. Common sense Euclid. Part I: Books 1 and 2, with 300 problems. 4th edition, revised and enlarged. Part II: Books 3 and 4, with 300 problems. London: Abbott. 156, 140 S. 12mo.

W. Chauvenet. Plane geometry, abridged and simplified by W. E. Byerly. New edition. Philadelphia: Lippincott.

A. Chiari. Elementi di geometria. Citta di Castello: S. Lapi. Ref. in Periodico di Mat. **11**, 196.

H. Fenkner. Lehrbuch der Geometrie für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten. (In 2 Teilen.) 2. Teil: Raumgeometrie. Nebst einer Aufgaben-Sammlung, bearbeitet mit besonderer Berücksichtigung der Anforderungen bei der Abschluss-Prüfung. 2. Aufl. Braunschweig: O. Salle. IV + 109 S. 8°.

J. A. Gillett. Euclidean geometry. New York and London: Holt. VIII + 436 S. 12mo.

T. W. Good. Science and art of geometry. Section II for examination in first stage. Solid geometry of the science and art department. 3rd edition. London: Gill. 192 S. 8°.

A. Guglielmi. Le nozioni di geometria solida, esposte per le scuole tecniche. 3a edizione, riveduta e corredata di nuovi eserzicî. Napoli: Priore. 52 S. 12mo.

H. Hartl. Lehrbuch der Planimetrie. Für den Unterrichtsgebrauch und für das Selbststudium verfasst. Wien: F. Deuticke. VII + 135 S. 8°.

J. Henrici und P. Treutlein. Lehrbuch der Elementar-Geometrie. (In 3 Teilen.) 2. Teil. Abbildung in verändertem Masse. Berechnung der Grössen der ebenen Geometrie. 2. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner. IX + 248 S. 8°. Mit 1 Kärtchen.

B. Hercher. Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauch an Gymnasien. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet. 3. Aufl. 3 Hefte. 1. Planimetrie. 1. Teil einschl. der trigonometrischen Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks. Anhang: Anfangsgründe der Körperlehre. (Lehraufgabe von Quarta bis Untersecunda.) III + 80 S. — 2. Planimetrie 2. Teil und ebene Trigonometrie. (Lehraufgabe der Obersecunda und Unterprima.) III + 52 S. — 3. Stereometrie und Grundlehren von den Kegelschnitten. (Lehraufgabe der Prima.) III + 62 S. Leipzig: C. Jacobsen. 8°.

C. A. Hobbs. The elements of plane geometry. New York: Lovell. VII + 240 S. 12mo.

G. Holzmüller. Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik. Gymnasial-Ausgabe. 2. Teil, im Anschluss an die preussischen Lehrpläne von 1892 nach Jahrgängen geordnet und bis zur Entlassungsprüfung reichend. Leipzig: B. G. Teubner. VIII + 279 S. 8°.

A. R. Hornbrook. Concrete geometry for beginners. New York: American Book Co. 201 S. 12mo.

J. F. Éléments de géométrie, comprenant des notions sur les courbes usuelles, un complément sur le déplacement des figures et de nombreux exercices. 9e éd. Paris: Poussielgue. XI + 495 S. 16mo.

C. Juel. Elementaer Stereometri. Kjöbenhavn. 148 S.

Kambly und Roeder. Stereometrie und sphärische Trigonometrie. Vollständig nach den preussischen Lehrplänen von 1892 umgear-

beitete Ausgabe der Stereometrie und der sphärischen Trigonometrie von Kambly. Lehraufgabe der Prima. Mit Uebungsaufgaben und einem Anhang: Der Coordinatenbegriff und einige Grundeigenschaften der Kegelschnitte. 1. Aufl. (25. der Kambly'schen Stereometrie.) Breslau: F. Hirt. 194 S. 8°.

M. Kröger. Die Planimetrie in ausführlicher Darstellung und mit besonderer Berücksichtigung neuerer Theorien. Nebst einem Anhang über Kegelschnitte mit Uebungssätzen und Constructionsaufgaben. Für den Handgebrauch des Lehrers und für den Selbstunterricht bearbeitet. Hamburg: O. Meissner. VIII + 511 S. 8°.

K. Kuhn. Lehrbuch der Stereometrie. Hildburghausen: O. Pezoldt. III + 24 S. 8°. (Technische Lehrhefte. Mathematik. 3. Heft.)

E. Lebon. Géométrie élémentaire. 2 Vol. Paris. 264, 140 S. 8°.

J. Macnie. Elements of plane geometry. Edited by White. New York: American Book Co. 240 S. 12mo.

C. de Medici. Medici's rational mathematics. (In 3 sections.) Section A, in 3 parts. Part 1: The *ABC* of geometry, 20 pp. Parts 2 and 3 (bound together): Object lessons in geometry, 56 pp. Section B, in 4 parts (bound together), 110 pp. New York: Lovell. 12mo.

W. J. Meyers. An inductive manual of the straight line and the circle with many exercises. Denver: Meyers. XI + 113 S. 8°.

P. Molenbroek. Leerboek der Meetkunde. Deel I: Planimetrie. Leiden. III + 298 S.

E. H. Nichols. Elementary and constructional geometry. New York: Macmillan. VI + 138 S. 12mo.

D. L. Pardini. Formulario di geometria, ad uso delle scuole secondarie. 2da edizione. Mantova: Mondovi. 46 S. 8°.

G. D. Pettee. Plane geometry. Boston: Silver, Burdett & Co. VIII + 253 S. 12mo.

A. W. Phillips and J. Fisher. Elements of geometry. New York: Harper. VIII + 540 S. 8°.

A. R. de Prada. Elementos de matemáticas. 2a edición. Madrid. XXIII + 402 S. 4°.

L. Rajola-Pescarini. Lezioni di geometria piana. Parte II. Napoli. XII + 112 S.

J. S. Rawley. Practical plane and solid geometry, scales, curves and pattern drawing. 16th edition, revised. London: Simpkin. 8°.

G. Recknagel. Ebene Geometrie. Lehrbuch mit systematisch geordneter Aufgabensammlung. 5. Aufl. München. VIII + 222 S.

G. Riboni. Elementi di geometria ad uso delle scuole secondarie inferiori. II ed. Bologna: Zanichelli.

Ref. in Periodico di Mat. **11**, 76.

R. SACHAU. The elements of Euclid, books 1 and 2. London: Arnold. 184 S. 8°.

CHR. SCHMEHL. Lehrbuch der Geometrie. Für gewerbliche Schulen bearbeitet. Mit 290 in den Text eingedruckten Figuren und einer Aufgabensammlung. Giessen: E. Roth. VIII + 179 S. 8°.

H. J. SMITH. Cusack's mensuration. London: London book depot. 256 S. 8°.

S. STROMILLO. Lezioni elementari di geometria per le scuole secondarie. Parte III. Napoli: Muca. 165 S. 8°.

G. M. TESTI. Corso di matematiche. Vol. III. Geometria elementare. Livorno: R. Giusti. XII + 448 S.

C. A. VAN VELZER and G. G. SCHUTTS. Plane and solid geometry. Madison, Wis.: Tracy, Gibbs & Co. VIII + 395 S. 8°.

WEILL. Géométrie plane, à l'usage des candidats à l'École centrale. Paris: Delagrave. 131 S. 8°.

G. A. WENTWORTH. Syllabus of geometry. Boston: Ginn. II + 50 S. 16mo.

F. ANDEREGG and E. D. ROE. Trigonometry for schools and colleges. Boston: Ginn. VIII + 188 S. 16mo.

CALDARERA. Trattato di trigonometria rettilinea e sferica. Palermo: Virzi.

A. COSTA - REGHINI. Appunti di trigonometria piana ad uso dei licei del regno. Milano: Tipografia degli ingegneri. 48 S. 16mo.

E. S. CRAWLEY. Elements of plane and spherical trigonometry. A text book for colleges and schools. 2d edition, revised and enlarged. Philadelphia: Crawley. 180 S. 8°.

C. W. CROCKETT. Elements of plane and spherical trigonometry. Logarithmic and trigonometric tables, five decimal places. New York: American Book Co. 192 + 102 S. 8°.

E. GELIN. Éléments de trigonométrie plane et sphérique. Paris.

G. W. JONES. A drill-book in trigonometry. 6th edition. Ithaca, N. Y.: Jones. XVI + 192 S. 12mo.

J. B. LOCK. Trigonometry for beginners. Revised and enlarged for the use of American schools, by J. A. Miller. With „tables, logarithmic and trigonometric, calculated to five places of decimals". Arranged by F. L. Sevenoak. New York: Macmillan. VII + 147 S.; IX + 63 S.

S. L. LONEY. Plane trigonometry. Solutions to the examples in parts I and II. Cambridge: University Press. 12mo.

S. MACNAB Trigonometry simplified: Solution of all plane and spherical triangles and application of the same to the various problems in navigation and nautical astronomy. London: Philip. 24 S. 8°.

F. von Mocnik. Geometrische Anschauungslehre für Untergymnasien. Abteilung II. Neue Auflage von F. Wallentin. Wien: Tempsky. III + 96 S. 8°.

H. Servus. Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Zum Gebrauch an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Berlin: Friedberg u. Mode. IV + 94 S. 8°.

H. Servus. Trigonometrisches Nachschlagebuch. Eine Sammlung trigonometrischer Formeln. (Teil II des Lehrbuchs der ebenen Trigonometrie.) Berlin: Friedberg u. Mode. IV + 106 S. 8°.

V. Aicardi. Il triangolo. Nozione particolareggiata di questa figura, seguita da 7840 problemi risolti. Torino-Roma: E. Loescher.
Ref. in Periodico di Mat. **11,** S. 75.

G. A. Andrews. Composite geometrical figures. Boston: Ginn. VI + 57 S. 12mo.

Barberis ed Ottini. Sviluppo, costruzione e misurazione dei solidi geometrici. Torino. Con 14 tavole.

Benucci. Tavola pitagorica. Busseto.

G. Dariès. Cubature des terrasses et mouvement des terres, avec une préface de M. d'Ocagne. (Encyclopédie scientifique des aide-mémoire.) Paris: Gauthier-Villars et Fils.

H. Funcke. Methodisch geordnete Aufgaben zu Mehler's Hauptsätzen der Elementar-Mathematik. Berlin: G. Reimer. IV + 96 S. 8°.

K. Fuss. Sammlung von Constructions- und Rechenaufgaben aus der Planimetrie und Stereometrie. Für den Schul- und Selbstunterricht bearbeitet. 2. Aufl. Nürnberg: F. Korn. VIII + 184 S. 8°.

J. F. Exercices de géométrie, comprenant l'exposé des méthodes géométriques et deux mille questions résolues. 3e édition. Paris: Poussielgue. XIX + 139 S. 8°.

Exercices de géométrie en rapport avec les éléments. Livre du maître, comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues. 3e édition, revue et augmentée. Paris. XX + 1136 S.

J. Kiechl. Analytische Entwickelung von Gleichungen über zwei Transversalen eines Dreiecks. Feldkirch. 12 S. u. 1 Taf.

F. Klein. Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaire. (Possibilité des constructions géométriques; les polygones réguliers; transcendance des nombres e et π.) Rédaction française par J. Griess. Paris.

F. Klein. Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare redatte da F. Tägert e tradotte dal tedesco dal Prof. F. Giudice, con una prefazione del Prof. G. Loria. Torino: Rosenberg e Sellier. XII + 71 S. u. 2 T. 8°.

S. Mandic. Methode und Apparat zur anschaulichen Entwickelung des pythagoreischen Lehrsatzes. Wien: A. Pichler's Wittwe und Sohn. 30 S. 8°. Mit 2 Tafeln.

E. Mortara. Sviluppo e costruzione dei solidi geometrici. Saluzzo.

J. Petersen. Methoder og Theorier til Lösning af geometriske Konstruktions-opgaver. 4. udgave. Kjöbenhavn. 120 S.

J. Petersen. Geometriske Opgaver til Skolebrug. 7. udgave. Kjöbenhavn. 64 S.

T. T. Rankin. Complete solutions to papers in mathematics (second stage) 1887-1894. Science and art examinations. Second edition. London. 104 S. 8°.

K. Schmid. 100 ausführlich gelöste geometrische Aufgaben bayerischer Lehrer-Anstellungsprüfungen nebst einer Sammlung von Uebungsbeispielen. München: M. Kellerer. VII + 180 S. 8°.

F. J. Vaes. Goniometrische Studie. Grafische Behandeling van goniometrische Formules en Vergelijkingen. Gorinchem. IV + 56 S. u. 2 Taf.

L. Gérard. Sur l'équivalence de deux portions de droites. Periodico di Mat. **11**, 23.

Beweis, dass, wenn $AB = CD$, auch $BA = CD$ sein muss.

Lp.

G. Riboni. Osservazioni circa la nota: „Sulla simmetria in alcune dimostrazioni della geometria elementare". Periodico di Mat. **11**, 28-29.

C. Ciamberlini. Ancora sulla simmetria in alcune dimostrazioni della geometria. Ibid. 61-63.

Wenn Ciamberlini in der angezogenen Note (F. d. M. **26**, 563, 1895) die Symmetrie der Beweise gefordert hatte, so zeigt Riboni, dass eine einseitige Bevorzugung derselben oft die Einfachheit opfern müsse und daher für den Schüler eine Erschwerung herbeiführe. In der Entgegnung bestreitet Ciamberlini die von Riboni gemachten Einwände und will an den gewählten Beispielen auch die pädagogische Richtigkeit seiner Ansichten nachweisen.

Lp.

E. Guitel. Propriétés relatives aux polygones équivalents. Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24**, 264-276.

Ein Verfahren wird angegeben, nach welchem ein gegebenes Polygon durch eine endliche Anzahl geradliniger Schnitte in solche Stücke zerlegt werden kann, die zusammengesetzt ein anderes flächengleiches Polygon ergeben.

Lp.

R. F. Muirhead. On superposition by the act of dissection. Edinb. M. S. Proc. **14**, 109-112.

Erörtert die Frage, ob irgend zwei flächengleiche geradlinige Figuren durch eine Zerschneidung in eine endliche Anzahl von Teilen zur Deckung gebracht werden können. Gbs. (Lp.)

G. Biasi. I poligoni equivalenti. Sassari: Dessi. 4 S. 8°.

G. Leonhardt. Ein bedenklicher Zwiespalt auf elementargeometrischem Gebiete. Hoffmann Z. **27**, 410-413.

J. C. V. Hoffmann. Ueber den geometrischen Begriff „Figur“ und die davon abhängigen bedenklichen, weil schwankenden Definitionen, besonders die Definition von Kreis. Ebenda. 413-416.

Weil das Wort „Kreis“ im Deutschen bald für die Linie, bald für die Fläche gebraucht wird, so machen die beiden Verf. die entgegengesetzten Vorschläge, das Wort Kreis erstens für die Fläche, zweitens für die Linie ausschliesslich zu gebrauchen und im ersten Falle Kreislinie, im zweiten Kreisfläche ausdrücklich zu sagen. Lp.

G. Frattini. Poligoni concavi e convessi. Periodico di Mat. **11**, 106.

Vorschläge zu geeigneten Definitionen. Lp.

E. Cominotto. Sopra una disposizione particolare dei triangoli simili. Periodico di Mat. **11**, 59-61.

Fortsetzung und Schluss des Artikels, über den in F. d. M. **26**, 570, 1895 berichtet ist. Lp.

V. Jerabek. Sur les triangles à la fois semblables et homologiques. Mathesis (2) **6**, 81-83.

Diese Notiz enthält neben anderen Ergebnissen einen Beweis eines Satzes von Sondat, mit dem sich schon mehrere Autoren beschäftigt haben (E. Haerens und L. Meurice: Deux démonstrations géométriques d'un théorème de M. P. Sondat. Mathesis (2) **5**, 265-267): Wenn zwei homologe Dreiecke ihre Seiten senkrecht zu einander haben, so hälftet die Axe der Homologie den Abstand der beiden Höhenschnitte. Dml. (Lp.)

Aletrop. Sur un problème de la géométrie de la règle. J. de Math. élém. (4) **5**, 124-126.

Bemerkungen über die Lösungen der Aufgabe: die Verbindungslinie der unzugänglichen Schnittpunkte zweier Geradenpaare zu ziehen. Lp.

A. E. Rahusen. Sur une construction du centre des moindres carrés d'un système de droites. Nieuw Archief (2) **3**, 33-35. Mo.

Sanjana. Question 12641. Ed. Times **65,** 43-45.

Die Aufgabe 2916 (von J. H. Turrell) verlangte die Construction eines Dreiecks aus einem Winkel und dem Radius des Inkreises, wenn der Schwerpunkt auf dem Umfange des Inkreises liegt. In Ed. Times **62,** 114 hatte Morgan Brierley eine Lösung gegeben und behauptet, dass das Dreieck gleichschenklig sein müsse. Sanjána stellt in seiner Aufgabe fest, dass diese Behauptung irrig ist, dass vielmehr die Bedingung, der ein solches Dreieck unterliege, die folgende sei: $5(a^2+b^2+c^2) = 6(ab+bc+ca)$. Die geometrische Construction, an der sich C. E. Hillyer und Radhakrishnan beteiligen, wird teils mit Hülfe der Durchschnitte von Kegelschnitten beleuchtet, teils nach algebraischer Analysis elementar durchgeführt. Lp.

T. C. Simmons. Questions 8645 and 12864. Ed. Times **65,** 53-54.

Ist G der Schwerpunkt des Dreiecks ABC, und sind $GA\sqrt{3}$, $GB\sqrt{3}$, $GC\sqrt{3}$ die Seiten eines neuen Dreiecks $A_1B_1C_1$, so stehen ABC und $A_1B_1C_1$ gegenseitig in gleichmässiger Abhängigkeit, und es existiren viele Beziehungen zwischen ihnen, die in Milne's „Companion to problem papers" S. 147-151 erörtert sind (vergl. F. d. M. **20,** 62, 1888). Lp.

K. Zahradník. Zum pythagoreischen Lehrsatze. Casopis **25,** 261-265. (Böhmisch.)

Uebersetzung eines in dem „Nastavni vjesnik" 1894 erschienenen Aufsatzes über den Zusammenhang zwischen einem rechtwinkligen Dreiecke und dem Mittelpunktsdreiecke der über seinen Seiten errichteten Quadrate. Sda.

V. Jelínek. Ueber das ebene Tangentenviereck. Casopis **25,** 49-64. (Böhmisch.)

Für Anfänger berechnete Darstellung. Sda.

E. N. Barisien. Note relative à la distance du centre du cercle circonscrit à un triangle à son centre de gravité. J. de Math. élém. (4) **5,** 169-170.

Kurze Herleitung der Formel $d^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)$ ohne Hülfe der Trigonometrie. Ein Anonymus giebt S. 198 eine noch kürzere Ableitung; Bernès giebt S. 251—253 weitere Anwendungen der Lösung von Barisien. Lp.

M. Blasendorff. Ueber die Teilung des Kreisbogens. Pr. (No. 122) 8. Realschule Berlin. 29 S. 4° mit 1 Fig.-Taf.

Der erste Teil giebt eine kurze Geschichte der Winkelteilung, insbesondere der Trisection, die beiden anderen bringen eigene Näherungsmethoden des Verfassers mit genauer Fehlerbestimmung. Es sei $AE = a$ der zu tei-

lende Bogen des Kreises um M mit dem Durchmesser d. Man ziehe die Durchmesser EMG und AMF, ziehe FEJ, so dass $EJ = \frac{1-m}{m} d$ wird, und verbinde J mit G, so trifft JG den Bogen AE in dem gesuchten Teilpunkte H; oder man ziehe die Sehne AE, teile dieselbe durch die Punkte F und G innen und aussen im Verhältnis $m : 1-m$, so dass $FA : FE = GA : GE = m : 1-m$ ist, und errichte über FG als Durchmesser den Apollonischen Kreis, so schneidet dieser den Bogen AE im Teilpunkte H. Die Construction gründet sich auf den Satz: Ist in einem Dreieck ABC der Aussenwinkel $BAD = \alpha$ und $AC : AB = 1-m : m$, so ist angenähert $\angle C = m\alpha$ und $\angle B = (1-m)\alpha$ mit um so grösserer Annäherung, je kleiner α ist. Lg.

M. Koenig. Die geometrische Teilung des Winkels. II. Berlin: G. Siemens. S. 33-42. 8°. Mit 1 Taf.

Dass der Verf. die Beurteilungen des ersten Teiles seiner Arbeit nicht verstanden hat, beweist das „Heureka“ am Ende dieses zweiten Teils: „Hiermit ist die Aufgabe, einen gegebenen Winkel auf rein planimetrischem Wege, nur mit Hülfe von Kreisen und geraden Linien, mathematisch genau in drei gleiche Teile zu zerlegen, gelöst.“ (Vergl. F. d. M. **25**, 908, 1893/94.) Lg.

C. F. E. Björling. Eine approximative Trisectio anguli. Hoppe Arch. (2) **15**, 223-224.

Die Construction rührt her vom Kapitän C. E. Unonius in Malmö und gründet sich auf die Formel

$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} \alpha + \frac{4}{\sin^3 \alpha}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{4}}\right),$$

in welcher angenähert $x = 2\alpha/3$ ist. Lg.

S. Wellisch. Das 2000-jährige Problem der Trisection des Winkels. Wien. 19 S. u. 11 Holzschn.

H. Schubert. Veranschaulichung der Berechnung der Zahl π. Hoffmann Z. **27**, 21-23.

Sehr hübsche graphische Darstellung für die Berechnung der Umfänge der demselben Kreise ein- und umbeschriebenen $2n$-Ecke aus denjenigen der n-Ecke, wie der Verf. sie durch Glinzer in dessen Lehrbuch hat veröffentlichen lassen. Lp.

A. L. Duse. Quadratura del circolo; formola geometrica con applicazione. Napoli: Angelico Belisario. 9 S. 8°.

K. Bochow. Eine einheitliche Theorie der regelmässigen Vielecke. Allgemeine Untersuchungen nebst Berechnung der Seiten, Diagonalen und Flächen der im elementaren Unterricht verwendbaren regelmässigen Vielecke aus den Reihen 2, 3, 5, 15, 17, 51, 85, 255. Magdeburg. Leipzig: G. Fock in Commiss. 34 S. Mit 2 Taf. 4°.

K. Bochow. Eine einheitliche Theorie der regelmässigen Vielecke. Pr. (No. 279) Realsch. Magdeburg. 20 S. 4°. Mit 1 Fig.-T.

Ableitung der Wurzelausdrücke, welche man für die Sehnen erhält, die in einem Kreise vom Radius r jedem Vielfachen des p^{ten} Teils der Peripherie zugehören, wo $p = 2^a . q_1 . q_2 . q_3 \dots$ ist, und $q_1, q_2, q_3, \dots$ verschiedene Primzahlen, die um 1 grösser sind als eine Potenz von 2. Die geometrische Ableitung beruht auf Formeln, die man auch durch die geometrische Darstellung complexer Zahlen erhält. Den Schluss bildet eine Tabelle der Wurzelausdrücke für $\cos 3n$ ($3n$ = Gradanzahl) für $n = 1$ bis $n = 30$. Scht.

E. Dolezal. Relationen bei regulären, dem Kreise ein- und umbeschriebenen Polygonen. Hoppe Arch. (2) **15**, 172-222.

Ist D der Abstand eines äusseren Punktes von seiner Berührungssehne und h die Pfeilhöhe des zugehörigen Bogens, so setzt Dolezal $D = k . h$ und drückt durch den Factor k die Relationen zwischen den betrachteten Stücken aus, z. B. den halben Centriwinkel durch $\sin \frac{180}{n} = \frac{\sqrt{k(k-2)}}{k-1}$; aus dem Dreieck und dem Kreis (als Polygon) ergeben sich 3 und 2 als die Grenzen von k. Lg.

L. Gérard. Construction du polygone régulier de 17 côtés au moyen du seul compas. Math. Ann. **48**, 390-392.

In seinen „Vorträgen über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie" hatte F. Klein die 17-Teilung des Kreises als von den folgenden fünf Gleichungen abhängig dargestellt: 1) $x = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17}$, 2) $x_1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17}$, 3) $y = x + \sqrt{x^2+1}$, 4) $z = x_1 + \sqrt{x_1^2+1}$, 5) $t = y/2 + \sqrt{(y/2)^2 - z}$. Hierauf fussend, giebt Gérard eine Construction der 17-Teilung, bei welcher er 27-mal einen Kreis beschreibt, 30-mal eine der beiden Zirkelspitzen in einen bestimmten Punkt setzt, einmal eine Zirkelspitze in einen unbestimmten Punkt eines Kreises setzt, achtmal die zweite Zirkelspitze in einen bestimmten Punkt setzt, während die erste fest ist. Das Lineal wird bei der Construction nicht benutzt. Scht.

H. Vogt. Résolution algébrique de l'équation $x^p - 1 = 0$ dans le cas où p est un nombre premier. Application à l'inscription des polygones réguliers de p côtés. Rev. de Math. spéc. **6**, 417-425.

M. Stern. Ueber algebraische Beziehungen an einem symmetrischen Kreissechseck. Schlömilch Z. **41,** 272-276.

In einem Dreiecke $A'A''A'''$ ziehe man die Höhen und verlängere die unteren Abschnitte derselben um sich selbst bis resp. A_1, A_2, A_3. Dann ist $A'A_2A'''A_1A''A_3$ das betrachtete Kreissechseck. Gesetzt wird:

$$A'A_2 = A'A_3 = s_1, \quad A_2A_3 = x_1, \quad A''A''' = y_1,$$
$$A''A_3 = A''A_1 = s_2, \quad A_3A_1 = x_2, \quad A'''A' = y_2,$$
$$A'''A_1 = A'''A_2 = s_3, \quad A_1A_2 = x_3, \quad A'A'' = y_3,$$

endlich: $A_1A' = z_1$, $A_2A'' = z_2$, $A_3A''' = z_3$.

Es werden nun folgende vier Aufgaben besprochen $(i = 1, 2, 3)$:

I Gegeben s_i, gesucht: x_i, y_i, z_i.
II Gegeben x_i, gesucht: s_i, y_i, z_i.
III Gegeben y_i, gesucht: s_i, x_i, z_i.
IV Gegeben z_i, gesucht: s_i, x_i, y_i.

Etwas schwieriger unter diesen Aufgaben ist IV. Man setze den Durchmesser des Kreises gleich d und führe nach Heymann die Hülfswinkel ein: $z_1 = d\cos\alpha_1$, $z_2 = d\cos\alpha_2$, $z_3 = d\cos\alpha_3$. Sind dann A_1, A_2, A_3 die Winkel des Dreiecks $A_1A_2A_3$, so ist $2\alpha_1 = A_2 - A_3$, $2\alpha_2 = A_3 - A_1$, $2\alpha_3 = A_1 - A_2$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$; also $d^3 - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)d + 2z_1z_2z_3 = 0$. Hat man hieraus d, so ist auch $d\cos\alpha_1 = z_1$, $d\cos\alpha_2 = z_2$, $d\cos\alpha_3 = z_3$, und dann $A_1 = \frac{2}{3}(R - \alpha_2 + \alpha_3)$, $A_2 = \frac{2}{3}(R - \alpha_3 + \alpha_1)$, $A_3 = \frac{2}{3}(R - \alpha_1 + \alpha_2)$, woraus das andere leicht folgt. Mz.

G. Frattini. Una bella osservazione del De Paolis. Periodico di Mat. **11,** 105.

Die Bemerkung von De Paolis bezog sich auf die Potenzlinie zweier Kreise; der Verf. schlägt zur Vereinfachung des Beweises der Grundeigenschaften derselben die Definition vor, es sei diejenige Gerade der Ebene, um welche man einen der Kreise drehen muss, damit durch beide Kreise nach der Drehung eine Kugel gelegt werden kann. Lp.

J. J. Duran-Loriga. Ueber Radical-Kreise. Hoppe Arch. (2) **15,** 117-123.

Radicalkreis zweier gegebenen Kreise nennt der Verf. denjenigen Kreis, welcher bestimmt ist als geometrischer Ort der Punkte, deren Potenzen in Bezug auf die beiden gegebenen Kreise gleichen Wert, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben; er giebt einige darauf bezügliche Sätze und Aufgaben und vermutet, dass sie zu neuen Entdeckungen in der Geometrie der Dreieckskreise Anlass geben werden. (Vergl. F. d. M. **26,** 572 u. 665, 1895.) R. M.

J. J. Duran-Loriga. Sur les cercles radicaux. Mathesis (2) **6,** 105-107.

Auszug aus dem Artikel „Sobre los circulos radicales“ im Progreso mat. **5** (F. d. M. **26**, 572, 1895). Dml. (Lp.)

J. J. Duran-Loriga. Segunda nota sobre los circulos radicales y anti-radicales. Teixeira J. **13**, 33-46.

Radicalkreis nennt der Verf. bekanntlich den Kreis, welcher der Ort der Punkte ist, deren Potenzen in Bezug auf zwei Kreise gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen sind. Eine der in dem vorliegenden Aufsatze gestellten Fragen ist die folgende: Zu zwei gegebenen Kreisen (C_1) und (C_2) einen dritten Kreis (C_3) so zu bestimmen, dass (C_2) der Radicalkreis zu (C_1) und (C_3) ist. Ausserdem leitet der Verf. vermittelst der Betrachtung der Radicalkreise die Bedingungen dafür ab, dass zwei Kreislinien sich rechtwinklig schneiden, und macht dann auch eine Anwendung von der betrachteten Theorie auf die Dreiecksgeometrie. Tx. (Lp.)

A. B. Obejero. Sur les triangles équipotentiels. J. de Math. élém. (4) **5**, 145-149.

Mit Bezugnahme auf Arbeiten von J. J. Durán-Loriga werden „äquipotential“ solche Dreiecke genannt, bei denen die symmetrische Function der Radien r, r_a, r_b, r_c der In- und Ankreise:

$$P = r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a - r(r_a + r_b + r_c) = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

denselben Wert hat. Ueber solche Dreiecke (bei denen also $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$ ist) werden zehn Sätze ausgesprochen und bewiesen. Lp.

J. F. d'Avillez. Nota sobre algumas proposições de geometria. Lisboa Jorn. 1896.

Der Verf. erörtert einige Folgerungen aus dem Satze: Fällt man von einem beliebigen Punkte einer Kreislinie auf zwei fest gegebene Durchmesser die beiden Lote, so ist die Verbindungslinie der Fusspunkte von constanter Länge. Tx. (Lp.)

G. Bellacchi. Problema di geometria elementare. Periodico di Mat. **11**, 56-58.

Eine Strecke $A'A$ wird durch einen Punkt B in zwei Teile $A'B = a$, $BA = b$ geteilt, und über jeder der Strecken a, b, $a+b$ als Durchmesser wird nach derselben Seite von $A'A$ je ein Halbkreis beschrieben. In dem von den drei Halbkreisen begrenzten Flächenstücke zeichnet man den Kreis, welcher alle drei berührt; darauf in dem einen Restflächenstück einen Kreis, der den eben gefundenen und die beiden zuerst gezogenen Kreise berührt, und so weiter. Den Radius des n^{ten} eingeschriebenen Kreises zu berechnen. Nach der algebraisch-geometrischen Behandlung wird die Methode der reciproken Radien zur Lösung benutzt. Lp.

A. L. Candy. **A general theorem relating to transversals and its consequences.** Annals of Math. **10,** 175-190; **11,** 10-19.

Durch die Endpunkte zweier festen Sehnen in einem gegebenen Kreise sind die beiden sich in O schneidenden Geraden, durch O und die Endpunkte je einer der Sehnen die beiden Kreise und endlich durch O eine beliebige Transversale gelegt. Dann handelt es sich hier darum, Relationen aufzustellen zwischen den Strecken auf der Transversale, gemessen von O bis zu den drei Kreisen, und den beiden Sehnen. Sind m und n die Abschnitte zwischen O und dem gegebenen Kreise, p und q diejenigen zwischen O und den gegebenen Sehnen, so ergeben sich jene Relationen alle aus dem einfachen Satz: $mn:pq = m-n:p-q$, d. h. die Producte der durch den Kreis und die Sehnen gebildeten Abschnitte verhalten sich wie ihre Differenzen. Lg.

J. F. d'Avillez. **Sur les puissances d'un triangle.** J. de Math. élém. (4) **5,** 225-226.

Beziehungen dreier Kreise, die sich zu je zweien berühren, zu dem Dreiecke, dessen Ecken die Berührungspunkte jener Kreise sind. Lp.

R. F. Muirhead. **On the number and nature of the solutions of the Apollonian contact problem.** Edinb. M. S. Proc. **14,** 135-147.

Ein sehr einfaches Verfahren zur Lösung der Aufgabe, einen Kreis zu beschreiben, der drei gegebene Kreise berührt. Die Anzahl und die Natur der Lösungen werden aus geometrischen Betrachtungen klar dargelegt, und mehrere Tafeln mit der Angabe der Lösungen sind zugefügt. Gbs. (Lp.)

K. Traub. **Berechnung der Radien der acht Berührungskreise beim Apollonischen Problem.** Lahr: Schauenburg. III + 18 S. 8°.

G. Bellacchi. **2ª nota sul problema del Malfatti.** Periodico di Mat. **11,** 25-27.

Fortsetzung der bezüglichen Rechnungen, über welche in F. d. M. **26,** 576, 1895 berichtet ist; doch werden sie auch jetzt nicht zu Ende geführt. Lp.

W. Godt. **Ueber eine merkwürdige Kreisfigur.** Math. Ann. **47,** 564-572.

Wenn ein Kreis als in einer bestimmten Richtung durchlaufen vorgestellt wird, so nennt ihn der Verf. kurz einen „Kreis mit Sinn". Durch genaue Betrachtung der Schnittwinkel von Kreisen gelangt er zu der folgenden eigentümlichen Kreisconfiguration: 2^n Kreise K und 2^n Punkte P können so liegen, dass jeder Kreis K durch $n+1$ Punkte P hindurchgeht und jeder Punkt P Schnittpunkt von $n+1$ Kreisen K ist; dabei sind $n+1$ Kreise, die durch einen Punkt gehen, beliebig,

während aus ihnen alle übrigen Punkte und Kreise folgen. Nimmt man von diesen $n+1$ ersten Kreisen jeden in willkürlichem Sinne, alle übrigen in geeignetem Sinne, so kann man jeden der Punkte und Kreise durch eine Variation von $n+1$ Elementen 0 oder 1 so bezeichnen, dass durch jeden Punkt die Kreise gehen und jeder Kreis durch die Punkte geht, deren Bezeichnung aus seiner Bezeichnung durch Aenderung je eines Elementes hervorgeht. Bezeichnet man die von den Kreisen an den Punkten gebildeten Winkel in der festgesetzten Weise, so ändert ein Winkelsymbol seinen Wert nicht, wenn gleichzeitig in zwei Columnen alle Indices geändert werden, oder die Kreise bilden an allen Punkten congruente Büschel von gleichem Sinn. Keiner der Punkte und keiner der Kreise ist vor irgend einem anderen ausgezeichnet. Besondere Fälle der Configuration von acht Punkten und acht Kreisen kommen bei Steiner vor (Ges. Werke **1**, 223 u. **2**, 689). Lp.

W. Godt. Ueber den Feuerbach'schen Kreis und eine Steiner'sche Curve vierter Ordnung dritter Klasse. Münch. Ber. **24**, 1896, 119-166; Naturf. Vers. Lübeck (1895) **67**, II_1, 21.

Der oft bewiesene Satz, dass der Kreis der neun Punkte eines Dreiecks die vier Berührungskreise des Dreiecks berührt (Vgl. Lange, Geschichte des Feuerbach'schen Kreises, Berlin 1894), wird hier in einem neuen Zusammenhange behandelt. Dabei ergeben sich auch die von Steiner herrührenden Sätze über die Curve vierter Ordnung dritter Klasse, deren Tangenten die Verbindungslinien der drei Schnittpunkte sind, die man auf den Seiten eines Dreiecks erhält, wenn man von jedem Punkte seines Umkreises Lote auf die drei Seiten fällt.

Scht.

A. Tissot. Sur les cercles bitangents aux coniques. J. de Math. élém. (4) **5**, 217-222, 241-244, 265-271.

Elementare Ableitung einer Reihe von Sätzen über die einen Kegelschnitt doppelt berührenden Kreise. Lp.

J. F. d'Avillez. Exercices sur un triangle remarquable. J. de Math. élém. (4) **5**, 246-247.

24 Formeln, welche für Dreiecke ABC gelten, in denen die Euler'sche Gerade (Schwerpunkt, Inkreiscentrum, Höhenschnitt) zur Seite BC parallel ist. Lp.

R. F. Davis. Question 9484. Ed. Times **64**, 57-58.

Die Aufgabe giebt eine Construction, welche zum Beweise des Satzes führt, dass der Neunpunktekreis die dem Dreiecke eingeschriebenen Kreise berührt. Lösungen von Zerr und Radhakrishnan.

Lp.

C. E. Hillyer. Question 12801. Ed. Times **64,** 58-59.

Die Fusspunkte der Lote von den Ecken B, C eines Dreiecks ABC auf die Winkelhalbirende von A, die Mitte der Seite BC und der Fusspunkt des Lotes von A auf BC liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt auf dem Neunpunktekreise liegt. Hieraus folgt ein Beweis des Feuerbach'schen Satzes. Lösungen von Sanjána und Mukhopadhyay. Lp.

H. Lieber. Ueber die isogonischen und isodynamischen Punkte des Dreiecks. Pr. (No. 152) Friedr. Wilh. Schule Stettin. 20 S. 4°. Mit 1 Fig.-Taf.

Die Arbeit bringt im Anschluss an die Programmabhandlungen des Verfassers von 1886, 1887 und 1888 eine Zusammenstellung der im Laufe der Zeit gesammelten Sätze über isogonische Punkte (deren Eckstrahlen sich unter gleichen Winkeln schneiden) und deren Winkelgegenpunkte (isodynamische). Die Sätze interessiren nicht minder wie die früheren und können vielfach zu häuslichen Arbeiten in der Prima verwertet werden. Fortsetzung folgt im Programm des nächsten Jahres. Lg.

E. Lemoine. Mélanges sur la géométrie du triangle. Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24,** 186-211.

Der aus vielen interessanten Einzelheiten bestehende reiche Inhalt des Aufsatzes wird genügend durch die Titel der einzelnen Paragraphen gekennzeichnet: I. Allgemeine Definition der merkwürdigen Elemente. II. Verschiedene Arten der Erzeugung merkwürdiger Punkte. III. Verschiedene Eigenschaften, auf welche die continuirliche Transformation anwendbar ist. IV. Verschiedene Theoreme und Rechnungsergebnisse. Lp.

E. Lemoine. Extrait d'une lettre à M. G. de Longchamps. J. de Math. élém. (4) **5,** 13-15.

Aus Anlass einer in (4) **4,** 284-285 veröffentlichten Lösung einer Aufgabe (655), die von G. de Longchamps gestellt war und auf den Lemoine'schen Punkt eines Dreiecks führt, giebt der Verf. nach den Grundsätzen seiner Geometrographie die charakteristischen Zahlen für die Einfachheit und die Genauigkeit der zur Auffindung dieses Punktes nötigen Construction. Lp.

E. Lemoine. Solution de la question 394. J. de Math. élém. (4) **5,** 164-167.

Sind F, F_a, F_b, F_c die vier Berührungspunkte des Feuerbach'schen Kreises mit den In- und Ankreisen eines Dreiecks ABC, so berühren bekanntlich die Tangenten in diesen Punkten die dem Dreiecke einbeschriebene Ellipse von grösstem Inhalte. Wenn F', F'_a, F'_b, F'_c die Berührungspunkte sind, so gelten die Formeln:

$$FF' = -\tfrac{1}{2}\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab},$$

$$F_aF'_a = -\tfrac{1}{2}\frac{(b-c)(c+a)(a+b)}{a^2+b^2+c^2-bc+ca+ab},$$

die durch Umrechnung des Nenners noch in mannigfache andere Formen gebracht werden können. Lp.

J. S. Mackay. Symmedians of a triangle and their concomitant circles. Edinb. M. S. Proc. **14**, 37-103.

In dieser Abhandlung sind viele von den Eigenschaften der Symmedianen und ihrer Begleitkreise (des Lemoine'schen, Tucker'schen, Taylor'schen, Adams'schen) gesammelt. In den meisten Fällen werden Beweise der Sätze gegeben, und durchweg findet man Bezüge auf die erste Veröffentlichung der Sätze und auf die Quelle der mitgeteilten Beweise, wenn es nicht die der Entdecker sind. In manchen Fällen werden zwei oder noch mehr Beweise geliefert, und die angeführten Gewährsmänner sind nicht selten verhältnismässig wenig bekannt.

Gbs. (Lp.)

R. Tucker. Question 12798. Ed. Times **64**, 47-48.

Durch einen Punkt P innerhalb eines Dreiecks Parallelen zu den drei Seiten zu ziehen, deren Abschnitte zwischen den Seiten gleich lang sind $[= 2abc/(ab+bc+ca)]$. Formeln betreffend das Sechseck, von dem jene Parallelen die drei Hauptdiagonalen sind. Lösungen von Krishnamacharry und Sanjána. Lp.

G. Brocard. Centres de transversales angulaires égales. Mathesis (2) **6**, 217-221.

J. Neuberg. Note sur l'article précédent. Mathesis (2) **6**, 221-225.

Der Verf. untersucht, ob es in der Ebene eines Dreiecks ABC einen solchen Punkt F giebt, dass die durch F gezogenen Ecktransversalen, welche die Gegenseiten in A', B', C' treffen, gleiche Länge $AA' = BB' = CC'$ haben. Zwei reelle Punkte genügen der Bedingung, nämlich die Brennpunkte der dem Dreiecke ABC umbeschriebenen Ellipse, deren Mittelpunkt in dem Schwerpunkte des Dreiecks liegt.

Dml. (Lp.)

Soons. Théorème de géométrie. Mathesis (2) **6**, 57-59.

Man projicirt die Ecken eines Dreiecks ABC in A', B', C' auf eine beliebige Gerade m der Ebene ABC; darauf zieht man die Geraden $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ bezw. senkrecht zu BC, CA, AB. Diese Geraden laufen durch einen und denselben Punkt M. Wenn m durch das Centrum o des Umkreises von ABC geht, so liegt M auf dem Neunpunktekreise des Dreiecks ABC. Der erste Teil dieses Satzes stammt von J. Neuberg. Dml. (Lp.)

B. Sollertinsky. Solution de la question 148. J. de Math. élém. (4) 5, 133-135.

Beweis des von Weill vorgelegten Satzes: Gegeben sind zwei Gerade und ein sie berührender Kreis mit dem Mittelpunkte O. Eine bewegliche Tangente des Kreises trifft die beiden festen Geraden in A und B; der Höhenschnitt des Dreiecks OAB sei H. Der Neunpunktekreis des Dreiecks OAB umhüllt zwei Kreise, und der Umkreis des Dreiecks AHB umhüllt ebenfalls zwei feste Kreise. Lp.

J. Neuberg. Question 7. J. de Math. élém. (4) 5, 68-70, 158-159.

Der zum Beweise von Neuberg vorgelegte Satz lautet: Ueber den Seiten eines gegebenen Dreiecks ABC construirt man drei ähnliche Dreiecke ABC_1, BCA_1, CAB_1, so dass die drei Geraden AA_1, BB_1, CC_1 durch einen und denselben Punkt D gehen. Dann beschreiben die Punkte A_1, B_1, C_1 je eine Kreislinie. An der ersten Stelle wird der Beweis von E. Duporcq zum Teil analytisch geführt, an der zweiten ebenso, aber kürzer, von Bernès; beide Autoren fügen mehrere neue Eigenschaften der Figur hinzu. Lp.

D. E. Neue Geometrie des Dreiecks. Spaczinski's Bote, No. 230-232, 236, 239, 240.

Versuch einer systematischen Darstellung, die in der russischen mathematischen Litteratur noch fehlte. Si.

J. Nager. Ueber einige merkwürdige Punkte des Kreisvierecks. Monatsh. f. Math. 7, 325-331.

Die Sätze dienen als Beitrag zur Methodik von Grassmann's Ausdehnungslehre. Ist H der Punkt, in welchem sich die zu den vier Ecken in Bezug auf die nicht zugehörigen Seiten gehörenden vier Simpson'schen Geraden schneiden, S der Schwerpunkt (Punkt der mittleren Entfernungen) der Ecken und O der Mittelpunkt des Umkreises, so liegen H, S, O auf einer Geraden, und zwar S in der Mitte von HO. Die übrigen Sätze betreffen Beziehungen zwischen den äusseren und inneren Winkelhalbirenden im Kreisviereck. Lg.

B. Sollertinsky. Note de géométrie. J. de Math. spéc. (4) 5, 251-254.

Sätze über die „Newton'sche Gerade", welche nämlich die Mitten der Diagonalen bei dem Fusspunktenviereck für den Punkt M eines Kreises bezüglich eines eingeschriebenen Vierecks verbindet. Anlass hatten die Fragen der Uebungsaufgabe No. 430 im J. de Math. élém. (4) 5, 177 gegeben, die von A. Boutin gestellt war. Lp.

P. Sveschnikoff. Elementare Theorie der Ellipse. Spaczinski's Bote No. 239, 240, 242-244.

Elementare geometrische Darstellung, nach dem Entwurf von Pr. Ermakoff. Si.

A. Lugli. **Soluzioni della quistione 250.** Periodico di Mat. **11**, 31-35, 65 - 66.

Die Verbindungslinien der Ecken des Dreiecks ABC $(=\Delta)$ mit dem innerhalb gelegenen Punkte M treffen die Gegenseiten in A', B', C'. Man construire auf jeder dieser Geraden den vierten, dem M zugeordneten harmonischen Punkt: M_a, M_b, M_c. Ist $BA':A'C=m$, $CB':B'A=n$, $AC':C'B=p$, so ist der Inhalt des Dreiecks $M_aM_bM_c$ gleich $4\Delta:[(m+1-1/p)(n+1-1/m)(p+1-1/n)]$. Diese von Lugli gestellte Aufgabe hat verschiedene Lösungen gefunden; abgedruckt sind die von G. Sforza, G. Mola, F. Ferrari. Lp.

Barbarin. **Construire un triangle dont les bissectrices sont données.** Mathesis (2) **6**, 143-160.

Der Verf. löst zuerst die folgende Aufgabe: ein Dreieck ABC zu construiren, von dem man den Winkel A und die Längen der Halbirungslinien der Winkel B und C giebt; danach behandelt er die Frage, welche das Thema seiner Arbeit bildet. Die Lösungen der beiden Aufgaben erfordern sehr eingehende Erörterungen, von denen man in wenigen Worten keine Vorstellung geben kann. Die Aufgabe ist mit Lineal und Zirkel nicht zu lösen. Dml. (Lp.)

Raffalli. **Démonstration d'un théorème élémentaire.** J. de Math. élém. (4) **5**, 150.

Beweis des Satzes aus Mannheim's Géométrie cinématique, S. 26: Gegeben sei ein Winkel aob und ein Punkt s; man ziehe durch s die bewegliche Gerade asb. Dann ist $(1/sa+1/sb)/\sin osb = \text{const.}$

Lp.

W. Algenstaedt. **Beiträge zur Determination der Elemente des Dreiecks. Teil 3 (Schluss).** Pr. (No. 664) Gymn. Doberan. 1896. S. 49-66. 4°.

Es ist dies der Schluss einer recht verdienstlichen Programmabhandlung, über deren ersten und zweiten Teil bereits in F. d. M. **25** und **26** berichtet worden ist. Es werden wieder allerhand Verbindungen am Dreieck, wie $\varrho_a+\varrho$ oder $\varrho_b+\varrho_c$ u. s. w. auf verschiedene Arten durch andere Elemente des Dreiecks ausgedrückt, und unter Annahme besonderer Voraussetzungen bei den Winkeln, z. B. $\alpha=90^\circ$, $\alpha=\beta$, $\alpha=45^\circ$ etc., werden die möglichen Grenzwerte dieser Verbindungen ermittelt.

Mz.

L. G. Gascó. **Diagramas mnemónicos de trigonometría.** Archivo de Mat. **1**, 21-28, 41-45, 61-64, 81-85, 101-105, 121-127, 141-149, 161-169, 181-190, 201-210, 221-227.

In dieser Arbeit zeigt der Verf. gewisse mnemotechnische Mittel zur unmittelbaren Niederschrift der trigonometrischen Formeln für ebene und sphärische Dreiecke. Zu diesem Zwecke benutzt er eine Reihe einfacher Diagramme. Tx. (Lp.)

Ventura Reyes Prósper. Nueva demostración de las fórmulas trigonométricas de un ángulo igual á la suma ó diferencia de dos dados. Archivo de Mat. **1**, 89-91.

Der Verf. leitet mit Hülfe stereometrischer Betrachtungen die Additionstheoreme für die Functionen Sinus und Cosinus ab.

Tx. (Lp.)

A. Pleskot. Ueber einige goniometrische Formeln. Casopis **25**, 64-69. (Böhmisch.)

Für Anfänger berechnete Darstellung. Sda.

J. E. A. Steggall. Note for the formula for $\tan(A+B)$. Edinb. M. S. Proc. **14**, 122.

Geometrischer Beweis der Formel für $\operatorname{tg}(A+B)$. Gbs. (Lp.)

E. M. Langley. Sur quelques identités trigonométriques. J. de Math. élém. (4) **5**, 3-4.

Geometrische Beweise für die Formeln:

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C)}, \quad \frac{a}{b-c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}(B-C)}.$$

Lp.

Lauvernay. Résolution de l'équation $a\sin x + b\cos x = c$ (construction géométrique de ses racines). J. de Math. élém. (4) **5**, 5-6.

Setzt man $x = \alpha + \varphi$, bestimmt φ aus $\operatorname{tg}\varphi = a/b$, so wird $\cos\alpha = c/\sqrt{a^2+b^2}$; dies wird construirt. Lp.

É. Lemoine. Sur la détermination géométrique de l'angle x donné par l'équation $a\sin x + b\cos x = c$, où a, b, c sont des longueurs données. J. de Math. élém. (4) **5**, 59-66.

Bernès. Comparaison des constructions relatives à l'équation $a\sin x + b\cos x = c$. J. de Math. élém. (4) **5**, 84-87.

É. Lemoine. Lettre adressée à M. G. de Longchamps. Ebenda 103-105.

Mit Bezug auf die von Droz-Farny in (4) **4**, 217-218 und von Lauvernay in (4) **5**, 5-6 angegebene Lösung der Aufgabe liefert zunächst Lemoine eine dritte Construction und ermittelt die Masszahlen für die Einfachheit und die Genauigkeit aller drei Constructionen nach den Grundsätzen seiner Geometrographie. Die letztere Schätzung geschieht ferner in der zweiten Notiz von Bernès, der zu dem Resultate kommt: Unter dem geometrographischen Gesichtspunkte sind alle diese Lösungen etwa gleichwertig. Lemoine erklärt sich in seinem Briefe wesentlich befriedigt durch die Auffassung von Bernès. Lp.

S. CATANIA. **Sulla deduzione della relazione $a^2 = b^2 + c^2$ dalle due relazioni $b = a \operatorname{sen}\beta$, $c = a \operatorname{sen}\gamma$.** Periodico di Mat. **11**, 29.

Lp.

E. LUCAS. **Formulas fundamentales de geometría tricircular y tetraesférica.** Archivo de Mat. **1**, 214-219, 228-229.

Uebersetzt aus Annali di Mat. (2) 8 (1877).

W. HEYMANN. **Drei algebraische Aufgaben im geometrischen Gewand.** Hoffmann Z. **27**, 561-567.

Erörterungen über die irrationalen Formen, in denen sich der Inhalt eines Dreiecks mit Hülfe der drei Seiten und des Umkreisdurchmessers, das Volumen eines Tetraeders aus den drei Grundkanten, den zugehörigen Höhen der Seitendreiecke und der Höhe zur Grundfläche darstellen, u. dergl. mehr. Lp.

L. EULER. **Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie 1753 und 1779. Uebersetzt und herausgegeben von E. Hammer.** (Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften No. 73.) Leipzig: W. Engelmann. 65 S. 8°.

Durch diese Uebersetzungen, in dem handlichen Format und in schönem Druck, werden die beiden berühmten Abhandlungen dem Leser noch angenehmer gemacht. In einem Nachwort würdigt der Herausgeber Leben und Arbeiten Euler's im allgemeinen, die vorliegenden Abhandlungen im besonderen; in weiteren Anmerkungen werden die Abweichungen der Uebersetzung vom Original erläutert. Lg.

R. GANTZER. **Analogien aus der ebenen und körperlichen Geometrie.** Pr. (No. 243) Pädagog. Unser Lieb. Fr. Magdeburg. 32 S. 4°. Mit 1 Fig.-Taf.

Verf. will seinen Schülern einen Ausblick geben auf ein Gebiet, welches zu betreten der Unterricht im allgemeinen nicht gestattet. Er leitet in bekannter Weise die einfachsten Formeln der sphärischen Trigonometrie her und zeigt sie als Analogien der ebenen Formeln, giebt als Einschaltung eine Tabelle über Zeit und Ort des Auf- und Untergangs der Sonne für Magdeburg, endlich die Analogien zu $\frac{1}{2}bc \sin\alpha$ beim Parallelflach und Tetraeder, zu den algebraischen Beziehungen zwischen den Winkeln eines dreistrahligen ebenen Büschels u. a. Die letzten Kapitel dürften über den Gesichtskreis und die Fassungskraft von Gymnasialabiturienten hinausgehen. Lg.

F. MONETTI. **Il triangulo sferico e le sue forme trigonometriche da un punto di vista più ampio.** Napoli: Pesole. 16 S. 8°.

V. JELÍNEK. Ueber den Pyramidenstumpf. Casopis **25**, 151-153. (Böhmisch.)

Für Anfänger berechnete Darstellung. Sda.

R. BRICARD. Sur une question de géométrie relative aux polyèdres. Nouv. Ann. (3) **15**, 331-334.

Bei zwei inhaltsgleichen Dreiecken gelingt es immer, jedes in eine endliche Anzahl von Polygonen so zu zerlegen, dass die Teile des einen denen des anderen congruent sind. Zwei Tetraeder aber, deren Volumina gleich sind, lassen sich nicht so zerlegen, dass die Teile des einen denen des andern congruent sind. Damit eine solche Zerlegung möglich sei, ist es notwendig, aber nicht hinreichend, dass die Summe aller sechs Neigungswinkel je zweier Ebenen für das eine Tetraeder sich von der Summe der sechs Neigungswinkel für das andere Tetraeder um ein Vielfaches von π unterscheidet. Was soeben von Tetraedern ausgesprochen ist, gilt auch von beliebigen Polyedern, die gleiches Volumen haben. Scht.

M. J. M. HILL. Determination of the volumes of certain species of tetrahedra without employment of the method of the limits. Lond. M. S. Proc. **27**, 39-53.

Es wird die Existenz solcher Tetraeder nachgewiesen, deren Inhalt sich ohne Voraussetzung des Satzes: „Tetraeder von gleicher Grundfläche und Höhe sind inhaltgleich", bestimmen lässt. Sie lassen sich nach den Beziehungen zwischen den Kanten in drei Gruppen einteilen. Die der ersten haben die Kanten $AC = a\sqrt{9-3r^2}$, $AD = BC = 2a$, $AB = BD = DC = a\sqrt{1+r^2}$, wo a und r beliebige positive Grössen bedeuten. Aehnliches gilt für die beiden anderen Gruppen. Lg.

F. J. Volume des segments de sphère, d'ellipsoïde et d'hyperboloïdes. J. de Math. élém. (4) **5**, 33-35.

Historische und sachliche Bemerkungen zu der Formel $V = \pi h(\varrho^2 - \frac{1}{12}h^2)$ für den Inhalt eines Kugelabschnittes zwischen zwei parallelen Ebenen vom Abstande h, wenn ϱ der Radius des Kleinkreises ist, in welchem die Mittelebene zwischen den parallelen Ebenen die Kugel schneidet. Lp.

P. BARBARIN. Application de la méthode de Gergonne à la sphère. — Triangles sphériques et triangles circulaires plans. Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24**, 43-50.

Zur Behandlung der Geometrie auf der Kugeloberfläche, unter möglichster Verzichtleistung auf die Betrachtung der räumlichen Winkel zweier Ebenen und der Eigenschaften der dreiseitigen Ecken. Lp.

V. Sikstel. Théorèmes fondamentaux de la géométrie sphérique. Hoppe Arch. (2) **15**, 159-171.

Aufbau gewisser Grundlagen der Geometrie von dem Standpunkt aus, dass ebene Flächen und gerade Linien nicht existiren.

Scht.

P. Mansion. Question 814. Mathesis (2) **6**, 114-116.

Beweis des folgenden Satzes: Wenn zwei sphärische Dreiecke proportionale Seiten haben, so sind die Winkel des Dreiecks mit den kleineren Seiten kleiner als die des Dreiecks mit den grösseren Seiten. Dieser Satz ist in der nichteuklidischen Geometrie von Nutzen.

Dml. (Lp.)

A. Emmerich. Stereometrische Gruppenaufgaben. Hoffmann Z. **27**, 401-409.

Da die gruppenweise Anordnung die rechte Förderung des Könnens bei schwächeren Schülern ermöglicht, so giebt der Verf. 28 Aufgaben über die Teilung der Oberfläche eines Kreiskegels. Lp.

W. Heymann. Stereometrische Paradoxa. Schlömilch Z. **41**, 326-331.

Der Verf. behandelt hier die Frage, wie man die drei reellen Wurzeln gewisser in der Stereometrie auftretender kubischer Gleichungen erklären kann, und zwar auch dann, wenn zwei der Wurzeln zur ursprünglichen geometrischen Aufgabe in keiner Beziehung zu stehen scheinen. Es soll z. B. die Höhe x eines geraden Kreiskegels gefunden werden, dessen Mantellinie s und Volumen J gegeben sind. Die kubische Gleichung: $J = \frac{1}{3}\pi x(s^2 - x^2)$ hat zwei positive Wurzeln und eine negative; wie ist letztere zu erklären? Die Formel $J = \frac{1}{3}\pi r^2 x$ stellt nicht allein ein Kegelvolumen, sondern auch ein Drittel des statischen Moments der Kreisscheibe $r^2\pi$ am Hebelarm x dar. Dreht man den Kreis um seinen Mittelpunkt, so dass der Hebelarm x in die Ebene des Kreises fällt, so tritt an Stelle der Mantellinie s die durch den Berührungspunkt und den freien Endpunkt des Hebelarms x begrenzte Tangente; es ist dann $r^2 = x^2 - s^2$, und die kubische Gleichung wird $J' = \frac{1}{3}\pi x(x^2 - s^2)$, deren positive Wurzel der negativen der vorigen kubischen Gleichung entspricht.

In dieser Weise folgen noch drei andere Aufgaben; in ihnen kommt die Kugel vor, die zur vollständigen Deutung der Gleichungswurzeln durch das zweischalige Rotationshyperboloid ersetzt werden kann.

Mz.

G. Modè. Di una proprietà del dodecaedro e dell'icosaedro regolari convessi. Vicenza: Raschi. 10 S. 8°.

Kapitel 4.

Darstellende Geometrie.

K. Rohn und E. Papperitz. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. In zwei Bänden. Zweiter Band. Mit zahlreichen Figuren im Text. Leipzig: Veit & Comp. XVI + 528 S. gr. 8°.

Da dieser zweite Band der Redaction nicht eingesandt ist, so konnte nicht rechtzeitig für ein Referat aus der bewährten Feder des Mitarbeiters am Jahrbuche für dieses Kapitel gesorgt werden, und wir müssen uns damit begnügen, einige Auszüge aus dem Vorworte und dem Inhaltsverzeichnisse hier folgen zu lassen, indem wir bezüglich der Haltung des Werkes auf die Anzeige des ersten Bandes in F. d. M. **25**, 943-944, 1893/94 verweisen.

Der vorliegende Band bringt zunächst die Theorie der Flächen und Curven im Raume. Ihre Darstellung wird nach dem Grund- und Aufrissverfahren gegeben und durch die Lichtgrenzen auf den Flächen sowie der Schlagschatten für schiefe Parallelbeleuchtung ergänzt. Zwar sollen möglichst alle die Gebilde behandelt werden, die in den technischen Anwendungen vorkommen; allein zur Wahrung der systematischen Vollständigkeit werden über das bezeichnete Gebiet hinaus auch Gebilde von rein geometrischem Interesse in Betracht gezogen. Diese Erweiterung des Stoffes soll dazu dienen, als das oberste Ziel der darstellenden Geometrie die Entwickelung der Raumanschauung hinzustellen, die Abhängigkeit der geometrischen Formen an der Hand der Construction zu untersuchen. Indem die Ansprüche an das Vorstellungsvermögen des Lesers allmählich steigen, sucht die Behandlung der einzelnen Probleme durch Ausführlichkeit bei knapper Form dem Verständnisse entgegenzukommen. Die Darstellung ist jedoch so eingerichtet, dass einzelne Abschnitte ohne Schaden überschlagen werden können. So kann z. B. der Techniker im XII. Kapitel der Untersuchung der für ihn wichtigen Flächen folgen, ohne die zugehörigen Kapitel XI und XIII zu studiren. Die Einteilung der Flächen in grosse Gruppen erfolgt nach der Art ihrer Entstehung, weil eine gleichartige Erzeugung auch eine einheitliche Methode der Darstellung bedingt. Die Raumcurven werden im Zusammenhang mit den Flächen behandelt, an denen sie auftreten. Ein Kapitel über die Krümmung der Flächen beschliesst diesen Teil.

Es folgt die Darlegung der schiefen und orthogonalen axonometrischen Projection, der freien und angewandten Perspective, für deren Verständnis im ersten Bande dadurch vorgearbeitet ist, dass derselbe die Parallel- und Centralprojection ebener Figuren bereits ausführlich behandelt hat. An die allgemeine Erörterung der Methode schliesst sich jedesmal eine Reihe instructiver Beispiele, die dem vorher in orthogonaler Projection behandelten Stoffe entnommen sind. In der angewandten Perspective kommt eine Auswahl einfacher architektonischer Objecte zur

Darstellung. Anhangsweise wird der Centralcollineation räumlicher Figuren (der Reliefperspective) kurz Erwähnung gethan.

Das letzte Kapitel bezieht sich auf die Theorie der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Oberflächen. Die Methode zur Bestimmung der Lichtgleichen auf den Flächen schliesst sich in natürlicher Weise an die früheren Entwickelungen an, ohne analytisch-geometrische Principien zu benutzen. Dieser Umstand und die hohe Bedeutung, welche die Darstellung der Beleuchtungsstufen auf einer Fläche für die Beurteilung ihrer Gestalt gewinnt, rechtfertigt zugleich die Aufnahme der Beleuchtungslehre in den Lehrstoff des Buches. Die Darstellung der Lichtgleichen wird an zahlreichen typischen Beispielen durchgeführt. Wir lassen nunmehr zur besseren Uebersicht die Haupttitel der einzelnen Kapitel folgen.

VIII. Kapitel. Rotationsflächen. Allgemeines. Eigen- und Schlagschatten, ihr gegenseitiges Verhalten. Allgemeine Rotationsflächen, Schnitte, Durchdringung, Eigen- und Schlagschatten. Die Ringfläche. Das Rotationshyperboloid und seine Anwendung. Die Rotationsflächen zweiten Grades. Rotationsflächen, die sich längs einer Curve berühren.

IX. Kapitel. Cyklische Linien und Schraubenlinien. Rollcurven. Cyklische Linien. Die Schraubenlinie.

X. Kapitel. Schraubenflächen. Allgemeines über Schraubenflächen. Allgemeines über Regelschraubenflächen. Die abwickelbare Schraubenfläche. Windschiefe Regelschraubenflächen. Cyklische Schraubenflächen. Schrauben.

XI. Kapitel. Die Flächen zweiten Grades. Pole und Polarebenen, Durchmesser und Diametralebenen, Axen. Einteilung der Flächen zweiten Grades, ihre Beziehung zu den Rotationsflächen, Kreisschnitte. Die Constanten der Flächen zweiten Grades. Die Flächen durch neun, acht und sieben Punkte. Constructionsaufgaben bei den Flächen zweiten Grades.

XII. Kapitel. Verschiedene Flächen. Abwickelbare Flächen. Regelflächen. Hüllflächen. Topographische Flächen.

XIII. Kapitel. Die Krümmung der Flächen. Die Krümmungslinien der Flächen zweiten Grades.

XIV. Kapitel. Schiefe und orthogonale axonometrische Projection. Allgemeines. Das Verfahren der schiefen Projection. Anwendungen der schiefen Projection. Das Verfahren der orthogonalen axonometrischen Projection.

XV. Kapitel. Freie Perspective. Perspective Darstellung von Ebene, Gerade und Punkt. Perspective Darstellung von Körpern und Flächen.

XVI. Kapitel. Angewandte Perspective. Allgemeines. Anwendungen der Perspective. Centralcollineation räumlicher Figuren (Reliefperspective).

XVII. Kapitel. Beleuchtung von Flächen. Lp.

M. d'Ocagne. Cours de géométrie descriptive et de géométrie infinitésimale. Paris: Gauthier-Villars et Fils. XII + 428 S. gr. 8°.

Das Lehrbuch ist eine ausführliche Bearbeitung der Vorträge, die der Verf. in dem Vorbereitungsjahre für die Zöglinge der École des ponts et chaussées hält; die über diesen Rahmen hinausgehenden Partien sind durch kleineren Druck kenntlich gemacht. Aus der Entstehung des Werkes und aus der Person des Lehrers erklären sich viele Eigentümlichkeiten, die man nach dem Titel nicht vermuten dürfte. Das Buch ist weder ein erschöpfender Lehrgang der darstellenden Geometrie noch ein solcher der infinitesimalen Geometrie; es enthält vielmehr eine dem Studienplane der Lehranstalt angepasste Auswahl aus diesen Gebieten und trägt besonders in dem zweiten Teile das originale Gepräge, welches der geschickte Verf. seinen Schriften aufzudrücken pflegt.

Jeder der beiden im Titel gekennzeichneten Teile des Werkes zerfällt in vier Kapitel. Die darstellende Geometrie beginnt im ersten Kapitel sofort mit den kotirten Projectionen und erledigt auf 32 Seiten die Aufgaben über Punkt, Gerade, Ebene und die wichtigsten Aufgaben über Kegel und Kugel sowie über die topographischen Flächen. Offenbar ist, gemäss den französischen Schulplänen, vorausgesetzt, dass die Schüler einen vorgängigen Cursus der darstellenden Geometrie, also besonders über die orthogonalen Projectionen, durchgemacht haben. Das zweite Kapitel (S. 33-64) umfasst die elementaren, praktischen Lehren der „axonometrischen Perspective“, welche in zwei Teilen als ebene und als räumliche vorgetragen wird, ohne dass auf Berechnungen eingegangen ist. Einen grösseren Raum beansprucht die Theorie der gebräuchlichen Schatten (S. 65-154) im Kapitel III, wo nach den allgemeinen einleitenden Sätzen die Schatten auf den Körpern selbst, dann die auf Ebenen und auf krumme Flächen geworfenen Schatten behandelt werden. Am Schlusse bemerkt der Verf.: „In der gewöhnlichen Praxis des geometrischen Zeichnens bei seiner Anwendung auf die Architektur oder auf die Maschinen bindet man sich nicht immer an die Strenge, welche die stricte Anwendung dieser Principien auferlegen würde. Es ist jedoch ratsam, das allgemeine Aussehen der durch diese directe Anwendung gegebenen Curven, ebenso ihre wesentlichen Besonderheiten (nötige Punkte und Tangenten) zu beachten“, u. s. w. Das IV. und letzte Kapitel des ersten Teiles (S. 155-246), von etwa demselben Umfange wie das vorige, bringt die Linearperspective mit manchen beherzigungswerten praktischen Winken.

Wenn nun der erste Teil des Buches trotz mancher eigenartigen Abweichungen sich bei dem bearbeiteten Stoffe im ganzen der in Frankreich diesen Gegenstand beherrschenden Tradition anschliesst, so weicht die „infinitesimale Geometrie“ des zweiten Teiles von dem Hergebrachten vollständig ab. Aus der Infinitesimalrechnung entlehnt der Verf. nur die Begriffe der unendlich kleinen Grössen der verschiedenen Ordnungen und der fundamentalen Sätze über dieselben. Im übrigen arbeitet er völlig selbständig mit den aus den Figuren entnommenen unendlich

kleinen Elementen nach den Sätzen der synthetischen Geometrie. Mit drei „Fundamentalformeln“ beginnend, welche man als Verallgemeinerungen der ersten infinitesimalen Formeln in rechtwinkligen cartesischen oder in Polar-Coordinaten ansehen kann, leitet der Verf. für besondere Curven und Flächen aus ihnen auf synthetisch-geometrischem Wege diejenigen Constructionen her, die man sonst mit Hülfe der Differentialrechnung aus den errechneten Formeln folgert. Dieses Verfahren steht in enger Verwandtschaft mit den Methoden, die sonst in der kinematischen Geometrie gelehrt werden; daher ist es auch natürlich, dass der Name Mannheim's oft wiederkehrt. Doch verdanken viele der eigenartigen Schlussweisen und der durch sie gewonnenen neuen Ergebnisse ihre Entdeckung dem Verf. selbst, über dessen hierhergehörige Arbeiten das Jahrbuch in den letzten zehn Jahren zu berichten hatte. Erst hier, wo man alle von ihm zerstreut veröffentlichten Einzelheiten zu einem zweckmässig gegliederten Ganzen vereinigt vor sich hat, kann man die Bedeutung mancher Betrachtungen würdigen, die dem Ref. und anderen Mitarbeitern des Jahrbuchs, die über sie zu berichten hatten, wegen ihrer Isolirtheit nicht klar sein konnten. Die ganze Theorie der Tangenten und Normalen ebener und räumlicher Curven, die Eigenschaften ihrer Krümmungsradien und Evoluten, der Tangentialebenen und Normalen der krummen Oberflächen, die Lehre von der Krümmung der Flächen mit den Sätzen von Meunier und Euler werden nicht bloss allgemein entwickelt, sondern an einer Reihe von Beispielen beleuchtet. Dieser Teil des Buches bildet daher eine vortreffliche Ergänzung der analytischen Darstellungen des Gegenstandes in den üblichen Werken. Lp.

M. d'Ocagne. Sur l'ombre propre des polyèdres. J. de Math. élém. (4) **5**, 49-54.

Abdruck aus des Verf. Cours de Géométrie descriptive, S. 72-77, wo die einfachen und leicht fasslichen Regeln abgeleitet sind, nach denen man entscheiden kann, ob die Projection eines Dreiecks beleuchtet oder beschattet ist. Lp.

E. Brand. Un problème de projection. J. de Math. spéc. (4) **5**, 269-274.

Behandlung der schon öfter bearbeiteten Aufgabe, eine Ebene zu finden, für welche die Orthogonalprojection eines der Lage und Grösse nach gegebenen Dreiecks ein gleichseitiges Dreieck wird. Die Analysis der Aufgabe wird trigonometrisch durchgeführt, und die Wurzeln der erhaltenen quadratischen Gleichung werden discutirt. Zuletzt werden einfache Betrachtungen über den Schwerpunkt der Dreiecksfläche angehängt. Lp.

F. Schur. Ueber den Pohlke'schen Satz. J. für Math. **117**, 24-28.

Der vorliegende Beweis nebst Construction des Originalaxenkreuzes beruht auf dem auch von Pelz und Beck benutzten Gedanken, die Umrissellipse zu ermitteln, in welche sich die aus dem Centrum des Original-

axenkreuzes mit der Axenlänge beschriebene Kugel projicirt. Verf. beweist zuerst betreffs der drei Ellipsen, die je zwei Axen des Bildaxenkreuzes zu conjugirten Halbmessern haben, den Satz, dass jede von der Umrissellipse in den Endpunkten des Durchmessers doppelt berührt wird, welcher der ihr nicht angehörigen Axe des Bildaxenkreuzes conjugirt ist. Auf Grund dieses Satzes wird nun die Construction der Umrissellipse mit Benutzung einer affinen Hülfsfigur, in welcher zwei Bildaxen gleich und rechtwinklig sind, ausgeführt. Hk.

J. Versluys. Neue Beweise für die Hauptsätze der Normal-Axonometrie. Hoffmann Z. **27**, 334-338.

Ganz elementare Beweise der betreffenden Sätze für die Zwecke des Unterrichtes auf technischen Mittelschulen. Lp.

G. Fontené. Sur un cas remarquable de la projection gauche. Nouv. Ann. (3) **15**, 369-372.

Sätze über eine lineare Strahlencongruenz, erzeugt aus zwei parallelen ähnlichen Feldern. Js.

Ch. Michel. Courbe d'ombre sur une surface particulière du quatrième ordre. S. M. F. Bull. **24**, 26-28.

Ebenen, die durch die Normale n in einem Punkte O einer Fläche S gehen, schneiden S in Curven, deren Krümmungskreise im Punkte O auf einer besonderen Fläche vierter Ordnung Σ liegen. Die Eigenschattengrenze von Σ bezüglich eines auf n gelegenen leuchtenden Punktes wird durch eine Rotationsfläche ausgeschnitten, die durch eine um n rotirende Strophoide erzeugt werden kann. Js.

René de Saussure. A general method of perspective by direct projection. American Architect 1896.

Die Centralprojectionen von Punkten auf eine beliebige Bildebene werden aus ihren Orthogonalprojectionen auf drei zu einander senkrechte Ebenen abgeleitet. Js.

A. Boulanger. Sur la perspective des arcades. Nouv. Ann. (3) **15**, 376-377.

Die gemeinsamen Sehnen zweier Kegelschnitte γ_1 und γ_2 werden bestimmt, indem γ_1 und γ_2 als Perspectiven zweier Kegelschnitte eines Kegels zweiter Ordnung aufgefasst werden. Verwendung dieses Ergebnisses bei der Perspective einer Arcade. Js.

J. Mandl. Darstellung der scheinbaren Beleuchtung krummer Flächen (directe Construction der Isophengen). Wien. Ber. **105**, 807-822. (Mit 1 Tafel und 2 Textfiguren.)

Die Abhandlung stellt sich die Aufgabe, die bekanntlich von Burmester auf analytischem Wege behandelte scheinbare Beleuchtung krummer Flächen, bei welcher die scheinbare Helle eines Flächenelements proportional den Cosinussen des Einfallswinkels und des Ausstrahlungswinkels angenommen wird, auf rein constructivem Wege zu behandeln. Die Ermittelung der Curven gleicher Helligkeit (Isophengen) wird auf die Aufgabe zurückgeführt, diejenigen Flächenelemente ausfindig zu machen, deren Normalen parallel sind zu den Mantellinien eines schiefen Kreiskegels. Trägt man von einem Punkte F aus auf dem Sehstrahl die Intensitätsscala und auf dem Lichtstrahl die Strecke 1 ab, und beschreibt über letzterer als Durchmesser eine Kugel, so schneidet eine durch einen bestimmten Teilstrich der Scala senkrecht zum Lichtstrahl gelegte Ebene aus der Kugel die Basis des betreffenden Kegels aus, seine Spitze liegt im Punkte F. Die bezügliche Aufgabe wird dann am senkrechten Kreiscylinder, am senkrechten Kreiskegel und an der Kugel durchgeführt, wobei sich einfache und sachgemässe Constructionen ergeben. Die Behandlung der übrigen Flächen in folgenden Aufsätzen wird in Aussicht gestellt. Hk.

RAFFALLI. Sur la surface du biais passé gauche. J. de Math. spéc. (4) **5**, 243-251.

Diese in der Lehre vom Steinschnitte vorkommende Fläche ist in dem grossen Traité de géométrie descriptive von Jules de la Gournerie gründlich behandelt worden. Der Verf. giebt eine neue Construction ihrer Tangentialebene an und gelangt so dazu, den scheinbaren horizontalen Umriss der Fläche punktweise zu construiren, und zwar durch Constructionen, die allein auf der Horizontalebene durchgeführt werden. Daraus ergiebt sich weiter die Construction der Schattenlinie für parallele Lichtstrahlen. Endlich wird gezeigt, wie man das die Oberfläche längs einer Erzeugenden osculirende Hyperboloid erhalten kann. Lp.

A. BECK. Construction der Schmiegungsebenen der Schnittcurve zweier Kegel. Schlömilch Z. **41**, 221-226.

Für die Durchdringungscurve zweier Kegel, deren Leitcurven in der nämlichen Grundebene liegen, wird zunächst die Spurcurve ihrer Developpabeln nach darstellend-geometrischer Methode bestimmt. Die Benutzung zweier osculirenden Hülfskegel, deren Spurcurven Krümmungskreise der gegebenen Leitcurven sind, führt sodann den Verf. durch Betrachtung einer unendlich kleinen Verrückung zu einer eleganten Construction der Tangenten der Spurcurve der Developpabeln, welche auch deren Spitzen und Asymptoten liefert. Dieselbe Methode wird für den Fall, dass sich die zwei Kegel berühren, zur Herleitung eines einfachen Satzes über die Tangenten im Doppelpunkte der Durchdringungscurve verwendet. Endlich wird noch die Frage nach der Anzahl der Schmiegungsebenen, die durch einen beliebigen Punkt an die Durchdringungscurve zweier algebraischen Kegel gelegt werden können, erörtert, wobei

sich ein einfacher synthetischer Beweis der dritten Plücker'schen Formel ergiebt. Hk.

J. Sobotka. Einige Constructionen bezüglich der Schnittcurven von Umdrehungsflächen mit Ebenen. Wien. Ber. **105**, 371-388.

Eine Ringfläche wird bekanntlich von einer doppeltberührenden Ebene nach zwei gleichen Kreisen geschnitten. Zum Beweis dieses Satzes betrachtet der Verf. die Ringfläche als Umhüllungsfläche gleicher Kugeln, deren Mittelpunkte auf dem Mittelkreis liegen. Die fragliche Schnittcurve erscheint dann als Umhüllungscurve der Schnittkreise der Kugeln, welche eine conische Kreisreihe bilden. Die bezüglichen Constructionen lassen eine einfache cyklometrische Deutung (in Fiedler'schem Sinne) zu. Uebergehend zur Bestimmung des Schnittes einer Ringfläche mit einer beliebigen Ebene, betrachtet Verf. allgemein die Reihe von Kreisen, die einen gegebenen Kreis orthogonal schneiden, während ihre Mittelpunkte auf einer gegebenen Curve liegen, und bestimmt ihre Umhüllungscurve nebst deren Krümmungskreisen. Diese Constructionen werden beim Schnitt einer Ringfläche mit einer sie einfach berührenden Ebene angewandt auf die Bestimmung der zwei Krümmungskreise im Doppelpunkte der Schnittcurve. — Tritt an die Stelle des Meridiankreises der Ringfläche ein Kegelschnitt, so ist die erzeugte Rotationsfläche mit einer Kreisringfläche collinear und wird also von einer doppeltberührenden Ebene nach zwei Kegelschnitten geschnitten. Die Benutzung einer solchen Fläche als osculirender Hülfsfläche ermöglicht, auch beim Schnitt einer allgemeinen Rotationsfläche mit einer sie berührenden Ebene die Krümmungskreise der Schnittcurve im Doppelpunkt zu ermitteln. Hk.

Ed. Weyr. Ueber die Construction der Osculations-Hyperboloide an windschiefen Flächen. Rozpravy **5**, No. 5, 6 S. (Böhmisch.)

Ed. Weyr hat (Wien. Ber. **81**, F. d. M. **12**, 509, 1881) in demselben Jahre wie Mannheim eine Lösung der im Titel erwähnten Aufgabe publicirt, und zwar für den Fall, dass die geradlinige Fläche durch drei Raumcurven als Leitcurven gegeben vorliegt. Der Fall, in welchem zwei dieser drei bestimmenden Raumcurven zusammenfallen, erfordert eine gesonderte Behandlung, die Weyr zwei Jahre später publicirte, und zwar bei der zweiten Versammlung der böhmischen Naturforscher und Aerzte. Eine ausführlichere Begründung und Verbesserung seiner Resultate ist der Zweck dieser Note. Der Fall dreier unendlich nahe liegenden Raumcurven bleibt auch jetzt noch unerledigt. Lh.

Fr. Prochazka. Zur Anwendung der Kinematik in der neueren und in der darstellenden Geometrie. Rozpravy **5**, No. 40, 19 S. (Böhmisch.)

Mit Hülfe der kinematischen Methoden (vergl. F. d. M. **26**, 794, 1895) werden die folgenden projectivischen Aufgaben behandelt: Die Krüm-

mung einer Plancurve zu bestimmen, wenn diejenige einer collinearen Plancurve bekannt ist. Tangenten- und Krümmungsconstruction für die Durchschnittslinie zweier Kegelflächen; dasselbe für die Durchschnittslinie eines Kegels mit einer abwickelbaren Fläche oder mit dem einschaligen Hyperboloide, wenn letzteres den Scheitel des Kegels enthält. Dieselbe Aufgabe wird dann für den Durchschnitt zweier Rotationsflächen mit parallelen Axen behandelt. Construction der Punkte für die Rückkehrkante einer abwickelbaren Oberfläche, wenn dieselbe als Umhüllungsfläche sämtlicher zwei gegebene Curven berührenden Ebenen gegeben ist. Die Krümmung der abwickelbaren Oberflächen. Lh.

FR. PROCHAZKA. Beitrag zur Photogrammetrie. Casopis **25**, 341-344. (Böhmisch).

Es wird gezeigt, dass beim Vorhandensein des Bildes irgend eines Wasserspiegels in einer Photographie die Auffindung der Grundfactoren derselben mit Umgehung des Problems der fünf Punkte bewerkstelligt werden könne. Sda.

G. J. BURCH. On a method of drawing hyberbolas. Phil. Mag. (5) **41**, 72-75.

G. J. BURCH. Trazado de la hipérbola. Archivo de Mat. **1**, 38-39.

F. L. O. WADSWORTH. A note on Mr. Burch's method of drawing hyperbolas. Phil. Mag. (5) **41**, 372-378.

Zum Aufzeichnen von Hyperbelbogen in einiger Entfernung vom Scheitel ist der Cunynghame'sche Hyperbolograph (F. d. M. **18**, 513, 1886) nicht geeignet, und für solche Fälle wird eine von Burch für neu gehaltene Methode beschrieben. Für die gleichseitige Hyperbel $xy =$ const., Scheitel in A, nehme man einen Punkt C auf Ox an, verbinde A mit C und ziehe AB parallel zur y-Axe, wo B den Schnittpunkt mit Ox bezeichnet. Von CO schneide man $CE = BO$ ab und ziehe ED parallel zu Oy, wo D auf AC liegt; dann ist D ein Punkt der Hyperbel. Die Construction passt offenbar für jede Hyperbel. Ein rohes Modell eines auf diesem Satze beruhenden Instrumentes wurde vom Verf. angefertigt, um eine Anzahl von Hyperbeln zu zeichnen, und wurde als zweckmässig erprobt.

Wadsworth erklärt in seiner Note, dass die Methode von Burch derjenigen ähnlich ist, die er schon seit einiger Zeit benutzt, obschon nicht so früh wie Burch, der sein Princip 1885 entdeckt und seitdem benutzt hat. Er weist dann nach, dass die besondere, oben beschriebene Construction nur eine ist aus einer allgemeinen Klasse von Lösungen dieses Charakters, die er in der Note bespricht. Gbs. (Lp.)

W. R. CRANE. A curvimeter. Kansas Univ. Quart. **4**, 121-124.

Der von W. R. Crane erfundene Curvimeter dient zur Bestimmung der Länge ebener Curvenbogen. Seine Theorie beruht auf dem bekannten Satze, dass die Differenz der Krümmungshalbmesser AA', BB'

in zwei Punkten A, B einer Curve gleich dem Evolutenbogen ist, der dem Bogen AB entspricht. Js.

Bürklen. Verbesserter Zeichenwinkel. Hoffmann Z. **27**, 580-581.

Die eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks ist um sich selbst über den Scheitel des rechten Winkels hinaus verlängert. Lp.

Weitere Litteratur.

X. Antomari. Cours de géométrie descriptive. Paris. gr. 8°.

H. Becker. Geometrisches Zeichnen. Leipzig. 94 S. 12mo.

W. H. Behse. Die darstellende Geometrie für Real-, Gewerbe- und Werkmeisterschulen, sowie zum Selbstunterricht für Bautechniker und Mechaniker. Nach dessen Tode bearbeitet von P. Berthold. 1. Teil: Die Projectionslehre. Construction der Durchschnittsfiguren. Windschiefe Flächen. Spirallinien und Spiralflächen. Schräge Projection. 5. Aufl. Leipzig: J. J. Arnd. VIII + 150 S. 8°.

H. Boreux. Points d'inflexions de la transformée par développement d'une courbe C tracée sur un cône. Rev. de Math. spéc. **7**, 1-2.

Ortu Carboni. Geometria descrittiva elementare ed alcune sue applicazioni (projezioni ortogonali). Vol. II. Torino: Paravia.

H. Ferval. Éléments de géométrie descriptive. Paris. 12mo.

T. A. V. Ford. Systematic course of geometrical drawing. London. 232 S. 8°.

S. Gérard. Géométrie descriptive, à l'usage des candidats aux baccalauréats de l'enseignement secondaire moderne (2e partie, 2e série). Chateauroux: Majesté. 33 S. 18mo.

A. Gouilly. Géométrie descriptive. (En trois parties.) Partie I: Point, ligne droite, plan. Partie II: Sphère, cône et cylindre de révolution; sections coniques. Partie III: Changements des plans de projection et rotations, trièdres, polyèdres. Paris. 164 S. + 86 Fig., 197 S. + 59 Fig., 157 S. + 51 Fig.

J. Heymann. Geometrisches Linearzeichnen. Als Vorbereitung auf das Projectionszeichnen an gewerblichen und technischen Schulen. Düsseldorf: Wolfram. 15 S. u. 13 Taf.

V. Hioux. Intersection d'une droite et d'une quadrique admettant des sections elliptiques. Rev. de Math. spéc. **6**, 298-300.

Ed. Jentzen. Darstellende Geometrie für technische Lehranstalten und Handwerkerschulen. 2. Aufl. Rostock: W. Werther. VIII + 36 S. 8°. Mit 22 Taf. 4°.

C. Koppe. Photogrammetrie und internationale Wolkenmessung. Braunschweig. VIII + 108 S. u. 5 Taf.

E. Lebon. Géométrie appliquée, rédigée conformément au programme des écoles normales primaires et du brevet supérieur, comprenant

des notions de trigonométrie rectiligne, le levé des plans, l'arpentage, le nivellement, les plans cotés et les surfaces topographiques. 2e éd. Paris: Delalain. VI + 228 S. 16mo.

L. LEFÈVRE. Construction par la règle et le compas de l'intersection de deux quadriques de révolution dont les axes se rencontrent. Rev. de Math. spéc. **6,** 273-276.

C. F. A. LEROY. Traité de géométrie descriptive suivi de la méthode des plans cotés et de la théorie des engrenages cylindriques et coniques. 14e édition, revue et annotée par E. Martelet. Paris. XX + 370 S. 4°, Atlas m. 71 Taf.

N. MAKAROW. Linear-Perspective in der Ebene. St. Petersburg. 510 S., Atlas 66 Taf. gr. 4°. (Russisch.)

L. PROVOST. Axe des projections des sections planes du cylindre et du cône. Rev. de Math. spéc. **7,** 105-110.

C. ROUBAUDI. Intersection d'une droite avec une quadrique gauche. Rev. de Math. spéc. **6,** 394 396.

J. SCHLOTKE. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. IV. Teil. Projectivische Geometrie. Dresden: G. Kühtmann. V + 177 S. 8°.

C. SEIDELIN. Forlaesninger over deskriptiv Geometri. Kjöbenhavn. 182 S. 8°.

A. WEILER. Neue Behandlung der Parallelprojectionen und der Axonometrie. 2. (Titel-) Ausgabe. Leipzig: B. G. Teubner. VII+210 S. 8°.

H. WEISHAUPT. Das Ganze des Linearzeichnens für Gewerbe- und Realschulen, sowie zum Selbstunterricht. 4 Abteilungen in 132 Tafeln nebst erläuterndem Text. 2. Abteilung: Geometrische Projectionslehre. 1. Stufe. 4. Aufl., neu bearbeitet von M. Richter. Leipzig: H. Zieger. VII + 91 S. 8°. Mit Atlas von 30 Taf. qu. Fol.

W. N. WILSON. Geometrical drawing. Part II, for the use of candidates for army examinations. London. 200 S. 8°.

Kapitel 5.
Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

J. STEINER. Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Herausgegeben von A. J. von Oettingen. Teil I und II. (Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften, No. 82 u. 83.) Leipzig: W. Engelmann. 126 u. 162 S. kl. 8°. Mit je 2 Tafeln.

Das berühmte Hauptwerk des grossen Synthetikers erscheint hier in einem übersichtlichen Abdruck mit mustergültigen Figuren. Am Schluss des ersten Teiles bedauert der Herausgeber, dass so wenig Studirende

Vorträgen über dreidimensionale projective Geometrie mit Vorteil folgen, und sieht den Grund darin, dass die Zeichnungen räumlicher Figuren perspectiv meist zu ungenau angefertigt werden. An diese Bemerkungen schliesst er eine 18 Seiten lange Darstellung der Grundlehren des perspectivischen Zeichnens. Scht.

F. Amodeo. Appunti di geometria proiettiva del corso libero dettato da F. A. nella R. Università di Napoli durante l'anno scolastico 1895/96. II + 272 S. 8° autogr.

In zwei früheren Schriften hat der Verf. schon das Gebiet der projectiven Geometrie betreten, von welchem die vorliegenden Vorlesungen handeln, nämlich in den „Lezioni sulle omografie binarie" (F. d. M. **21**, 603, 1889) und in der Abhandlung „Quali possono essere i postulati fondamentali della geometria projettiva di uno S_r" (Torino Atti **26**, 741-770; F. d. M. **23**, 694, 1891). Die Grundgedanken, welche in der letzteren Arbeit entwickelt sind, stehen an der Spitze der jetzt veröffentlichten Vorlesungen, und wegen des dritten Teiles über die imaginären Elemente wird der Leser geradezu auf die erstgenannte Schrift verwiesen. Scheinbar haben sich nämlich die Vorlesungen über das ganze Gebiet der projectiven Geometrie erstreckt, während die autographirte Schrift nur einen Teil derselben umfasst. Die Einleitung (S. 1-49) spricht sich über die Grundbegriffe der Geometrie aus und erörtert dieselben in dem Sinne der Abhandlung aus Torino Atti **26.** In dem letzten Paragraphen wird (S. 49) die projective Geometrie als derjenige Zweig der mathematischen Wissenschaften definirt, der die Eigenschaften der zu linearen Räumen beliebiger Dimension gehörenden Gebilde erforscht, welche durch projective Transformationen sich nicht ändern. Als Quellen werden angezogen: Cremona, Elementi di geometria proiettiva; Sannia, Lezioni di geometria proiettiva; Reye, Geometrie der Lage; v. Staudt, Geometrie der Lage; Thomae, Die Kegelschnitte in rein projectiver Behandlung; Amodeo, Omagrafie binarie; Dino, Geometria proiettiva; Aschieri, Geometria proiettiva; Montesano, Lezioni di geometria proiettiva. Wir haben diese Liste hier hergesetzt, weil die genannten Werke die Tendenz des Buches kennzeichnen; ebenso charakteristisch ist die Abwesenheit der Namen Chasles und Steiner. Die Einleitung schliesst mit einer grösseren Anzahl von Uebungsaufgaben (No. 1-20, S. 49-52).

Der erste Teil, Gebilde erster Ordnung, umfasst zwei Kapitel unter den Titeln: „einfache Gebilde" und „Gebilde zweiter und dritter Stufe" mit den Paragraphen des ersten Kapitels: 1. Projective Coordinaten und Gleichungen der S_0 eines S_1. 2. Projectivität zwischen einfachen Gebilden. Doppelverhältnis. 3. Vereinigte Elemente in den auf einander liegenden homographischen Gebilden. 4. Construction der einfachen projectiven Gebilde. 5. Besondere Projectivitäten im euklidischen Felde. 6. Involution. 7. Ausgeartete Projectivitäten. Zum Schlusse folgen (S. 121-126) Noten und 24 Uebungsaufgaben. Die Paragraphen des

zweiten Kapitels sind überschrieben: 1. Projectivitäten im allgemeinen. 2. Homographie und Homologie zwischen Gebilden erster und zweiter Stufe. 3. Besondere Projectivitäten im euklidischen Felde. 4. Involutorische Projectivitäten zweiter Stufe. Harmonische Homologie, Polarität. 5. Coordinaten. Gleichungen der Projectivitäten. Es sollten noch folgen: 6. Involutorische Projectivitäten zwischen Formen dritter Stufe. 7. Ausgeartete Projectivitäten. Noten und Uebungen. Diese Titel sind aber auf S. 182 abgedruckt, ohne dass der Anhang, auf den verwiesen ist, vorhanden wäre.

Der zweite Teil, Gebilde zweiter Ordnung, soll vier Kapitel enthalten, bringt aber in Wirklichkeit nur zwei, nämlich im ersten die projective Erzeugung der Gebilde zweiter Ordnung von einer Dimension. 1. Erzeugung der Gebilde zweiter Ordnung vermittelst einfacher Gebilde. 2. Eigenschaften und Constructionen der Gebilde zweiter Ordnung. 3. Verschiedene Typen von Kegelschnitten im euklidischen Felde. 4. Projectivitäten zwischen Gebilden zweiter Ordnung. 5. Aufgaben zweiten Grades. 6. Theorem von Desargues. 7. Gleichungen der Gebilde zweiter Ordnung. Das zweite Kapitel (gemäss dem Wunsche des Verf. folgen wir dem Inhaltsverzeichnisse, das in der Einteilung von den wirklichen Ueberschriften abweicht) erörtert die polaren Eigenschaften der Gebilde zweiter Ordnung von einer Dimension in den Paragraphen: 1. Polare Eigenschaften der Gebilde zweiter Ordnung. 2. Besondere polare Projectivitäten der Kegelschnitte im euklidischen Felde. Mittelpunkt, Durchmesser, Axen und Brennpunkte. 3. Besondere polare Projectivitäten der Kegel zweiter Ordnung im euklidischen Felde. 4. Büschel und Scharen von Kegelschnitten. 5. Reciproke polare Figuren. Damit schliesst das Buch. Als Kapitel III und IV dieses Teils werden bezeichnet: die projectiven Eigenschaften der Gebilde zweiter Ordnung von zwei Dimensionen und die polaren Projectivitäten der Oberflächen zweiter Ordnung. Diese sind aber ebenso wenig zur Ausführung gekommen wie der schon erwähnte dritte Teil über die imaginären Elemente.

Lp.

M. Pieri. Sui principii che reggono la geometria di posizione. Torino Atti **30,** 607-641; **31,** 381-399, 457-470.

M. Pasch. Zur projectiven Geometrie. Math. Ann. **48,** 111-112.

F. Amodeo. Sulla introduzione alla geometria projettiva. Batt. G. **34,** 22-36.

Die Arbeiten beziehen sich sämtlich auf die dem Staudt'schen Fundamentaltheorem voranzustellende Summe von Postulaten und Folgerungen und sollen daher um so mehr gemeinsam besprochen werden, als sie auf einander Bezug nehmen. Den in Staudt's Werk verfolgten Grundgedanken kann man dahin charakterisiren, dass die Gesamtheit der Ebenen nur als lineares System dritter Stufe eingeführt, die Gerade als Basis eines Ebenenbüschels, der Punkt als Centrum eines Ebenenbündels betrachtet wird. Natürlich gelten viele Ergebnisse für ein beliebiges

lineares Netz dritter Stufe, und so spricht Pieri von „projectivischen“ Punkten, Geraden und Ebenen, die mit den von der Aussenwelt gelieferten Gebilden dieses Namens durchaus nicht identisch zu sein brauchen, nur der Folge von Postulaten unterworfen sind, die der Verf. aufstellt. Durch zwei Postulate (I und II) fordert er erst einen, sodann noch wenigstens einen weiteren projectivischen Punkt. Zwei Punkte a, b bestimmen (III) (individuano) eine Mannigfaltigkeit ab von Punkten, die (IV) a enthält. Enthält die Mannigfaltigkeit ein von a und b verschiedenes Element c, so fallen (V) ac und ab zusammen. Nachdem noch (VI) postulirt ist, dass solche weiteren Punkte c, d wirklich vorhanden sind — eine unendlich grosse Anzahl solcher Punkte wird erst später postulirt — kann nun der Verf. eine Reihe von an sich ziemlich einfachen Sätzen für seine Punkte und Geraden ableiten — den Beisatz „projectivische Punkte, Gerade, Ebenen“ lassen wir der Kürze halber in der Folge fort. Der Verf. bedient sich des Logikcalculs als Beweismittels; ob hierdurch der Beweisgang wirklich in dem Masse vereinfacht wird, wie der Verf. annimmt, lassen wir dahingestellt. Die von dem Verf. bewiesenen Sätze sind etwa von folgender Art. Ist c ein Punkt von ab, so ist ac mit bc identisch. Die Gerade ab enthält b und ist folglich mit ba identisch. Ist d ein weiterer Punkt der Geraden, so ist ab mit cd identisch. Nach Pieri's Meinung wird dieser Lehrsatz von verschiedenen Autoren als Postulat angenommen; neben anderen führt er hier eine frühere Arbeit von Amodeo (cfr. F. d. M. **23**, 694, 1891) an. Amodeo bestreitet jedoch in der zu besprechenden Arbeit, den Satz als Postulat gebracht zu haben, und stellt als Postulat 2), nachdem die Existenz wenigstens zweier S_0 postulirt war, den Satz auf: Zwei unabhängige S_0, A und B, legen fest (individuano) eine und nur eine Klasse S_1 von unendlich vielen S_0, der sie selbst angehören. Würden nun, führt er aus, C, D, zwei von A und B verschiedene S_0 dieser Klasse, eine mit AB nicht identische Klasse S_1 bestimmen, so lägen sie gegen die Voraussetzung auf zwei S_1. Der unbefangene Leser wird vielleicht eine so sehr grosse Bedeutung der Frage nicht beilegen, ob der Satz gleich zu Anfang als Postulat gebracht werden soll oder in die oben angedeutete Reihe einfacher Postulate zerfällt werden muss. Um zu dem Begriff der (projectivischen) Ebene zu gelangen, postulirt Pieri (VII) wenigstens einen Punkt ausserhalb einer Geraden und entwickelt eine Formel zur Darstellung des Scheins eines Gebildes hinsichtlich eines Punktes. Der Schein (visuale) von k nach a besteht aus allen Geraden, die a mit Punkten von k bestimmt. Wird k eine Gerade bc, so gelangt man zur Definition einer Ebene $a(bc)$, in welcher aber, der Schreibweise entsprechend, a, b, c zunächst nicht gleichwertig sind. Dieses lässt sich erst aus dem Postulat der projectivischen Ebene (VIII) ableiten, dem der Verf. folgende Form giebt: Sind a, b, c nicht collineare Punkte, d. h. ist es nicht möglich, zwei von einander verschiedene Punkte x und y so zu fixiren, dass a, b, c der Geraden xy angehören, und ist d ein von a, b, c verschiedener Punkt der Figur $a(bc)$, so liegt die Gerade bd ganz in der Figur. Hieraus lassen sich dann die Sätze ableiten:

Die Gerade, welche zwei beliebige Punkte der Figur $a(bc)$ verbindet, gehört ihr ganz an, zwei Gerade derselben schneiden sich, die Ebene ist durch drei Punkte a, b, c eindeutig bestimmt, u. s. w. Eine Reihe von Sätzen des Verf. bezieht sich auf Gruppen collinearer und complanarer Punkte. Vier Punkte a, b, c, d sind complanar, wenn drei unter sich verschiedene Punkte x, y, z so angegeben werden können, dass der Ebene xyz die vier Punkte angehören. Der Verf. fordert nun (IX) wenigstens einen Punkt ausserhalb einer Ebene und stellt (X) das Postulat auf: Eine jede Gerade hat mit einer jeden Ebene wenigstens einen Punkt gemeinsam. Ich muss Amodeo insofern beipflichten, als ich dies Postulat in anderer Form wünschte. Es hätte der projectivische Raum — Pieri vermeidet allerdings das Wort Raum — als Schein einer Ebene hinsichtlich eines Punktes ausserhalb derselben definirt werden sollen. Würde man das Postulat hinzufügen, dass weitere Punkte nicht vorhanden sind, oder die Uebereinkunft treffen, dass in der Folge nur die Punkte eines bestimmten Raumes in Betracht kommen sollen, so ist es beweisbar, dass jede Gerade von jeder Ebene getroffen wird.

In dem folgenden Abschnitt erreicht der Verf. das Ziel, die Lehre von dem Sinne, in welchem Punkte einer Geraden auf einander folgen, auf sinnreiche Weise von der Anschauung loszulösen. Zu diesem Zweck führt er (Postulat XI) das projectivische Segment (abc) als Mannigfaltigkeit von Punkten einer Geraden r ein. Dieser Mannigfaltigkeit gehört a nicht an (XII). Dieselbe ist (XIII) mit (cba) identisch. Ist ferner d ein von a verschiedener Punkt von r, der nicht (abc) angehört, so gehört er notwendig zu (bca) (XIV). Durch (XV) wird verlangt, dass wenigstens ein von a und c verschiedener und (abc) nicht angehöriger Punkt von r existirt. Es folgt dann, dass (abc) noch wenigstens einen von b verschiedenen Punkt, r also wenigstens fünf Punkte enthält. Aus den folgenden Postulaten ist dann zu schliessen, dass r unendlich viele Punkte enthält. Dieselben lauten: Gehört ein Punkt d zu den beiden Segmenten (bca) und (cab), so kann er nicht zu (abc) gehören (XVI), und: wenn d zu (abc) gehört, fallen die Segmente (abc) und (adc) zusammen (XVII). Aus diesen Sätzen lässt sich nun eine Reihe von Sätzen folgern, die Staudt der unmittelbaren Anschauung entnimmt; als wichtigster werde der Satz hervorgehoben: Vier Punkte einer Geraden lassen sich auf eine Art in zwei sich trennende Paare von Punkten a, c und b, d zerlegen; die Bezeichnung kann auf eine Art so eingerichtet werden, dass d dem Segment (abc) nicht angehört. Das Postulat XVIII bezeichnet Pieri als das der Stetigkeit; es ist dem Dedekind'schen Axiom des Trennungspunktes zweier nicht in einander übergreifenden Punktmannigfaltigkeiten auf einer Geraden nachgebildet. Durch das Postulat XIX wird verlangt, dass der in Segmentsätzen sich aussprechende Sinn, in dem vier Punkte einer Geraden sich folgen, bei der Projection der Geraden ungeändert bleibt.

Der Verf. ist nun im Stande, den Begriff des Dreiecks abzuleiten; die Linien da, db, dc, welche a, b, c mit einem bc, ca, ab nicht angehörenden Punkte d verbinden, treffen die Geraden bc, ca, ab in drei

Punkten a', b', c', welche mit den gegebenen nicht identisch sind. Wenn nun die Punkte a' und b' in den Segmenten $(ba'c)$ und $(cb'a)$ verschoben werden, so beschreibt c' ein bestimmtes Segment $(ac'b)$, und man erhält in der Gesamtheit der zugehörigen Punkte d das Dreieck abc, von dem, wie man sieht, die Segmente $(ba'c)$, $(cb'a)$, $(ac'b)$ selbst ausgeschlossen sind. Der Verf. kann nun zeigen: Eine Gerade trifft entweder zwei oder keine der drei Seiten eines Dreiecks. Von den beiden Segmenten, welche zwei Punkte des Umfangs eines Dreiecks begrenzen, gehört eines dem Dreiecke ganz an, das andere nicht. Der Begriff des Dreiecks beruht hauptsächlich auf dem Hülfssatz: Ist c_1 der Schnittpunkt von ab und $a'b'$, so werden a und b durch c' und c_1 getrennt. Der Verf. giebt, unter Bezugnahme auf Enriques, seinen Beweis für dieses Theorem auch in gewöhnlicher Sprache wieder. Bei diesem Beweise dürfen die Punkte c' und c_1 nicht von vorne herein als verschieden betrachtet werden. Die meisten Lehrbücher lassen, wie Pieri hervorhebt, dies ausser Acht, machen also implicite das Postulat: Drei Punkte a', b', c' der Geraden bc, ca, ab können nicht in einer Geraden liegen, wenn $a'a$, $b'b$, $c'c$ durch einen Punkt gehen. Neben anderen Büchern nennt Pieri hier die Vorlesungen über neuere Geometrie von Pasch. Bei dem Lehrgang dieses Buches, in dem die durch zwei Punkte begrenzte endliche Strecke als Raumelement auftritt, ist in der That eine Ergänzung erforderlich, die Pasch in folgender Form vornimmt: Es ist am Schlusse des § 2 der Satz anzufügen: „Liegen von vier (eigentlichen) Punkten A, B, C, D einer Ebene keine drei in einer Geraden, und geht die Gerade AD durch einen Punkt der Strecke BC, die Gerade BD durch einen Punkt der Strecke CA, so geht die Gerade CD durch einen Punkt der Strecke AB“. Es wird sodann erörtert, welche Modificationen bei Einführung uneigentlicher Punkte eintreten.

Pieri schaltet nun zunächst ein Kapitel über segmentäre Verwandtschaften ein, die zwei Gerade in der Art in einander überführen, dass zu jedem Segment der einen ein Segment der anderen gehört. Unter Benutzung des Postulats XVIII wird in erster Linie ein Theorem bewiesen, das als segmentäre Umformung des Satzes gelten kann. Beschreiben zwei in stetiger Weise fortschreitende Punkte Segmente, von denen das eine dem anderen ganz angehört, so giebt es einen bestimmten Punkt, in dem zwei entsprechende Lagen der Punkte vereinigt sind, und dem kein anderer Punkt gleicher Art vorangeht. In dem letzten Abschnitt wird nun mit Hülfe des vollständigen Vierecks der Punkt d eingeführt, welcher mit c zusammen a und b harmonisch trennt ($d = \mathrm{Arm}_{a,b}c$). Die Eindeutigkeit des Punktes beruht auf dem Postulat X, das heisst auf dem Desargues'schen Satz. Ohne Benutzung desselben erhielte man möglicher Weise mehrere Punkte, die aber alle ausserhalb des Segmentes (acb) liegen würden. Als segmentär erweist sich nun die harmonische Verwandtschaft zwischen zwei Geraden, welche eindeutig ist und jede harmonische Gruppe in eine harmonische Gruppe überführt. Führt eine harmonische Verwandtschaft drei Punkte e, f, g einer Geraden in sich über, so fällt sie mit der identischen Transformation zusammen.

Wäre ein Paar a, a' getrennter homologer Punkte vorhanden, so würde man auf Grund des Postulats XVIII zwei sich selbst entsprechende Punkte y, z von der Art auffinden, dass kein Punkt des Segmentes (yaz) mit dem entsprechenden Punkte zusammenfällt. Selbst wenn y und z mit zweien der Punkte e, f, g zusammenfielen, hätte aber diese Aussage einen offenbaren Widerspruch zur Folge. Man sieht, Pieri's Beweis des Staudt'schen Fundamentaltheorems ist nahe verwandt mit dem in den Lehrbüchern der Geometrie der Lage jetzt allgemein üblichen.

Wie bereits oben hervorgehoben, sind in Amodeo's Abhandlung die Postulate mehr zusammengezogen. Auf das oben angeführte Postulat II folgt das neue, dass es ausserhalb eines S_1 noch andere S_0 giebt. Hierdurch ist dann das S_2 als Schein eines S_1 gegeben, und es muss nun das Postulat der Ebene folgen. Amodeo bringt es (Postulat IV) auf die Form: Zwei Gerade AB und AC, die einen Punkt mit einander gemein haben, bestimmen eine und nur eine Mannigfaltigkeit S_2. Dieses Postulat gestattet dann, zu beweisen, dass zwei Gerade der Ebene sich schneiden, dass zwei Punkte der Ebene eine ihr ganz angehörige Gerade bestimmen, dass die Ebene durch drei Punkte festgelegt ist, u. s. w. Hierauf postulirt Amodeo einen Punkt ausserhalb eines S_2 und steigt mit Hülfe der Bildung eines Scheins von S_2 nach diesem neuen S_0 zum Raume S_3 auf. Es lässt sich nun zeigen, dass eine Gerade und eine Ebene desselben wenigstens einen Punkt gemein haben; es zeigt sich, dass der Raum durch ein beliebiges S_0 und ein ihn nicht enthaltendes S_2, durch zwei von einander unabhängige S_1 und überhaupt durch vier unabhängige S_0 eindeutig festgelegt ist. Nachdem Amodeo sodann an Stelle des linearen S_3 den gewöhnlichen Punktraum substituirt hat, erörtert er in einer Reihe von Paragraphen die verschiedenen Gebilde erster bis dritter Stufe des Raumes, bespricht die unendlich fernen Elemente des euklidisch gedachten Raumes. Es werden hier die verschiedenen Formen erörtert, welche die obigen Aussagen bei Zulassung unendlich ferner Elemente annehmen. Hierauf folgt ein Abschnitt über die fundamentalen Operationen des Projicirens und Schneidens, und endlich bespricht der Verf. den Desargues'schen Satz. E. K.

A. Emch. Projective groups of perspective collineations in the plane, treated synthetically. Diss. Univ. of Kansas. Lawrence, Ka. 35 S. 8°.

Der Verf. geht von dem Satze aus, dass zwei Kegelschnitte einer Ebene, die einander berühren, in der Ebene eine perspective Collineation bestimmen, deren Axe die Tangente im Berührungspunkte und deren Centrum der Schnittpunkt der beiden anderen gemeinsamen Tangenten der Kegelschnitte ist. Daraus wird auf synthetischem Wege eine Klassification der perspectiven Collineationen abgeleitet, und schliesslich werden die sämtlichen Typen von Gruppen von perspectiven Collineationen bestimmt und aufgezählt. Bei der endgültigen Zusammenstellung dieser Gruppen sind die entsprechenden Nummern in Lie's Tafel aller Typen von Collineationen beigefügt. El.

E. O. Lovett. Note on the general projective transformation. Annals of Math. **10**, 5-16.

Directer analytischer Beweis des bekannten Satzes, dass die projectiven Transformationen des gewöhnlichen Raumes die einzigen sind, bei denen das System der Differentialgleichungen: $y'' = 0$, $z'' = 0$ invariant bleibt. El.

A. Padoa. Di alcune proposizioni fondamentali relative al mutuo separarsi di coppie di punti. Revue de Math. **6**, 35-40.

Die anscheinend nicht vollständig erschienene Schrift bezieht sich auf eine Arbeit von Vailati, in welcher das Zeichen $ab \| cd$ für zwei sich trennende Punktepaare einer geschlossenen, sich selbst nicht schneidenden Curve eingeführt war, und wo mit Hülfe dieses Zeichens definirt war, unter welchen Bedingungen a, b, c, d, e in einerlei Sinn auf einander folgen. Hierher gehörige Entwickelungen sind auch in der Arbeit enthalten. E. K.

E. Ascione. Sopra alcune involuzioni dello spazio. Napoli Rend. (3) **2**, 13-29.

N. S. Dino. Relazione. Ibid. 12-13.

Die Geraden, in welchen sich homologe Räume dreier collinearen Raumbündel begegnen, die einem Raume S_4 vierter Stufe angehören, führen auf eine von Segre genauer untersuchte Mannigfaltigkeit Γ dritter Ordnung und Stufe mit zehn Doppelpunkten. Auf einen Raum kann das Gebilde durch Projection von einem der Doppelpunkte aus eindeutig abgebildet werden, und zwar entsprechen hierbei den Schnitten von Γ mit den S_3 des Raumes S_4 Flächen dritter Ordnung, die mit den beiden Geradenscharen einer Oberfläche zweiter Ordnung je drei feste Gerade gemein haben. Stellt man nun eine involutorische Beziehung auf der Γ mit Hülfe eines linearen Complexes K her, von dessen Strahlen ein jeder ausser zwei entsprechenden Punkten einen fundamentalen Punkt mit Γ gemein hat, so entstehen durch Projection gewisse involutorische Raumbeziehungen, die der Verf. genauer untersucht, und bei denen Verbindungslinien entsprechender Punkte einem Complex erster Ordnung angehören. E. K.

A. Noyer et Ch. Michel. Étude sur l'involution généralisée. J. de Math. élém. (4) **5**, 7-10, 25-33, 54-58, 73-77.

Wenn die zugeordneten Paare von Punkten, Strahlen oder Ebenen mit einem Basispaare eine harmonische Punktreihe, einen harmonischen Strahlen- oder Ebenenbüschel bilden, so nennen die Verf. dieses eine binäre Involution. Die zugeordneten Gruppen dreier Punkte, Geraden oder Ebenen, welche Ecken oder Seiten conjugirter Dreiecke bezüglich eines Basiskegelschnitts, die Kanten oder Seiten conjugirter dreiseitiger Ecken in Bezug auf einen Basiskegel sind, bilden eine ternäre Involution. Endlich die zugehörigen Gruppen von vier Punkten oder vier

Ebenen, welche die Ecken oder Seiten conjugirter Tetraeder in Bezug auf eine Basisfläche zweiter Ordnung sind, befinden sich in quaternärer Involution. Die Verf. haben sich die Aufgabe gestellt, von einer Eigenschaft der binären Involution aus die entsprechende Eigenschaft der ternären Involution zu beweisen und von dieser aus dann zu der correspondirenden Eigenschaft der quaternären Involution aufzusteigen. Auf diese Weise gelangen sie durch einfache Schlüsse zu einer Reihe meist bekannter Sätze über die Oberflächen zweiter Ordnung. Wir führen an die „Sätze des Apollonius" über Beziehungen zwischen conjugirten Halbmessern, die Sätze von Frégier und Faure in ihrer gegenseitigen Beziehung und mit ihren Corollaren, das Theorem von Monge nebst seiner Verallgemeinerung, das Theorem von Hesse. Zuletzt wird der Zusammenhang dieser Gedanken mit einer Arbeit von Neuberg beleuchtet (Théorie des indices des points, des droites et des plans par rapport à une surface du second ordre. Nouv. Ann. (2) **9,** 317; F. d. M. **2,** 565, 1870). Lp.

K. Döhlemann. Zur Massbestimmung in den einförmigen Grundgebilden. Schlömilch Z. **41,** 265-271.

Der Verf. meint, der Begriff des Doppelverhältnisses von vier Elementen eines einförmigen Grundgebildes (Strahlenbüschel, Punktreihe) sei trotz vielfacher Behandlung noch einer Darstellung fähig, die das Dualitätsgesetz etwas schärfer hervortreten lasse, die zwei verschiedenen Bestimmungsarten des Vorzeichens ausdrücklich betone und eine kleine Lücke ausfülle in dem geometrischen Beweise des Satzes, dass vier Punkte einer Geraden und vier durch sie gehende Strahlen eines Büschels das gleiche Doppelverhältnis liefern. Diese Verbesserung geschieht durch Einführung des Trennungselementes. Hat man nämlich zwei Strahlen a, b eines Büschels, und bezeichnet mit ab die Grösse der Drehung, die a nach b überführt, so ist ab doppeldeutig. Durch Einführung eines neuen Strahles u (Trennungsstrahles) wird die Zweideutigkeit aufgehoben, indem man sagt: ab ist die Drehung, die nicht über u führt. Dies führt der Verf. dann näher aus. Mz.

J. Thomae. Untersuchungen über zwei-zweideutige Verwandtschaften und einige Erzeugnisse derselben. Leipz. Abh. **21,** 439-503 (1895).

Als Curve $M^{(4)}$ wird das Erzeugnis zweier projectiv auf einander bezogenen Kegelschnittbüschel mit zwei gemeinsamen Grundpunkten X, Y definirt. Es ist dies eine Curve vierter Ordnung, welche X und Y zu Doppelpunkten hat. Jede Gerade und jeder durch X, Y gehende Kegelschnitt wird von $M^{(4)}$ in vier Punkten geschnitten. Auf jeder durch X oder Y gehenden Geraden liegen noch zwei weitere Punkte der $M^{(4)}$ (§ 6). Bedeutet daher x jede durch X, y jede durch Y gehende Gerade, und betrachtet man eine Gerade x und eine Gerade y als zugeordnet, wenn ihr Schnittpunkt auf $M^{(4)}$ liegt, so entsprechen jeder Geraden x

zwei Gerade y und jeder Geraden y zwei Gerade x. Die so erhaltene Beziehung zwischen den Büscheln (x) und (y) wird eine zwei-zweideutig projective Verwandtschaft genannt und mit $(x) \overset{2.2}{\overline{\wedge}} (y)$ bezeichnet (§ 8).

Der Verf. hat sich die Aufgabe gestellt, diese Verwandtschaften und einige aus ihnen hervorgehende Curven, namentlich die $M^{(4)}$, auf rein projectivem Wege zu untersuchen. Als ein vielfach nützliches Hülfsmittel erweist sich hierbei eine von **Möbius** betrachtete ein-eindeutig involutorische Verwandtschaft zwischen den Punkten einer Ebene, welche darin besteht, dass unter Zugrundelegung eines Kegelschnittes ω und eines festen, nicht auf ω gelegenen Punktes P zwei Punkte als zugeordnet gelten, wenn sie in Bezug auf ω conjugirt sind und ihre Verbindungsgerade durch P geht. Mit Hülfe dieser Verwandtschaft, deren wichtigste Eigenschaften in §§ 1-3 entwickelt werden, gelingt es, die $M^{(4)}$ auf eine Curve dritter Ordnung $C^{(3)}$ abzubilden (§ 7). Aus dem Satze, dass durch jeden Punkt der $C^{(3)}$ vier Tangenten an die Curve gehen, wird geschlossen, dass durch jeden der Doppelpunkte X, Y von $M^{(4)}$ sich vier Tangenten an $M^{(4)}$ legen lassen. Daraus folgt, dass in jedem der Büschel (x), (y) vier „Verzweigungselemente" sich befinden, wenn unter einem Verzweigungselement ein solches verstanden wird, dessen beide zugeordneten zusammenfallen.

Ein weiteres Hülfsmittel für die Untersuchung zwei-zweideutiger Verwandtschaften bietet eine räumliche Projection, vom Verf. als **stereographische** bezeichnet (§ 5). Die Punkte eines einschaligen Hyperboloids H werden von einem Punkte P auf H aus auf eine Tangentialebene $\mathfrak{E}$ des Hyperboloids projicirt. Sind X, Y die Punkte, in welchen die durch P gehenden Geraden von H die Ebene $\mathfrak{E}$ treffen, so ergeben sich als Projectionen der auf H gelegenen Kegelschnitte in $\mathfrak{E}$ die Kegelschnitte durch X und Y (§ 9), als Projectionen der auf H gelegenen Raumcurven vierter Ordnung erster Species die in $\mathfrak{E}$ gelegenen Curven $M^{(4)}$ mit X, Y als Doppelpunkten (§§ 22, 12). Da eine Raumcurve vierter Ordnung durch acht Punkte im allgemeinen bestimmt ist, zwei solche auf H gelegene Curven acht (associirte) Punkte gemein haben, so gilt ein Gleiches für die Curven $M^{(4)}$ mit vorgeschriebenen Doppelpunkten X, Y. Für die zwei-zweideutige Verwandtschaft aber folgt hieraus, dass sie durch acht Paare im allgemeinen bestimmt ist, und dass zwei solche Verwandtschaften mit denselben Centren X, Y acht Paare gemein haben. — Mit einer linearen Projectivität hat eine zwei-zweideutige Verwandtschaft vier Paare gemein (§ 13). Hat man neben einer zwei-zweideutigen Verwandtschaft $(x) \overset{2.2}{\overline{\wedge}} (y)$ zwei lineare Projectivitäten $(x) \overline{\wedge} (x')$, $(y) \overline{\wedge} (x')$, so folgt $(x') \overset{2.2}{\overline{\wedge}} (y')$ (§ 10).

Specielle Fälle zwei-zweideutiger Verwandtschaften ergeben sich, wenn die Curve $M^{(4)}$ Besonderheiten hat. Wenn z. B. ausser den Centren X, Y noch ein Doppelpunkt D existirt, so entsprechen zwei Verzweigungsstrahlen XD, YD einander. Werden die Punkte eines

Kegelschnittes ω von zwei nicht auf ihm liegenden Punkten X, Y projicirt, so erhält man ebenfalls eine zwei-zweideutige Verwandtschaft. Die $M^{(4)}$ besteht in diesem Falle aus ω und der doppelt zu zählenden Geraden XY. Auch der Fall zweier projectiv auf einander bezogenen Strahleninvolutionen liefert, wie in § 14 nachgewiesen wird, eine zwei-zweideutige Verwandtschaft in dem oben definirten Sinne. Die $M^{(4)}$ hat dann die Eigenschaft, dass die Verbindungslinien eines beliebigen Punktes von ihr mit X, bez. Y der $M^{(4)}$ in Punkten begegnen, deren Verbindungslinien mit Y, bez. X sich auf $M^{(4)}$ treffen. Wenn endlich $M^{(4)}$ in zwei durch X und Y gehende Kegelschnitte zerfällt, so zerfällt die zwei-zweideutige Verwandtschaft in zwei ein-eindeutige (§ 16).

Durch die Strahlen der zwei-zweideutig projectiv auf einander bezogenen Büschel (x) und (y) werden auf zwei Geraden g und h Punktreihen (A), (B) ausgeschnitten, deren Zuordnung als zwei-zweideutige Punktverwandtschaft bezeichnet wird: $(A) \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (B)$. Sie steht der zwei-zweideutigen Geradenverwandtschaft dual gegenüber (§ 11). Für die Geraden g und h können auch durch X, bez. Y gehende Kegelschnitte eintreten.

Eine Reihe von Untersuchungen bezieht sich auf den Fall, dass die Träger (bez. Centren) der Verwandtschaft coincidiren. Es giebt alsdann vier Doppelelemente, d. h. solche, die mit ihren entsprechenden zusammenfallen (§ 8). Wenn in der Verwandtschaft $(A) \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (B)$ die Elemente P und Q einander entsprechen, mag man P als zur Reihe (A), Q als zur Reihe (B) gehörig betrachten, oder umgekehrt, so heisst PQ ein i n v o l u t o r i s c h e s P a a r. Es giebt deren zwei, oder alle Paare sind involutorisch, in welchem Falle die Verwandtschaft eine symmetrische genannt und durch $(A) \overset{2,2}{\frown} (B)$ bezeichnet wird (§ 13). Nur wenn die Verwandtschaft in zwei ein-eindeutige zerfällt, kann sie mehr als zwei involutorische Paare haben, ohne symmetrisch zu sein.

Es besteht nun der wichtige Satz, dass man jede zwei-zweideutige Verwandtschaft $(A) \overset{2,2}{\overline{\wedge}} (B)$ durch lineare Projectivitäten $(A) \overline{\wedge} (A')$ und $(B) \overline{\wedge} (B')$ in eine symmetrische $(A) \overset{2,2}{\frown} (B)$ überführen kann (§ 15). Da in der symmetrischen die Verzweigungselemente beider Reihen zusammenfallen, so folgt, dass in jeder zwei-zweideutigen Verwandtschaft die Verzweigungselemente beider Reihen projectiv auf einander bezogen werden können. Nun kann es sehr wohl sein, dass in der einen Reihe die Verzweigungselemente sämtlich reell, in der anderen sämtlich imaginär sind. Hieraus kann aber nur geschlossen werden, dass die Ueberführung in eine symmetrische Verwandtschaft durch r e e l l e Transformation nicht in jedem Falle zu leisten ist. Aus den hier geführten Untersuchungen, bei welchen wieder die Abbildung durch eine M ö b i u s'sche Verwandtschaft herbeigezogen wird, ergiebt sich nebenbei der Satz: Sind in einer zwei-zweideutig projectiven Verwandtschaft von den Verzweigungselemen-

ten der einen Reihe zwei reell, zwei imaginär, so verhält es sich mit den Verzweigungselementen der anderen Reihe ebenso.

Die Untersuchung der auf einem Kegelschnitt ω gelegenen zwei-zweideutigen Punktverwandtschaft führt zur Betrachtung des Büschels, welcher durch die Verbindungslinien zugeordneter Punkte geliefert wird. Er heisst „Directionsbüschel der Verwandtschaft" (§ 17). Für den Fall der symmetrischen Verwandtschaft ergiebt sich aus dem Satze, dass eine solche durch fünf Paare bestimmt ist (§ 18), leicht ihre Uebereinstimmung mit derjenigen Verwandtschaft, welche durch die Schnittpunktpaare von ω mit den Tangenten eines zweiten Kegelschnittes γ gebildet wird (§ 19). Im Falle einer allgemeinen zwei-zweideutigen Verwandtschaft auf ω ergiebt sich jedoch ein Directionsbüschel $m^{(4)}$ von der vierten Klasse mit zwei Doppelstrahlen § 17, welcher als dualistisches Gegenstück zur Curve $M^{(4)}$ nachgewiesen wird (§ 22).

Die letzten §§ 23-26 der Abhandlung beschäftigen sich mit der Zusammensetzung zwei-zweideutiger Verwandtschaften. Durch Zusammensetzung einer zwei-zweideutigen Verwandtschaft φ: $(A)\overset{2.2}{\overline{\wedge}}(B)$ mit ihrer inversen [bei Thomae heisst es: mit sich selbst; doch scheint es im Interesse der Klarheit geboten, bei der nicht symmetrischen Verwandtschaft auf einem Träger zwischen $(A)\overset{2.2}{\overline{\wedge}}B$ und $(B)\overset{2,2}{\overline{\wedge}}(A)$ zu unterscheiden] $\varphi^{-1}:(B)\overset{2.2}{\overline{\wedge}}(A)$ kann ausser der identischen noch eine symmetrische Verwandtschaft erzeugt werden. Entsprechen nämlich einem Punkte A in der Verwandtschaft φ die Punkte B_1, B_2, diesen in der Verwandtschaft φ^{-1} die Punkte A, A_1, bez. A, A_2, so ist die Verwandtschaft ψ, welche dem Punkte A die Punkte A_1 und A_2 zuordnet, eine zwei-zweideutig symmetrische (§ 24). Ist die Verwandtschaft φ selbst schon symmetrisch, so wird $\varphi^{-1} = \varphi$, und man gelangt durch wiederholte Zusammensetzung von φ mit sich selbst zu einer Reihe symmetrischer Verwandtschaften. Liegen die Verwandtschaften auf einem Kegelschnitt, so umhüllen ihre Directionsbüschel, wie oben bemerkt wurde, Kegelschnitte, und diese gehören mit ω einem und demselben Kegelschnittbüschel an. Im Anschluss hieran lassen sich die von Poncelet aufgestellten Schliessungssätze behandeln. Durch Zusammensetzung einer symmetrischen Verwandtschaft mit einer Involution erhält man eine symmetrische Verwandtschaft (§ 25), Setzt man endlich zwei beliebige zwei-zweideutige Verwandtschaften zusammen, so wird man zu einer vier-vierdeutigen geführt. Sind die so auf einander bezogenen Gebilde Strahlenbüschel, so erzeugen sie eine Curve achter Ordnung, welche die Centren der Büschel zu vierfachen Punkten hat und ausserdem noch vier Doppelpunkte besitzt. Stz.

Th. Schmid. Ueber trilinear verwandte Felder als Raumbilder. (Fortsetzung.) Monatsh. f. Math. 7, 180-184.

Fortsetzung des Aufsatzes im VI. Jahrgange der Monatshefte, über

den im **26.** Bande der F. d. M. referirt ist. Insbesondere werden hier aus den Bildern einer Geraden ihre Spuren und umgekehrt auf einfache Weise construirt. Scht.

P. VISALLI. Sulle collinearità e correlazioni ordinarie ed eccezionali in due spazi a quattro dimensioni. Lomb. Ist. Rend. (2) **29**, 351-359, 439-459, 521-528, 559-565.

Die Bestimmung und die Untersuchung der Collineationen und Correlationen in der Ebene und im Raume erweisen sich als notwendige Vorbereitungen für die Auflösung der anzahl-geometrischen Fragen über die projectiven Transformationen im ternären oder quaternären Gebiet (vgl. einige Arbeiten von Hirst und Visalli, über welche in F. d. M. **6**, 347, 1874; **7**, 358 u. 374, 1875; **18**, 640, 1886 berichtet wurde). Die Bestimmung und die Untersuchung der Collineationen und Correlationen im vierdimensionalen Raum sind in ähnlicher Weise unentbehrlich, um auf höhere Räume einige wichtige Resultate der gewöhnlichen Geometrie auszudehnen; beide Gegenstände sind die Hauptzwecke der Arbeit, über welche wir zu berichten haben. In den zwei ersten Paragraphen derselben dehnt der Verf. auf den vierdimensionalen Raum einige wohlbekannte Sätze über die gewöhnlichen projectiven Verwandtschaften aus; insbesondere beschäftigt er sich mit der Voraussetzung, dass die beiden Räume conjectiv seien, und mit der anderen, dass die Transformation involutorisch sei. In den beiden folgenden Paragraphen benutzt der Verf. die älteren oben angeführten Untersuchungen von Hirst und seine eigenen, um die exceptionellen projectiven Transformationen zu bestimmen. Seine Resultate kann man aus der folgenden Tabelle ersehen:

I. Collineationen zwischen R'_4 und R''_4, welche

a) exceptionell erster Ordnung sind:

1. mit einem exceptionellen Punkte in R'_4 und einem exceptionellen Raume R_3 in R''_4,

2. mit einer exceptionellen Geraden in R'_4 und einer exceptionellen Ebene in R''_4;

b) exceptionell zweiter Ordnung sind:

3. mit einem exceptionellen Punkte und einem incidenten exceptionellen Raume R_3 in jedem der Räume R'_4 und R''_4,

4. mit einem exceptionellen Punkte und einer durch ihn gehenden exceptionellen Geraden in jedem Raume,

5. mit einem exceptionellen Punkte und einer durch ihn gehenden exceptionellen Geraden in R'_4, und einer exceptionellen Ebene und einem durch sie gehenden exceptionellen Raume R_3 in R''_4,

6. mit einem exceptionellen Punkte und einem durch ihn gehenden exceptionellen Raume R_3 in R'_4, und einer exceptionellen Geraden und einem durch sie gehenden exceptionellen R_3 in R''_4;

c) exceptionell dritter Ordnung sind:

7. mit einem exceptionellen Punkte, einer exceptionellen Geraden und einer exceptionellen Ebene, je incident mit dem folgenden Element,

in R'_4, und einer exceptionellen Geraden, einer exceptionellen Ebene und einem exceptionellen Raume R_3, je incident mit dem folgenden Element, in R''_4,

8. mit einem exceptionellen Punkte, einer exceptionellen Geraden und einem exceptionellen Raume R_3, je incident mit dem folgenden Elemente in R'_4, und in R''_4 mit einem exceptionellen Punkte, einer exceptionellen Ebene und einem exceptionellen Raume R_3;

d) exceptionell vierter Ordnung sind:

9. mit den folgenden exceptionellen Elementen in jedem Raume: Punkt, Gerade, Ebene, Raum, jedes Element mit dem folgenden incident.

II. Correlationen zwischen R'_4 und R''_4, welche

a) exceptionell erster Ordnung sind; in jedem Raume befinden sich:

1. ein exceptioneller Punkt,
2. eine exceptionelle Gerade,
3. eine exceptionelle Ebene,
4. ein exceptioneller Raum R_3;

b) exceptionell zweiter Ordnung sind; in jedem Raume befinden sich:

5. ein exceptioneller Punkt und ein exceptioneller Raum R_3,
6. eine exceptionelle Gerade und eine exceptionelle Ebene,
7. ein exceptioneller Punkt und eine exceptionelle Gerade,
8. ein exceptioneller Raum R_3 und eine exceptionelle Ebene,
9. ein exceptioneller Punkt und eine exceptionelle Ebene,
10. ein exceptioneller Raum und eine exceptionelle Gerade;

c) exceptionell dritter Ordnung sind; in jedem Raume befinden sich folgende exceptionelle Elemente:

11. ein Punkt, eine Gerade, eine Ebene,
12. eine Gerade, eine Ebene und ein Raum R_3,
13. ein Punkt, eine Ebene und ein Raum R_3,
14. ein Punkt, eine Gerade und ein Raum R_3.

d) exceptionell vierter Ordnung sind:

15. In jedem Raume befinden sich ein Punkt, eine Gerade, eine Ebene und ein Raum, alle exceptionell. La.

M. Pieri. Un sistema di postulati per la geometria projettiva astratta degli iperspazi. Revue de Math. **6**, 9-16.

Die Arbeit untersucht im Sinne des Logik-Calculs die Bedingungen, unter denen sich aus den Individuen einer Mannigfaltigkeit lineare Räume beliebig hoher Dimension bilden lassen. Ist ein Raum S_{n-1} $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension bereits gebildet, so muss zunächst zur Bildung eines Raumes n^{ter} Dimension ein „Punkt" ausserhalb S_{n-1} postulirt und mit allen Punkten von S_{n-1} durch „Gerade" verbunden werden; die Gesamtheit ihrer Punkte füllt den S_n aus. Dass dieser Process ins Unbegrenzte hinein fortgesetzt werden kann, drückt im Sinne des Logik-Calculs das Postulat XI

des Verf. aus. Nach Hinzufügung der zehn ersten Postulate, welche sich auf Gerade und Ebenen beziehen, ist nun auch im Sinne des Logik-Calculs eine Reihe von Sätzen über das Schneiden der in einem S_n enthaltenen Teilräume abzuleiten. Eine zweite Gruppe von Postulaten bezieht sich auf das projectivische Segment und Gruppen collinearer (einer Geraden angehöriger) Punkte. E. K.

Weitere Litteratur.

A. Del Re. Geometria proiettiva ed analitica. Fascicoli 1 e 2. Modena. 256 S.

W. Loos. Analytische Behandlung einiger Grundprobleme der projectiven Geometrie. Diss. Giessen. 31 S. 8° u. 1 Taf.

F. Mariantoni. Nota sulle relazioni che intercedono tra i multirapporti di due n-uple di elementi di una forma geometrica di prima specie. Rieti: Petrongari 8 S. 8°.

L. Renner. Ueber die Gruppe der 24 Collineationen, durch welche ein ebenes Viereck oder Vierkant in sich selbst übergeht. Strassburg. 26 S. 8°.

J. Schlotke. Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Teil IV. Projectivische Geometrie. Dresden: Kühtmann. V + 177 S. 8°.

S. Vecchi. Lezioni di geometria proiettiva, dettate nell'anno accademico 1895/96. Parma: Bartoli. 94 S. 8°.

B. Besondere ebene Gebilde.

A. W. Velten. Eine neue Ableitung von harmonischen Eigenschaften des Vierecks. Schlömilch Z. **41**, 332-336.

Die hier gegebene Ableitung geschieht durch Projection einer auf einer Kugelfläche liegenden Kugelraute auf eine beliebige Ebene, wobei das Centrum der Kugel zugleich Projectionscentrum ist. Die Kugelraute wird erklärt als sphärisches Viereck, dessen Ecken die Endpunkte zweier sich gegenseitig halbirenden Hauptbogen sind. Diese sich halbirenden Hauptbogen sind die Diagonalen der Raute; ihr Schnittpunkt der Diagonalschnitt derselben. Verlängert man ein Paar gegenüber liegender Seiten einer Kugelraute, so entsteht ein sphärisches Zweieck. Nach einer näheren Betrachtung der Kugelraute und der beiden Zweiecke, die zu ihr gehören, wird durch den Diagonalschnitt irgend ein Hauptbogen gelegt, auf welchem die harmonischen Abschnitte aufgefunden werden; von diesen gelangt der Verf. dann (wie oben angegeben) zu den harmonischen Eigenschaften des ebenen Vierecks. Mz.

R. A. Roberts. On the centres of similitude of certain pairs of circles. Messenger (2) **25**, 190-192.

Aus sechs Tangenten eines Kegelschnitts kann man zehn Paare von Dreiecken bilden. Ist $\varDelta$, $\varDelta'$ eines dieser Paare, so möge S ein die Seiten von $\varDelta$ berührender Kreis sein, ebenso S' für $\varDelta'$. Da es nun vier Kreise giebt, welche die Seiten eines Dreiecks berühren, so giebt es 16 solcher Paare S, S' und daher 32 Aehnlichkeitspunkte. Wenn man also die zehn Dreieckspaare betrachtet, so erhält man im ganzen 320 Aehnlichkeitspunkte. In dem vorliegenden Aufsatze wird gezeigt, dass diese 320 Punkte zu je 10 auf 32 Geraden liegen. Glr. (Lp.)

A. Droz-Farny. Question de mathématiques élémentaires proposée au concours d'agrégation de 1895. J. de Math. élém. (4) **5**, 105-108.

Von einem Punkte M fälle man die Lote MA', MB', MC' auf die Seiten eines Dreiecks ABC; Untersuchung der Eingehüllten der Seiten $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ des Dreiecks $A'B'C'$, wenn M sich auf einer Geraden $\varDelta$ bewegt (Parabeln), bei allgemeiner Lage und bei besonderen Lagen von $\varDelta$; Aenderung der erhaltenen Figuren bei Verschiebung und Drehung von $\varDelta$. Lp.

G. Brocard. Sur la transformation homographique des propriétés métriques des figures planes. Nouv. Ann. (3) **15**, 426-432.

Die Transformation wird benutzt, um den Secanten - Tangentensatz für den Kreis auf die Hyperbel und Parabel zu übertragen. Lg.

A. Tissot. Sur la polaire d'un point par rapport à une conique. J. de Math. élém. (4) **5**, 193-198.

Elementare Behandlung mit Hülfe von Eigenschaften eines Brennpunktes und der zugehörigen Directrix. Lp.

A. Mannheim. Solution de la question 1674. Nouv. Ann. (3) **15**, 292-293.

Alle Kreise, die einen Kegelschnitt in einem Punkte berühren, schneiden denselben in zwei anderen Punkten. Die Sehne, welche diese Punkte verbindet, hat eine feste Richtung; also liegt ihr Pol auf dem zu dieser Richtung conjugirten Durchmesser. Statt dieser Lösung von drei Zeilen für die von A. Cazamian gestellte Aufgabe giebt Barisien auch noch eine analytische Herleitung von der Länge einer Druckseite. Lp.

A. Mannheim. Solution de la question 1641. Nouv. Ann. (3) **15**, 290-292.

Rein geometrischer Beweis für den Lemaire'schen Satz: Wenn man um einen Punkt der gleichseitigen Hyperbel als Centrum denjenigen Kreis beschreibt, welcher durch den diametral entgegengesetzten Punkt der Curve geht, so schneidet derselbe die Hyperbel in drei weiteren

Punkten, welche Ecken eines eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks sind. Umwandlung des Satzes nach der Methode der reciproken Polaren.

Lp.

J. Neuberg. Sur un système de coniques. Mathesis (2) **6**, 164-173.

Untersuchung der folgenden Schar, welche als besonderen Fall die Tucker'schen Kreise einschliesst: Man giebt ein Dreieck ABC und einen Punkt M seiner Ebene. Es sei $A_1B_1C_1$ eines der ähnlichen und ähnlich liegenden Dreiecke in Bezug auf M als Aehnlichkeitspunkt. Man bezeichne mit X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 die Punkte (BC, A_1B_1), (BC, A_1C_1), (CA, B_1C_1), (CA, B_1A_1), (AB, C_1A_1), (AB, C_1B_1). Diese sechs Punkte gehören einem Kegelschnitte U an, der mit dem Aehnlichkeitsverhältnisse sich wandelt. Die Schar U bildet den Gegenstand der Arbeit. Mn. (Lp.)

B. Sporer. Ueber Kreise, welche einen Kegelschnitt doppelt berühren. Schlömilch Z. **41**, 210-220.

Verf. entwickelt eine Reihe von hübschen Sätzen über Kreise, die einen Kegelschnitt doppelt berühren. Dieselben beziehen sich namentlich auf die Kegelschnitte, die zwei feste Kreise so doppelt berühren, dass eine Axe in die Centrale fällt, ferner auf die Kreistangenten (bezw. kürzesten Kreissehnen), die von den Punkten eines den Kreis doppelt berührenden Kegelschnitts gezogen werden können. Hk.

V. Jerabek. Sur les coniques qui se touchent en deux points donnés. Mathesis (2) **6**, 37-41.

Wenn Kegelschnitte zwei feste Gerade AB, AC in denselben Punkten B und C berühren, so beschreiben ihre Brennpunkte eine Strophoide und umhüllen ihre Axen eine Parabel. Der Verf. erforscht nach synthetischer Methode die Beziehungen dieser Parabel zu dem Dreiecke ABC und zu der erwähnten Kegelschnittschar. Mn. (Lp.)

J. F. d'Avillez. Sobre um systema tri-tangente. Lisboa J. 1896.

Der Verf. beschäftigt sich in diesem Aufsatze mit den Eigenschaften der Kreise, welche eine Ellipse von innen in den Endpunkten der kleinen Axe berühren und sich gegenseitig von aussen berühren; der Mittelpunkt des einen dieser Kreise ist derjenige Punkt, in welchem die Normale zur Curve in einem gegebenen Punkte die Axe schneidet. Tx. (Lp.)

C. J. Rueda. Estudio de un logar geométrico curioso de sexto orden formado por tres de segundo. Archivo de Mat. **1**, 16-19.

Der Verf. untersucht in diesem Artikel den geometrischen Ort der Punkte, für welche die drei Verbindungslinien mit den Ecken eines fest gegebenen Dreiecks auf einer gegebenen Geraden zwei gleiche Strecken ausschneiden. Tx. (Lp.)

STUYVAERT. Note sur une propriété focale des coniques à centre. Mathesis (2) **6**, 129-131.

Wenn man von einem Punkte M an einen Kegelschnitt mit dem Mittelpunkte O und den Brennpunkten F und F' die beiden Tangenten zieht, die eine bis zu ihrem Berührungspunkte T, die andere bis zu ihrem Schnittpunkte P mit dem zu OM conjugirten Durchmesser, so ist $MP.MT = MF.MF'$. Dml. (Lp.)

TH. REYE. Beweis einiger Sätze von Chasles über confocale Kegelschnitte. Zürich. Naturf. Ges. **41**, 2. Teil, 65-75.

Es handelt sich um die von Chasles in den Comptes rendus vom 23. October 1843 ohne Beweis veröffentlichten Sätze, die mit der Theorie der elliptischen Integrale innig zusammenhängen, und zu denen de Jonquières 1856 einen durchaus nicht einwandfreien Beweis in den „Mélanges de géométrie pure“ geliefert hatte. Diese Sätze beziehen sich auf gewisse Eigenschaften confocaler Kegelschnitte, die hier streng bewiesen werden. Als Ausgangspunkt nimmt der Verf. den Satz, dass zwei sich rechtwinklig schneidende Strahlen bezüglich eines Kegelschnitts nur dann conjugirt sind, wenn sie die Winkel zwischen den Brennstrahlen ihres Schnittpunkts halbiren. Die Quelle für den Beweis der oben erwähnten Chasles'schen Sätze ist der gleichfalls von Chasles ausgesprochene Satz, dass die zwei Paar Tangenten, die von zwei Punkten eines Kegelschnitts an einen ihm confocalen Kegelschnitt gezogen werden können, einen und denselben Kreis berühren. Um die Sätze von Chasles bequem aussprechen zu können, nennt Reye zwei Bogen eines Kegelschnitts „vergleichbar“, wenn ihre Pole auf einem ihm confocalen und ihn umschliessenden Kegelschnitt liegen. Ferner nennt Reye „Schenkel“ eines Bogens die Tangenten in den Endpunkten des Bogens, gerechnet vom Berührungspunkte bis zu ihrem Schnittpunkte, der „Pol“ genannt wird. Hiernach lautet der wichtigste der Chasles'schen Sätze folgendermassen:

Die Differenz von zwei vergleichbaren Kegelschnittbogen ist gleich der Differenz ihrer Schenkelsumme; die Tangenten in den vier Endpunkten solcher Bogen berühren einen und denselben Kreis.

Weiterhin werden dann noch die folgenden Sätze erschlossen: 1) Wenn ein unendlich dünner Faden von gegebener Länge mit seinen Endpunkten an einem Kegelschnitte k befestigt und durch eine bewegliche Spitze A so gespannt wird, dass er mit seinen beiden Enden an k sich anlegt, dazwischen aber mit zwei in A sich schneidenden Tangenten zusammenfällt, so beschreibt die Spitze A bei ihrer Bewegung einen mit k confocalen Kegelschnittbogen. 2) Ein Lichtstrahl, der an der Innenseite einer Ellipse k_1 immer von neuem reflectirt wird, berührt mit allen seinen Lagen einen mit k_1 confocalen Kegelschnitt k; ist k auch Ellipse, und kehrt der Strahl nach m Reflexionen zu seinem Ausgangspunkte zurück, so giebt es unendlich viele m-Ecke, die der Ellipse k um- und k_1 einbeschrieben sind; alle diese m-Ecke haben gleichen Umfang. Scht.

O. Gutsche. **Neue Beweise und Ergänzungen zu Lehrsätzen Steiner's über Kegelschnitte.** Pr. (No. 226) Oberrealsch. Breslau. 45 S. 4°.

Aus der reichen Fülle von Sätzen, die Steiner ohne Beweis mitgeteilt hat, wird eine die Kegelschnitte betreffende Reihe teils auf rein-, teils auf analytisch-geometrischem Wege in einfacher Weise bewiesen. Sie sind enthalten in den drei Abhandlungen Steiner's:

A) Teoremi relativi alle coniche inscritte e circonscritte (J. für Math. **30**; Ges. W. **2**, 327 ff.), B) Lehrsätze und Aufgaben (J. für Math. **30**; Ges. W. **2**, 343 ff.), C) Vermischte Sätze und Aufgaben (J. für Math. **55**; Ges. W. **2**, 661 ff.).

Der erste Teil der Arbeit bezieht sich auf Kegelschnitte, die einem Dreiecke um- oder eingeschrieben sind. Gewisse einfache metrische Relationen für das Dreieck und ein einfacher Hülfssatz liefern die Beweise der Sätze in A I, II, IV, die hinterher analytisch abgeleitet werden, woran sich die Aufstellung der Gleichungen und die Discussion der in A V und VI gegebenen geometrischen Oerter für die Mittelpunkte von Kegelschnitten mit constantem Axenproducte schliesst. Dabei stellt sich heraus, dass die von Steiner in A V angegebene Zahl $4/3\sqrt{2}$ in $1/3\sqrt{3}$ zu verbessern ist. Die Behandlung derselben Aufgabe für eingeschriebene Kegelschnitte mit constanten Summen der Halbaxenquadrate führt zu den Sätzen B 2 über congruente und ähnliche Kegelschnitte; als specieller Fall ergiebt sich C III 5. Dann folgen die Sätze über concentrische Kegelschnitte in C III 1 und die Herleitung der in C III 7 angegebenen Curven. Formeln für die Potenz eines Punktes in Bezug auf den Umkreis eines Dreiecks und andere wichtige Kreise ermöglichen die Beantwortung der am Ende von C III 1 aufgeworfene Frage nach dem Orte der Mittelpunkte zweier concentrischen ähnlichen Kegelschnitte, die einem Dreiecke um- bezw. eingeschrieben sind (wobei sich beiläufig der Satz C III 3 ergiebt), der aus zwei Kreisen besteht, wie auch schon Gundelfinger (analytisch-geom. Vorlesungen S. 313) gefunden hat; im Anschluss hieran wird der Ort für den Fall ermittelt, dass die Kegelschnitte zwei verschiedenen Dreiecken ein- oder umgeschrieben sind. Die Anwendung der Poncelet'schen Sätze über das ein- und umgeschriebene Dreieck führt auf die Sätze C III 2 a, b, c, wobei sich die Bemerkung Steiner's über die Höhenpunkte und Schwerpunkte am Ende des letzten Satzes als irrtümlich herausstellt.

Dieselben einfachen Beziehungen, wie zu dem Beweise dieser Sätze dienen zur Herleitung der von Steiner in A VIII und C III 9 gegebenen Lösung der auch von Euler und Gauss behandelten Aufgabe: unter allen einem gegebenen Vierseit einbeschriebenen Kegelschnitten diejenigen zu finden, denen grösste Axenproducte zukommen. Die Erledigung des dual gegenüberstehenden Problems macht mehr Schwierigkeiten. Die von Steiner an die hierauf sich beziehenden Sätze C III 8 b geknüpften Fragen werden erledigt.

Die dritte Gruppe der bewiesenen Sätze, nämlich C I 4, 5, handelt

von den Transversalen, die aus einem Punkte durch einen Kegelschnitt gezogen werden; die am Ende von C I 5 aufgeworfene Frage wird beantwortet, wobei sich herausstellt, dass die an die Frage geknüpfte Bemerkung Steiner's über den besonderen Fall, wo der Kegelschnitt in zwei Gerade zerfällt, unrichtig ist. Diese Ergebnisse werden auch synthetisch bewiesen, und schliesslich wird untersucht, wie viele unter den einem gegebenen Dreiecke eingeschriebenen Kegelschnitten zu einem gegebenen ähnlich oder ähnlich gelegen sind, worüber Steiner in C III 4 handelt. T.

Weitere Litteratur über Kegelschnitte.

A. Droz-Farny. Sur les triangles équilatéraux inscrits à une conique. Mathesis (2) **6**, 107-109. Dml.

A. Milinowski. Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte. — Elementar-synthetische Geometrie der gleichseitigen Hyperbel. 2. Ausg. Leipzig: B. G. Teubner. XII + 411 und X + 135 S. 8°.

R. Glas. Krümmungshalbmesser - Constructionen der Kegelschnitte. Wien. 21 S. 8°.

H. Schaefer. Methodischer Beitrag zur perspectivischen Geometrie der Kegelschnitte. Heidelberg. 8 S. 4° u. 1 Taf.

W. Rulf. Ein Ellipsensatz. Monatsh. f. Math. **7**, 34.

J. J. Milne. The conics of Apollonius. Math. Gaz. 1895, 7 S.

E. Goursat. Sur le théorème de Salmon. Nouv. Ann. (3) **15**, 20-22.

Geometrische Beweise bekannter Eigenschaften der Plancurve dritter Ordnung sechster Klasse, z. B. der Erhaltung des Doppelverhältnisses der vier anderswo berührenden Tangenten, die man von jedem Punkte einer solchen Curve aus ziehen kann. Scht.

A. C. Dixon. A projective proof of the anharmonic property of tangents to a plane curve. Messenger (2) **26**, 53-54.

Bei dem Beweise des Satzes wird die kubische Curve als die Projection der Schnittcurve zweier Flächen zweiter Ordnung aus irgend einem Punkte in dieser Curve angesehen. Glr. (Lp.)

T. Kierboe. Lineaer Konstruktion af det niende Skaeringspunkt for 2 Kurver af 3die Orden gjennem 8 givne Punkter. Nyt Tidss. **7B**, 53-59.

Lineare Construction des neunten Schnittpunktes zweier Curven dritter Ordnung. Diese Aufgabe, welche öfters gelöst ist, wird vom Verf. mittels eines Satzes, der früher von Valentiner gefunden ist (Nyt. Tidss. **3B**, 33), gelöst. Der Satz besagt: Alle Curven dritter Ordnung, welche durch sieben gegebene Punkte gehen, schneiden eine dieser

Curven in einem Punktepaar, dessen Verbindungslinie durch einen festen Punkt der Curve geht. Der Verf. beweist diesen Satz durch stereometrische Betrachtungen. Die Construction wird, wie gesagt, allein mittels des Lineals bewerkstelligt, und es wird gezeigt, dass die Construction mittels 29 Geraden ausgeführt werden kann, eine Zahl, die kleiner ist als die der sonst zu diesem Zwecke verwendeten Geraden. V.

FR. LONDON. **Die geometrischen Constructionen dritten und vierten Grades, ausgeführt mittelst der geraden Linie und einer festen Curve dritter Ordnung.** Schlömilch Z. **41,** 129-152.

Die Aufgabe dritten Grades wird zunächst auf die Form gebracht, die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte K, K' zu finden, die einen Punkt P von vorne herein gemein haben. Zunächst verwendet der Verf. die Folge einer quadratischen und einer collinearen Transformation, um K in eine vorgelegte Curve dritter Ordnung C mit Rückkehrpunkt und zugleich K' in eine Gerade G zu verwandeln; aus den Schnittpunkten von G und C ergeben sich die gesuchten Punkte. Nicht ausdrücklich erörtert wird, auf welche Art man bei einer Curve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt den Wendepunkt auffindet. Für den Entwickelungsgang des Verf. aber ist es unerlässlich, diese Aufgabe wirklich zu lösen. Noch umständlicher ist eine zweite Lösung der Aufgabe, bei welcher drei unbekannte Punkte eines Kegelschnittes als Kernpunkte einer gegebenen Involution dritter Ordnung, zweiter Stufe festgelegt sind. Es soll zunächst eine Gruppe der Involution mit einem zweifachen und einem einfachen Punkte aufgesucht, sodann der Kegelschnitt auf die vorgelegte Curve dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt so projectivisch bezogen werden, dass der zweifache Punkt der obigen Gruppe dem Rückkehrpunkte, der einfache dem Wendepunkte entspricht. Die so auf C entstehende Involution dritter Ordnung, zweiter Stufe ist „geradkernig“; ihre dreifachen Punkte werden durch eine Gerade auf der Curve ausgeschnitten und bilden überdies eine Gruppe jeder Involution dritter Ordnung, zweiter Stufe, deren Kernpunkte einer Gruppe der gegebenen Involution angehören. Zwei von diesen Gruppen, $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3$ und $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \mathfrak{Q}_3$, sind von vorne herein gegeben und genügen, den Träger der gesuchten Gruppe festzulegen, aus der man dann rückwärts die gesuchten Punkte erhält. Auf rechnendem Wege erörtert der Verf., wie bei Zugrundelegung einer Cissoide sich die Aufgabe gestaltet. Eine Aufgabe vierten Grades kann stets darauf zurückgeführt werden, die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte zu finden. Die Lösung dieser Aufgabe führt bekanntlich auf eine Aufgabe dritten Grades, Aufsuchung des gemeinsamen Poltripels der beiden Kegelschnitte und auf Aufgaben zweiten Grades. E. K.

A. DROZ-FARNY. **Solution de la question 490.** J. de Math. élém. (4) **5,** 287-288.

Ein veränderlicher Kreis geht durch die Punkte A und B. Ist C der zweite Endpunkt des Durchmessers CA, BD die Sehne durch B

parallel zu AC, so ist der Ort von D eine Strophoide, der des Halbirungspunktes M von CD eine Cissoide. Lp.

E. Janisch. Eine Methode zur Construction des Osculationskreises der ebenen Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte. Monatsh. f. Math. 7, 142-144.

Eine variable Sehne DK eines Kegelschnitts vom festen Punkte D schneidet (event. verlängert) eine feste Gerade a in A. Trägt man auf a die Strecke $KP = DA$ ab, so ist der Ort von P eine Curve dritter Ordnung C^3, deren Krümmungskreis in P construirt werden soll. Dies wird zurückgeführt auf die Construction des mit ihm identischen Krümmungskreises einer Hyperbel, welche die Tangente von C^3 in P berührt, durch D geht, und deren eine Asymptote parallel a ist. Die dazu verwandten Eigenschaften der C^3 sind ermittelt von Stiner in Monatsh. f. Math. 4, 99-114 (F. d. M. 25, 1138, 1893/94). H.

P. H. Schoute. Ueber eine gewisse Einhüllende. Nieuw Archief (2) 3, 30-32.

Auf einer kubischen Plancurve sind $3\lambda-1$ feste Punkte vorgegeben, welche aus einem Punkte X der Curve auf diese projicirt werden. Die Curven λ^{ter} Ordnung durch die $3\lambda-1$ Projectionen schneiden die gegebene Curve in einem Restpunkte Y. Es wird die Einhüllende der Geraden XY bestimmt. Mo.

G. Loria. I poligoni di Steiner nelle cubiche razionali. Aggiunte ad una memoria di Em. Weyr. Auszug aus Věstnik král české společnosti náuk 1896. 4 S.

Im Anschluss an die Untersuchungen von Em. Weyr über die zu einer Curve dritter Ordnung vom Geschlechte 0 gehörigen Steiner'schen Polygone (Math. Ann. 3, 235-237; F. d. M. 2, 401, 1871) betrachtet Loria einzeln die Fälle einer mit einem Doppelpunkte oder Rückkehrpunkte oder isolirten Punkte versehenen Curve. Vi.

W. Binder. Theorie der unicursalen Plancurven vierter bis dritter Ordnung in synthetischer Behandlung. Leipzig: B. G. Teubner. XI + 396 S. 8°. Mit 2 Fig.-Taf.

Schon früher hatte der Verf. öfter in der Schlöm. Zeitschr. über die im Titel genannten Curven Untersuchungen publicirt. Diese und die Resultate anderer Geometer sind hier zu einem einheitlichen Ganzen verarbeitet. Während das in demselben Verlage 1888 erschienene Werk von Schröter die allgemeine Curve dritter Ordnung synthetisch behandelt und nur nebenbei auf das nullte Geschlecht eingeht, liegt hier ein Werk vor, das grundsätzlich von vorn herein die Curven nullten Geschlechtes bis zum vierten Grade behandelt. Eigenartig ist, dass der

Verf. zuerst die unicursale Curve vierter Ordnnng behandelt, weil er dann die der dritten Ordnung durch Specialisirung gewinnen kann. Bezüglich der Theorie der Wendepunkte nimmt der Verf. nicht, wie es bei analytischen Untersuchungen üblich ist, die Hesse'sche und die Cayley'sche Curve als Grundlage, sondern die Elementensysteme und die Directionscurven, wie der Verf. dies schon in seiner im **36.** Bande der Schlöm. Zeitschr. erschienenen Abhandlung gezeigt hat. Besonders ausführlich hat der Verf. die circularen Curven und die Symmetrie der Curven vom Standpunkte ihrer projectiven Entstehung aus behandelt, wodurch die Cykloiden, Lemniskaten, Kardioiden und Cissoiden in verallgemeinerter Gestalt erscheinen.

Zu den soeben erwähnten Elementensystemen und Directionscurven gelangt der Verf. auf folgende Weise. Wenn auf einem Kegelschnitte einem Punkte n Punkte und einem dieser Punkte wiederum n Punkte des Kegelschnitts entsprechen, so ist dadurch ein symmetrisches Elementensystem festgelegt. Wenn man dann jeden Punkt des Kegelschnitts mit den n ihm entsprechenden Punkten verbindet, so umhüllen die Verbindungslinien eine Curve n^{ter} Klasse, die Binder Directionscurve des Systems nennt. Ausserdem dienen dem Verf. besonders die Eigenschaften der quadratischen Transformation der Punkte einer Ebene als Forschungsmittel.

Den Aufbau der Eigenschaften erkennt man aus den folgenden Abschnitt-Ueberschriften. Der erste Teil enthält: 1) Die Fundamental-Eigenschaften allgemeiner Plancurven, 2) Curvenbüschel und Curvenscharen zweiter Ordnung und Klasse, 3) Mehrdeutige Elementensysteme, symmetrische Elementensysteme, Erzeugnisse mehrdeutiger Elementargebilde, 4) Quadratische Transformation, Inversion.

Der zweite Teil, der die Unicursal-Plancurven vierter Ordnung behandelt, enthält: 1) Erzeugnisse doppeldeutiger Strahlenbüschel, 2) Involutionen auf einer Plancurve vierter Ordnung, 3) Symmetrische Elementensysteme auf C_6^4, 4) Die Erzeugnisse der absoluten zwei-vierdeutigen Elementensysteme auf dem Grundkegelschnitte, 5) Doppelpunkte als Inflexionsknoten, 6) Polar-reciproke Beziehung, 7) Die viermal berührenden Kegelschnitte einer C_6^4, 8) Circulare Curven vierter Ordnung, 9) Contactcurven vierter Ordnung, 10) Erzeugung durch Inversion, 11) Curven C_6^4 mit imaginären Doppelpunkten, 12) Bicirculare Curven vierter Ordnung, 13) Curven dritter Klasse, 14) Formation und Verlauf einer unicursalen Curve vierter Ordnung.

Der dritte Teil, der die Unicursal-Plancurven dritter Ordnung behandelt, enthält: 1) Die Curven vierter Klasse, 2) Die absoluten ein-zweideutigen Elementen-Systeme, 3) Die Curven dritter Klasse, 4) Die dreimal berührenden Kegelschnitte einer C_4^3, 5) Die Inversion, 6) Circulare Curven dritter Ordnung, 7) Gestaltliche Verhältnisse der unicursalen Curven dritter Ordnung. Scht.

C. Crone. Om Keglesnit, hvis Tangenters Skaeringspunkter med en Kurve af 4[de] Orden kunne bestemmes ved Passer og Lineal. Nyt Tidss. for Math. 7B, 81-94.

Ueber Kegelschnitte K_2, deren Schnittpunkte mit einer Curve vierter Ordnung K_4 mittels Zirkels und Lineals construirt werden können, d. h. deren Schnittpunkte mittels Lösung quadratischer Gleichungen gefunden werden können. Der Verf. zeigt zuerst, wie man die Doppelpunkte der Involutionen bestimmt, die durch die Schnittpunkte einer K_4 der genannten Art mit den Tangenten des Kegelschnittes bestimmt sind. Jede Curve, die alle Tangenten der Curve K_2 in Punktepaaren der so bestimmten Involutionen schneidet, wird zu dem Involutionssystem des K_2 gehörig genannt. Es wird jetzt gezeigt, dass, wenn $U = 0$, $V = 0$, $W = 0, \ldots$ Curven derselben Ordnung sind, die zu einem Involutionssystem gehören, dasselbe von der Curve $aU + bV + cW + \cdots = 0$ gilt, wenn a, b, c beliebige Constanten sind. Danach wird untersucht, wie man Curven finden kann, die einem gegebenen Involutionssystem angehören, insbesondere welche zerfallenden Curven vierter Ordnung dazu gehören. Endlich wird gezeigt, dass alle Curven vierter Ordnung, die Gegenstand der Untersuchung sind, mittels solcher zerfallenden Curven bestimmt werden können. Zuletzt werden die verschiedenen Arten der vorkommenden Curven K_4 der genannten Art subsumirt. V.

E. Ciani. La quartica di Caporali. Napoli Rend. (3) **2**, 126-144.

A. Capelli. Rapporto. Ibid. 125-126.

Caporali hat zuerst in einer vorläufigen Mitteilung in den Napoli Rend. (1882) einige Haupteigenschaften derjenigen speciellen ebenen C^4 veröffentlicht, welche analytisch durch das Verschwinden der von Clebsch mit N bezeichneten Zwischenform $a_x^2 \alpha_x^2 (a\alpha u)$ der kubischen ternären Form a_x^3, einer Combinante des zugehörigen syzygetischen Büschels φ, bei festgewähltem u, dargestellt ist; später ist er darauf zurückgekommen in den drei letzten der nach seinem Tode erschienenen gesammelten Aufsätze (Memorie di Geometria, Napoli, Pellerano, 1888, No. 20, 21, 22; vgl. F. d. M. **20**, 16f., 1888), ebenso in zwei Briefen an Segre, die dieser zur Erläuterung der Caporali'schen Ideen in den Annali di Mat. (2) **20**, 237-242 (vgl. F. d. M. **24**, 694f., 1892) veröffentlicht hat. In dem ersten Abschnitt der vorliegenden Arbeit giebt Ciani eine zusammenhängende, auf analytischem Wege abgeleitete einfache Darstellung der Caporali'schen Sätze.

Die wichtigste Eigenschaft, die Caporali auf geometrischem Wege für seine Curve hergeleitet hat, ist die, dass sie eine doppelte Erzeugung durch zwei verschiedene syzygetische Büschel φ und φ' von Curven dritter Ordnung gestattet, entsprechend dem Umstande, dass die 24 Wendepunkte der Curve in zwei Gruppen von je 12 Punkten zerfallen, welche die 12 Ecken der Wendepunktsdreiseite der beiden syzygetischen Büschel sind. Geht man von dem einen Büschel φ und der Geraden r aus, so schneiden sich die drei Tangenten, in den Ecken ein- und desselben

Wendepunktdreiseits an f gelegt, wiederum in einem Punkte von f; die vier so entstehenden Punkte, die gleichzeitig die Pole von r in Bezug auf die Wendedreiseite von φ sind, liegen auf einer Geraden, welche die zur zweiten Erzeugung gehörige Gerade r' ist. Ciani gelangt zunächst zu einer independenten Definition der Caporali'schen Curve, die in den Bedingungen enthalten ist, dass die Invariante sechsten Grades nebst ihren ersten Unterdeterminanten, sowie die kubische Invariante verschwindet, oder, geometrisch ausgedrückt, dass sie eine Schar von apolaren Kegelschnitten besitzt und zu der Enveloppe der sie in vier äquianharmonischen Punkten schneidenden Geraden conjugirt ist: von dieser Definition führen zu den Elementen der ursprünglichen die Bemerkungen: die Clebsch'sche Covariante φ von f zerfällt in vier Gerade, die gemeinschaftlichen Tangenten der apolaren Kegelschnittschar; die Steiner'sche Curve von f besitzt ausser in den Ecken des von diesen gebildeten Vierseits noch einen dreifachen Punkt; dasjenige durch ihn gehende Geradenpaar, welches zu der apolaren Schar conjugirt ist, stellt dann die beiden Geraden r und r' dar; die Basispunkte der erzeugenden Büschel φ und φ' erhält man, wenn man zu den zwei Gruppen von je neun Punkten, in denen r bezw. r' die Steiner'sche Curve treffen, die entsprechenden Punkte der Hesse'schen Curve f aufsucht. Hieraus ergiebt sich gleichzeitig, dass eine dritte derartige Erzeugung der Caporali'schen Curven nicht möglich ist. Die Betrachtung der Hesse'schen Form von f führt zur Aufstellung der Gleichung des zweiten Büschels φ', und im Anschluss hieran werden noch weitere interessante Eigenschaften der Curve hergeleitet, namentlich der directe Zusammenhang zwischen den beiden Büscheln φ und φ' klargelegt. Der Abschnitt schliesst mit der Ableitung einiger Eigenschaften der erwähnten äquianharmonischen Enveloppe.

Im zweiten Abschnitt wird das Netz aller zu einem syzygetischen Büschel φ gehörigen Caporali'schen Curven betrachtet, das man erhält, wenn man r beliebig variiren lässt. Caporali hatte gezeigt, dass alle Curven vierter Ordnung, welche durch die zwölf Doppelpunkte von φ gehen, ein syzygetisches Netz bilden, d. h. diese Punkte zu Wendepunkten haben; Ciani kommt zu dem wichtigen Ergebnis, dass auch umgekehrt das Netz von Caporali'schen Curven das einzige syzygetische Netz ist.

Schliesslich wird der singuläre Fall untersucht, in welchem die beiden Geraden r und r' zusammenfallen, und der dann und nur dann eintritt, wenn die Curve vierter Ordnung vier Undulationspunkte besitzt, die in einer Geraden liegen und äquianharmonisch sind, und die vier Undulationstangenten sich in einem Punkte treffen. T.

A. Mannheim. Note à propos de la question 486. J. de Math. spéc. (4) 5, 141-143.

Die von E. Duporcq gestellte Aufgabe lautete: Durch jeden Punkt einer Curve C zieht man eine Gerade, die mit einer vorgegebenen Rich-

tung denselben Winkel bildet wie die Tangente der Curve in diesem Punkte. Den Punkt zu construiren, in welchem die Gerade ihre Hüllcurve berührt. Mannheim giebt die Lösung mit Hülfe der in seinen „Principes et développements de géométrie cinématique" entwickelten Sätze in wenigen Zeilen und zeigt den Zusammenhang der Betrachtung mit der Aufgabe, den Krümmungsmittelpunkt der Evolute einer Curve zu finden; hierdurch gewinnt er unter anderem die Maclaurin'sche Construction des Krümmungsmittelpunktes bei der Evolute eines Kegelschnitts. Lp.

C. Küpper. Projective Erzeugung der Curven m^{ter} Ordnung C^m. Math. Ann, **48**, 401-416.

Wird $m = 2n + \nu$ gesetzt, so kann eine Curve $C^{2n+\nu}$ durch zwei projective Büschel (C^n), $(C^{n+\nu})$ von Curven n^{ter} und $(n+\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung erzeugt werden, sobald dargethan ist, dass eine $C^{2n+\nu}$, die durch $3n-2$ beliebige Punkte geht, auch noch $n^2-(3n-2)$ Punkte enthält, die mit ihnen die Basis B eines Büschels (C^n) ausmachen. Die bekannten ungenügenden Beweise dieses Satzes werden durch einwurfsfreie Betrachtungen ersetzt, insbesondere die Bedingungen abgeleitet, unter denen für $\nu > 0$ und $\nu = 0$ eine $C^{2n+\nu}$ mit δ Doppelpunkten die vorgeschriebene projective Erzeugung zulässt. Js.

Michele de Franchis. Sulla curva luogo dei contatti d'ordine k delle curve d'un fascio colle curve d'un sistema lineare ∞^k (Memorie I^a^). Palermo Rend. **10**, 118-152.

Legt man an alle Curven zweier Büschel (C) und (Γ) von Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung von einem Punkte P aus die Tangenten, so liegen ihre Berührungspunkte auf Curven der Ordnungen $2m-1$ und $2n-1$, welche zwei Büschel beschreiben, wenn P über eine beliebige Gerade l geführt wird. Dieselben erzeugen ausser dieser Geraden l eine Curve $\Omega^1_{(C)(\Gamma)}$ von der Ordnung $2(m+n)-3$, in deren Punkten Curven des Büschels (Γ) von denen des Büschels (C) berührt werden. Der Verf. untersucht zunächst sehr ausführlich, welchen Einfluss mehrfache Punkte in der einen oder anderen Basis auf den Ort ausüben. Sodann hält er eine erzeugende Curve Γ_1 des Büschels (Γ) fest und verschiebt die zweite, Γ'_2, in einem Büschel (Γ_2, Γ_3); die vorher betrachtete Curve, welche jetzt mit $\Omega^1_{(C)(\Gamma_1\Gamma'_2)}$ bezeichnet wird, beschreibt nun einen Büschel, und bewegt sich in ihm projectivisch zu Γ'_2. Schaltet man statt des Büschels (C) einen anderen (K) ein, so entsteht eine zweite gleichartige Curve $\Omega^1_{(K)(\Gamma_1\Gamma'_2)}$. Das Erzeugnis der so entstehenden Curvenbüschel zerfällt in die Curve Γ_1, in die Jacobi'sche Curve des Netzes $(\Gamma)^2 = (\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3)$ und endlich in den Ort der Punkte, in denen sich Curven von (C) und (K) berühren. Andererseits zerfällt der Ort der Punkte, in denen eine Curve von (C) von einer $\Omega^1_{(C)(\Gamma_1\Gamma'_2)}$ berührt wird, in die Curve Γ_1 und eine Restcurve $\Omega^2_{(C)(\Gamma)}$ von der Ordnung $(6m+3n-9)$. Sie enthält die Punkte,

in denen eine Curve des Büschels (C) von einer Curve des Netzes $(\Gamma)^2$ berührt wird. Die neue Curve beschreibt, wenn man Γ_2 in einem Büschel bewegt, einen Büschel, u. s. w. Das Schlussresultat des Verf. ist: Die Punkte, in welchen die Curven n^{ter} Ordnung eines Büschels (C) Contacte k^{ter} Ordnung mit Curven m^{ter} Ordnung eingehen, die aus einem linearen System $(\Gamma)^k$ k^{ter} Stufe entstammen, ist eine Curve von der Ordnung $\frac{1}{2}(k+1)[(2n-3)k+2m]$, wenn der Büschel (C) und das System $(\Gamma)^k$ keine Curve gemein haben. Auch im allgemeinen Falle giebt sich der Verf. von dem Einflusse mehrfacher Punkte in der Basis von (C) Rechenschaft. E. K.

C. Besondere räumliche Gebilde.

O. Hermes. Verzeichnis der einfachsten Vielflache. Pr. (No. 58) Kölln. Gymn. Berlin. 24 S. 4⁰. Mit 1 Fig.-Taf.

Schon im Osterprogramm 1894 hatte der Verf. über die Anzahl und Formverschiedenheit der Vielflache einzelne Untersuchungen angestellt. Hier liegt nun eine erschöpfende, aber methodisch gekürzte Beschreibung aller Polyeder vor, deren Flächenzahl $f \overline{\gtrless} 10$ ist, und deren Ecken je drei Kanten aussenden. Bei $f = 10$ ergeben sich schon viele hunderte von möglichen Polyedern. Da von jeder Ecke nur drei Kanten ausgehen sollen, so ergiebt sich aus der Flächenzahl f eindeutig die Zahl e der Ecken und die Zahl k der Kanten, nämlich $e = 2f - 4$, $k = 3f - 6$. Beispielsweise sei $f = 7$, also $e = 10$, $k = 15$. Dann ergeben sich fünf Formen, nämlich: erstens zwei Sechsecke, drei Vierecke, zwei Dreiecke, zweitens ein Sechseck, zwei Fünfecke, zwei Vierecke und zwei Dreiecke, drittens ein Sechseck, drei Fünfecke, drei Dreiecke, viertens zwei Fünfecke und fünf Vierecke, fünftens drei Fünfecke, drei Vierecke und ein Dreieck. Zahlreiche schematische Figuren unterstützen die Anschauung. Scht.

O. Rupp. Zur synthetischen Theorie der Kreis- und Kugelsysteme. Wien. Ber. **104**, 623-651.

Als dicentrisch bezeichnet der Verf. zwei Reihen concentrischer Kreise, wenn entsprechende Kreise sich auf einem „Radicalkreise“ treffen. Die Potenzen entsprechender (conjugirter) Kreise nach einem Punkte dieses Kreises stehen in einem constanten Verhältnis, welches gleich dem Verhältnis ist, in welchem der Mittelpunkt des Radicalkreises die Centrale der gegebenen Kreise teilt. Stehen zwei Kreisreihen mit einem dritten in dicentrischer Beziehung, so sind sie auch mit einander in dicentrischer Beziehung. Alle drei Reihen bilden ein tricentrisches System. Auf gleiche Weise kann man zu tetracentrischen Systemen aufsteigen, von denen einige metrische Eigenschaften angegeben werden. Die Tangenten eines bestimmten Kegelschnittes werden von den Paaren conjugirter Kreise eines dicentrischen Systems in Sehnen getroffen, deren Verhältnis unver-

änderlich ist. Der Kegelschnitt wird deshalb auch von den gemeinsamen Tangenten der Paare conjugirter Kreise umhüllt. Die drei einem tricentrischen Kreissysteme auf diese Weise zugeordneten Kegelschnitte gehören einer Schar an u. s. w. E. K.

K. Th. Vahlen. Ueber Steiner'sche Kugelketten. Schlömilch Z. **41**, 153-160.

Besteht zwischen den Radien R_1, R_2 und der Centrale A zweier Kreise die Relation $(R_2 - R_1)^2 - 4R_1 R_2 \operatorname{tg}^2 \frac{u\pi}{n} = A^2$, so giebt es nach einem bekannten von Steiner aufgestellten und mehrfach bewiesenen Satz unendlich viele Ketten von n die beiden gegebenen auf gleiche Art berührenden Kreisen, von denen jeder den vorangehenden, der letzte den ersten berührt. Diese Reihe weist u Umläufe auf. Fasst man gegenüberliegende Kreise auf, welche die beiden gegebenen berühren, deren Paare von Berührungspunkten 0,1 und 2,3 auf einem Orthogonalkreise der gegebenen liegen, so schneiden die denselben in 0,2 und 1,3 orthogonal schneidenden Kreise sich unter dem Winkel $2u\pi/n$. Die gegenüber liegenden Kreise lassen deshalb ebenfalls eine geschlossene Reihe von N Kreisen und U Umläufen zu, und zwar ist im Einklang mit Steiner $u/n + U/N = \frac{1}{2}$. Die beiden einer Dupin'schen Cyklide eingeschriebenen Kugelreihen lassen — es ist dies nur eine andere Ausdrucksweise des Satzes — ebenfalls nur gleichzeitig geschlossene Kugelreihen zu, welche der obigen Formel unterliegen. Zur Herleitung der Formeln benutzt der Verf. den Umstand, dass zwei sich nicht schneidende Kreise stets durch Inversion in zwei concentrische Kreise übergeführt werden können; eine Ueberlegung, die schon August auf verwandte Fragen angewandt hatte. Doch zeichnet sich die Entwickelung des Verfassers durch besondere Einfachheit aus.

Eine Folge sich berührender Kugeln, die auf gleichartige Weise zwei erste Kugeln und eine dritte beide berührende Kugeln berühren, schliesst sich mit n Kugeln und u Umläufen, wenn

$$4 \sin^2 \frac{u\pi}{n} = \frac{(R_1 + R_2)^2 - A^2}{4R_1 R_2}$$

ist, also unabhängig von der Lage der dritten Kugel. Umschreibt man also der ersten Kugel die Kugelreihe, jeder Kugel derselben wieder eine Kugelreihe, so hat bereits Steiner die Frage aufgestellt, ob man, auf diese Weise fortfahrend, zu geschlossenen Kugelsystemen gelangen kann. Transformirt man die beiden gegebenen in zwei concentrische Kugeln, so werden die Mittelpunkte der eingeschriebenen Kugeln Ecken eines regelmässigen, gewöhnlichen oder Sternpolyeders. Der Verf. giebt auf diese Weise Lösungen der verschiedenen möglichen Fälle. E. K.

H. Liebmann. Ueber die Construction der Fläche zweiten Grades aus neun gegebenen Punkten. Schlömilch Z. **41**, 120-123.

Die Construction der Fläche wird auf die Aufgabe zurückgeführt: Auf einer durch drei der gegebenen Punkte gehenden Ebene denjenigen Kegelschnitt zu construiren, der durch diese drei Punkte geht und von der gesuchten Fläche ausgeschnitten wird. Die Construction lässt sich im allgemeinen linear ausführen. Bm.

J. Kleiber. **Zur Construction einer Fläche zweiten Grades aus neun Punkten.** Schlömilch Z. **41**, 228-230.

Verf. zeigt, dass das von Liebmann in seiner neuen Construction gegebene Schema noch der Variation fähig ist und ausreicht, um den Kegelschnitt, auf dessen Auffindung die Aufgabe zurückgeführt wird, in jeder beliebigen Ebene des Raumes zu finden, und zwar ohne jede Hülfsconstruction ausserhalb dieser Ebene. Bm.

W. Rulf. **Ueber die Bestimmung jener gleichseitigen Hyperbeln eines Kegels zweiten Grades, welche eine Hauptebene des letzteren zur Symmetrie-Ebene haben.** Monatsh. f. Math. **7**, 93-96.

Die Abhandlung ergänzt die Lehrbücher der darstellenden Geometrie, welche zwar die Kreisschnitte, nicht aber die auf gleicher Stufe stehenden gleichseitigen Hyperbeln eines Kegels zweiten Grades betrachten, falls dieselben eine Hauptebene des Kegels zur Symmetrie-Ebene haben. Die Construction der Schnitte ist rein-geometrisch. Bei der Ableitung wird jedoch auch die analytisch-geometrische Darstellung benutzt. Scht.

K. Schober. **Ueber die Construction der gleichseitig hyperbolischen Schnitte der Flächen zweiten Grades.** Monatsh. f. Math. **7**, 111-128.

Synthetische und constructive Behandlung der Aufgabe, diejenigen Schnitte der Fläche zweiten Grades aufzufinden, welche gleichseitige Hyperbeln liefern. Es werden bezüglich dieser von anderen schon analytisch behandelten Aufgabe, die beiden dreiaxigen Hyperboloide, die entsprechenden Rotationsflächen, das hyperbolische Paraboloid, der hyperbolische Cylinder und der Kegel im einzelnen untersucht. Insbesondere ergiebt sich, dass das zweischalige Hyperboloid nur dann nach gleichseitigen Hyperbeln geschnitten werden kann, wenn die reelle Axe nicht die grösste der drei Axen ist, und dass alle Ebenen, welche, durch einen Punkt gehend, nach gleichseitigen Hyperbeln schneiden, einen elliptischen Kegel einhüllen, dessen innere Axe mit der kleinsten des Hyperboloides parallel ist. Für das einschalige dreiaxige Hyperboloid ergiebt sich u. a., dass der Ort derjenigen Punkte, in denen die beiden Erzeugenden zu einander normal sind, eine Curve vierter Ordnung bilden. Scht.

Ch. Michel. **Essai d'une théorie géométrique des quadriques homofocales.** J. de Math. spéc. (4) **5**, 217-222.

Kurze synthetische Herleitung der ersten Sätze über confocale Oberflächen zweiter Ordnung, definirt als die Oberflächen einer tangentialen Schar, welche den Kreis im Unendlichen enthält. Lp.

G. Kilbinger. Der Axencomplex der Rotationsflächen zweiter Ordnung. Confocale Rotationsflächen zweiter Ordnung. Pr. (No. 537) Oberrealsch. Mülhausen i. Els. 13 S. 4°.

Der Axencomplex, d. i. der quadratische Strahlencomplex, der von den Geraden gebildet wird, welche ihre reciproken Polaren bezüglich eines Polarsystems rechtwinklig kreuzen oder schneiden, ist von Reye (Geometrie der Lage, **2**, 3. Aufl., Vortr. 15) behandelt worden. Im Anschluss hieran wird der specielle Fall untersucht, in dem der Axencomplex in zwei specielle lineare Complexe zerfällt, nämlich wenn die Ordnungsfläche des Polarsystems eine Rotationsfläche ist, ohne Kugel oder Kegel zu sein, und daran eine nähere Betrachtung der confocalen Rotationsflächen zweiter Ordnung geknüpft. T.

A. Mannheim. Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des centres de courbure principaux. Journ. de Math. (5) **2**, 51-55.

Durchdringt die Normale n im Punkte M einer Fläche zweiter Ordnung mit dem Mittelpunkte O ihre Symmetrieebenen σ_1, σ_2, σ_3 in den Punkten A_1, A_2, A_3, so bestimmen die in ihnen auf n errichteten senkrechten Ebenen auf dem Durchmesser OM drei Punkte B_1, B_2, B_3, von denen drei auf σ_1, σ_2, σ_3 senkrechte Geraden s_1, s_2, s_3 ausgehen. Die beiden n, s_1, s_2, s_3 schneidenden Strahlen sind parallel zu den Axen der Indicatrix des Punktes M und stehen auf n in den zu M gehörigen Hauptkrümmungsmittelpunkten senkrecht. Js.

P. H. Schoute. Solutions des questions 430, 431, 436. J. de Math. spéc. (4) **5**, 237-239.

Die von A. Mannheim gestellten Aufgaben lauten: 430. Man schneidet ein Ellipsoid vom Mittelpunkte O durch concentrische Kugeln; zu beweisen: 1) Die Kegel mit dem Scheitel O und mit den sphärischen, so erhaltenen Schnittlinien als Leitlinien haben dieselben Kreisschnitte wie das Ellipsoid; 2) die Schnittkreise dieser Kegel durch eine Ebene besitzen dieselbe Potenzlinie; 3) diese Potenzlinie liegt in einer der Diametralebenen des Ellipsoids, welche diese Oberfläche in einem Kreise schneidet. 431. Gegeben sei ein Ellipsoid (E). Wie viele mit (E) concentrische Ellipsoide giebt es, die zu einem anderen gegebenen Ellipsoide ähnlich und ähnlich liegend sind und (E) berühren? Welches ist die relative Lage der Berührungsdurchmesser dieser Ellipsoide und des Ellipsoids (E)? 436. Gegeben seien zwei concentrische Ellipsoide; gesucht die Eingehüllte der Durchmesserebenen, welche diese Oberflächen in Ellipsen mit zusammenfallenden Axen schneiden. Lp.

J. Cardinaal. **Sur quelques cas de cônes circonscrits à une quadrique.** Archives Teyler **5**, 45-97.

Geometrischer Ort für die Spitze eines Kegels, welcher einer vorgegebenen quadratischen Fläche derart umbeschrieben ist, dass seine Schnittcurve mit einer ebenfalls vorgegebenen Ebene eine Gerade oder einen Kegelschnitt berührt, oder eine feste Gerade in einem Paare einer gegebenen Involution schneidet. Specialfälle. Mo.

F. Deruyts. **Sur certains groupes d'éléments communs à deux involutions.** Belg. Bull. (3) **31**, 664-674.

C. Le Paige et J. Neuberg. **Rapport.** Ebenda, 636-638.

Folgendes ist eine der Anwendungen der vom Verf. gefundenen Sätze: Durch sieben gegebene Punkte kann man 16 Flächen zweiter Ordnung legen, die eine kubische Raumcurve berühren, so dass die Ebenen, welche durch die Berührungstangente und einen bestimmten Schnittpunkt der Oberfläche und der Curve gehen, einen festen Punkt enthalten. Diese Ebenen bilden dann eine abwickelbare Fläche sechzehnter Klasse. Mu. (Lp.)

G. Kohn. **Ueber die kubischen Raumcurven, welche die Tangentenfläche einer vorgelegten kubischen Raumcurve in vier, fünf oder sechs Punkten berühren.** Wien. Ber. **105**, 1035-1039.

Projective Erzeugung von Raumcurven dritter Ordnung, welche die Tangentenfläche einer Raumcurve dritter Ordnung Γ in sechs, fünf oder vier Punkten berühren, und Angabe einiger ihrer Eigenschaften. Insbesondere wird eine Raumcurve dritter Ordnung C, welche die Tangentenfläche von Γ in sechs Punkten berührt, erzeugt, wenn der Büschel der Schmiegungsebenen von Γ dreimal projectiv auf sich selbst bezogen wird. Γ und C sind reciproke Polaren bezüglich einer Fläche zweiter Ordnung F. Js.

J. Sobotka. **Beitrag zur Construction von Krümmungskugeln an Raumcurven.** Wien. Ber. **104**, 144-168.

Der Verf. erläutert eine zunächst für allgemeine Curven gegebene Methode zur Auffindung des Mittelpunktes der Schmiegungskugel an der Raumcurve dritter Ordnung und der Raumcurve vierter Ordnung erster Art. Die Entwickelungen sind nicht auf einen derartigen Grad der Einfachheit gebracht, dass sie hier dargestellt werden könnten.

E. K.

A. Brambilla. **Di taluni sistemi di quartiche gobbe razionali annesse ad una superficie cubica.** Napoli Rend. (3) **2**, 171-176.

Werden einer Geraden r einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung F^3 diejenigen Kegelschnitte σ^2 von F^3 zugeordnet, deren Ebenen sich in r schneiden, so sind die Pole von r in Bezug auf die σ^2 bekanntlich

Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung. Dieser Satz führt, wenn r als Schnittgerade der Ebenen des Büschels r mit einer von ihnen angesehen wird, dazu, die Pole der Schnittgeraden aller Ebenen des Büschels r mit einer beliebigen Ebene ξ in Bezug auf die σ^2 zu bestimmen. Sie liegen auf einer Raumcurve vierter Ordnung zweiter Art Θ_ξ, deren Doppelsehnen eine Regelschar der quadratischen Polaren des Schnittpunktes von R und ξ bezüglich der F^3 bilden. Zwischen den Ebenen des Raumes und diesen Θ_ξ besteht eine eindeutige Beziehung. Js.

E. Duporcq. Quelques propriétés des biquadriques gauches. Nouv. Ann. (3) **15**, 266-270.

Beweise längst bekannter oder aus ihnen sich leicht ergebender Sätze. Js.

C. F. Geiser. Das räumliche Sechseck und die Kummer'sche Fläche. Zürich. Naturf. Ges. **41**, 2. Teil, 24-33.

Die zuerst von Kummer untersuchte (Berl. Monatsber. 1864) und dann oft behandelte Fläche vierten Grades mit 16 singulären Punkten und 16 singulären Tangentialebenen ist von Cayley (J. für Math. **83**) und Borchardt (J. für Math. **83**) in Zusammenhang mit der Lehre von Thetafunctionen gebracht worden. In diesem Zusammenhange fand H. Weber (J. für Math. **84**), dass aus gewissen sechs Knotenpunkten alle übrigen linear construirt werden können. Diese Thatsache haben dann auch Reye (J. für Math. **86**) und Schröter (J. für Math. **100**) rein geometrisch erkannt. Schon unmittelbar nach Weber's Entdeckung hatte Geiser an Weber eine geometrische Ausarbeitung über die lineare Construirbarkeit der fehlenden zehn Knotenpunkte aus sechs gegebenen geschickt. Erst jetzt liegt diese Ausarbeitung gedruckt vor. Obwohl durch die Arbeiten Reye's und Schröter's ein Teil der Untersuchungen Geiser's vorweg genommen ist, so bietet die Arbeit Geiser's doch noch mancherlei Interesse dadurch, dass sie in möglichst einfacher Weise zu der anschaulichen Gruppirung führt, welche Camille Jordan (J. für Math. **70**) für die singulären Punkte und Ebenen der Fläche gegeben hat. Geiser geht einfach von sechs beliebig im Raume liegenden Punkten aus, gelangt dann zu Ecken, von denen drei, und nur drei, der 20 Verbindungsebenen ausgehen, und sondert dann aus diesen Ecken gewisse zehn aus, welche, im Verein mit den sechs gegebenen Punkten, 16 Punkte constituiren, so dass 16-mal sechs solcher Punkte in einer Ebene und auf einem Kegelschnitt liegen. Scht.

A. Mannheim. Sur les surfaces apsidales. C. R. **122**, 1396-1398.

Ist eine Fläche A Apsidalfläche einer Fläche B, so ist keineswegs B die vollständige Apsidalfläche von A. Es giebt nämlich auf A Punkte P, denen die Punkte je eines Kreises π entsprechen, und seinen Punkten entspricht umgekehrt nicht allein der Punkt P. Js.

R. Sturm. Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in systematischer Behandlung. III. Teil. Leipzig: B. G. Teubner. XXIV + 518 S. gr. 8°.

Von dem grossen Werke über die liniengeometrischen Gebilde ersten und zweiten Grades aus der Feder des bekannten Synthetikers und Nachfolgers Schröter's liegt hier der dritte und letzte Teil vor. Ueber den ersten Teil dieses Werkes hat der Ref. in F. d. M. **24**, 609, 1892 ein Referat geliefert, auf dessen Einleitung hier verwiesen werden muss. Ueber den zweiten Teil ist in F. d. M. **25**, 1023, 1893/94 von Waelsch in Brünn referirt.

Hier im dritten Teile wird zunächst der allgemeine Complex zweiten Grades der ausschliesslich synthetischen Behandlungsweise unterworfen. Dann folgt die ebenso durchgeführte Behandlung der Complexe mit Doppelstrahlen.

Ein grosser Teil der Resultate, die der dritte Teil bietet, ist von R. Sturm zuerst gefunden, und auch die synthetische Behandlungsweise der von anderen Forschern analytisch gefundenen Resultate ist ein Verdienst des Verf. Trotzdem sind, wie der Verf. dankbar anerkennt, namentlich zwei Geometer durch ihre bedeutenden Arbeiten von Einfluss auf die Ausgestaltung dieses dritten Teils der Liniengeometrie gewesen. Es sind dies Segre durch seine grossen Abhandlungen in den Memorie der Turiner Akademie (Ser. II, Bd. **36**) und Reye durch seine gedankenreichen Abhandlungen in den Bänden **95, 97, 98** des Journ. für Math., von denen namentlich die dritte über die Gattungen des allgemeinen Complexes zweiten Grades anregend auf Sturm gewirkt hat. Doch basirt Reye's Einteilung in Gattungen auf der analytisch-geometrischen Darstellung des Complexes zweiten Grades, während R. Sturm bei dieser Einteilung synthetisch zu Werke geht. Insbesondere hat Sturm von dem analytisch leicht erkennbaren Satze, dass durch jeden Complex zweiten Grades ein Büschel quadratischer Systeme vierter Stufe von Gewinden (Complexen ersten Grades) geht, zwei synthetische Beweise geliefert. Die oben erwähnten Abhandlungen von Segre gehen von dem zuerst von F. Klein ausgesprochenen Gedanken aus, dass die Liniengeometrie im wesentlichen nichts anderes als die Geometrie auf einer vierdimensionalen Fläche zweiten Grades in einem fünfdimensionalen linearen Raume sei. Hierauf fussend, haben Loria und Schönflies den Verf. darauf hingewiesen, dass durch Benutzung dieses Gedankens viel vom Inhalt des ersten Teils hätte gekürzt werden können. Dem gegenüber steht der Verf., ebenso wie der Ref., auf dem Standpunkte, dass ein systematisch-synthetischer Aufbau der Liniengeometrie, wie ihn doch das Sturm'sche Werk geben will, unmöglich Schlüsse aus der unvorstellbaren Geometrie von mehr als drei Dimensionen ziehen darf. Wer das thut, verfährt nicht synthetisch, sondern analytisch. Nichtsdestoweniger hat der Verf. in diesem dritten Teile, einem Wunsche von Schönflies Rechnung tragend, die Beziehungen seiner Entwickelungen und Resultate zur mehrdimensionalen Geometrie eingehend berücksichtigt, ohne jedoch diese letztere zu Beweisen heranzuziehen.

Bei dem reichen Inhalt dieses dritten Teils des Sturm'schen Werkes ist auch nur für eine Aufzählung der Ueberschriften der Kapitel hier nicht der Raum vorhanden. Doch soll hier nicht vergessen werden, dass, ausser den Begründern der Liniengeometrie Kummer, Plücker und F. Klein, und den oben erwähnten Forschern Segre und Reye die italienischen Gelehrten Montesano und Caporali wesentliche Verdienste um den tieferen Ausbau der Liniengeometrie haben, Montesano durch seine Dissertation (Napoli, 1886) und Caporali durch seine Abhandlung in den Memorie dell' Accademia dei Lincei (Ser. III, Bd. **2**, 1878). Scht.

G. Fano. **Lezioni di geometria della retta.** Roma. Lithogr. 149 S. 8°.

Zwei Hauptwege findet heute derjenige vor, welcher die Liniengeometrie auseinandersetzen will. Der eine besteht im Studium dieser Theorie durch Erweiterung der Methoden der gewöhnlichen projectiven oder analytischen Geometrie; dieses ist der Weg, welchen Plücker betreten hat, und durch welchen R. Sturm auf seine vollständige Behandlung geführt ist, welche jeder kennt und bewundert. Der andere hat als Grundprincip den bekannten Klein'schen Satz: „Die Liniengeometrie ist eine Geometrie auf einer $M_4^{(2)}$ des R_5" (Math. Ann. **5**, 261); die Grundzüge einer solchen Behandlung sind in zwei Abhandlungen von Segre enthalten (vgl. F. d. M. **16**, 691, 1884). Eben dieses ist die Methode, welche der Verf. vorgezogen hat, und diese Wahl verdient Lob, da er im entgegengesetzten Falle wahrscheinlich ein Duplicat (in kleinerem Format) des Sturm'schen Werkes geschrieben hätte, während er so es mindestens versucht hat, einen neuen Beitrag zu schaffen, um die jüngst wieder aufgeworfene Frage über den relativen Wert der beiden Methoden zu beantworten. Unglücklicherweise scheint uns dieser Versuch wenig gelungen; denn so wichtig und zahlreich sind die Begriffe und Sätze über die mehrdimensionale Geometrie, welche der Verf. bei seinem Leser voraussetzt, dass die Vergleichung der zwei in Rede stehenden Methoden unmöglich ist. Wer, wie der Ref., eine Vorliebe für die Klein-Segre'sche Methode hat, wird gewiss seine Meinung festhalten; aber die Gegner werden unzweifelhaft in ihrer Ablehnung einer Methode verharren, welche die Liniengeometrie als die Sklavin, etwa als ein Nebenproduct, einer anderen Lehre erscheinen lässt. La.

A. Calinon. **La géométrie à deux dimensions des surfaces à courbure constante.** Nancy Bull. (2) **14**, 1-44 (1895).

D. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

A. Schoenflies. **Ueber die Abbildung von Würfeln verschiedener Dimensionen auf einander.** Gött. Nachr. 1896, 255-266.

Auf Grund des Cantor'schen Satzes, dass das n-dimensionale

Continuum dieselbe Mächtigkeit wie das eindimensionale besitzt, sind Abbildungen von Raumteilen verschiedener Dimensionen auf einander sowohl auf geometrischem wie auf arithmetischem Wege ausgeführt worden. In der vorliegenden Arbeit begründet der Verf. die Abbildung des Quadrates auf eine Strecke auf einem neuen, durch Einfachheit ausgezeichneten, arithmetischen Wege. Diese Abbildung geht hervor aus der Uebertragung einer zwischen zwei Grenzen, etwa 0 und 1, im dyadischen Zahlsysteme gegebenen Menge (M) in ein anderes, z. B. das dekadische Zahlsystem, (M_0). Die (lineare) Menge M ist dann auf M_0 ein-eindeutig abgebildet, letztere aber besitzt die Streckensumme 0. In entsprechender Weise lassen sich dann die einzelnen linearen Continua des Quadrats der Reihe nach in die Einheitsstrecke einordnen. Es wird dann gezeigt, wie diese Abbildung zu einer stetigen gemacht und mit der bereits von Hilbert gefundenen in Uebereinstimmung gebracht werden kann. Der Uebergang zu mehrdimensionalen Würfeln findet auf analogem Wege statt. Das paradoxe Element in dieser Abbildung findet schliesslich seine Erklärung in der Vorstellung, dass das Zahlencontinuum beim Uebergange aus der dyadischen zu einer anderen (z. B. dekadischen) Darstellung sich in ein überall discretes Gebilde auflöst, welches für die Einordnung beliebiger weiterer Continua Raum bietet, während für das äquivalente geometrische Continuum der Zusammenhang bestehen bleibt.

Schg.

P. H. Schoute. Sur les types de crystaux du système régulier de l'espace à quatre dimensions. Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24**, 278-285.

Wie im regulären System des dreidimensionalen Raumes der Achtundvierzigflächner durch das Symbol $(1, k, l)$ dargestellt werden kann und die übrigen Krystallformen durch besondere Werte von k und l charakterisirt sind, so kann man die allgemeinste Krystallform des vierdimensionalen Raumes durch das Symbol $(1, k, l, m)$ kennzeichnen; es ergiebt sich ein von 384 Tetraedern begrenzter Körper. Indem nun wieder für k, l, m besondere Zahlen eingesetzt werden, erhält man das reguläre System von Holoedern im vierdimensionalen Raum, die alle abgeleitet und beschrieben werden.

Lp.

P. H. Schoute. Quelques figures à $n+2$ inversions dans l'espace à n dimensions. (Première partie.) Arch. Teyler (2) **5**, 159-205.

P. H. Schoute. Het vierdimensionale prismoide. Amsterdam Verh. **5**, 20 S.

Bericht in Abschnitt IX, Kap. 3E.

F. Cannizzo. Varietà di rotazione nello spazio a cinque dimensioni. Roma: Tipografia Sallustiana. 32 S. 4°.

E. Abzählende Geometrie.

O. ZIMMERMANN. Ueber die Ordnung der Enveloppe solcher ebenen Curvenreihen, deren Individuen sich in Gruppen von je w ordnen lassen, welche den Punkten einer Geraden projectiv sind. J. für Math. **116**, 10-13.

Werden einem Punkte einer Geraden a w Curven einer Curvenreihe mit den Indices μ und ν zugeordnet, entspricht umgekehrt einer Curve nur ein Punkt der Geraden, so ist die Enveloppe der Curvenreihe von der Ordnung $2(\mu-nw)+\nu$. Der Verf. wendet seine Formel auf die Parallelcurve einer rationalen Curve C^m an, deren Ordnung sich ($n=2$, $\mu=\nu=2m$, $w=1$) gleich $6m-4$ ergiebt. E. K.

M. PIERI. Sul problema degli spazi secanti. Nota 3ª. Lomb. Ist. Rend. (2) **28**, 441-454.

Der Verf. bezeichnet den Zweck der in das Gebiet der abzählenden Geometrie gehörigen Abhandlung in folgender Weise. Einem Raume (s) ist eine beliebige Fundamentalbedingung auferlegt, ausserdem ist vorgeschrieben, dass er einen gegebenen Raum (r) in einem Raume $(r-1)$ trifft, der einer gegebenen Fundamentalform angehört. Die zusammengesetzte Bedingung, die hieraus entspringt, soll als Summe mehrerer einfacher Fundamentalbedingungen dargestellt werden. Wegen der Einzelheiten muss auf die Arbeit selbst verwiesen werden. E. K.

G. LORIA. Sugli enti geometrici generati da forme fondamentali in corrispondenza algebrica. Batt. G. **34**, 354-374.

Der Verf. verallgemeinert die Erzeugungen, welche in der synthetischen Geometrie für Curven, Flächen und Strahlengebilde mittels projectivisch und collinear bezogener Gebilde gegeben werden, dadurch, dass er die Gebilde erster bis dritter Stufe in algebraische Beziehung setzt; zwei in (m, n)-Beziehung stehende Ebenenbüschel erzeugen z. B. eine Regelfläche $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung, zwei Strahlenbündel, zwischen denen eine Cremona'sche Verwandtschaft n^{ter} Ordnung besteht, erzeugen eine Curve $(n+2)^{\text{ter}}$ Ordnung. Werden mehr als zwei Gebilde erster Stufe betrachtet, so sollen sie zu einem Hülfsgebilde in (m_1, n_1)-, (m_2, n_2)-, (m_3, n_3)-, ...-Beziehung stehen. Sind z. B. drei Ebenenbüschel in dieser Weise zu einem Hülfsgebilde in Beziehung gesetzt, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Ebenen auf einer Curve von der Ordnung $n_1 m_2 m_3 + n_2 m_3 m_1 + n_3 m_1 m_2$, welche mit den drei Axen gemein hat $m_1(m_2 n_3 + m_3 n_2)$, $m_2(n_3 m_1 + n_1 m_3)$, $m_3(n_1 m_2 + n_2 m_1)$ Punkte. Die Geraden, welche vier einander entsprechende Strahlen der Strahlenbüschel F, F_1, F_2, F_3 treffen, erfüllen eine Regelfläche von

der Ordnung $2(m_1 m_2 m_3 + n_1 m_2 m_3 + n_2 m_3 m_1 + n_3 m_1 m_2)$, wenn F_i zu F in $(m_i n_i)$-Beziehung steht. Bei zwei- und dreistufigen Gebilden werden nur birationale Beziehungen in Betracht gezogen. Ich begnüge mich, einige Beispiele anzuführen, und verweise im übrigen auf die Abhandlung selbst. Drei Ebenenbündel, die zu einem Hülfsgebilde in eindeutiger Verwandtschaft n_1^{ter}, n_2^{ter}, n_3^{ter} Ordnung stehen, erzeugen z. B. eine etwas genauer in Untersuchung genommene Oberfläche $(n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2)^{\text{ter}}$ Ordnung. Bei vier Ebenenbündeln ist der Ort der Punkte, welche vier homologen Ebenen angehören, eine Raumcurve der Ordnung $(n_2 n_3 + n_3 n_1 + n_1 n_2 + n_1 n_4 + n_2 n_4 + n_3 n_4)$. Vier Strahlenfelder, die in analoger Beziehung zu einem Hülfsgebilde stehen, erzeugen eine Congruenz, deren Strahlen je vier entsprechende Strahlen treffen, von der Klasse und Ordnung $2(n_2 n_3 + n_3 n_1 + \cdots + n_3 n_4)$. Fügt man noch eine fünfte Ebene hinzu, so werden von den Geraden einer Regelfläche $2(n_1 n_2 + \cdots + n_4 n_5)^{\text{ter}}$ Ordnung fünf entsprechende Strahlen getroffen. Treten zwei in einander liegende Räume in birationale Beziehung, so betrachtet der Verf. einmal den Complex, dessen Strahlen entsprechende Punkte verbinden, sodann das Nullsystem höherer Ordnung, durch welches jedem Punkte seine Verbindungsebene mit den Punkten zugeordnet wird, die ihm als Angehörigen des einen oder anderen Raumes entsprechen. E. K.

C. Segre. Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche. Torino Atti **31,** 485-501.

Wenn man auf einer algebraischen Curve γ eine lineare Reihe betrachtet (d. h. eine Reihe, die durch einen Flächenbüschel geschnitten wird), von der die Ordnung n sei (d. h. die Zahl der Punkte jeder Gruppe der Reihe) und ν die Zahl der Doppelpunkte, so kann man beweisen, dass die Zahl $\frac{1}{2}\nu - n + 1$ von der betrachteten linearen Reihe ganz unabhängig ist; sie ist daher ein Charakter der Curve γ, welchen man als Geschlecht p derselben definiren kann; daher erhält man $\nu = 2n + 2p - 2$. Wenn man auf einer Fläche F einen Büschel von Curven γ betrachtet (d. h. die Curven, welche durch einen Flächenbüschel auf F bestimmt werden), und mit p das Geschlecht des Büschels (d. h. das Geschlecht einer beliebigen Büschelcurve), mit σ die Zahl der Basispunkte derselben und mit δ die Zahl der Punkte, welche für Curven des Büschels doppelt sind, bezeichnet, so kann man beweisen, dass die Zahl $\delta - \sigma - 4p$ von dem betrachteten Bündel ganz unabhängig ist; sie ist daher ein neuer Charakter der Fläche F, deren Einführung der Verf. eben in diesem Aufsatze vorschlägt. Bezeichnet man denselben durch P, so hat man $P = \delta - \sigma - 4p$. Für eine punktallgemeine Fläche der Ordnung n ist $P = (n-2)(n^2 - 2n + 2)$, während man für eine Regelfläche, deren Geschlecht P ist, $P = -4p$ hat. Im allgemeinen: sind p und $p^{(1)}$ resp. das Curven- und Flächengeschlecht von F, so besteht zwischen p, $p^{(1)}$, P die Beziehung $P = 12p - p^{(1)} + 9$.

Durch Anwendung dieser Resultate auf die Ebene gelangt Segre zu bemerkenswerten Sätzen über die ebenen Curven, von denen einige als Verallgemeinerungen von bekannten Sätzen der abzählenden Geometrie angesehen werden können. Ohne bei diesen Details zu verweilen, bemerken wir lieber, dass, wenn man die Bezeichnung „Typus einer Fläche" im Clebsch'schen Sinne anwendet (vgl. den § 8 der Abhandlung „Ueber die geradlinigen Flächen vom Geschlecht $p = 0$", Math. Ann. **5**), man sagen kann: wenn zwei Flächen denselben Typus haben, so haben sie auch dasselbe Geschlecht P. Allgemeiner: wenn zwischen zwei algebraischen Flächen F und F_1 eine birationale Transformation statt hat, welche nur gewöhnliche Fundamentalpunkte besitzt (resp. i und i_1), so herrscht unter den Zahlen P, P_1, i, i_1 die folgende Beziehung: $P - P_1 = i_1 - i$.

Diese Betrachtungen können auf beliebige dreidimensionale Mannigfaltigkeiten erweitert werden; man erhält so einen Invariant-Charakter derselben, welcher, unter anderem, die Auflösung einiger anzahlgeometrischen Fragen über Flächenbüschel giebt.

Ist es nötig, ausdrücklich zu bemerken, dass der Verf. auf demselben Wege seine Betrachtung auch auf beliebig ausgedehnte Mannigfaltigkeiten jeder Ordnung erweitert? La.

L. Berzolari. Sulle curve piane che in due dati fasci hanno un semplice o un doppio contatto oppure si osculano. Torino Atti **31,** 476-484.

Dem Beispiel von Caporali (Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane, Coll. math.; vgl. F. d. M. **13,** 514, 1881) folgend, wendet der Verf. stereometrische Betrachtungen auf die Auflösung von einigen Fragen der abzählenden Geometrie über die ebenen Curven an. Er setzt als gegeben zwei Büschel Φ und Φ' voraus, deren Ordnungen m und $m' < m$ seien, und nimmt eine beliebige Curve R' der Ordnung $m - m'$. Unter dieser Voraussetzung bestimmen die Büschel Φ und $\Phi' R'$ ein lineares System von ∞^2 Curven der Ordnung m, welches, wie bekannt, als gebildet angesehen werden kann aus den Bildern der ebenen Schnitte einer algebraischen Fläche F, deren Ordnung m^2 ist. Die Curven des Büschels Φ entsprechen den Schnitten, welche man erhält, wenn man Φ durch die Ebenen schneidet, welche durch eine gewisse auf F nicht gelegene Gerade gehen; während die Curven des Büschels Φ' aus der Ebene entstehen, die durch eine Gerade R gehen, die in Φ $(m - m')$-fach ist und durch die Curve R' abgebildet ist. Dann ist der Ort Γ' der Punkte, wo Curven der zwei Büschel Φ und Φ' sich berühren, das Bild des Ortes der Berührungspunkte der Tangenten dieser Fläche mit F, welche L und R begegnen; daraus folgt, dass die Ordnung von Γ $m(2m + 2m' - 3)$ ist. Aehnlicherweise sind die Punkte, wo zwei Curven der Büschel Φ und Φ' sich osculiren die Bilder der Berührungspunkte der Haupttangenten derselben mit F, welche L und R begegnen; daher ist ihre Zahl

$3[(m+m')(m+m'-6)+2mm'+5]$. Endlich entsprechen die Curvenpaare der zwei Büschel Φ und Φ', die einen Doppelcontact haben, den Bitangenten von F, welche L und R begegnen; ihre Zahl ist daher gleich

$$mm'[2(m+m')^2+mm'-9(m+m')+1] \\ -6(m+m'-1)(m+m'-4).$$

Die zwei ersten der gefundenen Anzahlen wurden schon, ohne Beweis, von Steiner angegeben gegen das Ende seines berühmten Aufsatzes „Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven" (J. für Math. 47); die erste ist schon bewiesen worden (Schubert, Calcul der abzählenden Geometrie, § 14); die dritte ist ganz neu. La.

Neunter Abschnitt.
Analytische Geometrie.
Kapitel 1.
Lehrbücher, Coordinaten.

E. d'Ovidio. **Geometria analitica.** Torino: Bocca. XVI + 443 S. 8°.

Dieses Werk hat eine eigene Vorgeschichte. Im Jahre 1873 veröffentlichte der Verf. eine Vorlesung, deren Inhalt eine elementare Darstellung der Grundeigenschaften der Kegelschnitte bildete auf Grund der Untersuchung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades in cartesischen Coordinaten. Die Bezeichnungen mit zwei Indices und homogene Coordinaten waren verbannt, damit die Darstellung ganz elementar bliebe; um aber allgemein gültige Formeln zu erhalten, wurden im allgemeinen die Axen schiefwinklig vorausgesetzt. Sieben Jahre später widmete derselbe Verf. ein ähnliches Werkchen dem Nachweise, dass seine Darstellungsmethode sich auf den Raum erweitern liesse; doch wurden bei dem Uebergange von zwei zu drei Coordinaten die zwei Indices und die homogenen Coordinaten unvermeidlich. Im Jahre 1885 veröffentlichte endlich d'Ovidio jene Gruppe seiner Universitätsvorträge, in denen die analytische Theorie der geometrischen Grundgebilde enthalten ist. Man sieht, dass diese drei Hefte alle Elemente eines Handbuches der analytischen Geometrie über die Formen ersten und zweiten Grades enthalten. Als daher eine neue Auflage notwendig wurde, entschied sich der Verf. für eine vollkommene neue Bearbeitung des Ganzen und gewann so die Einheit, welche man heute in jedem wissenschaftlichen oder didaktischen Werke verlangt. Auf diese Weise entstand das zu besprechende Werk. Dieses ist sonach kein ganz neues; aber es ist ein Buch, welches zuerst und mehr als alle anderen uns bekannten die allgemeinsten Auflösungen aller der wichtigsten Fragen enthält, welche die projective und die metrische Geometrie der Geraden, Ebenen, Kegelschnitte und Quadriflächen betreffen. Richtige historische Nachrichten und zahlreiche und hübsche Uebungsbeispiele machen es um so schätz-

barer. Den Inhalt und die Anordnung des Stoffes kann man aus dem folgenden Kapitel-Verzeichnis ersehen.

I. Einleitung. II. Die Punktreihe. III. Der Strahlenbüschel. IV. Der Ebenenbüschel. V. Einige Hülfstheorien (Systeme linearer Gleichungen; quadratische Formen). VI. Das Punktfeld. VII. Das Strahlenfeld. VIII. Die Strahlen- und Ebenenbündel. IX. Der Punktraum. X. Der Ebenenraum. XI. Der Geradenraum. XII. Projective Eigenschaften der Kegelschnitte. XIII. Diametrale Eigenschaften der Kegelschnitte. XIV. Kanonische Gleichungen der Kegelschnitte. XV. Focaleigenschaften der Kegelschnitte. XVI. Projective Eigenschaften der Quadriflächen. XVII. Diametrale Eigenschaften der Quadriflächen. XVIII. Kanonische Gleichungen und Klassification der Quadriflächen. XIX. Focaleigenschaften der Quadriflächen.

Der Verf. hat den Ref. darauf aufmerksam gemacht, dass im § 10 des Kapitels V der Beweis des folgenden Satzes nicht stichhaltig ist: „Wenn die Discriminante einer quadratischen Form mit n Veränderlichen die Charakteristik $n-n'$ hat, so kann die Form durch lineare Transformationen in eine mit $n-n'$ Veränderlichen transformirt werden". Nach dem Verf. kann man diesen Satz folgendermassen begründen: „Sei $u=\sum\limits_{hp} a_{hp}x_h x_p$ $(h, p = 1, 2, \ldots, n;\ a_{hp}=a_{ph})$ die gegebene Form; und seien $u_r=\sum\limits_p a_{rp}x_p$ seine halben Derivirten. Wenn die Charakteristik von der Form $n-n'$ ist, so existiren mindestens zwei (verschiedene oder zusammenfallende) Dispositionen $k\ldots m$, $q\ldots s$ der Klasse $n-n'$ der Indices $1, 2, \ldots, n$ derart, dass

$$\varDelta=\begin{vmatrix} a_{kq} & \ldots & a_{ks} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_{mq} & \ldots & a_{ms}\end{vmatrix}\neq 0$$

ist, während man, für Dispositionen der Klassen $>n-n'$, immer verschwindende Determinanten hat. Die Theorie der linearen Gleichungen, auf die Formen u_r angewandt, beweist, dass man in dieser Voraussetzung

$$\begin{vmatrix} a_{kq} & \ldots & a_{ks} & u_k \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{mq} & \ldots & a_{ms} & u_s \\ a_{tq} & \ldots & a_{ts} & u_t\end{vmatrix}=0 \qquad (t=1, 2, \ldots, n)$$

hat. In Folge dessen kann man u_t durch lineare Formen in $u_k, \ldots, u_s$ ausdrücken, während diese unter einander unabhängig sind. Wenn man nun die letzte Horizontallinie mit x_t multiplicirt und die n entstehenden Producte addirt, so erhält man (wenn man sich erinnert, dass $\sum\limits_t u_t x_t = u$ ist)

$$\begin{vmatrix} a_{kq} & \ldots & a_{ks} & u_k \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{mq} & \ldots & a_{ms} & u_s \\ u_q & \ldots & u_s & u\end{vmatrix}=0,\ \text{d. h. } u=-\frac{1}{\varDelta}\begin{vmatrix} a_{kq} & \ldots & a_{ks} & u_k \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot \\ a_{mq} & \ldots & a_{ms} & u_s \\ u_q & \ldots & u_s & 0\end{vmatrix};$$

da das zweite Glied eine quadratische Form in $u_k, \ldots, u_s$ ist, so ist der Satz bewiesen.

Man kann auch bemerken, dass dieses Schlussverfahren das Beispiel 4 am Ende des Kapitels V überflüssig macht. La.

B. NIEWENGLOWSKI. Cours de géométrie analytique à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales et des candidats aux écoles du gouvernement. Tome III. Géométrie dans l'espace avec une note sur les transformations en géométrie. Paris: Gauthier-Villars et Fils. III + 572 S. gr. 8°.

Was wir bei der Anzeige der beiden ersten Bände (F. d. M. **25**, 1049, 1893/94 u. **26**, 640, 1895) an dem Werke Niewenglowski's rühmten, leichte Verständlichkeit für mässig begabte Leser, Klarheit und Eleganz der Darstellung, Reichtum an Einzelheiten, bleibt auch für die vorliegende analytische Geometrie des Raumes bestehen. Für die erste Stufe des Weges zum Eindringen in das Gebiet der analytischen Geometrie bestimmt, macht das Werk nur von den elementaren Hülfsmitteln der Algebra Gebrauch und ebenso von der Infinitesimalrechnung. Wer, wie Ref., den vielen Uebungsaufgaben der französischen Prüfungen folgt, wird leicht erkennen, welchen bedeutenden Einfluss die Anforderungen der Programme auf die Gestaltung des Werkes gehabt haben. Aus diesem Umstande erklären sich die Vorzüge des Werkes, aber auch seine Mängel. Eine und dieselbe Frage wird unter verschiedenen Gesichtspunkten immer wieder vollständig durchgearbeitet, so dass die einzelnen Kapitel wie kleine Monographien über den Gegenstand erscheinen, damit der Examinand auf alle möglichen Aufgabestellungen und Fragen in der Prüfung vorbereitet sei. Die beigegebenen Uebungsaufgaben sind mit Geschick ausgewählt und den besten Autoren entlehnt. Wenn man aber bei dem Erscheinen der Salmon'schen Lehrbücher in den fünfziger Jahren des ablaufenden Jahrhunderts das Bewusstsein hatte, dass der Verf. den Leser stets bis an die neuesten Arbeiten über den Gegenstand heranführte, die mit der damals aufblühenden formalen Algebra z. B. im engsten Zusammenhang standen, dass ferner keine Methode existirte, die nicht zu voller Darstellung gelangt wäre, so behält der Leser des französischen Lehrbuchs immer das Gefühl, dass die Grenzen durch die Prüfungsordnung im grossen und ganzen bestimmt sind, und dass die neueren Methoden nur notdürftig angedeutet werden.

Die Ueberzeugung, dass hier einige Abhülfe zu schaffen sei, hat den Verf. wohl bewogen, sich für den Schluss der geschickten Beihülfe von Borel zu versichern; die von diesem redigirte Note über die Transformationen in der Geometrie (S. 481—558) führt den Leser in diese ausserhalb des gewählten Rahmens liegende Lehre ein, welche den Forschern des Jahrhunderts die treibenden Gedanken eingegeben hat. Dem Anfänger, der diese Note studirt, wird sich der Blick weiten und die Lust kommen, in diese neue Welt weiter einzudringen, wo er mehr

findet als bloss Eigenschaften specieller Art an den Gebilden erster und zweiter Ordnung. Hier ist ihm ein Weg gewiesen, auf dem er, unbekümmert um den nächsten Zweck des Bestehens einer Prüfung, an den lebendigen Strom der fortschreitenden Wissenschaft gelangt.

Der Inhalt des Buches ist auf 31 Kapitel verteilt. Die ersten vier behandeln die Coordinaten, ihre Transformation, die Gerade und die Ebene. Nach einem Kapitel über die Kugel werden in den folgenden Kapiteln (VI—XII) sofort die allgemeinen Begriffe für die Raumcurven und krummen Oberflächen entwickelt und nach Besprechung der Erzeugung derselben die Eigenschaften der geradlinigen Flächen, der Eingehüllten, die Grundlehren über Congruenzen und Complexe vorgetragen. Ein Kapitel über die ähnlichen räumlichen Gebilde macht den Beschluss dieses allgemeinen Teiles. Nun sind alle Mittel vorhanden, um die Oberflächen zweiter Ordnung systematisch in Angriff zu nehmen. Einer vorläufigen Einteilung folgt die Theorie des Mittelpunktes und der Durchmesserebenen, die Behandlung des Hauptaxenproblems und die Reduction der Gleichung auf die Hauptaxen (Kap. XIII—XVII). Die drei folgenden Kapitel gehen auf die polaren Eigenschaften, die Theorie der reciproken Polaren und die conjugirten Durchmesser ein. Den Kegeln zweiten Grades ist das XXI. Kapitel gewidmet, den Tangentialebenen und den Berührungskegeln das XXII. Die Normalen, die geradlinigen Erzeugungen und die Kreisschnitte erhalten je ein Kapitel zugeteilt, ebenso die Discussion einer numerisch gegebenen Gleichung. Nun erst werden die Bestimmungsstücke einer allgemeinen Fläche zweiter Ordnung abgezählt (Kap. XXVII) und wird die Schnittcurve zweier Flächen erörtert (XXVIII). Die Focalcurven und die confocalen Flächen werden in Kap. XXIX erledigt, die Bestimmung der Elemente eines ebenen Schnittes in XXX. Wenige Seiten über die Quaternionen in Kap. XXXI sollen die Anwendung des Imaginären in der analytischen Geometrie des Raumes zeigen. Einige Zusätze aus einer Vorlesung von Darboux an der Sorbonne schliessen sich an: Bedingungen dafür, dass 6 Punkte der Ebene auf einem Kegelschnitt liegen, 10 Punkte des Raumes auf einer Fläche zweiter Ordnung. Ein neuer Beweis für den Pascal'schen Satz. Ueber die Definition des Winkels zweier Halbstrahlen. Homologie. Anwendung der Theorie geradliniger Erzeugungen. Untersuchung der kubischen Curve, des Ortes der Brennpunkte der einem Vierseite eingeschriebenen Kegelschnitte.

Der Borel'sche Anhang behandelt in acht Abschnitten zuerst die allgemeinen Begriffe der Transformation und zeigt sofort ihre Anwendung auf die projectiven Transformationen. Bei den Punkttransformationen wird die Inversion näher erörtert, sodann der Begriff der Gruppe, gebildet aus den sphärischen Inversionen S, den ebenen P, den Verrückungen D, den Homothetien H, nämlich: S, P, D, H, SP, SD, HD. Die analytische Definition dieser Gruppe führt von selbst auf die pentasphärischen Coordinaten. Die correlativen Transformationen werden an der Verwandlung durch reciproke Polaren bezüglich einer Fläche zweiter Ordnung und eines linearen Complexes erläutert; hierdurch

kommt man zu dem Begriffe der Gruppe, welche die Gesamtheit aller Geraden des Raumes unveränderlich belässt und aus den projectiven und correlativen Transformationen gebildet wird. Hierauf geht Borel zu den Lie'schen Berührungstransformationen über und beschäftigt sich besonders mit derjenigen Transformation, bei der Kugeln den Geraden entsprechen. Der letzte Abschnitt geht zu den Transformationen in Räumen von mehr als drei Dimensionen über. Fünfzehn Uebungsaufgaben machen den Beschluss. Lp.

G. Kohn. Die homogenen Coordinaten als Wurfcoordinaten. Wien. Ber. **104**, 1167-1170.

Der Verf. beweist folgenden Satz: Legt man im Raume von n Dimensionen durch die Ecken eines Coordinaten-n-eders, einen Einheitspunkt E und einen beliebigen Punkt Y eine Normcurve und erteilt bei einer Parameterdarstellung auf derselben den Punkten E und Y die Werte 0 und ∞, so gehen die Parameterwerte der Ecken des n-eders in die Coordinaten des Punktes Y über; diese Parameterwerte werden von Kohn als Coordinaten des Wurfes der $n+2$ Punkte bezeichnet. E. K.

E. Study. Betrachtungen über Doppelverhältnisse. Leipz. Ber. **48**, 1896, 199-220.

Bei einer collinearen Transformation einer Oberfläche zweiter Ordnung bleibt ein irgend vier Punkten A, B, C, D anhaftendes Doppelverhältnis ungeändert; von den drei von einander unabhängigen Gebilden dieser Art

$$D_1 = \frac{(AC)}{(AD)}\cdot\frac{(BD)}{(BC)},\quad D_2 = \frac{(AD)}{(AB)}\cdot\frac{(CB)}{(CD)},\quad D_3 = \frac{(AB)}{(AC)}\cdot\frac{(DC)}{(DB)}$$

kann z. B. das erste als das Doppelverhältnis im gewöhnlichen Sinne der Punkte A und B einerseits und der Tangentialebenen in C und D andererseits definirt werden, oder auch als das Doppelverhältnis der Punkte C und D gegen die Tangentialebenen in A und B. Legt man durch die vier Punkte die Erzeugenden a, b, c, d und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der einen oder anderen Geradenschar der Fläche und bildet die correspondirenden Doppelverhältnisse d_1, d_2, d_3 und $\delta_1, \delta_2, \delta_3$, so ist augenscheinlich $D_1 = d_1.\delta_1$, $D_2 = d_2.\delta_2$, $D_3 = d_3.\delta_3$. Der Verfasser erörtert nun, wie bei gegebenen D_1, D_2, D_3 die Grössen d_i, δ_i zu berechnen sind.

Im zweiten Abschnitt wendet sich der Verfasser insbesondere der Kugel zu. Das Doppelverhältnis von vier Kugelpunkten ist invariant in Bezug auf alle conformen Transformationen, denn die Transformation durch reciproke Radien ist für zwei entsprechende Kugeln mit einer collinearen Transformation in Uebereinstimmung. Als Ergebnis dieser mit genauester Berücksichtigung der Vorzeichen geführten Untersuchung erhält der Verfasser den Satz: Man suche den zweiten Schnittpunkt B' eines Kreises, der B enthält und den Kreis CDA im Punkte A be-

rührt, mit dem Kreise BCD und construire analog C', D', alsdann sind die obigen Doppelverhältnisse gewöhnliche Doppelverhältnisse im binären Gebiete des Kreises (A):

$$D_1 = \frac{\{CD\}\{C'B\}}{\{CB\}\{C'D\}}, \quad D_2 = \frac{\{DB\}\{D'C\}}{\{DC\}\{D'B\}}, \quad D_3 = \frac{\{BC\}\{B'D\}}{\{BD\}\{B'C\}}.$$

Das zuerst von Grassmann eingeführte Doppelverhältnis von vier Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, welches projectivischen Transformationen gegenüber invariant bleibt, kann geometrisch gedeutet werden, indem man auf den vier Geraden beliebige Strecken aufträgt und statt der vier Glieder im Doppelverhältnisse die Volumina einsetzt, welche diese Strecken unter gehöriger Berücksichtigung des Vorzeichens bestimmen. Greift man aus dem Gewindebüschel, den zwei Gerade $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bestimmen, die beiden Gewinde heraus, welche $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ zu Leitstrahlen haben, so bestimmen sie an den beiden Gebüschen des Büschels eines der Doppelverhältnisse D_1 der vier Geraden. An die Stelle der Grössen a, b, c, d und α, β, γ, δ treten nun entweder die Schnittpunkte der vier Geraden mit ihren gemeinsamen Secanten, oder ihre Verbindungsebenen mit diesen Strahlen. Auf zwei Arten kann man, hieran anknüpfend, das Doppelverhältnis von vier Punkten einer complexen Zahlenebene gewinnen, je nachdem man dieselbe auf bekannte Art auf die Kugel oder auf eine lineare Congruenz mit conjugirt imaginären Leitlinien abbildet. Berechnet man aus den Punkten A, B, C, D, bez. den vier Strahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, zunächst D_1, D_2, D_3, aus diesen die Grössen d_i und δ_i, so sind entweder die d_i oder die δ_i Doppelverhältnisse der Punktgruppe. Die Sätze über das Grassmann'sche Doppelverhältnis werden schliesslich auf die Lie'sche Kugelgeometrie übertragen. E. K.

A. Libicky. Grundlagen der Grassmann'schen geometrischen Rechnungsweise. Casopis **25**, 187-198, 265-284, 321-341. (Böhmisch.)

Enthält eine Darstellung der Anwendung der allgemeinen Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre auf die Geometrie. Einleitung. Das Rechnen mit den geometrischen Grössen ersten Grades. Das Rechnen mit den geometrischen Grössen zweiten und dritten Grades.

Sda.

H. Grassmann. Punktrechnung und projective Geometrie. Pr. Latein. Hauptsch. Halle a. S. S. 31-58. 4°.

Ueber den ersten Teil dieser Arbeit ist in den F. d. M. **25**, 1068, 1893/94 berichtet worden. Der vorliegende zweite Teil behandelt die Grundlagen der projectiven Geometrie im Lichte der Ausdehnungslehre. Es wird zunächst ein an die Stelle des associativen tretendes Multiplicationsgesetz der planimetrischen Multiplication („Vereinungsgesetz") abgeleitet, sodann der Begriff der Zurückleitung im wesentlichen im Anschluss an die A_1 entwickelt. Es folgt die Darstellung des Doppelverhältnisses eines Punktwurfes und des dualistisch gegenüberstehenden „Strahlenwurfes" durch planimetrische Producte, sodann die hierauf be-

gründete Theorie der Punktreihen und Strahlenbüschel. Im letzten Abschnitt wird die Lehre von den Dreieckscoordinaten eines Punktes und eines Stabes (Linienteils) in Bezug auf ein Fundamentaldreieck vorgetragen. Hierbei erweist sich die Einführung des „Einheitspunktes“ und des „Einheitsstabes“ (mit dem gemeinsamen Werte 1 für alle drei Coordinaten) als vorteilhaft, ebenso die Einführung der „Masse“ eines Punktes in die Rechnung. Mit einer Untersuchung über Eigenschaften der unendlich fernen Punkte und Stäbe mit endlichen Coordinaten schliesst der vorliegende Teil der Arbeit. Schg.

BEEZ. Zur Theorie der Vectoren und Quaternionen. Schlömilch Z. **41,** 35-57, 65-84.

Hamilton identificirt das Symbol eines Vectors (e_r) mit dem Symbol einer rechtwinkligen Drehung um denselben (i_r; $r = 1, 2, 3$). Beez zeigt, dass diese Annahme, wenn auch die einfachste und für die Rechnung bequemste, so doch keine notwendige ist, dass vielmehr zwischen beiden Symbolen allgemeinere Beziehungen aufgestellt werden können, welche für die Anwendungen der Quaternionen dasselbe leisten wie die Identität, und dass erst diese Beziehungen eine Ausdehnung der sonst auf vier Einheiten beschränkten Rechnung auf 2^n Einheiten ermöglichen. In der That ergiebt sich rechnerisch nur die Proportionalität der i und der e, etwa in der Form $i_r = a.e_r$, wobei der Charakter des Factors a, den Hamilton gleich 1 setzt, noch durchaus dahingestellt bleibt. An der Hand der Beispiele $a = e_1 e_2 e_3$ und $a = e_3 e_2$ zeigt der Verf., dass anderweitige Formen einer Quaternion algebraisch nichts Neues liefern, und dass überhaupt die Quaternionen für die Theorie der Functionen nichts zu leisten im Stande sind, was nicht schon durch die gewöhnliche complexe Grösse erreicht werden kann. — Sodann werden unter der Annahme $a = e_3 e_2$ die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie und die Euler'schen Formeln für die Drehung einer Kugel um einen Durchmesser mit demselben Erfolge wie bei der Annahme $a = 1$ abgeleitet. Ferner wird unter den beiden obigen neuen Annahmen die Ausdehnung der Quaternionenrechnung auf 8, 16 und 32 Einheiten dargelegt. Schliesslich wird gezeigt, dass mit Hülfe dieser „höheren“ Quaternionen das Problem der Transformation einer Summe von n Quadraten in sich selbst gelöst werden kann, und zwar, wie der Verf. hinzufügt, in vollständigerer Weise, als es die von Cayley angewandte Methode der schiefen Determinanten gestattet. Schg.

FR. GRAEFE. Strecken- und Punktrechnung, insbesondere die Rechnung mit parallelen Strecken. Hoppe Arch. (2) **15,** 34-116.

Nachdem der Verf. in einem früheren Werke „Vorlesungen über die Theorie der Quaternionen“ (F. d. M. **15,** 580, 1883) einen Abriss der Hamilton'schen Theorie gegeben hatte, wendet er sich in der vorliegenden Arbeit zu der von Unverzagt begründeten Lehre von den „longimetrischen Quaternionen“ (Quotienten paralleler Strecken). Es

werden die Rechnungen mit parallelen Strecken (Addition und Subtraction, Division und Multiplication) weiter ausgebildet und auf die Bestimmung von Punkten, Geraden, Curven und Flächen mittels der Unverzagt'schen Coordinatensysteme angewandt, welche letzteren sich jedoch nur als specielle Fälle der Staudt-Fiedler'schen erweisen. Abweichend von Grassmann werden in der Unverzagt'schen Theorie nur Strecken, die sich vollständig decken, als gleich definirt. Liegt der Punkt D in der Mitte zwischen den Punkten A und B, so wird statt $2D = A+B$ gesetzt: $D^2 = A.B$, und dadurch eine neue Art von Multiplication zweier Punkte eingeführt. Statt die zwischen Punkten in einer Ebene bestehenden einfachen Gleichungen durch Parallelverschiebung der Ebene auf die von den Punkten beschriebenen Parallelen zu übertragen, wird hier der umgekehrte Weg gewählt, indem die Punktrechnung erst auf die Parallelenrechnung folgt. Abweichend von Hamilton wird, wenn a die absolute Länge der nach Lage, Richtung und Länge bestimmten „Strecke" α ist, $\alpha^2 = (-1)^s a^2$ gesetzt, worin s eine beliebige ganze Zahl bedeuten kann, während bei Hamilton $s = 1$ ist. — Ausführlich werden die Rechnungen mit dem von Unverzagt eingeführten „Quotientvector" zweier vielfachen Punkte mA und nB (dargestellt durch nB/mA) weiter ausgebildet. Diese Rechnungen führen zu Systemen complexer Zahlen, die bereits von einer Reihe anderer Autoren behandelt worden sind. Neu eingeführt wird der Begriff der „allgemeinen Biquaternion" (Summe oder Differenz zweier Unverzagt'schen Biquaternionen). Den Schluss bildet eine Zusammenstellung von Multiplicationstafeln für Quaternionen und Biquaternionen. — Auf dem schon von Unverzagt eingeschlagenen Wege, den unbequemen Quaternionen-Formalismus verständlicher zu machen, ist Graefe mit Erfolg weiter geschritten. Vor allem ist zu rühmen, dass er die symbolische Schreibweise und (bis auf einige kleine Rückfälle) die Nomenclatur Hamilton's diesmal über Bord geworfen hat. In dem auf diese Weise durchsichtiger gewordenen Gewande der Quaternionenlehre treten aber auch deutlicher als bisher alle diejenigen ihrer Neuerungen hervor, die, zum Nachteil für die Einfachheit der Fundamente, die Beschränkung auf das Notwendige vermissen lassen. Schg.

G. Peano. Saggio di calcolo geometrico. Torino Atti **31**, 952-975.

Die Arbeit giebt einen zur ersten Einführung in die Ausdehnungslehre ausserordentlich geeigneten Abriss aller wesentlichen Operationen dieser Disciplin. Die Ausgangspunkte der einzelnen Abschnitte sind geschickt gewählt, die neuen Begriffe so eingeführt, dass sie sich gewissermassen von selbst darbieten, die Anwendungen auf Geometrie und Mechanik bei aller Kürze in ihrer weittragenden Bedeutung charakterisirt. Auch die Beziehungen zur Quaternionenrechnung sind nicht ausser Acht gelassen. Die Einleitung giebt einen kurzen Rückblick auf Entstehung und Schicksal der Ausdehnungslehre und der Quaternionentheorie, wobei auch der Umschmelzungsprocess, von dem die letztere seit einiger Zeit

ergriffen worden ist, nicht unbeachtet bleibt, und die Gleichheit des Kernes in diesen beiden, wie in ähnlichen geometrischen Calculen, betont wird. Schg.

Weitere Litteratur.

Briot and Bouquet. The elements of analytical geometry of two dimensions. 14th edition. Authorized English translation by J. H. Boyd. Chicago: Werner School Book Co. 582 S.

E. Cesàro. Lezioni di geometria intrinseca. Napoli: Accademia delle scienze. 263 S. 8°.

C. de Comberousse. Cours de mathématiques à l'usage des candidats à l'École polytechnique, à l'École normale supérieure et à l'École centrale des arts et manufactures. (En 6 volumes.) Vol. V: Géométrie analytique, plane et dans l'espace. Éléments de géométrie descriptive. 2e éd. Paris: Gauthier-Villars et Fils.

E. Combette. Compléments du cours d'algèbre et notions de géométrie analytique, à l'usage des candidats à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr et des élèves qui se préparent à suivre le cours de mathématiques spéciales. Paris: Alcan. 288 S. 8°.

L. Lefèvre. Sur les coordonnées polaires. Rev. de Math. spéc. **6**, 393-394.

A. Macé de Lépinay. Compléments d'algèbre et notions de géométrie analytique à l'usage des candidats à Saint-Cyr. 3e éd. Paris. 432 S. 8°.

A. Neppi-Modona e T. Vannini. Questioni e formule di geometria analitica. Palermo: Reber. [Periodico di Mat. **11**, 107.]

A. Söderblom. Inledning till Rymdens analytiska Geometri. Göteborg. 58 S. 8°.

H. Sonnet et G. Frontera. Éléments de géométrie analytique, rédigés conformément au programme d'admission à l'École polytechnique et à l'École normale supérieure. 8e éd. Paris: Hachette. 758 S. 8°.

J. Vidaillet. Sur une interprétation géométrique des coordonnées trilinéaires et applications aux courbes de degré n, tangentes à une conique en n points. Paris. 116 S. 4°.

J. de Vries. Recherches sur les coordonnées multipolaires. Arch. Teyler (2) **5**, 99-158.

C. Wessel. Om directionens analytiske Betegning, ett forsög, anvendt fornemmelig til plane og sphaeriske Polygoners Oplösning. Med en fortale af S. Lie. Arch. Math. og Naturv. 69 S. gr. 8°.

Bericht im nächsten Jahrgange.

Kapitel 2.

Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

W. Bouwman. De Plücker'sche grootheden der deviatie kromme. Diss. Groningen. 61 S.

Als Deviationscurve D einer ebenen Curve C^n bezeichnet der Verf. den Ort der Centra der Kegelschnitte, welche eine fünfpunktige Berührung mit C^n eingehen, und bestimmt die Plücker'schen Zahlen von D in der Voraussetzung, dass C^n keine Singularitäten höherer Ordnung besitzt. Ferner wird betrachtet die Curve Δ, welche der Ort ist für die Pole einer vorgegebenen Geraden l in Bezug auf die fünfpunktig berührenden Kegelschnitte; ist l die unendlich ferne Gerade, so wird offenbar Δ zu D. Mo.

Elgé. Sur un point délicat dans la construction des courbes. J. de Math. spéc. (4) 5, 49-50.

Zur Bestimmung der Punkte einer Curve $f(x,y) = 0$, in welchen die Tangenten parallel zur x-Axe sind, hat man die Gleichungen $f = 0$ und $\partial f/\partial x = 0$ nach x und y zu lösen. Diese Regel kann fehlschlagen, wenn auf einem reellen Curvenzweige ein imaginärer Punkt liegt.

Lp.

P. G. Tait. Note on the circles of curvature of a plane curve. Edinb. M. S. Proc. 14, 26.

Beweis des Satzes, dass, wenn die Krümmung einer ebenen Curve beständig wächst oder abnimmt, nicht zwei ihrer Krümmungskreise sich schneiden. Sind nämlich A, B irgend zwei Punkte auf der Evolute, so ist die Sehne AB der Abstand zwischen den Krümmungsmittelpunkten und daher kleiner als die Differenz der Radien, die ja gleich dem Bogen AB ist. Gbs. (Lp.)

G. de Longchamps. Deux problèmes de géométrie infinitésimale. (À propos du problème posé au dernier concours de l'École Polytechnique). J. de Math. spéc. (4) 5, 171-174.

Man betrachte zwei Curven U, V und einen festen Punkt O. Parallel zu einer gegebenen Richtung Ox ziehe man eine Gerade, welche U in A, V in B treffe. Man verbinde den Punkt O mit A und fälle von B das Lot auf Ox; dieses Lot trifft OA im Punkte I. Wenn AB beweglich ist, beschreibt I eine Curve W; wie findet man die Tangente von W? Bei der zweiten Frage wird eine Curve U, ein Punkt O, eine Gerade Δ gegeben. Eine durch O gehende Gerade treffe U in M und Δ in A. Man nehme $MI = MA$; welches ist die Tangentenconstruction für die Ortscurve von I? Die Lösungen stützen sich auf geo-

metrische infinitesimale Betrachtungen. In einer Zuschrift auf S. 211 giebt Mannheim einige Vereinfachungen an. Lp.

H. W. CURJEL. Question 12796. Ed. Times 64, 63-64.

Wenn zwei geschlossene Curven p und q von P und Q derart beschrieben werden, dass die Tangenten in P und in Q unter einem constanten Winkel in einem von P und von Q gleich weit abstehenden Punkte zusammentreffen, so haben p und q gleichen Flächeninhalt. Zwei gerade Linien durch einen Punkt einer geschlossenen Curve, deren Evolute ebenfalls eine geschlossene Curve ist, mögen auf beiden Seiten der Normale einen constanten Winkel α mit der letzteren bilden; dann umhüllen diese Geraden zwei flächengleiche geschlossene Curven, deren Inhalt $C\sin^2\alpha + E\cos^2\alpha$ ist (Inhalt der gegebenen Curve C, ihrer Evolute E); hierbei sind C und E mit demselben oder mit entgegengesetztem Vorzeichen zu versehen, je nachdem ein Punkt der Curve und der zugehörige Krümmungsmittelpunkt C und E in gleicher oder in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Lp.

F. MONTET. Esquisse d'une étude analytique des courbes algébriques et transcendantes les plus remarquables, avec leurs principales applications en mécanique, en astronomie et en physique. Lyon. IV + 60 S. 8°.

T. S. FISKE. The length of a curved line. Science (N. S.) 4, 724.

B. Theorie der algebraischen Curven.

H. B. NEWSON. The Hessian, Jacobian, Steinerian in geometry of one dimension. Kansas Univ. Quart. 3, 103-116 (1894).

Die Definitionen und eine Reihe von Eigenschaften der Hesse'schen, Jacobi'schen, Steiner'schen und verwandter Curven lassen sich rückwärts auf das binäre Gebiet übertragen und dort noch weiter verfolgen. Gestattet man den Gebrauch des Wortes „Ort" (locus) auch in dem Falle, wo es sich nur um endliche Angaben von Dingen handelt, so hat man die drei Grundeigenschaften:

1) Die „Hessiana" einer (binären) Urform U ist der Ort der Doppelpunkte (d. h. Doppelwurzeln) der ersten Polaren von U.

2) Die „Steineriana" von U ist der Ort der Punkte, deren erste Polaren bezüglich U einen Doppelpunkt haben: diese Doppelpunkte bilden die „Hessiana".

3) Die „Jacobiana" von zwei Urformen U, V ist der Ort der gemeinsamen Punkte der ersten Polaren eines Punktes bezüglich U, V.

Man hat dann Sätze der Art:

„Wenn zwei Formen (Gruppen) U, V vom nämlichen Grade einen

gemeinsamen Punkt von der Vielfachheit k besitzen, so erscheint dieser als Punkt der Jacobiana von der Vielfachheit $2k$." My.

H. Burkhardt. Zur Theorie der linearen Scharen von Punktaggregaten auf algebraischen Curven. Gött. Nachr. 1896, 267-274.

Die Theorie der linearen Scharen von Punktaggregaten (Punktgruppen) auf algebraischen Curven ist von Riemann und Roch auf transcendentem Wege, auf Grund der Abel'schen Integrale erster und zweiter Gattung, aufgebaut worden. Brill und Nöther haben eine algebraisch-geometrische Darstellung der Theorie gegeben, die insbesondere im Kapitel der Specialgruppen über Riemann-Roch hinausging. Neuerdings finden sich zusammenfassende Darstellungen, ebenfalls von algebraisch-geometrischen Gesichtspunkten aus, bei Bertini und Segre (cf. F. d. M. **25**, 1090, 1159, 1893/94). Der Verf. greift auf die Riemann'sche Methode zurück, indem er bestrebt ist, bei der Herleitung der grundlegenden Sätze allen Ausnahmefällen gerecht zu werden.

So werden gleich zu Beginn (§ 1) diejenigen Modificationen des Riemann-Roch'schen Satzes (über die Anzahl der willkürlichen Constanten einer algebraischen Function, die in n gegebenen Punkten von der ersten Ordnung unendlich wird) verfolgt, welche eintreten, wenn die Punkte in Verzweigungspunkte oder in unendlich ferne Punkte der Riemann'schen Fläche fallen, oder wenn mehrere von ihnen coincidiren.

Ferner wird unter Berücksichtigung aller Fälle ein einfaches Kriterium für den „Nöther'schen Reductionssatz" ermittelt, wann nämlich ein Punkt t_0 fester Punkt in einer Vollschar ist, von der die Punkte $t_0, t_1, \ldots, t_n$ ein Aggregat bilden.

In § 2 werden die wichtigen Sätze über Specialscharen untersucht, insbesondere wird der „Clifford'sche Satz" in durchsichtiger Weise auf den Riemann-Roch'schen Satz zurückgeführt.

In § 3 wird an der Amodeo'schen Behandlung (cf. F. d. M. **25**, 1091, 1893/94) der Frage, ob eine ebene Curve m^{ter} Ordnung vom Geschlechte p adjungirte Curven der Ordnung $m-3-\alpha$ $(\alpha > 0)$ haben könne, Kritik geübt. Die Frage erscheint noch nicht völlig spruchreif.

My.

M. Haure. Recherches sur les points de Weierstrass d'une courbe plane algébrique. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **13**, 115-196.

Weierstrass hat das Geschlecht p (nach seiner Terminologie den Rang ϱ) eines algebraischen Gebildes wie folgt definirt: Sei P eine Stelle des Gebildes; man betrachte diejenigen Punkte des Gebildes, die nur an dieser Stelle unendlich werden. Die Reihe der Ordnungszahlen ihres Unendlichwerdens enthält alle natürlichen Zahlen, abgesehen von gewissen Lücken. Die Anzahl dieser Lücken ist von P unabhängig und eben gleich p. Bei allgemeiner Lage von P sind die fehlenden Ordnungszahlen $1, 2, 3, \ldots, p$; in speciellen Punkten haben sie andere Werte. Diese letzteren nennt der Verf. points de Weierstrass. Er bedient

sich bei ihrer Untersuchung der Methoden von Brill und Nöther (Math. Ann. 7) und findet die genannten Sätze als specielle Fälle allgemeinerer über Functionen, die nirgends als in vorgegebenen Punkten unendlich gross werden. Im II. Kapitel werden einige weitere Sätze aus den Riemann'schen Sätzen über das Verschwinden der Thetafunctionen abgeleitet. Das III. und IV. Kapitel geben Untersuchungen darüber, welches bei gegebenem p die fehlenden Ordnungszahlen sein können, mit expliciter Aufzählung der Möglichkeiten für $p \leqq q$; das V. Kapitel enthält Anwendungen auf Raumcurven. Bdt.

C. Küpper. Ueber k-gonale Curven C_p^n n^{ter} Ordnung vom Geschlechte p. Prag. Ber. 1895, No. 25, 16 S.

C. Küpper. Ueber Beziehungen zwischen polygonalen und Raumcurven. Prag. Ber. 1896, No. 4, 11 S.

C. Küpper. Nachtrag zu den k-gonalen Curven. Prag. Ber. 1896, No. 23, 9 S.

C. Küpper. Die ultraelliptischen Curven C_p^n, $p > 1$. Prag. Ber. 1896, No. 43, 11 S.

In einer Anmerkung zum letzten der drei Aufsätze sagt der Verf., er sei durch die Lectüre der Amodeo'schen Arbeiten über die k-gonalen Curven veranlasst worden, auszuführen, auf welche Weise seine für Trigonalcurven gegebenen Entwickelungen dem Falle $k > 3$ anzupassen seien. (Vergl. das Referat über Amodeo in F. d. M. **26**, 656, 1895.) Jene erste Küpper'sche Arbeit ist in F. d. M. **21**, 647, 1889 eingehend besprochen worden. Die Erweiterung des Begriffes „trigonal" auf „k-gonal" erfolgt in den drei ersten Artikeln, während der letzte eine kurze Zusammenfassung des Wesentlichen enthält. In Betreff des Zusammenhanges der Arbeiten mit der Brill-Nöther'schen Lehre von den adjungirten Curven einer gegebenen und der Bezeichnungen verweisen wir auf das Referat über die Abhandlung von 1889. Eine Curve C_p^n heisst k-gonal, wenn auf ihr eine Schar $g_k^{(1)}$ von beweglichen Punkten vorkommt und wenigstens ∞^1 adjungirte Curven C^{n-k-1} $(n-k-1>0)$ existiren, so dass die $g_k^{(1)}$ sowohl durch die C^{n-k-1} als auch durch Gerade sich ausschneiden lässt. Für $n \leqq 2k$ besitzt eine k-gonale C^n einen $(n-k)$-fachen Punkt. Der Verf. untersucht dann die Enveloppe K^τ der Geraden L, welche die $g_k^{(1)}$ liefern, und ermittelt die Construction einer k-gonalen C_p^n, deren K^τ ein Kegelschnitt ist.

Der Umstand, dass eine C_p^n $(p>1)$ mit einer Schar $g_k^{(1)}$ stets die Perspectivcurve einer Raumcurve R_p^n ist, wofern die ihr associirte Enveloppe K^τ eine Klasse hat, die grösser als 1 ist, wo für $\tau > 1$ eine gewisse Relation mit δ mindestens $= \frac{1}{2}k(k-1)$ besteht, und daher $n > 2k$ sein muss, veranlasst den Verf., in der zweiten Abhandlung die Untersuchung mit dem Falle $\sigma = 2$, $\delta = \frac{1}{2}k(k-1)$ aufzunehmen; es ergeben sich verschiedene Eigenschaften der so definirten C_p^n, vor-

nehmlich für den Fall $k > 2$, wo die R_p^n einem Hyperboloide F^2 angehört. Wenn die k-gonale C_p^n Projection einer solchen R_p^n auf F^2 ist, deren Gruppen nicht auf den Tangenten eines K^2 liegen, so muss F^2 ein Quadrikegel sein. Daher wird nun die Forschung auf diejenigen R_p^n eines Quadrikegels erstreckt, deren Perspectivcurven polygonal sind.

Die in dem dritten Aufsatze gelieferten Nachträge beziehen sich auf: 1) den hyperelliptischen Fall (die hyperelliptische C_p^n und ihre Specialscharen), 2) den Satz, dass, wenn die adjungirten C^{n-k-1} $(k>2)$ in normaler Mannigfaltigkeit $\mu_0 = n-k-1-\delta$ vorhanden sind, die C_p^n einen $(n-k)$-fachen Punkt und überdies δ Doppelpunkte haben muss, 3) die auf einer irreducibeln geradlinigen Fläche zweiten Grades liegenden Raumcurven R_p^n.

Die letzte Abhandlung endlich definirt zunächst die ultraelliptische Curve C_p^n als solche k-gonale Curve, bei der ∞^μ $(\mu > 0)$ adjungirte C^{n-k-1} $(n-k-1 > 0)$ vorhanden sind. Im zweiten Abschnitte werden die Maximalwerte μ_1, δ_1 für die „Mannigfaltigkeit“ μ und die Anzahl der Doppelpunkte δ bestimmt, und danach wird im dritten Abschnitte die Existenz der ultraelliptischen Curven vom Minimalgeschlecht behandelt. Von den durch den Verf. hervorgehobenen Sätzen führen wir an: Eine irreducible $C_{p_0}^n$ ist stets ultraelliptisch, wenn mehr als eine adjungirte C^{n-k-1} vorhanden ist. Eine irreducible $C_{p'_0}^n$ ist ultraelliptisch, wenn wenigstens ∞^1 adjungirte C^{n-k-1} existiren, die noch einen festen Punkt $\mathfrak{F}$ der Grundcurve enthalten. Bei allen durch Projection von Raumcurven R_p^n früher erhaltenen ultraelliptischen C_p^n kommen die adjungirten C^{n-k-1} stets in maximaler Anzahl μ_1 vor (Abschn. IV). Der fünfte und letzte Abschnitt erledigt das „Umkehrproblem“: Die fundamentale Eigenschaft einer ultraelliptischen C_p^n besteht darin, dass durch jeden Punkt a der Curve noch $k-1$ andere Punkte mitbestimmt erscheinen, diejenigen nämlich, welche allen durch a möglichen $\infty^{\mu-1}$ adjungirten C^{n-k-1} gemeinsam sind. Daher wird nun untersucht, ob eine $\mathfrak{C}_p^n$, der diese Eigenschaft zukommt, ultraelliptisch, d. h. eine C_p^n sein muss, mit anderen Worten, ob $\mathfrak{C}_p^n$ eine $g_k^{(1)}$ besitzt. Schneidet $\mathfrak{C}^{n-k-1}$ die $\mathfrak{C}_p^n$ ausser den μ Gruppen G in β anderen Punkten b, wo $k(n-k-1)-2\delta = \mu k+\beta$, so wäre $g_k^{(1)}$ gewiss, wenn alle ∞^μ $\mathfrak{C}^{n-k-1}$ durch die b gingen. Das trifft zu, wenn die b normal zu den C^{k-2} der Ebene liegen, d. h. wenn durch je $\beta-1$ der b eine C^{k-1} möglich ist, die den fehlenden b nicht aufnimmt. Dies ist die hinreichende Bedingung. Lp.

F. Amodeo. Curve k-gonali di 1ª e di 2ª specie. Memoria II. Annali di Mat. (2) **24,** 1-22.

Bericht in F. d. M. **26,** 656, 1895.

F. Amodeo. **Curve aggiunte e serie specializzate.** Napoli Rend. (3) **2,** 316-333.

P. del Pezzo. **Rapporto.** Ibid. 315-316.

Die Arbeit schliesst sich an frühere Arbeiten des Verf. über denselben Gegenstand an und ist zum Teil durch Bedenken hervorgerufen, die Bertini in einer selbständigen Arbeit, Burkhardt in einer Besprechung der Arbeiten (cfr. F. d. M. **25,** 1091, 1893/94) ausgesprochen hatten. Der Verf. nimmt hierzu Stellung und giebt zunächst eine Anzahl von Veränderungen an, die in seinen früheren Arbeiten noch vorzunehmen sind. Sodann giebt er neue Entwickelungen über den Gegenstand, aus denen ich einige Einzelheiten hervorhebe. Besitzt eine C_p^m m^{ter} Ordnung und vom Geschlecht p adjungirte $C^{m-3-\alpha}$, so schneidet ein aus ihnen gebildetes lineares System r_α^{ter} Stufe eine Specialschar $g_{n_\alpha}^{r_\alpha}$ α^{ter} Art (serie spezializzata α volte) auf der Curve aus, und zwar ist n_α die Zahl der in der einzelnen Schnittgruppe auftretenden beweglichen Punkte. Die Gesamtmannigfaltigkeit der $C^{m-3-\alpha}$ liefert die kanonische Specialschar $g_{N_\alpha}^{R_\alpha}$, und es ist

$$\begin{aligned} n_\alpha &< N_\alpha = 2p-2-\alpha m, \\ r_\alpha &< R_\alpha = p-1-[\alpha m-\tfrac{1}{2}\alpha(\alpha+3)]+\varrho_\alpha \\ &\qquad = \tfrac{1}{2}N_\alpha-(\delta_\alpha-\varrho_\alpha); \end{aligned}$$

die „sovvrabondanza“ ϱ_α ist hierbei die Zahl der Abhängigkeiten unter den linearen Gleichungen, welche eine $C^{m-3-\alpha}$ veranlassen, jeden s-fachen Punkt von C_p^m $(s-1)$-fach zu enthalten. Für ϱ_α ergiebt sich eine obere Grenze daraus, dass $\delta_\alpha-\varrho_\alpha$ positiv ist. Hiernach glaubt der Verf. ein Resultat von Bertini corrigiren zu müssen. Diese Differenz ist birationalen Transformationen gegenüber invariant. Eine g_n^r auf der C_p^m ist eine Specialschar α^{ter} Art, wenn $n-r \leqq R_\alpha$ ist.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass C_p^m adjungirte $C^{m-3-\alpha}$ zulässt, ist, wie der Verf. entwickelt, $p \geqq \tfrac{1}{2}\alpha . m+1+\delta_\alpha-\varrho_\alpha$.

Zum Schluss zieht der Verf. k-gonale Curven zum Vergleich heran.

E. K.

F. Amodeo. **Sistemi lineari di curve algebriche di genere massimo ad intersezioni variabili collineari.** Napoli Rend. (3) **2,** 80-85.

P. del Pezzo. **Relazione.** Ibid. 80.

Der Verf. betrachtet auf den Curven n^{ter} Ordnung, denen ein für $r>5$ einem Kegelschnitt umschriebenes vollständiges r-Seit eingeschrieben ist, eine zur Gruppe seiner Eckpunkte corresiduale Gruppe von $\tfrac{1}{2}n(n+3)-(r-1)n+\tfrac{1}{2}r(r-1)$ Punkten. Dieselben sind Grundpunkte einer linearen Mannigfaltigkeit $(r-1)^{\text{ter}}$ Stufe von Curven n^{ter} Ordnung, von denen sich irgend zwei in $(r-1)n-\tfrac{1}{2}r(r-1)$ einer Curve $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung angehörigen Punkten treffen. Das Netz enthält ∞^{r-2} Netze von Curven, von denen zwei Curven sich in $(n-1)$ einer Gera-

den angehörigen Punkten treffen. Die für den Zusatz beigebrachten Beweisgründe haben mich nicht völlig überzeugt. E. K.

W. Weiss. Ueber die Curven, welche eine algebraische Curve an mehreren Stellen und in höherer Ordnung berühren. Monatsh. f. Math. 7, 370-376.

Zur Untersuchung der Systeme von Curven, welche durch eine geeignete Anzahl von festen Punkten einer algebraischen Curve $f(s, z) = 0$ gehen und dieselbe sonst überall nur noch in Gruppen von je r zusammenfallenden Punkten treffen, liefert die r-Teilung der zugehörigen Abel'schen Functionen den Ansatz; doch liegt die Lösung nur für zu f adjungirte Curven allgemein vor. Der Fall einer Grundcurve mit zweifachem Punkte ist erledigt bei der Behandlung des erweiterten Umkehrproblems in der „Theorie der Abel'schen Functionen" von Clebsch und Gordan, ferner von G. Humbert im Journ. de Math. (4) 2 (F. d. M. 18, 362, 1886). In der vorliegenden Arbeit wird, wenigstens in den Grundzügen, die allgemeine Theorie dieser Systeme von Berührungscurven nach Adjunction der für adjungirte Systeme aus dem Jacobi'schen Umkehrprobleme folgenden Resultate nur noch auf algebraischem Wege entwickelt. Dieselbe stützt sich durchgehends auf die frühere Abhandlung des Verf. über nicht adjungirte Berührungscurven in Wien. Ber. 99 (F. d. M. 22, 708, 1890), wo aber allein der Fall der Berührung erster Ordnung zur Behandlung kam. Zum Schlusse wird die allgemeine Theorie zunächst auf den Fall der Grundpunkte mit nur Doppelpunkten angewandt; die Resultate stimmen mit denen in den oben angeführten Arbeiten überein. Lp.

E. H. Moore. Tactical memoranda I-III. American J. 18, 264-303.

Der Verf. entwirft eine allgemeine, abstracte Theorie der geometrischen Configurationen. Man habe n Reihen von Objecten, so dass in der i^{ten} Reihe sich gerade a_i befinden; dann wird man die Objecte am geeignetsten mit $\lambda_{ij^{(i)}}$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $j^{(i)} = 1, 2, \dots, a_i$) bezeichnen. Zwischen Objecten verschiedener Reihen soll ein Gesetz, eine „Incidenz" herrschen, die entscheiden lässt, ob $\lambda_{i_1j_1}$ mit $\lambda_{i_2j_2} (i_1 \neq i_2)$ incident ist, oder nicht. Eine vollständige und geordnete Tabelle dieser Incidenzen dient als Ausdruck des gemeinten Gesetzes.

Ist im besonderen die Anzahl a_{gh} der Objecte der Reihe h, die mit einem Objecte der Reihe g incident sind, für alle Objecte dieser Reihe die nämliche, so hat man eine „Rangconfiguration" vor sich, deren Charakter geradezu durch die quadratische Matrix der Zahlen a_{gh} $(a_{gg} = a_g)$ repräsentirt wird. Zu jeder Configuration C_f gehört eine intransitive Permutations-Gruppe $G^a_{C_f}$, die jede Reihe als Ganzes, sowie die Tafel der Incidenzen invariant lässt, deren Ordnung a gleich $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ wird.

Für die Geometrie sind von besonderer Wichtigkeit die Configurationen, für die einmal die Coincidenz von $\lambda_{i_1j_1}$ mit $\lambda_{i_2j_2}$ stets auch die

umgekehrte bedingt, sodann die, für welche — bei geeigneter Anordnung der Objecte — aus dem Bestehen der beiden Coincidenzen: $\lambda_{i_1 j_1}$ mit $\lambda_{i_2 j_2}$, $\lambda_{i_2 j_2}$ mit $\lambda_{i_3 j_3}$ stets folgen soll, dass auch $\lambda_{i_1 j_1}$ mit $\lambda_{3 j_3}$ coincidirt (wo entweder $i_1 > i_2 > i_3$, oder $i_1 < i_2 < i_3$).

Der Verf. entwirft nun die aus der Combinatorik, Gruppentheorie und Geometrie bekannten Configurationen nebst geeigneten Verallgemeinerungen einer sorgfältigen Untersuchung; die bezüglichen Anzahlfragen werden vielfach auf einfache gruppentheoretische, resp. zahlentheoretische Methoden zurückgebracht, aber auch umgekehrt die Lösungen auf complicirtere zahlentheoretische Aufgaben angewandt. Einen Ueberblick über die Methoden des Verf. wird man erst erhalten, wenn die Arbeit abgeschlossen vorliegt; für eine Reihe von Aufgaben wird vorab nur ein Ansatz geliefert.

My.

Miss C. A. Scott. Note on adjoint curves. Quart. J. **28**, 377-381.

In weiterer Ausführung der Salmon'schen Darstellung von der Transformation einer algebraischen Curve n^{ter} Ordnung in eine andere von möglichst niedriger Ordnung wird der Beweis erbracht, dass das Netz der Transformationscurven durch möglichst viele Doppelpunkte der gegebenen Curve gehen muss, dass sie von der Ordnung $n-3$ sein müssen, und dass sie dann und nur dann eine (1, 1) - Transformation der ganzen Ebene geben, wenn sie unicursale Curven sind.

R. M.

F. Enriques. Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche. Palermo Rend. **10**, 30-35.

Wenn die Coordinaten einer algebraischen Curve $f(x, y) = 0$ als Functionen eines Parameters t und einer Irrationalität X dargestellt sind, derart, dass $x = \varphi(X, t)$, $y = \psi(X, t)$, wo $F(X, t) = 0$ eine Gleichung n^{ten} Grades in X sein möge, so gehört jedem Werte t eine Gruppe von n Punkten zu; aber nur, wenn diese n Punkte eine lineare Involution g_n^1 bilden, gehört zu jedem Punkte ein bestimmter Wert t. Im anderen Falle gehört ein Punkt mehreren Gruppen gleichzeitig an, und Verf. entwickelt das Theorem: Auf einer algebraischen Curve ist eine rationale Serie $\infty^r (r > 1)$ von Gruppen von n Punkten entweder linear oder in einer linearen Serie $G_n^s (s > r)$ enthalten. Dasselbe gilt von einer rationalen Serie von Curven auf einer algebraischen Fläche.

R. M.

E. Vessiot. Sur l'étude d'une courbe autour d'un de ses points. Darboux Bull. (2) **20**, 29-31.

Eine einfache und praktische Methode für das Studium der durch einen Punkt einer algebraischen Curve gehenden reellen Zweige derselben mit gemeinsamer Tangente. Wählt man diesen Punkt zum Coordinatenanfangspunkt, und ist $y - mx = 0$ die Gleichung der Tangente, so führt die Substitution $y = (m + \mu)x$ in die Gleichung der Curve zu einer

Gleichung $\varphi(\mu, x) = 0$, auf die dasselbe Verfahren anzuwenden ist; es genügt eine endliche Anzahl von Wiederholungen dieses Verfahrens.
T.

H. Suhle. Zur Theorie der reellen Curven einer rationalen Function n^{ten} Grades für complexe Variable. Pr. (No. 699) Realgymn. Dessau. 16 S. 4°.

Die Arbeit bildet eine Ergänzung zu den beiden Programmarbeiten aus den Jahren 1893 und 1894, über die in F. d. M. **25**, 1100, 1893/94 berichtet worden ist. Sie enthält eine Ableitung der allgemeinen, den Asymptoten der Niveaulinien für Functionen n^{ten} Grades entsprechenden Gleichungen und der Beziehungen der reellen Nebencurven zu diesen. Am Schluss werden die Resultate der drei Arbeiten in Bezug auf das reelle Curvensystem zusammengestellt. T.

H. Oppenheimer. Ueber die Doppelpunkte der algebraischen Curven. Schlömilch Z. **41**, 305-325.

Sind $\frac{1}{2}(n+m)(n+m+3)$ beliebige Punkte in der Ebene gegeben, so lässt sich nach der Methode von Chasles mittels projectiver Büschel n^{ter} und m^{ter} Ordnung durch diese Punkte die C^{n+m} legen. Diese Methode ist aber nicht für jede Form der $\frac{1}{2}(n+m)(n+m+3)$ Bedingungen, die eine solche Curve eindeutig bestimmen, zu gebrauchen. Ist z. B. $\frac{1}{2}(n+m)(n+m+3) = 3p+q$, und sollen p beliebig liegende Punkte Doppelpunkte, q beliebige Punkte einfache Punkte der C^{n+m} werden, so lässt sich die Methode von Chasles nicht ohne weiteres anwenden. Der Verf. giebt nun eine auch für diesen Fall gültige Construction der algebraischen Curven mittels Absplitterung und löst zunächst die Aufgabe, eine C^n zu zeichnen aus p Doppelpunkten $A_1, A_2, \dots, A_p$ und q einfachen Punkten $B_1, B_2, \dots, B_q$, wobei $3p+q = \frac{1}{2}n(n+3)$. Er zeichnet einen Büschel von Curven C^{n+1}, welche alle die Punkte $A_1, \dots, A_p$ zu Doppelpunkten, und $B_1, \dots, B_q$ zu einfachen Punkten haben. Ein solcher Büschel hat ausserdem noch $(n+1)^2 - 4p - q$ Basispunkte: $B_{q+1}, B_{q+2}, B_{(n+1)^2-4p}$. Durch diese letzteren und die Punkte: $A_1, A_2, \dots, A_p$ wird dann eine C^n gelegt, die C_x^n sei. Jede C^{n+1} des Büschels hat dann mit C_x^n die Punkte $B_{q+1}, B_{q+2}, \dots, B_{(n+1)^2-4p}$ und die je doppelt zählenden Basispunkte $A_1, A_2, \dots, A_p$ gemein, also im ganzen: $(n+1)^2 - 4p - q + 2p$ oder $(n+1)^2 - 2p - q$ feste Punkte; sie schneidet also die C_x^n noch ausserdem in $n(n+1) - (n+1)^2 + 2p + q$, d. i. in $2p+q-n-1$ weiteren Punkten. Es entsteht durch den Büschel der C^{n+1} auf C_x^n eine Involution von je $2p+q-n-1$ Punkten. Jede solche Gruppe ergiebt mit den gegebenen p Punkten gerade $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ Punkte, welche ihrerseits wieder eine C^{n-1} eindeutig bestimmen. Eine solche C^{n-1}, durch eine Involutionsgruppe und die Punkte $A_1, A_2, \dots, A_p$ gelegt, schneidet die C_x^n in weiteren $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 2)$ Punkten; und nach dem Brill-Nöther'schen Rest-

satze muss eine durch eine andere Involutionsgruppe veranlasste C^{n-1} durch eben diese $\frac{1}{2}(n^2-3n+2)$ Punkte gehen. Diese zwei Curven C^{n-1} bilden nun einen Büschel, der mit dem vorerwähnten Büschel der C^{n+1} die verlangte Curve C^n erzeugt, die p gegebene Doppelpunkte und q gegebene einfache Punkte hat. Hierbei ist die Curve C_x^n, wie der Verf. sagt, abgesplittert. Hiermit ist die Art der gegebenen Untersuchungen gekennzeichnet, und im übrigen muss auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Mz.

E. Fabry. **Sur les courbes planes unicursales.** Ann. de l'Éc. Norm. (3) **13,** 107-114.

Die von Clebsch im J. für Math. **64** bewiesenen Sätze über die Schnittpunkte einer rationalen Curve n^{ter} Ordnung F^n mit einer beliebigen Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung werden in sehr einfacher Form abgeleitet. Hierbei sind diejenigen Untersuchungen bemerkenswert, die sich auf Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung beziehen, die F^n in $\frac{1}{2}n(n-3)$ Punkten berühren. Js.

B. Sporer. **Ueber den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte zweier algebraischer Curven.** Diss. Tübingen: F. Fues. 40 S. 8°.

Der Schwerpunkt der vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte fällt mit dem Mittelpunkte des Kegelschnittes zusammen, auf dem die Mittelpunkte der Kegelschnitte des durch jene vier Punkte bestimmten Büschels liegen. Concentrische Kreise schneiden einen festen Kegelschnitt in Punktquadrupeln mit demselben Schwerpunkte. Zwei veränderliche Kegelschnitte mit je einem Paar fester Asymptoten haben Punktgruppen mit gleichem Schwerpunkte gemein; er ist identisch mit dem der Asymptotenschnittpunkte. Kegelschnitte mit gemeinsamen Asymptoten, von denen eine parallel zur Axe einer gegebenen Parabel ist, schneiden letztere in Punkttripeln mit demselben Schwerpunkte. Der Schwerpunkt der Schnittpunkte zweier Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung fällt mit dem der gemeinsamen Punkte ihrer Asymptoten zusammen. Zahlreiche Beispiele zeigen den Nutzen dieser Sätze für weitere geometrische Forschung. Js.

H. Maschke. **On systems of six points lying in three ways in involution.** Annals of Math. **10,** 22-34.

Die Punkte $z_1, \ldots, z_6$ der complexen Ebene heissen sechs Diederpunkte, wenn der Ausdruck: $\varphi(z) = (z-z_1)\ldots(z-z_6)$ die linearen Transformationen einer Diedergruppe $n=3$ zulässt. Sechs Diederpunkte liegen dreifach involutorisch; je zwei dieser Involutionen haben kein Paar conjugirter Punkte gemein. Unter den Doppelverhältnissen, die je vier Diederpunkte bestimmen, können solche auftreten, die einen reellen Wert (vor allem den Wert -1) haben; auch können alle sechs Diederpunkte reell sein. Die diesen Bedingungen entsprechenden Configurationen werden eingehend besprochen. Js.

J. Valyi. Ueber die mehrfachen Involutionen. Ungar. Ber. **13**, 247-269.

Der Verf. beschäftigt sich mit den geschlossenen Punktgruppen, die dann entstehen können, wenn man, von einem Punkte A_1 ausgehend, abwechselnd die eine und die andere von zwei derselben Geraden angehörigen involutorischen Beziehungen anwendet. Stösst man auf diese Art auf die Gruppe $A_1 B_1 A_2 B_2 A_3 B_3 \dots A_r B_r$, so dass B_r wieder in A_1 übergeht, so spricht Valyi von zwei r-aden $A_1 A_2 \dots A_r$, $B_1 B_2 \dots B_r$ und weist nach, dass im allgemeinen zwei derartige Gruppen r-fach involutorisch sind, indem es r derartige Involutionen giebt, die sämtlich ein Punktepaar M, N mit einander gemein haben, und von denen zwei beliebige zusammengefasst werden können; auch die Involution mit den Doppelpunkten M, N führt $A_1 A_2 \dots A_r$ in eine bestimmte r-ade über. Offenbar ist es Valyi entgangen, dass seine r-aden mit den so vielfach behandelten cyklisch-projectivischen Punktgruppen zusammenfallen. Seine Fragestellung ist einfach die, welche projectivischen Beziehungen formen eine cyklische Involution in sich über. Eine derartige Projectivität muss entweder jeden der beiden Doppelpunkte M, N in sich überführen und brauchte dann nicht involutorisch zu sein, oder sie muss die beiden Doppelpunkte gegen einander vertauschen und ist eine durch MN und $A_i B_k$ festgelegte Involution, wenn die Gruppen $A_1 A_2 \dots A_r$ und $B_1 B_2 \dots B_r$ in einander übergehen sollen. Wenn man einen Kegelschnitt zum Träger zweier r-aden macht, so werden offenbar die beiden r-aden r-fach perspectivisch, und zwar gehören die Centra $C_1, C_2, \dots, C_r$ einer Hülfsgeraden an. Auch hinsichtlich des Pols dieser Geraden können die Gruppen perspectivisch liegen. Die Gruppen können auch durch r involutorisch collineare Beziehungen in einander übergeführt werden, deren Centren eben jene Punkte $C_1, C_2, \dots, C_r$ sind, während die Axen mit den Polaren dieser Punkte zusammenfallen. Wie der Verf. ausführt, können zwei r-aden, die in der Ebene r-fach involutorisch verbunden sind, auch auf zwei Geraden liegen, die Zentra gehören dann einer dritten Geraden an. E. K.

N. Delaunay. Ueber einige Eigenschaften der projectiven Transformation. Mosk. Math. Samml. **19**, 387-392. (Russisch.)

Verwendung des „Projectors“ (F. d. M. **25**, 1345, 1893/94) zur Erzeugung der projectiven Transformation. Formeln für die projective Transformation in Polarcoordinaten. Si.

G. Bagnera. Sul luogo dei contatti tripunti delle curve di un fascio con le curve di una rete. Palermo Rend. **10**, 81-106.

Der Verf. untersucht die Curve der Punkte, in welchen eine Curve n^{ter} Ordnung $C = A + \lambda B$ eines Büschels von einer Curve m^{ter} Ordnung $H = P + \mu Q + \nu R$ eines Netzes berührt wird. Unter Voraussetzung cartesischer Coordinaten hat man die drei Gleichungen $\varrho C_1 = H_1$, $\varrho C_2 = H_2$, $\varrho (C_{11} C_2^2 - 2 C_{12} C_1 C_2 + C_{22} C_1^2) = H_{11} C_2^2$

$-2H_{12}C_1C_2+H_{22}C_1^2$, wobei die Indices Differentiationen nach x und y andeuten. Die Elimination von ϱ, μ, ν, in denen diese Gleichungen linear sind, und die hierauf folgende Elimination von λ liefert eine Gleichung, die noch von einem ausserwesentlichen Factor befreit werden muss. Der Verf. erhält schliesslich (S. 85) eine Determinantengleichung, welche den Ort als eine Curve von der Ordnung $6(n-1)+3(m-1)$ erkennen lässt. Die Annahme $n=1$ ergiebt den bekannten Satz, dass die Wendepunkte, welche Curven m^{ter} Ordnung eines Netzes angehören, und deren Wendetangenten einen bestimmten Punkt enthalten, auf einer Curve $3(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen. Der Verf. setzt nun voraus, dass ein Punkt M für $A=0$, $B=0$, $P=0$, $Q=0$, $R=0$ die Vielfachheit habe $s, t \leqq s$, $\alpha, \beta \leqq \alpha$, $\gamma \leqq \beta$, wobei die Gleichheitszeichen nur dann eintreten sollen, wenn es nicht möglich ist, durch Auswahl anderer Curven des Büschels und des Netzes es anders einzurichten. Aus diesem Grunde ist immer $s \geqq 1$, $t \geqq 0$, $\alpha \geqq 1$, $\beta \geqq 1$, $\gamma \geqq 0$, und es ist z. B. $\alpha=\beta=\gamma=1$ nicht möglich. Für einen gewöhnlichen Grundpunkt des Netzes wäre $\alpha=2$, $\beta=1$, $\gamma=1$. Unter diesen Umständen gehen durch M wenigstens $3(s+t-2)+\alpha+\beta+\gamma$ Zweige der untersuchten Curve. Selbstverständlich sind hier zahlreiche Einzelfälle zu unterscheiden, die der Verf. sorgfältig untersucht.

E. K.

S. Mangeot. Étude analytique sur la symétrie. Nouv. Ann. (3) **15**, 403-426.

Der Verf. entwickelt eine Methode zur Aufsuchung der Axen einer Curve von der Gleichung $f^{(m)}(x,y)=0$, die sich in folgender Weise aussprechen lässt: „Um die Axen zu finden, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten O der Curve $f(x,y)=0$ gehen, entwickelt man das Polynom $f(x+y, i(y-x))=0$ in eine Summe von Termen: $(xy)^p(\alpha_x x^x+\beta_x y^x)$, $(p \gtreqless 0)$; sind dann $\alpha_r x^r+\beta_r y^r$, $\alpha_s x^s+\beta_s y^s$, ... jene Binome, welche sich nicht auf Constanten reduciren, und sind die Binome in z: $\alpha_r z^r-\beta_r$, $\alpha_s z^s-\beta_s$, ... relativ prim untereinander, so hat die Curve keine Axen. Ist im Gegenfalle Az_1^t-B der grösste gemeinschaftliche Teiler dieser Binome, so hat sie t Axen, welche durch den Anfangspunkt O gehen, und diese sind gegeben durch die Formel: $A(x-iy)^t=B(x-yi)^t$. Sind aber alle Ausdrücke $\alpha_x x^x+\beta_x y^x$ constant, so ist die Curve ein System von Kreisen, deren Centren in O liegen, und alle Geraden durch diesen Punkt sind Axen.

Ferner wird ein Kegelschnitt construirt, dessen Axen mit denen der gegebenen Curve übereinstimmen und so die Lage der Axen der letzteren angeben; auch giebt der Verf. eine Methode an, um die Curve auf eine ihrer Axen als x-Axe und eine dazu senkrechte Gerade als y-Axe zu reduciren.

Um die Symmetrieebenen einer Fläche $f^{(m)}(x,y,z)=0$ zu bestimmen, wird in ähnlicher Weise eine Fläche zweiten Grades bestimmt, welche mit ihr die gleichen Symmetrieebenen besitzt, und mit dieser Methode werden die Flächen dritten und vierten Grades untersucht und

mit ihren reducirten Gleichungen in Tabellen geordnet, welche die Anzahl der einer jeden Gleichungsform zugehörigen Symmetrieebenen erkennen lassen. Endlich wird noch ein Mittel angegeben, um zu untersuchen, ob eine Fläche dritten, vierten oder fünften Grades eine Rotationsfläche ist. Bm.

H. Andoyer. Sur la construction de certaines courbes algébriques en coordonnées polaires. Rev. de Math. spéc. **6**, 345-347.

W. Köstlin. Ueber Singularitäten ebener algebraischer Curven. Schlömilch Z. **41**, 1-34.

Ist die Diss. des Verf.; F. d. M. **26**, 655, 1895. Bdt.

G. F. Steiner. Ueber die Katakaustiken algebraischer ebener Curven. Lund. 46 S.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

Neuffer. Ueber die Behandlung der geometrischen Oerter im Elementarunterricht der analytischen Geometrie. Pr. (No. 612) Realgymn. Ulm. 39 S. 4°.

Eine systematische Zusammenstellung der Regeln, die man im Elementarunterricht beim Aufstellen der Gleichungen ebener Oerter in Parallelcoordinaten zu befolgen hat in Bezug auf a) Wahl der Coordinatenaxen, b) Darstellung der geometrischen Elemente eines Ortes, c) Ableitung der Gleichung. Zum Schluss werden die Forderungen und Regeln auf Flächen und Raumcurven erweitert. Zahlreiche Beispiele erläutern das Vorgetragene. Lg.

R. Krüger. Beiträge zum mathematischen Unterricht. Pr. (No. 84) Gymn. Prenzlau. 32 S. 4°.

157 Aufgaben aus der Coordinatengeometrie von den zu den Reifeprüfungen der höheren Schulen in den letzten Jahren gestellten Aufgaben über Gerade, Kreis und Parabel. Die Resultate sind beigefügt. Der zweite Teil soll im nächsten Programm folgen. Die Zusammenstellung ist recht verdienstlich, gerade weil sie Prüfungsarbeiten bringt, und bietet eine angenehme Abwechselung auch neben einer reichhaltigen Sammlung wie die von Gandtner. Lg.

J. Novotny. Geometrische Uebungen. Jahresber. der Oberrealschule in Königgrätz. 1-17. (Böhmisch.)

Erklärung einiger Kegelschnittconstructionen mit Hülfe der analytischen Geometrie. Für Anfänger berechnete Darstellung. Sda.

E. Klein. Avendelse af poläre Koordinater i elementär geometri. Nyt. Tidss. 7 A, 97-122.

Ueber die Anwendung von Polarcoordinaten in der elementaren Geometrie. V.

Raffalli. Construction du faisceau $ax^2+bxy+cy^2=0$. J. de Math. élém. (4) **5**, 126-127, 151-152.

Elementare Constructionen der beiden Geraden für rechtwinklige und für schiefwinklige Axen. Lp.

Elgé. Sur le faisceau isogonal. J. de Math. spéc. (4) **5**, 241-243.

Ein „isogonaler Vierstrahl" $O(ABCD)$ ist ein solcher, bei welchem z. B. Winkel AOB gleich Winkel COD. Ist die Gleichung $Ax^4+Bx^3y+Cx^2y^2+Dxy^3+Ey^4=0$ gegeben, so repräsentirt dieselbe einen isogonalen Vierstrahl unter der Bedingung

$$C=\frac{B^2-D^2}{4(A-E)}+2\frac{AD+BE}{B+D}.$$

Die vier Normalen von einem Punkte (x, y) an eine Ellipse bilden einen isogonalen Vierstrahl, wenn $a^2b^2(x^2+y^2)^2=(a^4-b^4)(b^2x^2-a^2y^2)$ ist. Lp.

J. C. Medeiros. O ponto $\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$ relativamente aos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2). Instituto de Coimbra **43**.

Untersuchung der Beziehungen der im Titel bezeichneten Punkte zu einander. Tx. (Lp.)

J. Neuberg, E. Duporcq. Solution de la question 7. J. de Math. élém. (4) **5**, 68-70.

Analytischer Beweis des Satzes: Ueber den Seiten eines gegebenen Dreiecks ABC construirt man drei ähnliche Dreiecke ABC_1, BCA_1, CAB_1, so dass die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 durch einen Punkt D gehen; dann beschreiben A_1, B_1, C_1 je einen Kreis. — Ueber einer festen Strecke kann man nach einer und derselben Seite derselben sechs Dreiecke construiren, die einem gegebenen Dreiecke ähnlich sind. Die sechs so erhaltenen Ecken liegen auf einem Kreise. Alle so entstandenen Kreise haben dieselbe Potenzlinie. Lp.

R. Tucker. Properties of some groups of Wallace lines. Edinb. M. S. Proc. **14**, 116-120.

Diesen Artikel muss man im Zusammenhange mit demjenigen von J. Alison in derselben Zeitschrift Bd. **3** lesen (F. d. M. **17**, 544, 1885). Die Eigenschaften werden analytisch abgeleitet und betreffen vornehmlich die Schnittpunkte der Wallace-Geraden von Punkten, welche besondere Lagen in Bezug auf die Ecken des Grunddreiecks haben.

Gbs. (Lp.)

J. E. A. Steggall. On the envelope of the Simson line of a polygon. Edinb. M. S. Proc. **14**, 122-126.

Fällt man von einem gegebenen Punkte eines Kreises Lote auf die vier Simson-(Wallace-)Geraden, welche zu den vier Dreiecken gehören, die je drei Ecken eines dem Kreise eingeschriebenen Vierecks als Ecken besitzen, so liegen bekanntlich die Fusspunkte dieser Lote auf einer Geraden. Diese Gerade soll nach dem Vorschlage des Verf. die Simson-Gerade des von den vier Punkten gebildeten Vierecks heissen. Das Verfahren kann, wie man weiter weiss, verallgemeinert werden; in dem vorliegenden Aufsatze werden manche mit diesen Linien zusammenhängende Resultate gegeben. Nimmt man die Axen durch den Mittelpunkt des Kreises vom Radius a und bezeichnet die Winkelcoordinaten von n Punkten auf der Peripherie mit 2α, 2β, ..., dagegen mit $\pi-2\theta$ die Coordinate eines beliebigen anderen Punktes der Peripherie, so ist die Gleichung der Simson-Geraden:

$$(x+a\cos 2\theta)\cos(\alpha+\beta+\cdots+\overline{n-2}\theta)$$
$$+(y-a\sin 2\theta)\sin(\alpha+\beta+\cdots+\overline{n-2}\theta)=2\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta+\theta)\cdots.$$

Die Eingehüllte dieser Geraden für ein variables θ wird bei verschiedenen Werten von n betrachtet. Gbs. (Lp.)

J. J. Duran Loriga. Sur les cercles radicaux. J. de Math. élém. (4) **5**, 78-83.

Uebersetzung des Aufsatzes aus Progreso mat. **5**, 200-205 (vergl. F. d. M. **26**, 572 u. 665, 1895). Lp.

Ampère. Nouvelle discussion de l'équation générale des courbes du second degré. Fragment. Mathesis (2) **6**, 253-255.

Der berühmte Physiker führt die Gleichung auf die Normalformen zurück: $xy+ax+by+c=0$, $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $(x-y)^2+a(x+y)+b=0$. Mn. (Lp.)

H. Lez. Détermination des foyers des sections coniques en coordonnées trilinéaires. Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24**, 267-277.

Der Verf. führt die Lösung seiner Aufgabe nach drei verschiedenen Methoden durch. Die erste ist die Plücker'sche; die zweite geht auf Ferrers zurück (Treatise on trilinear coordinates, 4th ed. 1890) und führt zu den Formeln von Stoll (Schlömilch J. **38** u. **39**, F. d. M. **25**, 1109, 1893/94); die dritte folgt dem Wege, den Salmon eingeschlagen hat in seinen Conic sections. Die Methoden werden an der Gleichung $\sqrt{lx}+\sqrt{my}+\sqrt{nz}=0$ erläutert. Lp.

R. Gilbert. Sur les réseaux de coniques. J. de Math. spéc. (4) **5**, 193-198.

In einem Kegelschnittsnetze $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 = 0$ ist im allgemeinen kein Kegelschnitt vorhanden, der zu einer doppelten Geraden ausartet. Der Verf. charakterisirt kurz diejenigen Netze, welche 1, 2, 3 oder 4 Doppelgeraden enthalten, und wendet diese Betrachtung auf die Herleitung meist bekannter Eigenschaften solcher Netze an, indem er im allgemeinen die Ergebnisse in kurzen Sätzen ausspricht. Von der bezüglichen Litteratur ist nur angeführt: Chasles, Traité des sections coniques, p. 340ff. Lp.

Ch. Michel. Sur les courbes unicursales du deuxième et du troisième ordre. J. de Math. spéc. (4) **5**, 265-269.

Bezüglich einer Formel, welche Appell in Nouv. Ann. über die Gruppen von Punkten aufgestellt hat, die aus einem festen Kegelschnitte durch einen veränderlichen, zwei feste Punkte P, Q enthaltenden Kegelschnitt ausgeschnitten werden, zeigt der Verf., dass dieselbe ausdrücke, ein Product aus vier Doppelverhältnissen sei constant. Hieraus werden verschiedene besondere Sätze gefolgert. Der im Titel angegebene Gegenstand wird wohl erst in der versprochenen Fortsetzung des Artikels behandelt werden. Lp.

A. Salomon. Ueber orthoaxiale Kegelschnitte. Hoppe Arch. (2) **15**, 1 - 13.

Es werden vier einfache Relationen zwischen den Schnitten von Geraden, Kreisen, orthoaxialen Parabeln und allgemeinen Kegelschnitten aus einander hergeleitet, beginnend mit der aus der Gleichung unmittelbar ersichtlichen Eigenschaft der vier Kreisparabelschnitte, dass die algebraische Summe ihrer Abstände von der Axe Null ist. H.

Ch. Michel. École Centrale (1re Session 1895). Solution. J. de Math. spéc. (4) **5**, 12-15.

Die Aufgabe betrifft den Büschel von Kegelschnitten, welche durch einen Punkt A der x-Axe gehen, die y-Axe in einem Punkte B berühren und als conjugirten Durchmesser zu Oy eine Gerade vom vorgegebenen Richtungscoefficienten m haben; die einzelnen Fragen erstrecken sich besonders auf die gleichseitigen Hyperbeln und die Parabeln dieses Büschels bei veränderlichem m. Lp.

A. Tissot. Question 324. Développement et solution. J. de Math. spéc. (4) **5**, 40-42.

Unter drei Kegelschnitten, welche zwei gegebene Kreise berühren, so dass die Mittelpunkte dieser Kreise sich nicht auf derselben Axe befinden, sind wenigstens zwei einander ähnlich. Lp.

E. N. Barisien. Exercices sur l'ellipse et l'hyperbole. J. de Math. spéc. (4) **5**, 8-11, 34-37, 50-54, 84-87, 112-116, 133-139, 164-165, 182-186, 210-211, 225-228, 259-261, 274-283.

Wie in den vorangehenden Jahrgängen des J. de Math. spéc. der Verf. eine grosse Zahl von instructiven Aufgaben über die Parabel gestellt und gelöst hatte, so geht er jetzt dazu über, aus dem grossen Vorrat seiner Sammlungen eine Reihe von Fragen über die Ellipse und Hyperbel zu behandeln. In 28 fortlaufend gezählten Artikeln vereinigt er eine Fülle von Sätzen, welche die Kenntnis der besonderen Eigenschaften der Kegelschnitte erweitern. Die durchgängig analytisch durchgeführten Lösungen sind zur Einübung der Methoden der analytischen Geometrie vortrefflich geeignet, bedürfen aber eines höheren Grades von Geschicklichkeit als man bei Anfängern voraussetzen darf. Lp.

M. d'Ocagne. Sur les segments de coniques limités à une normale. Nouv. Ann. (3) **15**, 215-217.

Der Verfasser stellt sich die Aufgabe: ein Flächenstück, begrenzt von einem gegebenen Kegelschnitt und einer gesuchten Normale, zum Minimum zu machen, und löst sie durch sehr einfache Schlüsse. Die Gleichung des Kegelschnitts sei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\varepsilon b^2}=1$ $(\varepsilon=\pm 1)$; dann sind die Coordinaten des Fusspunktes der Normale:

$$x=\frac{a^2}{\pm\sqrt{a^2-\varepsilon b^2}},\quad y=\frac{\varepsilon b^2}{\pm\sqrt{a^2-\varepsilon b^2}}.$$

Er hat sich ergeben als Schnittpunkt der gleichseitigen Hyperbel $x^2-y^2=a^2-\varepsilon b^2$ mit dem Kegelschnitt. H.

M. d'Ocagne. Note au sujet de la question 470. J. de Math. spéc. (4) **5**, 37-38.

Die Aufgabe fordert die Construction der Normale, welche von einer Parabel oder Hyperbel das kleinste Segment abtrennt. Der Verf. macht einige Bemerkungen über diese für die Ellipse zuerst von Ossian Bonnet 1844 in Nouv. Ann. (S. 64) gestellte Aufgabe, die seitdem öfter behandelt worden ist (vergl. F. d. M. **25**, 470, 1893/94), und giebt den Gedanken für einfache Lösungen an. Der Zusammenhang mit der Evolute wird kaum gestreift. Lp.

W. J. C. Miller. Question 9119. Ed. Times **64**, 84-85.

Eine Sehne PQ einer Parabel sei in P normal zu ihr und schneide den kleinsten Bogen ab. Ist dann O der Pol zu PQ, so erscheinen die Seiten des Dreiecks OPQ unter gleichen Winkeln $(\frac{2}{3}\pi)$ vom Brennpunkte F aus; weiter ist $FP:FO:FQ=1:2:4$. Wenn ferner PQ Sehne einer Ellipse ist, die in P normal zu ihr steht, und die Differenz der beiden Bogen PQ des Ellipsenumfanges ein Maximum ist, so ist die Länge p des Lotes vom Mittelpunkte der Ellipse auf die Tangente in P bestimmt durch die Gleichung $p^2(a^2+b^2-2p^2)(a^2+b^2-p^2)^2=(a^2-p^2)(b^2-p^2)(3p^2-a^2-b^2)^2$. Lp.

T. Hayashi. Note on a geometrical theorem. Tokio Math. Ges. **7**, 60-64 (1895).

Beziehungen zwischen den Radien von Kreisen, welche eine Ellipse und je zwei von drei Tangenten einer Ellipse berühren, unter denen zwei einander parallel sind. Lp.

A. Droz-Farny. Question 410. J. de Math. spéc. (4) **5**, 43-44.

Von einem Punkte P fälle man die Normalen PA, PB, PC, PD auf eine Ellipse. Jeder der vier Kreise, wie der Umkreis von BCD, trifft die zum Punkte P gehörige Apollonische Hyperbel in einem Punkte α. Wenn der Punkt P eine beliebige Curve in der Ebene beschreibt, so durchläuft das Centrum der mittleren Entfernungen für die vier Punkte α eine ähnliche Curve (bewiesen von E. N. Barisien). Lp.

E. N. Barisien. Solution de la question 418. J. de Math. spéc. (4) **5**, 188-190.

Von einem Punkte A einer Ellipse fälle man die drei Normalen AB, AC, AD auf dieselbe. Dann ist der Ort des Umkreiscentrums für das Dreieck BCD eine Ellipse, deren Inhalt ein Viertel von dem der gegebenen ist. Die Umkreise von BCD und $B_1C_1D_1$, gehörig zum anderen Endpunkte A_1 des Durchmessers AA_1, schneiden sich in den Endpunkten eines Durchmessers des Monge'schen Kreises. Die Polare des Mittelpunktes der Ellipse für alle Umkreise wie von BCD ist eine Ellipse; u. dergl. mehr. Lp.

Sanjana. Question 12701. Ed. Times **65**, 52-53.

Vom Centrum C einer Ellipse zieht man den Radius CP und errichtet in P die Sehne PT senkrecht zu CP. Der Ort des Halbirungspunktes von PT hat die Gleichung $(a^2y^2+b^2x^2)\sqrt{a^6y^2+b^6x^2} = ab(a^4y^2+b^4x^2)$. Lp.

E. Duporcq. Solution du problème proposé en 1896 au concours général de mathématiques spéciales. Nouv. Ann. (3) **15**, 566-571.

Die Aufgabe, deren Lösung folgt, lautet: Gegeben ist eine Ellipse E durch die Gleichung $x^2/a^2+y^2/b^2=1$. Gesucht ist das System coaxialer Ellipsen S von der Eigenschaft, dass zwischen beiden Dreiecke PQR existiren, deren Seiten S berühren, und deren Ecken in E fallen. Die Normalen an E in P, Q, R treffen sich in einem Punkte N; überdies giebt es unter den S solche von der Eigenschaft, dass diese Normalen durch die Pole P', Q', R' der Dreiecksseiten bezüglich auf E gehen. Diesen S zugehörig, soll der Ort der Mittelpunkte der dem Dreiecke $P'Q'R'$ conjugirten Kreise gefunden werden; die Enveloppe dieser Kreise ist der Ort der Punkte N. H.

E. N. Barisien, A. Droz-Farny. Question 501. J. de Math. spéc. (4) **5,** 229-233.

Man beschreibe um den Mittelpunkt einer Ellipse E von den Halbaxen a und b den Kreis K vom Radius $a+b$, so giebt es unendlich viele Dreiecke ABC, die K eingeschrieben, E umgeschrieben sind. Wenn A', B', C' die Berührungspunkte der Seiten von ABC mit E sind, so gehen die Normalen an E in A', B', C' durch einen und denselben Punkt N. Dieser Punkt N liegt symmetrisch zum Höhenschnitt H von ABC bezüglich des Ellipsenmittelpunktes. Endlich ist $HN = a-b$. Diese von Barisien ausgesprochenen Sätze werden von A. Droz-Farny bewiesen und durch weitere Beziehungen vermehrt (vgl. das vorangehende Referat). Lp.

Weill. Question 1498. Nouv. Ann. (3) **15,** 386-392.

Eine Gerade AB von constanter Länge gleitet mit ihren Endpunkten auf zwei festen Geraden mit dem Schnittpunkte C. Der Ort des Mittelpunktes für den Neunpunktekreis des Dreiecks ABC ist eine Ellipse; der Neunpunktekreis besitzt als Eingehüllte eine Parallelcurve zur Ellipse. Beweis von H. Brocard. Lp.

A. Mannheim, E. N. Barisien. Solution de la question 1709. Nouv. Ann. (3) **15,** 577-582.

Gegeben drei Kreise C_1, C_2, C_3 in einer Ebene. Ein vierter veränderlicher Kreis O berührt C_1 und C_2. 1) Die Hüllcurve der Potenzlinie von O und C_3 zu finden (ein Kegelschnitt). 2) Den Ort der Schnittpunkte derselben Potenzlinie mit der Verbindungslinie der Berührungspunkte von O mit C_1 und C_2 zu finden (zwei Kegelschnitte). Lp.

A. Droz-Farny. Les cercles de Chasles. Mathesis (2) **6,** 193-197.

Dieser Aufsatz enthält einige Berichtigungen zu einem Artikel von Barisien über denselben Gegenstand (Mathesis (2) **5,** F. d. M. **26,** 674, 1895), ferner sechs neue Eigenschaften der Chasles'schen Kreise aus Mitteilungen von Barisien an den Verf., endlich sieben Aufgaben bezüglich der Kegelschnitte. Dml. (Lp.)

E. N. Barisien. Propriétés des cercles de Chasles. Mathesis (2) **6,** 265-271.

Zweiundvierzig neue Eigenschaften der Chasles'schen Kreise und der mit ihnen zusammenhängenden Figuren. Dml. (Lp.)

Lemaire. Question 1641. Nouv. Ann. (3) **15,** 146-147.

Ein Kreis, der um einen Punkt P einer gleichseitigen Hyperbel als Mittelpunkt beschrieben ist und zum Radius den durch P gehenden Durchmesser PQ hat, schneidet die Curve ausser in Q noch in drei

Punkten A, B, C, so dass das Dreieck ABC gleichseitig ist. Beweis von E. Foucart. (Vergl. den Beweis von Mannheim in Nouv. Ann. (3) **15**, 290-292; Bericht in Abschn. VIII, Kap. 5B.) Lp.

C. Grolleau. École Normale supérieure. Concours de 1895. Solution. J. de Math. spéc. (4) **5**, 87-95.

Die mit grosser Umsicht gelöste Aufgabe, zu deren Erläuterung fünf Figuren beigefügt sind, lautet: Gegeben sind die Parabel $y^2 - 2ax - 4a^2 = 0$, der Kreis $x^2 + y^2 - 4a^2 = 0$. 1) Von einem Punkte P auf Oy zieht man an den Kreis und an die Parabel Tangenten, deren Berührungspunkte bezw. M, M' und N, N' sind. Zu zeigen, dass die Geraden MN, MN', $M'N$, $M'N'$ durch feste Punkte gehen, wenn P die Axe Oy durchläuft. 2) Einen in Bezug auf Oy symmetrischen Kegelschnitt (E) zu finden, der durch die vier Punkte geht. 3) Wieviel Kegelschnitte (E) gehen durch einen Punkt der Ebene; Natur dieser Kegelschnitte, je nach Lage des Punktes. 4) Man zieht an diese Kegelschnitte zu $y = x$ parallele Tangenten; Ort der Berührungspunkte. Auf diesem Orte die von Hyperbeln und die von Ellipsen herrührenden Punkte zu unterscheiden. Lp.

M. d'Ocagne. Correspondance. Nouv. Ann. (3) **15**, 432-434.

M. d'Ocagne teilt einige Sätze über die Parabel und eine Sehne M_1M_2 mit, die in M_1 normal ist. Die Tangenten in M_1 und M_2 schneiden sich in T; dann geht die Axenparallele von T durch die Mitte der Sehne. Der Krümmungsradius in M_1 verhält sich zu der Normale wie die Abscisse von M_1 zum Parameter. Es wird die Aufgabe gelöst, M_1 so zu bestimmen, dass der Parabelbogen M_1M_2 ein Minimum wird. H.

M. d'Ocagne. Sur les cordes normales de la parabole. Nouv. Ann. (3) **15**, 274-281.

Zu den im Vorigen genannten Gegenständen kommt hier noch die Bestimmung der Sehne selbst als Minimum. H.

J. F. d'Avillez. Sobre a área de um triangulo parabolico. Lisboa Jorn. 1896.

Der Verf. bestimmt den Flächeninhalt des Dreiecks, gebildet von drei Parabelbogen, die sich in den Ecken eines gegebenen Dreiecks paarweise berühren. Tx. (Lp.)

G. de Longchamps. Le problème de la duplication du cube. Mathesis (2) **6**, 245-246.

Lösung mit Hülfe einer festen Parabel. Mn. (Lp.)



Weitere Litteratur.

Girod. Sur un problème de géométrie analytique. Rev. de Math. spéc. **6**, 489-491.

E. Humbert. Sur l'équation générale des coniques qui passent par l'intersection de deux autres. Rev. de Math. spéc. **7**, 33-36.

W. de Tannenberg. Note sur la théorie des coniques. Rev. de Math. spéc. **6**, 441-446.

H. Längst. Kegelschnitte (2. Teil), analytisches Repetitorium mit geometrischem Anhang, im Anschluss an den „vorbereitenden Kurs“ bearbeitet. Stuttgart: W. Kohlhammer. XII + 180 S. 8°. Mit 5 Taf.

W. Loos. Analytische Behandlung einiger Grundprobleme der projectiven Geometrie. Giessen. 31 S. 8°.

J. Morawitz. Zur analytischen Geometrie des Punktes und der Geraden. Salzburg. 24 S. 8°.

D. Andere specielle Curven.

W. Bunkofer. Die arithmetischen Functionen der drei ersten Ordnungen. Pr. (No. 628) Gymn. Wertheim. 18 S. 4°. Mit 1 Fig.-Taf.

Der Verf. geht von der Anschauung aus: „Das Gymnasium kann und darf sich der Aufgabe nicht entziehen, die Rechnung des Stetigen unter Beziehung des Unendlichkleinen zur vollen klaren Anschauung zu bringen“, und zeigt hier, wie dies beim Uebergange von der discreten auf die stetige arithmetische Function und Reihe zu machen ist. Es werden, ausgehend von der einfachsten Form $y = ax^2$, die Curven $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ betrachtet und dabei die Begriffe Steigung, Ablenkung (Differentialquotient), Wendepunkt, Krümmung, Krümmungsmittelpunkt in einer durchaus klaren und zweckentsprechenden Weise zur Sprache gebracht. Es wird jeder Leser diese „methodische Studie zum Ausbau der Gymnasialmathematik“ mit Interesse lesen. Lg.

G. Loria. I poligoni di Steiner nelle cubiche razionali. Prag. Ber. 1896, No. 36, 4 S.

Die Existenzfrage nach den Steiner'schen Polygonen auf rationalen Curven dritter Ordnung findet verschiedene Lösungen bei den drei Fundamentaltypen. Die Curven mit einem reellen Doppelpunkte enthalten stetig-unendlich viele reelle Steiner'sche $2n$-Ecke bei ungeradem n, aber keine solchen Polygone bei geradem n. Bei den Curven dritter Ordnung mit einem isolirten Punkte giebt es $n-1$ Reihen von reellen Steiner'schen $2n$-Ecken. Dagegen giebt es keine Steiner'schen Polygone bei Curven mit Spitze. Lh.

Ch. A. Scott. Note on equianharmonic cubics. Messenger (2) **25**, 180-185.

Eine allgemeine Theorie wird gegeben und auf kubische Curven angewandt. Die Untersuchung ergiebt zwei unterschiedliche Typen äquianharmonischer kubischer Curven, die darin übereinstimmen, dass sie die ausgeartete Hesse'sche Curve besitzen. In dem einen Falle besteht dieselbe aus drei reellen Geraden, in dem anderen aus einer reellen und zwei imaginären. In beiden Fällen müssen die Tripel sich schneidender Wendetangenten in den Ecken des Hesse'schen Dreiecks zusammentreffen. Der erste Fall wird eingehend betrachtet; hierbei ist das System der vier äquianharmonischen Curven $x^3 \pm y^3 \pm z^3 = 0$.

Glr. (Lp.)

W. Kapteyn. Over het construeeren van krommen der derde klasse. Amst. Sitz.-Ber. **5**, 146-150.

Construction einer Curve dritter Klasse, wenn gegeben sind die reellen Brennpunkte, der Satellitpunkt und eine Tangente. Mo.

P. H. Schoute. Over de ligging der enkelvoudige brandpunten eener circulaire kubische kromme van het eerste geslacht. Amst. Sitz.-Ber. **5**, 261-269.

Sätze über die Lage der Brennpunkte einer circularen kubischen Curve vom ersten Geschlechte. Mo.

P. Serret. Sur une double série récurrente de points toujours homocycliques et de cercles toujours en collinéation, attachés aux polygones d'ordre 3, 4, ..., résultant de ν droites indépendantes, employées successivement dans un ordre donné. C. R. **123**, 396-399.

P. Serret. Sur une classe de propositions analogues au théorème Miquel-Clifford et sur les propriétés qui en résultent pour les polygones de 5, 6, 7, 11, 12 côtés, circonscrits à l'hypocycloïde de module $\frac{1}{3}$. C. R. **123**, 415-418.

P. Serret. Sur l'emploi d'un cercle fixe, dérivé d'un groupe quelconque de sept tangentes d'une conique, pour définir, a priori, le cercle dérivé de sept droites quelconques. C. R. **123**, 442-444.

Indem der Verfasser Untersuchungen fortsetzt, über die in F. d. M. **25**, 1105, 1893/94 und **26**, 662-663, 1895 berichtet worden ist, gelangt er durch Anwendung seiner Theorie der „équilatères" beliebiger Ordnung auf wesentlich verschiedenem Wege zu derselben Reihe von merkwürdigen Punkten und Kreisen, die bei Clifford auftritt. So geht zum Beispiel parallel mit dem Satze von Clifford: „Der Ort der Brennpunkte derjenigen Curven dritter Ordnung, die die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente haben und die einem Fünfeck eingeschrieben sind, ist ein Kreis" (cercle de Miquel) der Satz von Serret: „Der Ort der Mittelpunkte der équilatères dritten Grades, die zu demselben Fünfeck gehören, ist ein Kreis."

Im Anschluss hieran wird die Aufgabe gelöst, die Bedingungen anzugeben, denen das Fünfeck genügen muss, damit der zugehörige Miquel'sche Kreis in eine Gerade ausartet. Es stellt sich heraus, dass das Fünfeck einer Hypocykloide vom Modul $\frac{1}{5}$ umgeschrieben sein muss.

In der dritten Note, die als Ergänzung zu der Note vom 3. September 1894 anzusehen ist, handelt es sich um die Construction des zu einem Siebenseit gehörigen Kreises, und zwar wird gezeigt, dass der allgemeine Fall auf den besonderen zurückgeführt werden kann, in dem die sieben Geraden einen und denselben Kegelschnitt berühren.

St.

A. Boutin, Welsch. Sur la question 409. J. de Math. spéc. (4) **5**, 54-55, 57-61.

Die kubischen Curven, welche durch die Transformation $(1/x, 1/y, 1/z)$ für (x, y, z) in sich selbst übergehen, gehören zu den beiden Typen von Gleichungen:

(1) $Ax(y^2-z^2)+By(z^2-x^2)+Cz(x^2-y^2)=0,$

(2) $Ax(y^2+z^2)+By(z^2+x^2)+Cz(x^2+y^2)+Dxyz=0.$

Für die Curven (1) geht die Verbindungslinie zweier entsprechenden Punkte durch den festen Punkt $x=A$, $y=B$, $z=C$. Für die Curven (2) umhüllt diese Verbindungslinie eine Curve sechster Ordnung dritter Klasse, deren Gleichung von Welsch aufgestellt wird.

Lp.

J. Balitrand. Solution de la question 152. J. de Math. spéc. (4) **5**, 16-17.

Legt man von einem beliebigen Punkte aus die Tangenten an einen Kreisbüschel, so ist der Ort der Berührungspunkte eine circulare kubische Curve. Wenn eine circulare kubische Curve auf diese Art erzeugt werden kann, so treffen sich ihre imaginären Asymptoten auf der Curve.

Lp.

Elgé. Un théorème sur les cubiques circulaires. J. de Math. spéc. (4) **5**, 6-7.

Verwandelt man eine circulare kubische Curve von einem ihrer Punkte aus als Pol durch reciproke Radien in eine andere circulare kubische Curve, so haben beide Curven noch 7 Punkte gemeinsam, von denen 3 auf einer Geraden liegen und 4 auf einem Kreise um den Pol als Mittelpunkt.

Lp.

Cazamian. Question 414. J. de Math. spéc. (4) **5**, 117-119.

Gegeben sei ein Kreis (C), ein Punkt O auf diesem Kreise, die Tangente Δ am anderen Endpunkte S des durch O gehenden Durchmessers. Man ziehe durch O eine Secante, die den Kreis in R, die Tangente in I treffe, und nehme den Punkt M so an, dass $RM = RI/n$, so beschreibt M eine circulare kubische Curve mit S als Scheitel, O als

Doppelpunkt: $(x^2+y^2)nx-a(nx^2-y^2)=0$, und zwar für $n=1$ die Strophoide, für $n=3$ die Mac-Laurin'sche Trisectrix. Lösung von A. Droz-Farny. Lp.

WICKERSHEIMER. Sur la strophoïde droite. J. de Math. spéc. (4) **5**, 169-171.

Bemerkungen zu Tangentenconstructionen, im Anschluss an die Géométrie analytique von G. de Longchamps. Lp.

A. HIMSTEDT. Die Secanten und Tangenten des Folium Cartesii. Hoppe Arch. (2) **15**, 129-145.

Nach eingehender Discussion der Gestalt und Lage dieser Curve, deren Gleichung $x^3-3axy+y^3=0$ ist, werden die von einem Punkte ausgehenden Tangenten (einschliesslich Asymptoten) untersucht und mit Unterscheidung von 12 Fällen ihre Zahl und Berührungspunkte angegeben. H.

ÉD. COLLIGNON. Une remarque sur certains nombres et conséquences qu'on peut en tirer. Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24**, 6-42.

Zunächst werden die Gruppen aus zwei Zahlen betrachtet, deren Summe ihrem Producte gleich ist, sodann allgemeiner Zahlen, für welche die Summe, die Summe ihrer Producte zu je zwei, drei u. s. w. einen und denselben Wert hat, und die Ueberlegungen werden graphisch erläutert. Unter Beschränkung auf binäre Gruppen wird nun die Zahl gesucht, durch welche man zwei gegebene Zahlen x und y zu dividiren hat, damit die Quotienten die verlangte Eigenschaft haben. Da dieselbe als $z=xy/(x+y)$ gefunden wird, so kann man diese Formel zur Erzeugung gewisser Zahlreihen verwenden, oder indem man z als Coordinate deutet, zu einer besonderen graphischen Transformation oder gewissen geometrischen Constructionen. Setzt man z. B. $y_1=xy/(x+y)$, $y_2=xy_1/(x+y_1)$, $y_3'=xy_2/(x+y_2)$, ..., so wird eine Gerade $y=ax+b$ nach k-maliger Anwendung der Formel in die Hyperbel transformirt $y_k[(ka+1)x+kb]=x(ax+b)$, die gleichseitige Hyperbel $xy=a^2$ in die Curve dritter Ordnung $y_k(x^2+ka)=a^2x$, oder nach einmaliger Transformation die Curve $y(x^2+B)=Ax$ in $y_1(x^2+B+A)=Ax$. Die Untersuchung dieser Curve wird nun nach allen üblichen Richtungen hin durchgeführt: Tangenten, Wendepunkte, Quadratur, Schwerpunkt, orthogonale Trajectorien, Beziehungen zweier benachbarten Curven bei der Transformation, Zurückführung der Curven auf einen gemeinsamen Typus, Verallgemeinerung der Transformation. Als Anwendungen dieser Curven auf Vorgänge in der Natur giebt der Verf. zuletzt: Profil eines Eisberges, Querschnitt von Deichen und Dünen, Linie der mittleren Lebensdauer und zugehörige Sterblichkeitscurve. Lp.

Elgé. Sur la courbe de Rolle, sa construction par points et par tangentes. J. de Math. spéc. (4) 5, 32-34.

Die Curve $xy^2 = a(y+x)^2$, oder etwas verallgemeinert $xy^2 = a(y-mx)^2$ ist die fragliche Curve; sie hat die charakteristische Eigenschaft, einen Rückkehrpunkt zu besitzen und die Gerade im Unendlichen zu berühren. S. 55 macht M. d'Ocagne in einer Zuschrift auf seine Behandlung der kubischen Curven mit Spitze in Nouv. Ann. 1892, 386 aufmerksam. Lp.

Reinh. Müller. Ueber die doppelpunktige Focalcurve. Schlömilch Z. 41, 62-64.

Die Bedingung dafür, dass eine Focalcurve dritter Ordnung, d. h. eine ebene Curve dritter Ordnung, die durch die imaginären Kreispunkte geht, und deren Focalcentrum, der reelle Schnittpunkt ihrer imaginären Asymptoten, auf der Curve selbst liegt, einen Doppelpunkt hat, lautet: $c^4-4c^2(af+bg)-4(ag-bf)^2=0$, wenn die Gleichung der Curve, was stets möglich ist, die Form hat: $(ax+by+c)(x^2+y^2)+fx+gy=0$. Sie ist also nur vom vierten Grade, während diese Bedingung im Falle der allgemeinen Curve dritter Ordnung bekanntlich den 12. Grad erreicht. T.

Dumont. Sur la classification des cubiques planes. Rev. de Math. spéc. 7, 153-155.

R. Gentry. On the forms of plane quartic curves. Diss. presented to the faculty of Brynn Mawr College. New York: Press of R. Drummond. 73 S. 8°. Mit 12 Fig.-Taf.

Eine ins Einzelne gehende Klassification der ebenen Curven vierter Ordnung, namentlich im Hinblick auf die verschiedenen Gestalten, die sie darbieten, mit dem Nachweis ihrer Existenz. T.

E. Bertini. Le tangenti multiple della Cayleyana di una quartica piana generale. Torino Atti 32, 32-33.

Die Cayley'sche Curve einer ebenen Curve vierter Ordnung besitzt 21 vierfache und keine weiteren vielfachen Tangenten; es sind dies diejenigen Geraden, welche die Bestandteile von zerfallenden kubischen Polaren der Curve vierter Ordnung sind, und es giebt auf jeder von ihnen eine Involution von ∞^1 Punkttripeln, welche zu der Curve apolar sind, während im allgemeinen auf einer Geraden nur ein einziges derartiges Tripel existirt. T.

H. Liebmann. Ueber die ebenen Curven vierter Ordnung vom Geschlechte Eins. Schlömilch Z. 41, 85-92.

Durch projective Verallgemeinerung einer von Thomae gegebenen Abbildung der Ebenen oder Punkte des Raumes auf die Kreise einer Ebene durch Vermittlung einer Kugel (Schlömilch Z. 29, 284-305;

vgl. F. d. M. **16**, 737f., 1884) gelangt der Verf. zu einer einfachen Ableitung bekannter und einiger neuen Eigenschaften der ebenen Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, die sich als selbstverständliche Folgerungen aus denen der Flächen zweiter Ordnung darstellen. Diese Abbildung der Ebenen des Raumes auf das System aller durch zwei feste Punkte gehenden Kegelschnitte einer Ebene σ ergiebt sich, wenn man die Schnittcurve der Ebenen mit einer gegebenen Fläche zweiter Ordnung Φ von einem festen Punkte N der Fläche Φ aus auf σ projicirt; die so erhaltenen Kegelschnitte gehen sämtlich durch die beiden Punkte, in denen die durch N gehenden Erzeugenden von Φ die Ebene σ treffen. Einer Geraden als Träger eines Ebenenbüschels entspricht dann ein Kegelschnittbüschel in σ, und dem Erzeugnis zweier projectiven Ebenenbüschel dasjenige zweier projectiven Kegelschnittbüschel mit zwei gemeinsamen Grundpunkten, d. h. einer Fläche zweiter Ordnung eine ebene Curve vierter Ordnung vom Geschlechte Eins. Da umgekehrt dieselbe Curve vierter Ordnung als Bild von allen Flächen zweiter Ordnung geliefert wird, die Φ in derselben Raumcurve (vierter Ordnung erster Species) durchdringen, so wird durch Betrachtung dieses Flächenbüschels eine besonders anschauliche Uebersicht über die verschiedenen möglichen Erzeugungsarten ein und derselben ebenen Curve vierter Ordnung vom Geschlechte Eins durch projective Zuordnung von Kegelschnittbüscheln gewonnen. T.

J. de Vries. Over bipolaire coördinaten. Amsterdam Sitz.-Ber. **4**, 219-224.

J. de Vries. Over een betrekking tusschen een stelsel confocale ovalen van Descartes en een eenvlakkige hyperboloïde. Amsterdam Sitz.-Ber. **4**, 252-259.

J. de Vries. Recherches sur les coordonnées multipolaires. Archives Teyler, **5**, 99-158.

In der ersten Arbeit wird der Satz von Chasles, nach welchem die Ovale des Descartes drei alineirte Brennpunkte besitzen, mittels des Theorems von Stewart bewiesen. Bedingung für die Orthogonalität zweier Curven in bipolaren Coordinaten. Anwendung auf confocale Cartesi'sche Ovale.

In der zweiten Note werden die von drei alineirten Polen ausgehenden Fahrstrahlen eines Punktes einer Ebene gedeutet als orthogonale cartesische Raumcoordinaten eines Bildpunktes. Die zwischen den drei Fahrstrahlen bestehende Stewart'sche Gleichung stellt alsdann ein einschaliges Hyperboloid dar, dessen beide Regelscharen die Bilder sind für zwei orthogonale Systeme confocaler Cartesi'scher Ovale. Ferner ergiebt sich, dass die Schnittcurve des Hyperboloids mit einer durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegten Ebene die Abbildung liefert für eine zweiteilige Cassini'sche Curve. Es wird gezeigt, dass die Symmetrieaxe, welche diese Curve schneidet, vier Pole besitzt, in Bezug auf welche die Curve dargestellt werden kann durch eine homogene lineare Gleichung zwischen drei Fahrstrahlen.

Die dritte Arbeit enthält ausser dem Obigen eine systematische Betrachtung über bipolare, biangulare, tripolare und quadripolare Coordinaten (wo die Pole alineirt oder concyklisch sind) und gewisse involutorische Transformationen solcher Coordinaten mit Anwendung auf Cartesi'sche, Pascal'sche und Cassini'sche Curven. Merkwürdige Geraden und Kreise des Dreiecks in tripolaren Coordinatien. Cyklische Curven. Mo.

A. C. Dixon. Cartesian ovals. Quart. J. **28**, 375-376.

Elementare Ableitung der bekannten Fundamentaleigenschaften. R. M.

E. N. Barisien. Question 1635. Nouv. Ann. (3) **15**, 97-98.

Zieht man von einem Punkte M in der Ebene einer Bernoulli'schen Lemniskate die Tangenten MT_1, MT_2, MT_3, ... und die Normalen MN_1, MN_2, MN_3, ... an dieselbe, so ist $OT_1.OT_2.OT_3 \ldots = ON_1.ON_2.ON_3 \ldots$, wenn O der Mittelpunkt der Curve ist. Beweis von E. Foucart. Lp.

R. Lachlan. On the double foci of a bicircular quartic and the nodal focal curves of a cyclide. Lond. M. S. Proc. **27**, 71-85.

Unter Anwendung von „Potenzcoordinaten", ähnlich denen, die in einer früheren Arbeit (London M. S. Proc. **11**, 242-245 und London Phil. Trans. **177**, 481-625; vgl. F. d. M. **18**, 491ff., 1886) benutzt worden sind, d. h. vier Grössen, die den Potenzen eines Kreises (Punktes, einer Geraden) — vgl. F. d. M. a. a. O. S. 492 — in Bezug auf vier einem orthogonalen System angehörige Kreise proportional sind, werden die Gleichungen für die Doppelbrennpunkte einer bicircularen Curve vierter Ordnung aufgestellt, aus denen sich sehr einfach ergiebt, dass der Ort dieser Punkte für ein System von confocalen bicircularen Curven vierter Ordnung aus den beiden circularen Curven dritter Ordnung des Systems besteht (vgl. Salmon-Fiedler, Theorie der Kegelschnitte, 5. Aufl. S. 535ff.). In genau entsprechender Weise wird das analoge Problem für den Raum behandelt und gezeigt, dass der Ort der Doppelfocalcurven eines Systems von confocalen Cykliden aus den drei kubischen Cykliden des Systems besteht. T.

Elgé. Sur les quartiques bicirculaires. J. de Math. spéc. (4) **5**, 150-152.

Die Gleichung jeder bicircularen biquadratischen Curve kann in der Form geschrieben werden $(x^2+y^2)^2+(x^2+y^2)(\alpha x+\beta y)+\varphi_2=0$, wo φ_2 die Glieder von der zweiten Dimension abwärts enthält. Transformirt man diese Gleichung auf den Punkt x_0, y_0 als Anfangspunkt, für welchen $\alpha+4x_0=0$, $\beta+4y_0=0$, so nimmt die Gleichung die Form an $(x^2+y^2)^2+\Phi_2=0$; der Verf. nennt (x_0, y_0) den „Fundamentalpunkt" der bicircularen Curve vierter Ordnung. Derselbe steht von den Mitten der beiden Abschnitte einer beliebigen Secante gleich weit ab, wie Ref.

an einem anderen Orte früher bemerkt hatte (Ed. Times **61**, 80-81; F. d. M. **25**, 1149, 1893/94). Lp.

P. H. Schoute. Les quartiques à trois points doubles d'inflexion. Teixeira J. **13**, 10-16.

Analytische Darstellung der vom Verf. im Archiv für Math. u. Phys. (2) **2**, 113-128; **3**, 113-137; **4**, 308-322; **6**, 112-156 (F. d. M. **17**, 634, 1885; **18**, 572, 1886; **20**, 637, 1888) nach synthetischer Methode abgeleiteten Resultate. Besonders werden die Eigenschaften der von ihm „Kreuzcurve" genannten Linie betrachtet. Tx. (Lp.)

A. Wittstein. Notiz über das eigentliche Oval. Hoppe Arch. (2) **14**, 109-111.

A. Wittstein. Nachtrag. Ibid. 441.

Die so bezeichnete Curve (hinsichtlich ihrer historischen Beziehung wird auf Bösser's Inauguraldissertation, Kiel, 1869, verwiesen) hat die Gleichung: $(x^2+y^2)^3=ax^5$. Es wird ihre Evolute, ihr Flächeninhalt, ihre Länge, das Volumen des in der von ihr erzeugten Rotationsfläche umschlossenen Körpers und der Flächeninhalt selbst, dann im Nachtrag der Schwerpunkt der ebenen Fläche angegeben. H.

Elgé. Sur le folium double. J. de Math. spéc. (4) **5**, 73-75.

Bemerkungen über die Curve, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten $(x^2+y^2)^2=4axy^2$ ist, oder auch $y=\pm\sqrt{ax}\pm\sqrt{ax-x^2}$ (als Uebungsaufgabe in Nouv. Ann. 1857 S. 390 von Montucci vorgeschlagen; Lösung ebenda S. 449). Lp.

Wickersheimer. Sur les conchoïdes. J. de Math. spéc. (4) **5**, 97-102, 121-127.

Der Cours de mathématiques spéciales von G. de Longchamps enthält auf S. 19 und 26 eine Construction für die Tangenten der allgemeinen Konchoiden; dieselbe wird vom Verf. zuerst für die Konchoide einer Geraden (die Nikomedi'sche), sodann für die allgemeine Konchoide betrachtet. Der bekannte einfache Satz, dass die polare Subnormale für zwei zusammengehörige Punkte der Basiscurve und der Konchoide dieselbe Linie ist (weil aus $r=f(\varphi)$ und $r=f(\varphi)+c$ beidemale $dr/d\varphi=f'(\varphi)$ folgt), erscheint dabei erst als letzte Folge jener Construction. Weiter ermittelt dann der Verf. den Krümmungsmittelpunkt für die Nikomedi'sche Konchoide, ihre Wendepunkte (die bekannte kubische Gleichung für dieselben) und dergleichen mehr. Lp.

G. Leinekugel. Sur deux problèmes de géométrie que l'on peut avoir à résoudre dans un levé hydrographique. J. de Math. spéc. (4) **5**, 25-27.

1. Gegeben sind drei Punkte A, B, C; von einem Punkte M aus bestimmt man die Winkel AMB, BMC, die beide um eine und dieselbe unbekannte Grösse falsch sind. Auf welchem Orte befindet sich M? (Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkt in B.) 2. Die Lage zweier Punkte M und M' zu bestimmen durch Anschluss an eine Triangulation, von der man nur zwei unzugängliche Punkte A, B sieht. Lp.

MATZ, H. W. CURJEL, RADHAKRISHNAN. Solution of question 12978. Ed. Times **65**, 50.

Quadratur der Curve, genannt „Kremphut“: $x^4+x^2y^2+4ax^2y-2a^2x^2+3a^2y^2-4a^3y+a^4=0$; ebenso Kubatur der Rotationskörper. Lp.

A. EMCH. Theory of compound curves in railroad engineering. Kansas Univ. Quart. **5**, 99-108.

Die Theorie dieser Curven ist identisch mit der zweier besonderen projectiven Kreisbüschel. Js.

E. LEMOINE, D. BIDDLE, H. J. WOODALL. Solution of question 10434. Ed. Times **64**, 107-109.

Die beiden Punkte M und M' in der Ebene des Dreiecks ABC haben die tripolaren Coordinaten m, n, l und bezw. n, l, m. Den Ort von M und M' zu finden. Lp.

H. FREITAG. Untersuchung I. der Curve $(x/a)^{\frac{2}{3}}+(y/b)^{\frac{2}{3}}=1$, II. der Fläche $(x/a)^{\frac{2}{3}}+(y/b)^{\frac{2}{3}}+(z/c)^{\frac{2}{3}}=1$. Pr. (No. 555) Gymn. Schneeberg. 24 S. 4°.

Es werden diese Gebilde in der hergebrachten Weise discutirt und für die Fläche mehrere Constructionen angegeben. T.

E. JANISCH. Ueber eine specielle Fusspunktcurve der Steiner'schen Hypocykloide. Wien. 19 S. 8°.

G. A. GIBSON. Some properties of parabolic curves. Edinb. M. S. Proc. **14**, 31-34.

Das folgende Problem wird erörtert: Eine Curve wird auf die Tangente und die Normale in einem Punkte O als x- und y-Axe bezogen; die Tangente in P schneidet die x-Axe in M, die y-Axe in N. Man nehme OM und ON als Coordinaten eines Punktes P'; welche Gleichungen müssen die Oerter von P und P' haben, wenn die Fläche zwischen der Sehne OP' und dem Bogen OP' n-mal so gross ist wie die Fläche zwischen dem Bogen OP und den Tangenten OM, MP? Gbs. (Lp.)

Aubry. De l'usage des figures de l'espace pour la définition et la transformation de certaines courbes. J. de Math. spéc. (4) **5**, 3-6, 28-32, 76-84, 106-112, 130-132, 152-156, 175-181, 208-210.

Fortsetzung der Arbeit, über deren Anfang in F. d. M. **26**, 648, 1895 berichtet ist. In den ersten beiden Abschnitten setzt der Verf. seine Verwandlungen von Figuren durch verschiedene Abbildungsmethoden fort und führt dabei zu den schon früher gebrauchten Namen für manche specielle Curven wie: (Vivianienne, Cloelia) noch verschiedene neue hinzu: orthoarchimedische, orthoflamsteedische, ortholambertische Curve zu einer gegebenen Curve (je nach den benutzten Abbildungsprincipien), ebenso orthostereographische, stereomercatorische, stereolambertische, gnomonische und orthognomonische, welche Namen wir registriren, weil dieselben sich oft über Erwarten schnell einbürgern.

An den folgenden Stellen werden zwei Noten zum Abdruck gebracht, die erste über die Trisection des Winkels, die zweite (mit S. 130 beginnend) über die geometrische Quadratur einiger ebenen Curven. Beide Artikel sind historische Skizzen über das betreffende Thema, und obgleich sie keinen Anspruch darauf erheben, den Gegenstand zu erschöpfen, so bringen sie doch aus dem Schatze des Wissens des Verf., der hauptsächlich Werke des Altertums oder französische Quellen umfasst, eine Menge interessanten Materials, das einerseits für Lehrzwecke gute Dienste leisten kann, andererseits auch als nützlicher Beitrag zur Geschichte der Mathematik anzusehen ist. Lp.

P. Appell. Exercices sur les courbes de direction. Nouv. Ann. (3) **15**, 491-495.

Richtungscurven werden nach M. d'Ocagne diejenigen Curven genannt, deren Linienelement, dividirt durch seine Projection auf eine Axe, eine rationale Function der Coordinaten ist. Der Verf. giebt ein Mittel an, aus einer Richtungscurve unendlich viele andere herzuleiten. Sei nämlich $F(X, Y) = 0$ die gegebene Richtungscurve, S ihr Bogen, also $dS = \sqrt{dX^2 + dY^2} = R(X, Y)dX$, wo R eine rationale Function ist. Sei dann $z = x + iy$ und $f(z)$ eine rationale Function derart, dass alle Residua von $f^2(z)$ Null sind. Das Integral $Z = X + iY = \int f^2(z)dz$ ist dann rational in z, mithin auch $X = \varphi(x, y)$ und $Y = \psi(x, y)$ rational in x, y. Durch jede solche Substitution geht daher die Curve in eine neue Richtungscurve über. H.

A. Cabreira. Sobre a geometria das curvas trigonometricas. Lisboa.

Diese Schrift enthält einige ganz elementare Beziehungen zwischen den Curven, bei denen der Radiusvector eine trigonometrische Function des Polarwinkels ist. Tx. (Lp.)

A. Cabreira. Sobre a geometria da espiral. Lisboa.

Diese Schrift enthält einige ganz elementare Sätze über die Beziehungen zwischen den Spiralen $\varrho^n = a^n \theta/\pi$, der logarithmischen und der hyperbolischen Spirale. Tx. (Lp.)

G. Lazzeri. Sopra un problema di strategia navale. Rivista marittima. Rom. Dezember 1896.

Die strategische Frage, welche in diesem Aufsatze behandelt wird, ist die folgende: Welchen Weg muss ein Schiff beschreiben, um mit der grösstmöglichen Wahrscheinlichkeit ein feindliches Schiff zu entdecken, dessen grösste Geschwindigkeit und dessen Lage man in einem gegebenen Augenblicke kennt? Der Verf. beweist, dass die gesuchte Curve eine logarithmische Spirale ist; als Folgerungen dieses Satzes erhält er die Auflösung anderer Aufgaben, welche zur Nautik gehören und daher hier übergangen werden mögen. La.

C. E. Wasteels. Aires et volumes relatifs à la chaînette. Mathesis (2) **6**, 241-245.

Die Resultate werden durch die Berechnung der Grenzen von Summen unendlich kleiner Zahlen erhalten, ohne Zuhülfenahme der Integralrechnung oder der Umkehrung der Differentialrechnung. (Vergl. Gretschel im Arch. f. Math. **43**, 121, 1865). Mn. (Lp.)

E. Lampe. Note on question 992. Ed. Times **64**, 29-30.

Unter No. 992 war eine Aufgabe von S. Watson gestellt worden, die lange Zeit keine genügende Lösung gefunden hatte: Ein Kreis und ein Quadrat haben gleichen Umfang; das Quadrat wälzt sich, ohne zu gleiten, auf der Peripherie des Kreises herum. Den Flächeninhalt der vom Mittelpunkte des Quadrates beschriebenen Curve zu finden. In Ed. Times **60**, 84 hatte Zerr eine Lösung für das allgemeinere Problem gegeben, bei welchem das Quadrat durch ein beliebiges reguläres Polygon von gleichem Umfange mit dem Kreise ersetzt war. Die Prüfung des Resultates ergab aber einen Fehler; diesen berichtigt Ref., indem er die Aufgabe zugleich mit der Kreisevolvente in Beziehung setzt. Der gesuchte Inhalt ist für ein regelmässiges n-Eck:

$$F = a^2\pi\left\{1 + \frac{\pi}{m}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{m} + \frac{\pi^2}{m^2}\left(\tfrac{1}{3} + \operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{m} + \operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{m}\right)\right\}.$$

Lp.

Kapitel 3.

Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

G. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. Vol. IV: Déformation infiniment petite et représentation sphérique. Fasc. 2. Paris: Gauthier-Villars et Fils. S. 353-548, 8°.

Bericht in F. d. M. **25**, 1159ff., 1893/94.

L. Bianchi. Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisirte deutsche Uebersetzung von M. Lukat. In zwei Lieferungen. Erste Lieferung. Leipzig: B. G. Teubner. IV + 336 S. 8°.

Die Besprechung erfolgt nach Erscheinen der zweiten Lieferung.
St.

P. Stäckel. Beiträge zur Flächentheorie. Leipz. Ber. **48**, 1896, 478-504.

Es handelt sich in diesen Beiträgen um vier getrennte Gegenstände.

I. Zur Theorie der Krümmungslinien. Nach dem Vorgange von Lie untersucht Verf. die Modificationen, welche die klassische Krümmungstheorie erfährt, wenn man auch imaginäre Flächen zulässt, und in besonderem den Satz, dass die Krümmungslinien ein Orthogonal-System bilden. Dabei ergeben sich als Ausnahme von dem allgemein richtigen Satze ausser der Kugel, bei der jede Flächencurve Krümmungslinie ist, noch solche Flächen, die durch das Zusammenfallen der einen Schar von Minimallinien mit der einen Schar von Asymptotenlinien charakterisirt sind, und bei denen nur eine Schar von Krümmungslinien existirt; es sind übrigens geradlinige Flächen, die durch Bewegung einer Minimalgeraden entstehen.

II. Ueber die Fundamentalgrössen der Flächentheorie. Einen wichtigen Satz von O. Bonnet verallgemeinert Verf. wie folgt. Werden zwei Flächen S und S_1 auf einander bezogen, und stellt es sich heraus, dass in entsprechenden Punkten von S und S_1 die Verhältnisse der drei Fundamentalgrössen erster Ordnung und die der drei Fundamentalgrössen zweiter Ordnung übereinstimmen, so lässt sich S in S_1 durch eine Aehnlichkeitstransformation überführen, so dass die Bildpunkte in einander übergehen; ausgenommen ist aber eine durch eine gewisse partielle Differentialgleichung charakterisirte Klasse von Flächen, zu denen u. a. die Kugel und die Minimalflächen gehören.

III. Zur Theorie der Minimalflächen. Da diese die Eigenschaft haben, durch die beiden Scharen ihrer Asymptotenlinien in Quadrate zerlegt zu werden, sucht Verf. eine Verallgemeinernng dadurch zu ge-

winnen, dass er nach den Flächen fragt, die durch ihre Asymptotenlinien in Rhomben mit constantem Winkel ϑ geteilt werden. Dabei zeigt sich merkwürdigerweise, dass für jedes ϑ nur eine ganz bestimmte Fläche R_ϑ erhalten wird, welche für $\vartheta = \pi/2$ in das Catenoid übergeht; alle anderen Minimalflächen sind in den Formeln nicht enthalten. R_ϑ hat übrigens mit den Minimalflächen mehrere Haupteigenschaften gemein.

IV. Abbildungen und Normalschnitte. Es wird untersucht, wann bei der Abbildung einer Fläche S_1 auf eine zweite S_2 der Krümmungskreis eines Normalschnittes invariant bleibt; dies tritt im allgemeinen für acht verschiedene Richtungen ein, aber hervorzuhebende Vereinfachungen werden gewonnen, wenn die Abbildung das Gauss'sche Krümmungsmass constant lässt und conform oder conjunctiv oder beides ist (vergl. F. d. M. **25**, 1306, 1893/94). R. M.

E. Goursat. Sur les lignes asymptotiques. C. R. **122**, 593-595; S. M. F. Bull. **24**, 43-51.

Anknüpfend an die von Lelieuvre gegebenen Formeln (F. d. M. **20**, 756, 1888), wird gezeigt, wie man in einer unbeschränkten Zahl von Fällen die Flächencoordinaten ohne Integrale darstellen kann; dasselbe gilt für die Formeln, welche die unendlich kleine Deformation der Fläche leisten; als besondere Anwendung erhält man die Darstellung der allgemeinsten Regelfläche in Bezug auf ihre asymptotischen Linien (Koenigs, F. d. M. **20**, 786, 1888). R. M.

L. Raffy. Surfaces rapportées à un réseau conjugué azimutal. S. M. F. Bull. **24**, 51-56.

Der Schnitt einer um eine feste Gerade (die z-Axe) rotirenden Ebene mit einer beliebigen Fläche beschreibt eine Schar ebener Curven; der Ort der Berührungspunkte derjenigen Tangenten an der Fläche, welche durch denselben Punkt der z-Axe gehen, ist eine Curve, die bei Variation des Punktes eine zweite Curvenschar bildet. Nach einem Satze von Koenigs bilden beide Curvenscharen auf der Fläche ein conjugirtes Netz. In den Parametern u und v, wo u längs den ersteren, v längs den letzteren Curven variirt, lauten die Gleichungen der Fläche:

$$x = -\frac{1}{\varphi'_v}, \quad y = -\frac{u}{\varphi'_v}, \quad z = v - \frac{\varphi(u, v)}{\varphi'_v},$$

woraus sich leicht ergiebt, dass u und v conjugirt sind. Hiervon folgen zwei Anwendungen. Die Parameterlinien werden Krümmungslinien, wenn nur φ die Bedingung eines rechtwinkligen Netzes erfüllt. Die Bedingungsgleichung wird unmittelbar durch Quadratur integrirt und ergiebt den Wert: $\varphi = \sqrt{1+u^2}\,\frac{e^{V-U} - e^{U-V}}{2}$, wo U von u, V von v willkürliche Function ist. Nach dessen Einsetzung in die obigen Glei-

chungen erhält man den allgemeinen Ausdruck der „Joachimsthal'schen“ Fläche, nämlich einer Fläche von der Eigenschaft, dass die eine Schar von Krümmungslinien eben ist, und deren Ebenen durch eine feste Gerade gehen. Die Curven $v=$ const. sind die Kreise $x^2+y^2+(z-v)^2=V'^{-2}$. Als zweite Anwendung wird durch Bestimmung von φ das conjugirte Netz zu einem solchen für gleiche Invarianten gemacht. Dieser Bedingung genügt der Wert: $\varphi=U_0(Uv-V)+U_1$.
H.

X. Stouff. Sur les rapports entre la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre et la théorie des surfaces. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **13**, 9-40.

Der Verf. verallgemeinert das auf Minimalflächen bezügliche Problem von Plateau auf Flächen, die einer beliebigen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen. Für die Einzelheiten muss wegen der grossen Verwickelung der Formeln auf die Abhandlung selbst verwiesen werden.
St.

X. Stouff. Sur une application des fonctions elliptiques. Nouv. Ann. (3) **15**, 262-266.

Bericht auf S. 353 dieses Bandes.

B. Chemnitzer. Coordinatentransformationen auf beliebiger Oberfläche in conjugirt-complexen Variabeln. Pr. (No. 559) Realgymn. Annaberg. 32 S. 4°.

Um eine Geometrie auf beliebiger krummer Oberfläche zu construiren, wird auf bekannte Weise ein Coordinatensystem, bestehend aus zwei beliebigen Curvenscharen $u=$ const., $v=$ const., zu Grunde gelegt. Von diesem wird durch die Substitution $2z=u+iv$, $2w=u-iv$ zu einem System conjugirt complexer Coordinaten übergegangen, dann wird 1) die Transformation verschiedener Arten von Coordinatensystemen (allgemeine, orthogonale, rhombische und isometrische) in einander, 2) die Transformation des gegebenen Coordinatensystems auf gegebener Fläche in ein durch seine analytische Definition als Curvenschar auf dieser Oberfläche gleichfalls gegebenes anderes Coordinatensystem studirt. Es ist ohne Zweifel vom Verf. verdienstlich, die hiezu notwendigen weitläufigen Rechnungen ein für allemal durchgeführt zu haben. Bm.

A. C. Dixon. On a method of discussing the plane sections of surfaces. Cambr. Proc. **9**, 198-200.

„Die ebenen Schnitte einer Fläche werden gewöhnlich so behandelt, dass man ihre Projection auf eine der Coordinatenebenen studirt. Man kann aber auch die Gleichung des Schnittes, bezogen auf ein beliebiges Coordinatendreieck in der Ebene des Schnittes, ohne weiteres hinschreiben,“ indem man für die räumlichen Coordinaten x, y, z der Flächenpunkte einsetzt: $ux_1+vx_2+wx_3$, $uy_1+vy_2+wy_3$, uz_1+vz_2

$+wz_3$, wo x_i, y_i, z_i die räumlichen Coordinaten der Ecken des Coordinatendreiecks in der Ebene des Schnittes, u, v, w gewisse, speciell gewählte Dreieckscoordinaten bedeuten. Hierzu einige Beispiele. (Das Verfahren dürfte kaum neu sein.) A. S.

D. Egorow. Zur allgemeinen Theorie des Entsprechens der Flächen. Mosk. Math. Samml. **19**, 86-107 (Russisch).

Es seien zwei Flächen S und S_1 gegeben, zwischen deren Punkten irgend eine (eindeutige) Beziehung besteht, nur der Bedingung unterworfen, dass reellen Punkten der einen reelle Punkte der anderen und unendlich nahen Punkten der einen ebensolche der anderen zugeordnet seien. Dann nennt der Verf. den Quotienten zweier Bogenelemente $\varrho = ds_1/ds$ entsprechender Linien den „Aehnlichkeitsparameter". Die Gleichung $\frac{Eu'^2+G}{eu'^2+g} = \varrho^2$ für jeden gegebenen Parameter ϱ bestimmt auf beiden Flächen entsprechende Linien, welche „ähnlich mit dem Parameter ϱ" sind. Sämtliche ∞^2 Linien $\varrho = \text{const.}$ werden „Aehnlichkeit bewahrende Linien" genannt. Durch jeden Punkt (u, v) von S oder S_1 gehen ∞^1 solche Linien, und jedem Werte von ϱ entsprechen deren zwei mit Ausnahme der Punkte $E/e = G/g$, wo diese zwei zusammenfallen. Das Entsprechen wird in diesen Punkten isogonal. Hat letzteres in allen Punkten statt, so giebt es nur ∞^1 Aehnlichkeit bewahrende Linien. Si.

R. Hoppe. Zur analytischen Curventheorie. Hoppe Arch. (2) **15**, 124-128.

Um das Problem der Darstellung der Coordinaten einer Raumcurve in zwei einfache Teilprobleme zu zerlegen, führt der Verf. zunächst solche Coordinaten ein, welche nur Relationen zwischen Richtungen ergeben und von jeder Längendehnung unabhängig sind, nämlich die von Serret benannten Indicatricen τ, ϑ, σ der Tangente, Binormale, Hauptnormale. Die Curvenklasse kann dann durch eine Gleichung zwischen τ und ϑ, die Torsionslinie, charakterisirt werden. Hat man daraus die Richtungscosinus f, g, h der Tangente explicit dargestellt, so kommt das zweite Teilproblem der Längencoordinaten; ds ergiebt sich z. B. aus der Fläche, auf der die Curve liegen soll, und daraus dann durch blosse Quadraturen $x = \int f\,ds$, $y = \int g\,ds$, $z = \int h\,ds$. Verf. behandelt die beiden Beispiele der Geraden und des Kreises als Torsionslinie.

R. M.

A. zur Kammer. Zur Theorie der Curven in analytischer Behandlungsweise. Hoppe Arch. (2) **15**, 14-33.

In dieser Behandlungsweise tritt als unterscheidend hervor die Benutzung der Schmiegungskugel, ihres Radius und ihrer Lage als Element zur Darstellung einiger Eigenschaften der Curven. Bezeichnet M den

Krümmungsmittelpunkt für den Curvenpunkt P, ferner C den Coincidenzpunkt der Krümmungsaxe, so ist PMC ein rechtwinkliges Dreieck in der Normalebene, worin C der Mittelpunkt der Schmiegungskugel, welche die Curve s in P in dritter Ordnung osculirt, $PC = R$ ihr Radius, $PM = \varrho$ der Krümmungsradius und der Winkel $MPC = i$ die Grösse ist, welche zur Bestimmung der folgenden Relationen, betreffend die Evolute, den Ort des Krümmungsmittelpunktes und die Einhüllende der Krümmungsaxe, dient. Die Grösse i, bestimmt durch die Werte

$$\cos i = \frac{\varrho}{R}, \quad \operatorname{tg} i = \frac{\partial \varrho}{\varrho \partial \vartheta},$$

wo ϑ den Torsionswinkel bezeichnet (an einer Stelle mit Unrecht aus Versehen dimensionslos genannt), enthält hiernach die Dimensionen der Curve, und alle jene durch i ausgedrückten Relationen haben keine davon unabhängige Geltung. Es werden u. a. die Curven $i = \text{const.}$, $i = -\vartheta$ und die Schraubenlinie auf dem Kreisevolventencylinder in Betracht gezogen. H.

A. Meder. Ueber einige Arten singulärer Punkte von Raumcurven. J. für Math. **116**, 50-84, 247-264.

Von Staudt's geometrische Definitionen der einfachsten Singularitäten ebener und räumlicher Curven werden analytisch abgeleitet, und im Anschluss daran die Projectionen einer Raumcurve auf ihre Schmiegungs-, rectificirende und Normalebene in einem singulären Punkte. Die einschlägigen Arbeiten Fine's und Staude's wurden dem Verf. erst während des Druckes seiner Abhandlung bekannt und sind daher nicht berücksichtigt. Js.

O. Staude. Ueber den Sinn der Richtung, Krümmung und Windung einer Curve. Dorpat. Naturf. Ges. Ber. 1895, 9 S.

Ergebnisse ohne Beweis der im American J. **17** veröffentlichten Arbeit: „Ueber den Sinn der Windung in den singulären Punkten einer Raumcurve“ (vgl. F. d. M. **26**, 697, 1895). Js.

S. Mangeot. Sur une manière de représenter le rapport des deux courbures d'une courbe gauche. S. M. F. Bull. **24**, 98-101.

A. Mannheim. Sur le rapport des deux courbures d'une courbe gauche. Ebenda 188.

Ein Strahl G', von einem festen Punkte aus in der Richtung der Tangente einer Curve gezogen, erzeugt einen Kegel. Die Vergleichung der Krümmungen beider Gebilde ergiebt nach Einsetzung ihrer fundamentalen Ausdrücke unmittelbar eine merkwürdige Beziehung, welche in ersterer Schrift in folgendem Satze ausgesprochen wird. Bewegt sich auf einem Kegel ein Punkt längs der erzeugenden Geraden G, so variirt die Hauptkrümmung des Kegels proportional der Entfernung des Punktes von der Spitze, und der Coefficient der Proportionalität ist gleich dem

Quotienten der ersten und der zweiten Krümmung irgend einer Curve, deren Tangenten den Erzeugenden des Kegels parallel sind, die Krümmungen nämlich auf den Punkt bezogen, wo die Tangente parallel G ist. Hiervon werden drei Folgerungen genannt: 1) Das Gesetz der Variation des Krümmungsverhältnisses einer Curve in ihren verschiedenen Punkten ist dasselbe wie das der Hauptkrümmung eines Kegels in einem Punkte, der in constanter Entfernung von der Spitze bleibt, nämlich des Kegels, erzeugt von Parallelen mit den Tangenten der Curve. 2) Damit das Krümmungsverhältnis constant sei, ist notwendig und hinreichend, dass der Kegel Rotationskegel, d. h. die Curve eine Helix sei. 3) Erzeugt eine bewegte Gerade eine Abwickelbare, so lässt sich das Krümmungsverhältnis längs der Gratlinie erkennen, ohne die Curve und ohne die Lage des Punktes zu kennen. Eine andere Folgerung fügt die zweite Schrift hinzu: Das Krümmungsverhältnis ist auch gleich der Tangente des Winkels zwischen G und der Verbindungslinie $\varDelta$ der Kegelspitze mit dem Hauptkrümmungsmittelpunkte des Kegels bezüglich auf einen Punkt von G, auch gleich der Tangente des Winkels zwischen der Tangente der Curve und der rectificirenden Geraden für den Berührungspunkt; deshalb ist auch $\varDelta$ parallel der rectificirenden Geraden. H.

L. Raffy. Sur le signe de la torsion des courbes gauches. S. M. F. Bull. **24**, 185.

Die aufgestellte Definition des Vorzeichens der Torsion ist complicirt, nach heterogenem Princip gebildet und wegen mancher Mehrdeutigkeit der Ausdrücke unverständlich. H.

M. d'Ocagne. Sur le signe de la torsion des courbes gauches et du paramètre de distribution des surfaces réglées. S. M. F. Bull. **24**, 195-196.

Der Verf. fügt zur Anordnung von Raffy eine nominelle Abänderung. H.

E. Wölffing. Die Krümmung der Raumcurven in singulären Punkten derselben. Hoppe Arch. (2) **15**, 146-158.

Der zu untersuchende Punkt wird zum Anfang der x, y, z, die Tangente daselbst zur Axe der x genommen, die Coordinaten des Nachbarpunktes nach Potenzen des Abstandes $ds = \varepsilon$ entwickelt. Die Singularität bestimmt sich durch den Exponenten und Coefficienten des ersten Gliedes. Der Exponent ist > 1 und wird hier in x kleiner als in y und z und rational angenommen. Aus diesen Reihen werden die Reihen für die Radien der Krümmung, der Torsion, der Totalkrümmung und der sphäschen Krümmung berechnet, aus deren Anfangsgliedern die Natur des angrenzenden Bogens ersichtlich ist. H.

J. Andrade. **Sur les droites de contact des courbes gauches et sur une famille de courbes gauches.** C. R. **122**, 1110-1113.

Die Hauptnormalen einer Raumcurve bilden bekanntlich niemals eine abwickelbare Fläche. Der Verf. will dieses Resultat verallgemeinern und legt sich die Frage vor: „Wie gruppiren sich die Geraden, welche, mit dem fundamentalen Coordinatensystem fest verbunden, eine abwickelbare Fläche erzeugen?“ Diese Geraden werden Berührungsgeraden (droites de contact) genannt. Der Verf. findet folgendes Resultat: Die einzige Gruppe von Berührungsgeraden, welche allen Raumcurven angehört, wird von den Parallelen zur Tangente in der rectificirenden Ebene gebildet.

Es werden noch die Curvenfamilien aufgezählt, welche andere specielle Gruppen von Berührungsgeraden besitzen. Jhk.

R. v. Lilienthal. **Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenscharen.** Leipzig: B. G. Teubner. VII + 114 S. gr. 8°.

In einer Reihe von Abhandlungen, über die in F. d. M. **18**, 736, 1886; **20**, 770, 1888; **23**, 792, 1891 und **25**, 1193, 1893/94 berichtet worden ist, hat R. von Lilienthal die von Hamilton und Kummer angebahnte, von Lamé und Beltrami, Ribaucour und Darboux weitergebildete Lehre von der Krümmung der Curvenscharen bearbeitet und giebt nun in der vorliegenden Monographie eine zusammenfassende Darstellung dieser interessanten Untersuchungen.

Im ersten Teile der Schrift werden einfach unendliche Curvenscharen in der Ebene und im Raume behandelt. Als Grundlage dienen dabei die invarianten Operationen, die der Verf. als „Ableitungen nach der Bogenlänge“ bezeichnet; vermittelst dieser Bildungen gewinnt die Theorie der Differentialparameter im engeren Sinne des Wortes eine sehr übersichtliche und einfache Gestalt.

Eine doppelt unendliche Curvenschar (Congruenz) kann sowohl durch endliche Gleichungen als durch Differentialgleichungen gegeben sein. Der erste dieser Fälle wird im zweiten Teile behandelt, in dem auch die wichtigeren Fragen über Flächenscharen besprochen werden, während dem zweiten Falle der dritte Teil gewidmet ist.

Auf Einzelheiten einzugehen, ist an dieser Stelle nicht möglich. Es mögen daher nur noch einige Bemerkungen allgemeiner Art Platz finden. Leider ist der Verf. durch Gründe äusserer Art veranlasst worden, den reichhaltigen Stoff in einen sehr engen Rahmen zusammenzupressen, und wenn er auch in der Vorrede bemerkt, dass er bemüht gewesen sei, „durch Voraussetzung geringer Vorkenntnisse dem Leser möglichst entgegenzukommen“, so bietet doch das Studium des Buches manche Schwierigkeiten. Wer, um die Entwickelungen des Textes genau zu verstehen, die weggelassenen Zwischenrechnungen ausführt, hat ein recht erhebliches Quantum an Arbeit zu leisten, die ihm übrigens durch die von dem Verf. gewählten Bezeichnungen keineswegs erleichtert wird.

Wie unbequem schreiben sich zum Beispiel die Formeln (S. 39):

$$(dx)_{T_2 T'_2} = \frac{(dx)_{T_2 T_1} - \cos\varphi\,(dx)_{T_2^2}}{\cos\varphi}$$

u. s. w.! Das ist jedoch nicht die Hauptsache. Die wesentliche Schwierigkeit liegt darin, dass wohl der Mangel an Raum dem Verf. nicht erlaubt hat, den Zielpunkt seiner Untersuchungen klar zu legen, die Bedeutung und den Zusammenhang der von ihm gefundenen Sätze zu entwickeln und auf das Verhältnis seiner Arbeiten zu denen der anderen Autoren einzugehen.

Wer indessen diese Hindernisse zu überwinden versteht, der wird dadurch sich belohnt finden, dass er eines der schönsten Kapitel aus der Geometrie des Raumes kennen lernt, in dem die Gauss'sche Lehre von den krummen Oberflächen ihre naturgemässe Fortsetzung gefunden hat, ein Kapitel, das französische und italienische Forscher mit grossem Erfolge bearbeiten, und das in Deutschland R. von Lilienthal durch eine Reihe wichtiger Sätze bereichert hat. St.

L. Lévy. Sur les systèmes de surfaces triplement orthogonaux. Belg. Mém. c. et sav. étr. **54,** 92 S. 4°.

Diese Abhandlung, welche von der königlich belgischen Akademie gekrönt worden ist, enthält einen historischen Teil, in dem die über den Gegenstand in den letzten dreissig Jahren erschienenen Arbeiten, ferner einige von dem Verf. gefundene neue Resultate besprochen werden. Fünf Kapitel und sechs Ergänzungsnoten bilden den Rahmen der Schrift.

In dem I. Kapitel (S. 5-15) setzt der Verf. die ersten Darboux'schen Untersuchungen über die dreifachen orthogonalen Systeme auseinander, und zwar zunächst die Bildung der Gleichung dritter Ordnung, von welcher der Parameter einer Lamé'schen Familie abhängt. Diese Gleichung wird durch die Lösungen einer Gleichung erster Ordnung verificirt, welche Darboux vollständig integrirt hat, und von welcher ein besonderer Fall die Ribaucour'schen cyklischen Systeme ergiebt.

Darauf beschäftigt sich der Verf. mit dem Problem der Bestimmung der allgemeinsten Fläche, die bei einer Verschiebung ohne Gestaltsänderung eine Lamé'sche Familie erzeugt, und er erwähnt bei diesem Thema die bezüglichen Arbeiten von Darboux, Petot, sowie seine eigenen. Ausserdem steht in diesem Kapitel die von Darboux herrührende Lösung der folgenden Aufgabe: Die Oberflächen zu finden, welche zwei Familien paralleler Oberflächen rechtwinklig schneiden.

Das II. Kapitel (S. 16-20) ist der Darlegung der Forschungen von Maurice Lévy gewidmet.

In dem III. Kapitel (S. 20-47) werden die Lamé'schen Fundamentalformeln aufgestellt. Der Verf. benutzt sie zur Untersuchung derjenigen dreifach orthogonalen Systeme, bei denen die Determinante aus den Cosinus der Normalen an den Oberflächen, die sich in einem Punkte schneiden, bezüglich der Hauptdiagonale symmetrisch ist. Folgendes

Ergebnis wird erhalten: Das System besteht entweder aus Ebenen, die zu den Coordinatenebenen parallel sind; oder aus Kugeln, welche im Coordinatenanfang die drei Coordinatenebenen berühren; oder endlich aus Oberflächen, welche dieselbe sphärische Abbildung wie die vorigen besitzen. — In demselben Kapitel wird noch die Integration eines Systems dreier simultanen Differentialgleichungen ausgeführt, die der Euler'schen und Poisson'schen Gleichung analog sind.

Das IV. Kapitel (S. 47-57) hebt mit einer kurzen Darstellung der Theorie der cyklischen Systeme an. Die Bedeutung dieser Systeme erhellt bekanntlich aus dem folgenden Lehrsatze: Wenn man bei einem gegebenen System dreifach orthogonaler Flächen die osculirenden Kreise der Trajectorien einer Familie längs einer zu diesen Curven normalen Oberfläche betrachtet, so erzeugen alle diese Kreise ein cyklisches System, d. h. sie sind selbst normal zu unendlich vielen Oberflächen. Der Verf. beweist auf rechnerischem Wege diesen Lehrsatz, sowie seine von Darboux ausgesprochene und geometrisch bewiesene Umkehrung. Das Kapitel endigt mit der an Darboux sich anschliessenden Bestimmung der dreifach orthogonalen Systeme, welche eine Familie ebener Trajectorien zulassen.

In dem V. Kapitel (S. 58-63) werden schliesslich verschiedene Untersuchungen über die Oberflächen mit sphärischen Krümmungslinien in einem System dargelegt.

Unter den Ergänzungsnoten (S. 63-89) wollen wir besonders anführen: Die Note V mit der Besprechung zweier Bianchi'schen Abhandlungen bezüglich derjenigen orthogonalen Systeme, welche eine Familie ebener Trajectorien zulassen, sowie über eine vom Verf. entdeckte allgemeine Eigenschaft der orthogonalen Systeme mit sphärischen Trajectorien in einer Familie. Endlich die Note VI, welche die Darboux'schen Arbeiten über denselben Gegenstand zusammenfasst.

Dml. (Lp.)

A. Bassi. Sulla condizione necessaria e sufficiente affinchè una porzione di superficie sia convessa in ogni punto. Batt. G. **34**, 146-151.

Nach dem Vorbild von Stolz („Allgemeine Arithmetik") kleidet der Verf. die gesuchte Bedingung in die Form: „Es müssen sich zwei Grössen $\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$ so angeben lassen, dass für alle fraglichen Punkte der Fläche $z = f(x, y)$ und für beliebige $\xi_1 < \Delta x$, $\xi_2 < \Delta x$, $\eta_1 < \Delta y$, $\eta_2 < \Delta y$ der Ausdruck $f(x+\xi_1+\xi_2, y+\eta_1+\eta_2)+f(x-\xi_1, y-\eta_1) + f(x-\xi_2, y-\eta_2)-3f(x, y)$ von Null verschieden bleibt und sein Zeichen nicht wechselt."

R. M.

A. Mannheim. Sur le paraboloïde des huit droites et les nappes de développées de surfaces. C. R. **128**, 983-986.

Der Verf. untersucht ein System von Oberflächen, die in einem Punkte A einen Contact zweiter Ordnung aufweisen, und untersucht mit

Hülfe des in einer früheren Mitteilung eingeführten „Paraboloids der acht Geraden" die Beziehungen der Krümmungsmittelpunktflächen in der Umgebung des einen Krümmungsmittelpunkts für den Fall, dass sie in dem anderen einen Contact zweiter Ordnung besitzen. E. K.

Ed. Weyr. Ueber das System der Orthogonalflächen. Casopis **25**, 42-46 (Böhmisch).

Enthält eine elegante und übersichtliche Ableitung mehrerer das System der Orthogonalflächen betreffender Resultate mit Hülfe der Theorie der Matrizen. Sda.

E. Blutel. Sur les surfaces à lignes de courbure sphériques. C. R. **122**, 301-303.

Ist Σ_0 eine Fläche, deren eines System S von Krümmungslinien sphärisch ist, und sind ϱ und ϱ' die beiden Hauptkrümmungsradien in einem Punkte M, so hat man folgende zwei Sätze:

1) Wenn Punkt M eine Linie S beschreibt, so variirt der zweite Krümmungsradius ϱ' proportional dem Abstande des Centrums der zweiten Krümmung von einer Ebene, die nur mit S variirt; hieraus folgt dann:

2) Wenn M eine sphärische Krümmungslinie S beschreibt, so durchläuft das Centrum der zweiten Krümmung eine Rotationsfläche zweiten Grades, welche einer Kugel umbeschrieben ist, die selbst wieder der Developpabeln eingeschrieben ist, welche von den Normalen der Σ_0 längs S gebildet wird.

Hieraus folgt wiederum, dass, wenn die Linien S algebraisch sind, das Gleiche auch für die Curve eintritt, welche das Centrum der zweiten Krümmung beschreibt, und weiter, dass die Eigenschaft 1) allen Flächen Σ zukommt, welche mit Σ_0 dasselbe sphärische Bild besitzen, und zwar sind diese Flächen die einzigen, welche die Eigenschaft 1) haben.

Bm.

P. Burgatti. Sulla torsione geodetica delle linee tracciate sopra una superficie. Palermo Rend. **10**, 229-240.

Euler und Meunier haben die Krümmungstheorie für die Normalschnitte einer Oberfläche begründet. Entsprechende Relationen stellt der Verf. für die geodätische Torsion der von einem Punkte einer Oberfläche ausgehenden Linien auf. Im besonderen findet er die Formel

$$\frac{1}{T} = \frac{\cos^2\theta}{T_1} + \frac{\sin^2\theta}{T_2},$$

welche der Euler'schen Formel für die Normalschnitte vollständig analog gebaut ist. Dabei bedeuten T_1, T_2 die geodätischen Krümmungen zweier orthogonalen und in Bezug auf den Hauptschnitt conjugirten Linien $u =$ const., $v =$ const.:

$$\frac{1}{T_1} = \frac{FD-ED'}{E\sqrt{EG-F^2}}, \quad \frac{1}{T_2} = \frac{GD'-FD''}{G\sqrt{EG-F^2}}.$$

Die Formel nimmt noch die einfachere Form $\frac{1}{T} = \frac{\cos 2\theta}{T_1}$ an und führt so zu dem Satze: In jedem Punkte der Oberfläche sind die geodätischen Krümmungen der beiden in Bezug auf den Hauptschnitt conjugirten Linien gleich und von entgegengesetzten Vorzeichen.

In der vereinfachten Form lässt die Formel eine ähnliche geometrische Deutung zu, wie sie von Dupin für die entsprechende Euler'sche Formel gegeben worden ist. Jhk.

V. Kommerell. **Eine neue Formel für die mittlere Krümmung und das Krümmungsmass einer Fläche.** Schlömilch Z. **41**, 123-126.

In die Formeln für die mittlere Krümmung $h = 1/r_1 + 1/r_2$ und für das Krümmungsmass $k = 1/r_1 r_2$ werden die Abgeleiteten der Richtungscosinus der Normalen gegen die drei Axen eingeführt; ist $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung der Fläche und sind diese Cosinus a, b, c, so wird hiermit

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \quad \text{und} \quad k = \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial a}{\partial z} & a \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial z} & b \\ \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial z} & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

Bm.

A. Calinon. **Le théorème de Gauss sur la courbure.** Nouv. Ann. (3) **15**, 63-65.

Es ist ein einfacher, rein geometrischer Beweis des Gauss'schen Satzes von der Totalkrümmung. Jhk.

J. Craig. **Sur les surfaces à lignes de courbure isométriques.** C. R. **123**, 794-795.

Der Verf. beweist im Anschluss an eine frühere, von Hermite vorgelegte Notiz den folgenden Satz: Bezeichnen u und v die Parameter eines isometrischen Systems von Krümmungslinien, für welche

$$ds^2 = U_2 V_2 \left(\frac{U_1}{U_2} du^2 + \frac{V_1}{V_2} dv^2 \right),$$

wo die U Functionen von u, die V solche von v allein sind, so genügen die reciproken Hauptkrümmungsradien einer partiellen Differentialgleichung, welche derjenigen adjungirt ist, die von den cartesischen Coordinaten des Punktes (u, v) der Fläche erfüllt wird. Jhk.

J. Weingarten. Sur la déformation des surfaces. Acta Math. **20**, 159-200.

Die vorliegende Abhandlung, welche 1894 mit dem grossen Preise der Pariser Akademie gekrönt wurde, greift das Problem, „alle Flächen zu finden, welche ein gegebenes Linienelement haben", von einem anderen Ausgangspunkte an, als es bisher geschah, und giebt eine völlig neue, geniale Methode zur Lösung desselben. Durch sie gelangt der Verf. zu einer, von den gewöhnlichen verschiedenen, partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (Fundamentalgleichung), die ebenfalls, wie jene, die Form der Ampère'schen Gleichungen besitzt, aber unter gewissen Bedingungen, die festgelegt werden, intermediäre Integrale erster Ordnung zulässt, oder in anderen Fällen durch die Methode von Laplace integrirt werden kann. Der wesentlichste Fortschritt aber besteht darin, dass diese partielle Differentialgleichung als die gemeinsame Quelle angesehen werden kann, aus welcher alle bis jetzt bekannten Lösungen des Problems fliessen.

Da sich die Methode, mit welcher die Bildung der Fundamentalgleichung vollzogen wird, nicht in wenigen Worten schildern lässt, so müssen wir hierzu auf die Abhandlung selbst verweisen und beschränken uns darauf, die wichtigsten Resultate, die aus ihr gewonnen werden, zu notiren:

1. Die Fundamentalgleichung lässt nur dann zwei allgemeine intermediäre Integrale erster Ordnung zu, wenn das Quadrat des Linienelementes der vorgelegten Fläche auf die Form $ds^2 = t^2dr^2 + (lt^2 + m)dt^2$ gebracht werden kann; und umgekehrt: alle Flächen, welche dieses Linienelement besitzen, führen auf eine Fundamentalgleichung, welche durch die Methode von Ampère integrirt werden kann, wodurch alle diese Flächen bestimmt sind; es sind dies jene, die Darboux im III. Band S. 369ff. seines Werkes: „Théorie générale des surfaces" gegeben hat.

2. Eine andere Form der Fundamentalgleichung lässt sich durch die Methode von Laplace integriren und führt auf alle jene Flächen, welche ein Linienelement von der Form: $ds^2 = (d\sigma - 2f(z)dz)^2 + 4\sigma dz^2$ haben. Für $f(z) = \beta(1-\beta)z$, wo β eine beliebige Constante ist, ergeben sich daraus die bereits von Baroni, Goursat und dem Autor früher behandelten Flächen; für $f(z) = e^z + 2$ geht die Fundamentalgleichung in eine Form über, welche bereits von Liouville allgemein integrirt wurde, während der Autor die sämtlichen Flächen bestimmte, die dem entsprechenden Linienelement zugehören (C. R. **112**, F. d. M. **23**, 810-813, 1891 und C. R. **116**, F. d. M. **25**, 617, 1893/94).

Die vorliegende Arbeit ist von grosser Bedeutung und enthält eine Fülle neuer Gedanken, deren Ausarbeitung das Problem der Flächenbiegung wesentlich fördern dürfte. Bm.

A. Voss. Ueber infinitesimale Flächendeformationen. Deutsche Math. Ver. **4**, 132-137.

Durch jeden Punkt einer Fläche gehen bekanntlich im allgemeinen zwei reelle oder imaginäre Curven, die bei einer unendlich kleinen Deformation derselben „isometrisch" deformirt werden, während im singulären Falle diese Doppelschar in eine einzige degenerirt. Ist die Deformation gegeben, so hängt die Bestimmung dieser Curven von der Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung ab; dagegen führt, wie Verf. in der vorliegenden Arbeit zeigt, die Aufgabe, die Fläche so zu deformiren, dass ein gegebenes Curvensystem isometrisch bleibt, auf eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche im speciellen wieder auf die von Weingarten behandelte Gleichung der infinitesimalen Biegungsdeformationen der Fläche zurückkommt. Von den zahlreichen Anwendungen seien nur folgende hervorgehoben: 1) Die infinitesimalen Deformationen, bei denen das Netz der Haupttangentencurven isometrisch bleibt, sind identisch mit den infinitesimalen Biegungsdeformationen der Fläche. 2) Eine Minimalfläche kann im allgemeinen nur durch Biegung so deformirt werden, dass die Normalen in den entsprechenden Punkten parallel bleiben (vgl. F. d. M. **26**, 708ff., 1895). Wbg.

P. Staeckel. Sur la déformation des surfaces. C. R. **128**, 677-680.

Verf. citirt ein Theorem des russischen Mathematikers Peterson, wonach man aus zwei auf einander abwickelbaren Flächen, für welche gemeinsam $ds^2 = Edp^2 + 2Fdp\,dq + Gdq^2$ ist, durch Integration der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial P}{\partial q} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}(P-Q) = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}(Q-P) = 0$$

je zwei neue auf einander abwickelbare Flächen herleiten kann. Durch Specialisirung dieses Satzes für Helicoide und Alysseide kommt er auf die harmonische Gleichung $\frac{\partial^2 \theta}{\partial p \partial q} = [2k^2 \operatorname{sn}^2(p+q, k) - 1]\theta$ und zeigt, wie jeder Lösung desselben durch blosse Quadraturen eine Familie von ∞^1 Flächen zugeordnet werden kann, die auf einander abwickelbar sind und bei der Deformation dasselbe conjugirte System p, q als geodätische Linien bewahren. R. M.

Guichard. Sur la déformation des surfaces. Journ. de Math. (5) **2**, 123-215.

Die Arbeit, welche bei der Bewerbung um den grand prix im Jahre 1894 eine mention très honorable davongetragen hat, behandelt die Eigenschaften der conjugirten Linien, welche bei der Biegung erhalten bleiben.

Es kommen zwei Methoden zur Anwendung. Im ersten Teile (S. 124-196), der die Ueberschrift trägt: Methode der nichteuklidischen Geometrie, lässt der Verf. jedem Paare abwickelbarer Flächen einen Congruenztypus entsprechen, dessen Brennpunkte in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades conjugirt sind. Im zweiten Teile (S. 196-215), mit der

Ueberschrift: Transformation durch Orthogonalität der Elemente, entspricht einem Paare abwickelbarer Flächen eine Fläche, deren Asymptotenlinien den conjugirten Linien entsprechen.

Der Verf. entwickelt zunächst die charakteristische Eigenschaft dieser conjugirten Linien und untersucht sodann die Fälle, wo sie sich auf eine Ebene 1) längs eines Orthogonalsystems, 2) längs eines Systems von Curven projiciren, die gegen zwei feste Richtungen gleich geneigt sind; ferner die Fälle, wo die Projection eines dieser Systeme von Geraden gebildet wird, wo diese Curven Berührungscurven von Cylindern sind, die der Fläche umgeschrieben sind, und endlich wo sich diese Linien unter constantem Winkel schneiden.

Unter den Resultaten des Verf. verdienen die beiden folgenden hervorgehoben zu werden. Es sind die Lösungen der beiden Probleme: 1) Alle Paare abwickelbarer Flächen zu finden derart, dass der Abstand d eines Punktes der ersten von einem festen Punkte zu dem Abstand z des entsprechenden Punktes der zweiten Fläche von einer festen Ebene in der Beziehung $d^2-z^2 =$ const. steht. Der Verf. weist nach, dass sich diese Flächen in endlicher Form ergeben. 2) Zwei abwickelbare Flächen zu finden, derart, dass die Normalen in entsprechenden Punkten einen constanten Winkel bilden.

Bei der Herleitung seiner Resultate bedient sich der Verf. einer Reihe von Relationen, die sich auch aus einer Arbeit des Referenten: Ueber einen Zusammenhang zwischen den Elementen orthogonaler Neuner- und Sechzehnersysteme (J. für Math. **118**, 230, 231) durch Specialisirung ergeben.

Noch ist zu bemerken, wie auch der Verf. hervorhebt, dass sich einige der im zweiten Teile entwickelten Resultate schon im vierten Bande von Darboux's Théorie générale des surfaces vorfinden. Jhk.

P. Adam. Sur un problème de déformation. S. M. F. Bull. **24**, 28-35.

Das Problem, von dem das vorliegende ausgeht, ist von Gourşat gestellt und gelöst; es lautet: Die allgemeinste Fläche zu finden, die sich derart deformiren lässt, dass eine Reihe ebener Schnitte in parallelen Ebenen in eine Reihe ebener Schnitte in parallelen Ebenen übergeht. H.

J. N. Hazzidakis. Biegung mit Erhaltung der Hauptkrümmungsradien. J. für Math. **117**, 42-56.

Bei der Behandlung der Aufgabe, alle Flächen zu bestimmen, welche bei Erhaltung der Hauptkrümmungsradien Biegung zulassen, hat O. Bonnet gezeigt (J. de l'Éc. Pol. cah. **42**, 73-92), dass es ausser den Minimalflächen und den Flächen mit constanter mittlerer Krümmung noch eine andere Familie von Flächen giebt, welchen die genannte Eigenschaft zukommt. Er sagt von ihnen, dass sie denselben Grad von Allgemeinheit wie die Flächen mit mittlerer constanter Krümmung haben, kann sie aber nicht näher bestimmen, da ihm die Integration der Diffe-

rentialgleichungen nicht gelingt, von denen die Bestimmung der Coordinaten der Flächen abhängt.

Bezeichnen U und V willkürliche Functionen bezw. von u und v, t den Biegungsparameter, und wird zur Abkürzung

$$\omega = \frac{(v+t)(u-t)}{u+v}, \quad \varphi = \int \frac{V dv}{(v+t)^2} - \int \frac{U du}{(u-t)^2},$$
$$f = \int \frac{V^2 dv}{(v+t)^2} + \int \frac{U^2 du}{(u-t)^2}$$

gesetzt, so findet der Verf. folgende Gleichungen der gesuchten Flächen:

$$x = \omega(C_1 + C_2\varphi + C_3\varphi^2) + C_3 f,$$
$$y = \omega(C'_1 + C'_2\varphi + C'_3\varphi^2) + C'_3 f,$$
$$z = \omega(C''_1 + C''_2\varphi + C''_3\varphi^2) + C''_3 f.$$

Dabei lässt sich

$$C_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma i), \quad C'_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha'+\gamma' i), \quad C''_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha''+\gamma'' i),$$
$$C_2 = \beta i \quad , \quad C'_2 = \beta' i \quad , \quad C''_2 = \beta'' i \quad ,$$
$$C_3 = \tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma i), \quad C'_3 = \tfrac{1}{2}(\alpha'-\gamma' i), \quad C''_3 = \tfrac{1}{2}(\alpha''-\gamma'' i)$$

wählen, wobei die neun Constanten α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'' die Coefficienten einer beliebigen orthogonalen Substitution bilden.

Mit den Minimalflächen und den Flächen constanter mittlerer Krümmung teilen diese Flächen die Eigenschaft, isometrische Krümmungslinien zu haben. Jhk.

L. Bianchi. Nuove ricerche sulle superficie pseudosferiche. Annali di Mat. (2) **24**, 347-386.

In der vorliegenden Abhandlung untersucht der Verf. eine Klasse von Flächen, die zu den pseudosphärischen Flächen in enger Beziehung stehen und durch folgende geometrische Eigenschaft charakterisirt sind. Die Kugeln, die um das Stück einer jeden Normale einer solchen „Σ-Fläche“ zwischen den Krümmungsmittelpunkten als Durchmesser beschrieben sind, schneiden eine feste Kugel entweder in grössten Kreisen, oder stehen auf dieser senkrecht, oder gehen durch einen festen Punkt O des Raumes. Jede solche Fläche $z = z(x, y)$ genügt einer Ampère'schen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(x^2+y^2+z^2+c)(rt-s^2)+z-px-qy$$
$$+(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t+(1+p^2+q^2)^2 = 0.$$

Hierin ist c eine Constante, die in den drei verschiedenen Fällen beziehungsweise positiv, negativ und Null ist; die Flächen der dritten Art hatte bereits Darboux (Leçons, t. IV, S. 322) betrachtet.

Um die Beziehungen der Σ-Flächen zu den pseudosphärischen Flächen darzulegen, ist es erforderlich, einige Bezeichnungen zu erklären.

1) Betrachtet man auf einer Fläche S eine Schar von ∞^1 geodätischen Linien, so bilden deren Tangenten eine Congruenz, deren eine Brennfläche S selbst ist. Die zweite Brennfläche S' möge dann die zu

der betreffenden Schar geodätischer Linien gehörige „complementäre Fläche von S“ genannt werden.

2) Weingarten hat für die Lösung des Problems, alle Biegungsflächen einer gegebenen Fläche $S(x, y, z)$ zu finden, folgenden Ansatz gegeben. Man bringe das Quadrat des Linienelementes ds von S auf die Form:
$$ds^2 = 2q\left(d\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)^2 + 2p\, d\frac{\partial\varphi}{\partial p}\, d\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \left(d\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)^2$$
und ermittele alle Flächen $\bar{S}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, die der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + (r_1 + r_2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q} + r_1 r_2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} = 0$$
genügen. Hierin bedeuten r_1 und r_2 die Hauptkrümmungsradien von $\bar{S}$ im Punkte p, q, während p und q selbst folgende geometrische Bedeutung haben: p ist die Entfernung des Anfangspunktes der cartesischen Coordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ von der Tangentialebene in diesem Punkte und q das doppelte Quadrat der Entfernung des Anfangspunktes vom Berührungspunkte. Aus jeder Fläche $\bar{S}$ erhält man alsdann mittelst Quadraturen eine Biegungsfläche von S, und es ergeben sich auf diesem Wege sogar alle diese Biegungsflächen.

Jetzt kann man sich kurz so ausdrücken: Man bilde die complementären Flächen einer pseudosphärischen Fläche S in Bezug auf eine Schar Geodätischer, die beziehungsweise von einem reellen Punkte in endlicher Entfernung ausgehen, oder die auf ein und derselben geodätischen Linie senkrecht stehen, oder die endlich aus einem reellen Punkte in unendlicher Entfernung entspringen, so sind die Σ-Flächen die zu dieser Fläche S gehörigen Weingarten'schen Flächen $\bar{S}$; dieser Erzeugung gemäss werden die drei Arten der Σ-Flächen elliptisch, hyperbolisch und parabolisch genannt.

Die fundamentale Eigenschaft der Σ-Flächen besteht nun darin, dass bei der Abbildung durch parallele Normalen auf die Einheitskugel ihre Krümmungslinien dieselben Bildcurven ergeben wie die Krümmungslinien der pseudosphärischen Flächen. Hieraus folgt, dass die Normalen dieser Flächen eine cyklische Congruenz bilden; im elliptischen oder hyperbolischen Falle schneiden die Kreise der Congruenz die feste Kugel in diametral entgegengesetzten Punkten oder rechtwinklig; im parabolischen gehen sie alle durch den festen Punkt O. Am bemerkenswertesten aber ist, dass die Orthogonalflächen dieser Kreise in allen drei Fällen parabolische Σ-Flächen sind, und dass dieser Satz sich umkehren lässt. Auf diese Weise lassen sich die elliptischen und hyperbolischen Σ-Flächen auf parabolische zurückführen, auf deren Untersuchung daher alles ankommt.

Betrachtet man die Congruenz der Normalen einer solchen parabolischen Σ-Fläche und bildet daraus die Congruenz, die zu dieser polar ist in Bezug auf eine Kugel um den festen Punkt O, so ist auch diese Congruenz eine Congruenz von Normalen, und die Orthogonal-

flächen dieser polaren Congruenz sind wieder parabolische Σ-Flächen. Nun sind die Parallelflächen einer solchen Fläche wieder parabolische Σ-Flächen. Man erhält also auf diese Weise zwei Scharen paralleler parabolischer Σ-Flächen, und es zeigt sich, dass diese die zugeordneten Weingarten'schen Flächen S von zwei complementären pseudosphärischen Flächen sind. Endlich möge noch eine bereits von Weingarten gefundene Eigenschaft angeführt werden: Macht man eine Transformation durch reciproke Radii vectores in Bezug auf eine Kugel, deren Mittelpunkt der feste Punkt O ist, so verwandelt sich jede zu O gehörige parabolische Σ-Fläche in eine Fläche derselben Art.

Aus den Eigenschaften der cyklischen Congruenzen folgt — und damit kommen wir zu einem von Bianchi mit einer gewissen Vorliebe behandelten Gegenstande (vergl. F. d. M. **17**, 726, 729, 1885; **18**, 725, 1886; **19**, 767, 1887; **22**, 766, 1890; **23**, 801, 1891 und **24**, 735, 1892) —, dass es unendlich viele dreifach orthogonale Systeme giebt, zu denen eine Schar parabolischer Σ-Flächen gehört, und bei denen die orthogonalen Trajectorien der Σ Kreise sind. Diese Systeme bilden aber nur die einfachste Klasse von dreifach orthogonalen Systemen, die eine Schar von parabolischen Σ-Flächen enthalten; der Grad der Allgemeinheit dieser Systeme ist vielmehr derselbe wie derjenigen, die eine Schar pseudosphärischer Flächen desselben Krümmungsmasses enthalten („Weingarten'sche Systeme" in der Bezeichnung von Bianchi). Jene ergeben sich aus diesen mittels der bekannten Transformation von Combescure, vermöge deren jedem dreifach orthogonalen Systeme unendlich viele zugeordnet werden, die von drei willkürlichen Functionen abhängen, und zwar so, dass in entsprechenden Punkten die Stellung des Haupttrieders dieselbe ist.

Eine Klasse dieser neuen dreifach orthogonalen Systeme verdient besondere Beachtung; bei ihnen sind die orthogonalen Trajectorien der parabolischen Σ-Flächen ebene Curven, und zwar gehen die Ebenen durch den festen Punkt O. Ein solches System ist bestimmt, wenn eine beliebige parabolische Σ-Fläche gegeben ist, ferner eine Ebene, die durch den festen Punkt O geht, und endlich eine willkürliche Curve, die auf Σ senkrecht steht. St.

L. Bianchi. Sopra una classe di superficie collegate alle superficie pseudosferiche. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{5}_1$, 133-137.

Im vierten Bande der „Leçons sur la théorie générale des surfaces" behandelt Darboux, indem er die neue Weingarten'sche Methode für die Untersuchung ganzer Klassen abwickelbarer Flächen auseinandersetzt, das Beispiel der auf die Kugel abwickelbaren Flächen und zeigt, wie dieses Problem auf das folgende zurückgeführt wird: „Die Oberflächen Σ zu bestimmen, welche die Eigenschaft besitzen, dass jedes von den beiden Hauptkrümmungsmittelpunkten begrenzte Normalensegment von einem festen Punkte O aus unter einem rechten Winkel gesehen wird". Die für diese Oberflächen Σ charakteristische partielle

Differentialgleichung zweiter Ordnung lautet $(\varrho'+p)(\varrho''+p)=p^2-2q$, worin ϱ' und ϱ'' die Hauptkrümmungsradien, p und $\sqrt{2q}$ (nicht $2q$ selbst, wie fälschlich in der Arbeit steht) die Abstände der Tangentialebene, bez. ihres Berührungspunktes von dem Punkte O sind. Darboux bemerkt a. a. O., es sei sonderbar, dass die vorstehende Differentialgleichung complicirter als diejenige der Flächen mit constantem Krümmungsmass ist. Der Verf. zeigt nun, dass die wirkliche Untersuchung der geometrischen Beziehungen zwischen den Oberflächen Σ und den Flächen mit constantem Krümmungsmass zu sehr einfachen, bemerkenswerten Resultaten führt, beschränkt sich aber in der vorliegenden Arbeit auf die Angabe der Fundamentaltheoreme, die sich hauptsächlich auf den Zusammenhang der Flächen Σ mit den pseudosphärischen Flächen beziehen, ohne Hinzufügung des Beweises. Das erste derselben: „Jede Oberfläche Σ hat dasselbe sphärische Bild der Krümmungslinien einer pseudosphärischen Fläche“, wurde bereits von Weingarten gefunden.

Wbg.

P. Massini. Sui sistemi di linee di una superficie lossodromici rispetto ad un sistema di geodetiche. Roma: Balbi.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

E. Picard. Sur deux invariants nouveaux dans la théorie générale des surfaces algébriques. C. R. **122**, 101-104.

Den Begriff des Geschlechtes einer algebraischen Curve erweiternd, hat Noether jeder algebraischen Fläche zwei ganze Zahlen, „das Flächengeschlecht“ und „das Curvengeschlecht“, zugeordnet, die ebenfalls gegenüber jeder birationalen Transformation invariant sind. Picard zeigt, wie man durch einfache Ueberlegungen zu zwei neuen Invarianten derselben Art gelangt, und verspricht zum Schluss, später die Bedeutung dieser Zahlen für die zur Fläche gehörigen Integrale darzulegen. St.

L. Autonne. Sur une différentielle exacte. Nouv. Ann. (3) **15**, 232-236.

Eine Uebung im Gebrauche homogener Coordinaten bei der Behandlung algebraischer Oberflächen. Lp.

L. Berzolari. Sulle intersezioni di tre superficie algebriche. Annali di Mat. (2) **24**, 165-191.

Sind drei algebraische Flächen der Ordnungen l, m, n gegeben, die nicht durch eine und dieselbe Curve gehen, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass von ihren lmn Schnittpunkten gerade $\lambda\mu\nu$ in einen Punkt fallen, in dem sie bezw. die Multiplicitäten λ, μ, ν haben: die drei Berührungskegel der Flächen in diesem Punkte dürfen keine Erzeugende gemein haben — was diese Kegel auch für

Singularitäten sonst haben mögen. Das wird mit Hülfe der Cayley'schen Darstellung der Resultante dreier Gleichungen durch einen Determinantenquotienten bewiesen. Als Anwendung folgen Sätze über die Erniedrigung der Klasse einer algebraischen Fläche durch das Auftreten eines singulären Punktes. Bdt.

C. Segre. Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche. Annali di Mat. (2) **25**, 2-54.

Die singulären Punkte P höherer Ordnung einer ebenen algebraischen Curve lassen sich nach Noether in eine endliche Anzahl unendlich benachbarter von niederer Ordnung auflösen, wenn man P als einen geeigneten Fundamentalpunkt geeigneter höherer Transformationen wählt.

Der Verf. untersucht analoge Erscheinungen im Raume und macht u. a. davon eine Anwendung auf das Problem, eine gegebene algebraische Fläche vermöge birationaler Transformation in eine andere überzuführen, die entweder, im gewöhnlichen Raume gelegen, nur gewöhnliche vielfache Punkte aufweist, oder aber auch in eine Fläche eines höheren Raumes, die von vielfachen Punkten ganz frei ist.

Da die Methode des Verf. die Kenntnis der Noether'schen Arbeiten durchaus voraussetzt, so kann hier nur erwähnt werden, dass die Fläche im Punkte P mit Scharen geeigneter Hülfsflächen geschnitten wird, was analytisch dazu führt, die Gleichung der Fläche in der Umgebung von P in verschiedenen Gestalten zu entwickeln. My.

E. Wölffing. Die singulären Punkte der Flächen. Habilitationsschrift. Dresden: Druck von B. G. Teubner. 25 S. 8°.

Das „Cramer'sche analytische Dreieck" (oder „Newton'sche Parallelogramm") dient dazu, um für eine ebene algebraische Curve, deren Gleichung gegeben ist, auf graphischem Wege Curvenbogen leicht zu erhalten, die in der Nähe des Coordinatenanfangs und im Unendlichen nahezu ebenso verlaufen wie die vorgelegte Curve. Dasselbe Princip zur Ermittelung der Gestalt einer Fläche von gegebener Gleichung in der Nähe eines singulären Punktes zu benutzen, ist der Zweck der Wölffing'schen Arbeit. Entsprechend dem Verfahren in der Ebene, wird jedem Term $Cx^ay^bz^c$ der Flächengleichung der Punkt (a, b, c) in einem rechtwinkligen Coordinatensystem zugeordnet und sodann jede Verbindungsebene von drei oder mehr Punkten construirt, die den Coordinatenanfangspunkt von allen nicht in ihr liegenden Punkten des Systems trennt. Die Gesamtheit der so bestimmten Ebenen bildet das „analytische Polyeder". Die Terme der Flächengleichung, welche den Punkten einer Polyederfläche entsprechen, geben, unter Weglassung etwaiger Potenzen von (x, y, z) als Factoren, für sich gleich Null gesetzt, eine trinomische oder polynomische Näherungsfläche. Das ganze System der Ebenen wird zunächst auf eine Kugel, deren Mittelpunkt im Coordinatenanfang liegt, und deren Radius gleich 1 gewählt ist, in der Weise abgebildet, dass man jeder Ebene den im ersten Octanten gele-

genen Berührungspunkt der ihr parallel laufenden Tangentialebene zuordnet. Den Punkt bildet man weiter auf die Ebene $z = 1$ durch Projection vom Kugelmittelpunkte aus ab. Die in dieser Ebene liegenden Punkte mit ihren geraden Verbindungslinien bilden das „analytische Netz". Dasselbe „erweist sich als wertvollstes Hülfsmittel für die weitere Forschung. Es dient zur Untersuchung der Flächencurven durch den singulären Punkt, zur Ermittelung der Durchdringungscurve zweier Flächen und führt zuletzt im Verein mit der bildlichen Darstellung des singulären Flächenpunktes vermittelst einer durchsichtigen Kugel zu einer Methode, durch welche man sich von der Gestalt der Fläche in der Nähe des singulären Punktes und von ihrem Anschluss an die Näherungs- und Hülfsflächen eine Vorstellung machen kann". F.

F. Gerbaldi. **Un teorema sulle singolarità della jacobiana di quattro superficie algebriche.** Palermo Rend. **10**, 158-160.

Die Jacobi'sche Fläche von vier algebraischen Flächen $U_i = 0$ der Grade n_i, für welche der Punkt O ein r_i-facher Punkt ist ($i = 1, 2, 3, 4,\quad 0 \leqq r_i \leqq n_i$), enthält den Punkt O im allgemeinen als $(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 - 3)$-fachen Punkt. Die vorliegende Note giebt die Bedingungen dafür an, dass die Multiplicität des Punktes O für die Jacobi'sche Fläche eine höhere sei. F.

A. Levi. **Sulle singolarità della jacobiana di quattro superficie.** Torino Atti **31**, 502-506.

Ist ein Punkt O ein r_1-, r_2-, r_3-, r_4-facher Punkt für vier in demselben zusammentreffende Flächen, so ist O bekanntlich im allgemeinen ein r-facher Punkt für deren Jacobi'sche Fläche, wo $r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 - 3$. Es wird hier untersucht, wann O ein $(r+1)$- oder $(r+2)$-facher Punkt für diese letzte Fläche ist. Vgl. über diesen Gegenstand den vorangehenden und den folgenden Bericht. Vi.

A. Levi. **Sulle singolarità della jacobiana di quattro superficie.** Batt. G. **34**, 215-249.

Vier Flächen von den Ordnungen n_1, n_2, n_3, n_4 haben einen singulären Punkt O mit den Multiplicitäten r_1, r_2, r_3, r_4. Verf. macht Punkt O zum Anfangspunkt der Coordinaten und erhält die Gleichung der Jacobi'schen Fläche der Flächen in der Form: $J = \Phi x_4^{n-r} + \Psi x_4^{n-r-1} + \cdots = 0$, wo $\Phi = 0$ die Gleichung des Tangentialkegels der Flächen in O und $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - 4$, $r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 - 3$ ist. Daraus folgt sofort, dass die Ordnung der Jacobi'schen Fläche n und die Multiplicität des Punktes O für sie im allgemeinen r ist. Es wird nun die Multiplicität dieses Punktes in den Fällen eingehend untersucht, in welchen Φ oder Φ und Ψ identisch verschwinden. Weiter wird der Fall behandelt, dass die Fläche des Büschels $\lambda F_1^{n_1} + \mu F_2^{n_2} = 0$, welche durch O geht, entweder in O eine

Tangentialebene besitzt, die durch die Gerade $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ geht; oder daselbst einen Doppelpunkt hat. Endlich wird das Problem gelöst: „Alle Fälle zu bestimmen, in welchen die Jacobi'sche Fläche eines dreifach unendlichen linearen Flächensystems entweder einen Doppelpunkt oder einen dreifachen Punkt hat.“

Der Arbeit ist eine Note beigegeben, welche einem mit den vorhergehenden Untersuchungen zusammenhängenden algebraischen Theorem von Halphen (Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables, Mém. Savants étrangers 1884) eine Beschränkung auferlegt. Bm.

C. Hossfeld. **Beiträge zur Theorie der Raumcurven.** Pr. (No. 689) Gymn. Eisenach. 8 S. 4°.

Die Reciproke einer Raumcurve, d. h. die Curve, welche von den Polen der Schmiegungsebenen dieser in Bezug auf eine feste Fläche zweiter Ordnung gebildet wird, zeigt insofern keine so weitgehende Uebereinstimmung mit der ursprünglichen Curve, wie die Reciproke einer ebenen Curve (in Bezug auf einen festen Kegelschnitt) und diese selbst, als sie sich nicht gleichzeitig mit der ursprünglichen Curve als vollständiger Schnitt zweier algebraischen Flächen auffassen zu lassen braucht. Sicher ist dies nicht der Fall, wenn die beiden Flächen, welche die ursprüngliche Curve liefern, keine Berührungspunkte besitzen. Dies hat der Verf. in einer früheren Arbeit (Schlömilch Z. **29**, 242-245; vgl. F. d. M. **16**, 605, 1884) nachgewiesen. Indem er die beschränkende Voraussetzung fallen lässt, gelangt er in der vorliegenden Arbeit zu dem Ergebnis, dass die Reciproke des vollständigen Durchschnitts zweier algebraischen Flächen sich in gleicher Art als vollständige Schnittlinie solcher Flächen, und zwar auf unendlich vielfache Weise, auffassen lasse, wenn sich die ursprünglich gegebenen Flächen einfach und stationär oder nur stationär berühren, bloss auf eine Weise, wenn die Berührung nur eine einfache ist. Wenigstens lassen sich in diesen Fällen die in den Cayley'schen Gleichungen ausgedrückten Bedingungen für eine solche Möglichkeit vom zahlentheoretischen Standpunkte aus befriedigen. Dies sind aber nur notwendige Bedingungen; ob sie für die Existenz der erforderlichen Flächen auch ausreichend sind, liesse sich, wie hervorgehoben wird, nur auf Grund besonderer geometrischer Untersuchungen entscheiden. T.

E. Fabry. **Sur les courbes algébriques à torsion constante.** C. R. **128**, 865-867.

Eine algebraische Curve von constanter Torsion wird durch die Gleichungen dargestellt:

$$x = \tau\int\frac{ldk-kdl}{h^2+k^2+l^2},\quad y = \tau\int\frac{hdl-ldh}{h^2+k^2+l^2},\quad z = \tau\int\frac{kdh-hdk}{h^2+k^2+l^2},$$

wo h, k, l drei Polynome einer Veränderlichen bedeuten, die keinen gemeinsamen Teiler haben und der Bedingung genügen, dass die Residuen der drei unter dem Integralzeichen stehenden Functionen 0 sind. In

der Arbeit untersucht der Verf., unter welchen Bedingungen der gemeinsame Nenner $h^2+k^2+l^2$ mehrfache Wurzeln haben kann.

F.

F. Enriques. Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche. Rom. Acc. L. Rend. (5) 5_1, 191-197.

Es wird die Aufgabe gelöst, alle Typen von Flächen n^{ter} Ordnung zu bestimmen, welche irreducible hyperelliptische kanonische Curven ($p > 2$, $p' > 1$) besitzen. p, d. h. die Anzahl der linear unabhängigen kanonischen Curven, ist das Geschlecht der Fläche, während p', das lineare Geschlecht, d. h. das Geschlecht der Curven selbst bedeutet; $p' \geqq 2p-3$ und die kanonischen Curven werden von den adjungirten Flächen $(n-4)^{ter}$ Ordnung ausgeschnitten. (Vgl. Noether, Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde. Math. Ann. **2**; F. d. M, **2**, 619, 1870.)

Als Resultat ergiebt sich folgende Klassification:

„Die algebraischen Flächen, deren kanonische Curven irreducible hyperelliptische Curven sind, besitzen

a) einen rationalen Büschel vom Geschlechte 2, oder sind

b) abbildbar auf die Doppelebene mit Verzweigungscurve achter Ordnung ($p = 3$), oder

c) auf die Doppelebene mit Verzweigungscurve zehnter Ordnung ($p = 6$)“.

Ferner wird noch gezeigt, dass man jede Fläche mit dem rationalen Büschel vom Geschlechte 2 in eine Fläche von der Ordnung $2n$ transformiren kann, welche eine $(2n-6)$-fache Gerade und auf derselben einen $(2n-2)$-fachen Punkt besitzt.

Bm.

F. Enriques. Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche. Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) (3) **10**, 1-81.

Der Zweck dieser Abhandlung besteht darin, die Grundzüge einer ganz allgemeinen Theorie der linearen Systeme algebraischer Curven auf einer algebraischen Fläche festzustellen. Die vorliegende Arbeit ist also eine Fortsetzung der „Ricerche di geometria sulle superficie algebriche“ desselben Verf. (Torino Mem. (2) **44**; vergl. F. d. M. **25**, 1212, 1893/94). Die neue Abhandlung stellt jedoch eine beträchtliche Vervollkommnung der älteren dar.

Um seinen Zweck zu erreichen, muss der Verf. zuerst einige Begriffe der Geometrie betreffs einer algebraischen Fläche bestimmen, verallgemeinern oder modificiren. Statt von einer Fläche zu sprechen, zieht er es vor, ein „algebraisches Gebilde ∞^2“ zu studiren, welches die ganze Klasse der Flächen darstellt, die aus einer Fläche durch birationale Transformation ableitbar sind; in Folge dessen muss er exacte Erklärungen geben und unzweideutige Uebereinkünfte über die Curven auf einem algebraischen Gebilde und über die Curvensysteme festlegen.

Besonders wichtig sind die Systeme aus ∞^2 algebraischen Curven eines algebraischen Gebildes, von denen nur eines durch r Punkte der Gebilde geht, und welche sich in eine eindeutige Beziehung mit den erzeugenden Elementen eines linearen Raums R_r setzen lassen: es sind die linearen Systeme. Ein solches System besitzt drei (gegen birationale Transformationen) invariante Zahlen, nämlich die Dimension r, den Grad n (n = Anzahl der beweglichen Durchschnittspunkte zweier Curven des Systems) und das Geschlecht π (π = Geschlecht einer beliebigen Curve des Systems); man hat immer $n \geqq r-1$. Eine besondere Betrachtung verdienen die reducibeln und die teilweise in anderen enthaltenen Systeme. Ferner spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der linearen Systeme die Fundamentalcurven eines derselben; jede ist eine solche Curve, dass die Bedingung, dass eine Curve des Systems dieselbe enthalte, nur eine einfache Bedingung ist. Es ist vorteilhaft, die Punkte der Gebilde unter die Fundamentalcurven einzureihen; und das System heisst singulär oder nicht-singulär, je nachdem es singuläre Curven hat oder nicht, ausser den Punkten der Gebilde. Dass jedes algebraische Gebilde ∞^2 nicht-singuläre Systeme enthält, ist eine Folge der vom Verf. vorausgesetzten Transformirbarkeit jeder algebraischen Fläche in eine zweite mit nur gewöhnlichen Singularitäten.

Unter den linearen Curvensystemen sollen bemerkt werden die normalen, denen das II. Kapitel der vorliegenden Abhandlung gewidmet ist, und denen die folgende Erklärung zukommt: „Ein lineares irreducibles Curvensystem, dessen Grad $n > 0$ ist, heisst normal (oder auch vollkommen in Bezug auf seinen Grad), wenn es in keinem höheren irreduciblen linearen System desselben Grades n enthalten ist; ein irreducibler Büschel soll immer als normal betrachtet werden". Jedes lineare System ist in einem unzweideutig bestimmten normalen System enthalten. Sind ferner $|C_1|$ und $|C_2|$ zwei beliebige normale Curvensysteme desselben algebraischen Gebildes ∞^2, welches ein nicht zusammenfallendes Gebüsch sei, so existirt immer ein unzweideutig bestimmtes irreducibles Normalsystem $|C|$, welches alle Curven C_1+C_2 enthält; es wird durch den Namen Summe von $|C_1|$ und $|C_2|$ und durch das Symbol $|C_1+C_2|$ bezeichnet; $|C_1|$ und $|C_2|$ sind beide das Residuum des anderen in Bezug auf $|C|$. Sind n, n_1, n_2 die Grade der Systeme $|C|$, $|C_1|$, $|C_2|$ und i die Zahl der beweglichen Durchschnittspunkte einer C_1 und einer C_2, so hat man $n = n_1 + n_2 + 2i$. Ist insbesondere $|C|$ ein Curvensystem ohne feste Teile, so heisst das System $|C+C|$ das doppelte von $|C|$ und wird durch $|2C|$ bezeichnet. Schreibt man $|C| = |C_1| + |C_2|$ oder resp. $|2C| = |C| + |C|$, so bekommt man die Grundzüge einer Symbolik, welche durch den Verf. vielfach und geschickt benutzt wird. Wir wollen hier bemerken, dass er auch den Begriff der (arithmetischen) Congruenz einführt, indem er $|C| \equiv |\overline{C}|$ schreibt, falls die Systeme $|C|$ und $|\overline{C}|$ dieselben Grundpunkte besitzen. Die Sätze, welche als Basis dieser Symbolik dienen, können auch auf reducible Systeme ausgedehnt werden, wenn man vor-

her den Begriff des Normalsystems verallgemeinert hat. Dieses vorausgesetzt, ist der Verf. in der Lage, das folgende sehr wichtige Theorem (welches den ersten Teil des Restsatzes bildet) zu beweisen: „Auf einem algebraischen Gebilde ∞^2 habe man ein lineares Normalsystem $|C_2|$, dessen Dimension $r \geqq 2$ ist, und ein zweites, in dem ersten enthaltenes lineares Normalsystem $|C_1|$; wenn $|C_1|$ als Residuum $|C|$ hat in Bezug auf $|C_2|$, so ist umgekehrt $|C_1|$ das Residuum von $|C|$ noch in Bezug auf $|C_2|$, $|C|$ und $|C_1|$ sind daher Residua von einander in Bezug auf $|C_2|$." Bemerken wir jetzt, dass man in jedem linearen Curvensystem eine neue Zahl zu betrachten hat, welche immer ganz ist, nämlich den virtuellen Grad. Ist das System irreducibel, so ist der virtuelle Grad gleich dem wirklichen Grad; im entgegengesetzten Falle wird er mit Hülfe des folgenden Satzes bestimmt: „Sind n_1 und n_2 die virtuellen Grade der linearen Systeme $|C_1|$ und $|C_2|$, und ist i die Zahl der beweglichen Durchschnittspunkte einer C_1 und einer C_2, so ist n_1+n_2+2i der virtuelle Grad des Systems $|C_1+C_2|$". Da nach Noether (Acta Math. **8**; vgl. F. d. M. **18**, 745, 1886), wie man sich erinnert, bei den isolirten Curven ein virtuelles Geschlecht zu betrachten ist, muss man ein solches auch bei den Curvensystemen betrachten; nur wenn ein System irreducibel ist, so decken sich virtuelles und wirkliches Geschlecht.

Das folgende (dritte) Kapitel hat als Gegenstand die einfachen irreducibeln Linearsysteme vom Geschlechte $\pi > 0$, welche keinen Büschel von einschneidenden Curven des algebraischen Gebildes besitzen. Nennen wir mit dem Verf. Reihe $g_{2\pi-2+rn}$ die Vollschar, welche man auf einer beliebigen Curve C durch die folgende Methode erhält: wenn $\pi > 0$ und $r \geqq 0$, durch die Addition der kanonischen Reihe $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ mit der r-fachen charakteristischen Reihe g_n; wenn $\pi > 0$ und $r-\varrho < 0$, durch die Substraction aus der besagten Reihe $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$, der ϱ-fachen (speciell vorausgesetzten) g_n; wenn endlich $\pi = 0$ und $r > 0$, durch die Betrachtung aller Gruppen von $rn-2$ Punkten von C. Diese Erklärung vorausgesetzt, wird eine Curve K_r des algebraischen Gebildes subadjungirt vom Range r zum Normalsystem $|C|$, wenn sie die Curven C eines Büschels in Gruppen der Reihe $g_{2\pi-2+rn}$ schneidet und durch keinen der Basispunkte des Büschels geht, welcher nicht durch Fundamentalpunkte des Systems $|C|$ geht. Die Eigenschaften und auch die Wichtigkeit der subadjungirten Curven muss der Leser in der Originalarbeit selbst kennen lernen. Nur sei bemerkt, dass Enriques dieselben (im IV. Kapitel) benutzt, um in vollkommener Allgemeinheit (d. h. in einer Weise, die nicht einmal unendlich nahe Fundamentalcurven ausschliesst) die adjungirten Curven zu definiren und die Eigenschaften derselben zu begründen; auf diesem Wege begründet der Verf. wichtige Eigenschaften und studirt die linearen Systeme, welche Büschel von einschneidenden Curven besitzen.

Im Anfange des V. Kapitels, welches den adjungirten Flächen gewidmet ist, lernt man eine neue Erklärung dieser Flächen kennen,

welche sich mit der Noether'schen (Götting. Nachr. 1871; F. d. M. **3**, 193, 1871) deckt, falls die gegebene Fläche nur gewöhnliche Singularitäten besitzt, aber mit der Enriques'schen (vergl. die oben angeführten „Ricerche"), wenn dieselbe nur verschiedene isolirte Punkte besitzt. Durch Anwendung der neuen Erklärung bekommt der Verf. einen durch ein anderes Verfahren schon bewiesenen Lehrsatz (Humbert, Math. Ann. **45**; vgl. F. d. M. **25**, 1227, 1893/94); er wendet dann dieselbe auf Regelflächen an; ferner erhält er den Noether'schen Satz über die adjungirten Flächen einer Raumcurve (Math. Ann. 8), den zweiten Teil des Restsatzes, u. s. w.

Was in den fünf ersten Kapiteln der „Introduzione" dargelegt ist, setzt den Verf. in die Lage, mit voller Allgemeinheit die Invariantencharaktere einer Fläche zu behandeln. Zuerst führt er das (geometrische) Flächengeschlecht (p_g oder) p durch eine Definition ein, welche von den bekannten (von Clebsch, Noether, Enriques) verschieden ist und den Vorteil besitzt, an keine einschränkende Bedingung gebunden zu sein. Auf neue Charaktere kommt man durch die Betrachtung der bikanonischen Curven einer Fläche; dieselben bilden ein Linearsystem, dessen Dimension r invariant gegen birationale Transformationen ist; $r+1$ ist ein neuer Charakter, welcher Bigeschlecht genannt und durch P bezeichnet wird. Im allgemeinen ist $P=2p$; es giebt aber Fälle (zwei werden vom Verf. angeführt), in denen diese Beziehung nicht statt hat. — Das Flächengeschlecht spaltet sich in zwei, das geometrische p_g und das numerische p_n; das erstere ist die Zahl ($\geqq 0$) der linear unabhängigen Flächen der Ordnung $n-4$ zu einer (in der Ordnung n vorausgesetzten) Fläche; das zweite aber ist der Wert $\left(\gtreqless 0\right)$, den die Formel liefert, welche die Zahl der linear unabhängigen adjungirten Flächen der Ordnung ν giebt (ν über einer gewissen Grenze vorausgesetzt), im Falle dass $\nu=n-4$ ist. p_g ist immer gleich p und im allgemeinen gleich p_n; es giebt aber Fälle, wo $p_g > p_n$ ist. — Endlich begegnen wir dem Noether'schen Flächengeschlecht $p^{(1)}$, wie auch einem anderen Invariantcharakter $p^{(2)}$, welcher mit dem vorigen durch die Gleichung $p^{(2)}=p^{(1)}-1$ verbunden ist: diese Beziehung wird vom Verf. durch seine Methode in voller Allgemeinheit bewiesen.

In einem Anhange der sehr wichtigen Arbeit macht Enriques einen Vergleich zwischen den Grundzügen der gegenwärtigen Arbeit und derjenigen seiner älteren „Ricerche"; er kommt zu der Folgerung, dass die Resultate, welche in den Kapiteln IV, V und VI der „Ricerche" auseinandergesetzt sind, auf alle algebraischen Gebilde anwendbar sind, welche der Bedingung $p_g=p_n$ genügen (es sind diejenigen, welche in Flächen ohne Ausnahmecurven transformirbar sind), deren kanonisches System irreducibel ist. La.

G. Castelnuovo. **Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica.** Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) (3) **10**, 82-102.

Die Abhandlung ist bestimmt, eine Stelle in der mathematischen Litteratur einzunehmen neben oder besser unmittelbar nach derjenigen, welche der im vorigen Referate analysirten Arbeit eingeräumt werden wird. Indem wir voraussetzen, dass der Leser das besagte Referat kennt, werden wir die dort eingeführten Benennungen und Bezeichnungen gebrauchen. Zuerst bemerken wir im allgemeinen, dass die von Castelnuovo gebrauchte Methode von der Enriques'schen verschieden ist; der erstere zieht es vor, sich im projectiven Gebiete zu bewegen (z. B. spricht er öfter von Fläche als von algebraischem Gebilde) und wendet statt der Enriques'schen Symbolik (vergl. das vorige Referat) anzahlgeometrische Betrachtungen an. Beide Gedankenrichtungen erscheinen im Beweise und im Ausdrucke des ersten von ihm hergeleiteten Lehrsatzes, welcher so lautet: Es sei F eine algebraische Fläche n^{ter} Ordnung und $\Delta = p_n - p_g$; betrachtet man $\Delta + 1$ beliebige Ebenen eines Büschels mit der Axe a und auf jeder eine Curve $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche zu der entsprechenden Schnittcurve mit F adjungirt sei, so existiren innere Flächen $(n-3+\Delta)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche a-mal durch Δ gehen und ferner die oben erwähnten Ebenen in den betrachteten Curven schneiden, ohne die Ebenen selbst zu enthalten". Eine Folge dieses Theorems ist: „Wenn m der Durchschnittspunkte einer Fläche F mit einer beliebigen Geraden a eine Gruppe einer (Special-) Reihe auf jeder der $\Delta+1$ Schnittcurven von F mit $\Delta+1$ durch a gehenden Ebenen bilden, so geschieht dasselbe auf jeder Schnittcurve von F mit einer durch a gehenden Ebene"; dieser neue Satz kann (wie der Verf. bemerkt) unter einer Form ausgedrückt werden, welche auf jedes algebraische Gebilde passt.

Eine andere in der in Rede stehenden Abhandlung begründete Wahrheit ist die folgende: „Ein lineares Curvensystem, welches einfach, irreducibel und ohne eigentliche Fundamentalcurve ist, und bei welchem auf irgend einer Curve das adjungirte System die charakteristische Reihe vollkommen schneidet, hat auch als charakteristische Reihe eine Vollschar. Wenn ein algebraisches Gebilde ein solches lineares System enthält, so hat man für dasselbe $p_n = p_g$, d. h. $\Delta = 0$. Hat man umgekehrt in einem algebraischen Gebilde $p_g = p_n$, so hat jedes lineare, im Gebilde enthaltene Normalsystem ∞^r $(r \geqq 2)$ von Curven als charakteristische Reihe eine Vollschar. Durch eine eingehende Untersuchung des Falles $p_g > p_n$ kommt der Verf. zu der sehr wichtigen Folgerung, die notwendige und hinreichende Bedingung, damit in einem algebraischen Gebilde $p_g = p_n$ sei, bestehe darin, dass jedes lineare im Gebilde enthaltene normale Curvensystem als charakteristische Reihe eine Vollschar besitze. Bemerkenswert ist auch, dass die Eigenschaft $p_n = p_g$ sich von einer Fläche auf jede Fläche überträgt, deren Punkte Cooordinaten haben, welche beliebige rationale Functionen der Coordinaten der

Punkte der ersteren sind. Endlich sei bemerkt, dass bei den Flächen, welche die Eigenschaft $p_n = p_g$ haben, jeder Curvenbüschel linear ist.

La.

G. Castelnuovo. Sulle superficie di genere 0. Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) (3) **10**, 103-123.

Die Einleitung zum vorigen Referate passt vollkommen auf das gegenwärtige über eine Abhandlung, die den Zweck hat, die folgende ungemein wichtige Fundamentalaufgabe zu lösen: „Wann ist eine algebraische Fläche rational (d. h. auf eine Ebene eindeutig) abbildbar?“ In der Vorrede seiner Arbeit beleuchtet der Verf. sehr durchsichtig die verschiedenen Wege, welche man einschlagen kann, um den Zweck zu erreichen, und erklärt, dass er die Methode anwendet, welche sich auf die Betrachtung der Geschlechter einer Fläche gründet. In der That beweist er, „damit ein algebraisches Gebilde ∞^2 rational sei, sei es hinreichend wie notwendig, dass das numerische Flächengeschlecht p_n, das geometrische Flächengeschlecht p_g, wie auch das Bigeschlecht P gleich Null seien“. Zu bemerken ist, dass die Gleichung $p_g = 0$ eine Folge von $P = 0$ ist. Dass aber die Gleichung $p_n = 0$ von $P = 0$ unabhängig sei, beweisen viele Beispiele, von denen der Verf. zwei anführt: das eine entspricht einer Fläche sechster Ordnung, welche Enriques gefunden hat; das andere betrifft eine Fläche siebenter Ordnung, welche Castelnuovo selbst entdeckt hat. Die Rationalitätsbedingungen einer Fläche können unter verschiedenen Formen ausgedrückt werden; nur die folgende werde wegen ihrer häufigen Anwendungen angeführt:

„Im gewöhnlichen Raume sei eine Fläche n^{ter} Ordnung gegeben, welche keine andere Singularität hat als eine Doppelcurve von der Ordnung D und vom Geschlechte π und T dreifache (für die Fläche wie für die Doppelcurve) Punkte; damit diese Fläche rational sei, ist es notwendig und hinreichend, dass $\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)-(n-4)D + 2T + \pi - 1 = 0$ sei, und dass keine Fläche der Ordnung $2(n-4)$ existire, welche zweimal durch die Doppelcurve der gegebenen Fläche gehe, ausser derjenigen, welche aus dieser Fläche und einer $(n-8)^{\text{ter}}$ Ordnung bestehen“.

La.

F. Enriques. Sui piani doppi di genere uno. Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL) (3) **10**, 201-222.

G. Castelnuovo. Aggiunta alla memoria del Sig. Enriques in relazione ad un resultato enunciato nel No. 7. Ibid. 222-224.

Clebsch (Math. Ann. **3**, vgl. F. d. M. **2**, 637, 1870) und Noether (Erlanger Ber. 1878, vgl. F. d. M. **10**, 550, 1878) haben alle rationalen Doppelebenen bestimmt. Mit der in diesem Berichte zu betrachtenden Arbeit will der Verf. einen Beitrag zur Bestimmung der Doppelebenen liefern, welche Geschlechter > 0 haben. In der That gelangt er durch eine geschickte Anwendung der Resultate der Arbeiten, auf welche sich die drei vorigen Berichte erstreckten, und durch die Be-

nutzung eines Theorems von Castelnuovo (welches in einem Anhange bewiesen wird) zu dem folgenden Satze, welcher in der allgemeinen Theorie der Doppelebenen einen Platz unmittelbar nach dem o. a. Clebsch-Noether'schen Theorem verdient:

„Jede Doppelebene, welche alle ihre Geschlechter p_n, p_g, P gleich Eins hat, gehört einer Klasse an, welche durch einen der folgenden Typen dargestellt wird:

1) Doppelebene mit einer Uebergangscurve sechster Ordnung;

2) Doppelebene mit einer Uebergangscurve achter Ordnung mit zwei vierfachen Punkten, welche auch unendlich nahe sein können;

3) Doppelebene mit einer Uebergangscurve zehnter Ordnung mit einem siebenfachen und zwei dreifachen unendlich nahen (aber verschiedenen) Punkten;

4) Doppelebene mit einer Uebergangscurve zwölfter Ordnung mit einem neunfachen und drei dreifachen unendlich nahen (aber verschiedenen) Punkten". La.

G. Castelnuovo et F. Enriques. Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques. Math. Ann. **48**, 241-316.

Die Geometrie auf einer algebraischen Fläche wurde durch eine Bemerkung von Clebsch (C. R. **67**; vgl. F. d. M. **1**, 234, 1868) geschaffen und wurde sogleich durch Noether (Math. Ann. **2** und **8**; vgl. F. d. M. **2**, 619, 1869) meisterlich entwickelt; nachher wurde sie mit Erfolg besonders in Frankreich und Italien ausgebildet. In Frankreich betrachtete Picard neben den immer endlichen Doppelintegralen von algebraischen Differentialen, welche Doppelintegrale sich in den oben angeführten Noether'schen Abhandlungen befinden, gewisse höchst merkwürdige totale Differentiale (Journ. de Math. (4) **1** und **5**; vgl. F. d. M. **15**, 332, 1885, und **19**, 775, 1889), und in diesen Betrachtungen folgten ihm Poincaré (C. R. **99**; vgl. F. d. M. **16**, 295, 1884) und Humbert (Journ. de Math. (4) **9** und **10**, vgl. F. d. M. **25**, 1217ff., 1893/94). In Italien zog man die geometrischen Methoden vor und benutzte die schon fertigen Untersuchungen über die algebraischen Curven und über die linearen Curvensysteme. Die auf diese Weise erhaltenen Resultate, welche man meistens Castelnuovo und Enriques verdankt, haben einen solchen Wert, dass ein competenter Beurteiler (Picard) schrieb, dass sie „ont renouvelé toute une partie de la théorie des surfaces". Diese Resultate wurden in verschiedenen Zeitschriften und akademischen Sammlungen veröffentlicht, und die bezüglichen Arbeiten (unter denen die wichtigsten etwa diejenigen sind, auf welche sich die vier vorangehenden Referate beziehen) wurden ihrer Zeit analysirt.

Da die in Rede stehende Arbeit eine Uebersicht der Ergebnisse der vorigen liefert, so kann unser gegenwärtiger Bericht kürzer als gewöhnlich sein. Es mag nur bemerkt werden, dass die Verfasser, um ihre älteren Forschungen zu coordiniren und auch die Lücken in ihrer Gesamtheit klar zu legen, nur die Resultate ohne Beweise angeführt haben, dass sie aber durch exacte Citate dem Leser die Mittel geben, die Be-

weise zu finden. Um die Menge und Verteilung der behandelten Materie zu bezeichnen, diene zum Schlusse die folgende Inhaltsübersicht der sieben Kapitel, aus denen die Arbeit besteht: I. Birationale Transformationen. Geschlecht einer Curve und einer Fläche nach Clebsch und Noether. II. Lineare Reihen von Punktgruppen einer Curve. Lineare Curvensysteme auf einer Fläche. III. Adjungirte Curven einer ebenen Curve. Subadjungirte Flächen einer Fläche des gewöhnlichen Raumes. IV. Adjungirtes System zu einem gegebenen. V. Invarianten einer Fläche gegen birationale Transformationen. VI. Specielle und nichtspecielle lineare Systeme. Erweiterung des Riemann-Roch'schen Satzes auf algebraische Flächen. VII. Ueber die rationalen Flächen und die Doppelebenen. La.

L. Autonne. Sur la représentation des courbes gauches algébriques et sur le nombre des conditions qui expriment qu'une courbe algébrique est située sur une surface algébrique. Ann. de l'Univ. de Lyon, 1896. 37 S.; auch sep. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 41 S. 8°.

S. Mangeot. Étude analytique sur la symétrie. Nouv. Ann. (3) **15**, 403-426.

Bericht in Abschnitt IX, Kap. 2B, S. 477 dieses Bandes.

C. Raumgebilde ersten, zweiten, dritten Grades.

F. Ferrari. Alcune proprietà dei punti isobarici nello spazio. Batt. G. **34**, 73-88.

Isobarisch oder semiisobarisch heissen vier Punkte in Bezug auf ein Tetraeder, wenn ihre barycentrischen Coordinaten, bezogen auf dieses als Fundamentaltetraeder, durch Vertauschung aus einander hervorgehen, und zwar isobarisch, wenn sie sich durch $\alpha\beta\gamma\delta$, $\delta\alpha\beta\gamma$, $\gamma\delta\alpha\beta$, $\beta\gamma\delta\alpha$, semiisobarisch, wenn sie sich durch $\alpha\beta\gamma\delta$, $\beta\alpha\delta\gamma$, $\gamma\delta\alpha\beta$, $\delta\gamma\beta\alpha$ darstellen lassen. Es werden Eigenschaften und Constructionen derartiger Punktquadrupel hergeleitet und namentlich diejenigen Fälle untersucht, wo ihre Elemente mit den Ebenen oder Kanten des Fundamentaltetraeders incident sind. T.

T. Craig. Solution of a system of equations occurring in Darboux's „Théorie générale des surfaces“. Annals of Math. **11**, 48-51.

Es handelt sich um die Gleichungen auf S. 21 von Bd. **1** des Darboux'schen Werkes: $x^2+y^2+z^2 = \text{const.}$, $xx_1+yy_1+zz_1 = \text{const.}$, $xx_2+yy_2+zz_2 = \text{const.}$ Die von Darboux ohne nähere Begründung angegebene Auflösung nach x, y, z wird abgeleitet.

El.

O. Staude. Die Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Leipzig: B. G. Teubner. VIII + 185 S. gr. 8°.

Verf. hat sich längere Zeit mit der Aufsuchung der Focaleigenschaften der Flächen zweiten Grades beschäftigt und seine Untersuchungen teils in den Berichten der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1882, 1885 u. 1895 (F. d. M. **25**, 734, 1895), teils in den Math. Ann. **20** und **27** (F. d. M. **14**, 686-688, 1882 und **18**, 755-758, 1886) veröffentlicht. Die vorliegende Schrift bietet jedoch nicht etwa nur einen Abdruck jener Abhandlungen, sondern sie fügt zu den bereits gefundenen interessanten Eigenschaften noch eine Reihe neuer hinzu; ausserdem wurden die Beweise wesentlich vereinfacht, und so entstand eine vollständige in sich geschlossene Theorie, die eine bisher sehr fühlbare Lücke in der Lehre von den Flächen zweiten Grades aufs beste ausfüllt.

Schon M. Chasles bemerkt in seinem Aperçu historique, er habe sich lange Zeit, aber vergebens bemüht, für die Flächen zweiten Grades eine analoge Eigenschaft, wie die Constanz der Radienvectorensumme der Kegelschnitte zu finden. Diese Bemerkung scheint Anlass zu den Untersuchungen des Verf. gegeben zu haben, und es gelang demselben, die erwähnte Eigenschaft aufzufinden, indem er an Stelle der absolut kürzesten Entfernung zweier Punkte in der Ebene die über die beiden Focalkegelschnitte gemessene kürzeste Entfernung, die Hauptfocaldistanz, einführte. Seine daran anknüpfende Fadenconstruction des Ellipsoides (S. 92), für die er schon früher ein anschauliches Modell geschaffen hat, ist äusserst bemerkenswert, indem sie die entsprechende Construction der Ellipse unmittelbar auf den Raum überträgt.

Das Buch zerfällt in zwei Abschnitte aus je vier Kapiteln. Der erste Abschnitt behandelt die Focaleigenschaften der Ellipsoide und Hyperboloide, der zweite diejenigen der Paraboloide. Dabei werden die Rotationsflächen einer besonderen Besprechung unterzogen. Das erste Kapitel ist in beiden Abschnitten einer eingehenden Darstellung der Systeme confocaler Ellipsoide und Hyperboloide, beziehungsweise confocaler Paraboloide gewidmet; die zweiten Kapitel besprechen die elliptischen, respective parabolischen Coordinaten, die dritten Kapitel je die Focalkegel und Focallinien in den betreffenden confocalen Systemen, und die vierten Kapitel behandeln in beiden Abschnitten die Theorie der gebrochenen Focaldistanzen. Ausserdem sind noch Anmerkungen beigegeben, die einige Lehren des Textes genauer anführen. Das Verständnis wird durch anschauliche Figuren wesentlich erleichtert. Bm.

R. Hoppe. Gleichseitig hyperbolischer Schnitt der Fläche zweiten Grades. Hoppe Arch. (2) **14**, 436-441.

Die Aufgabe, eine gegebene Fläche zweiten Grades in einer gleichseitigen Hyperbel zu schneiden und die Gleichung der Schnittebenen explicit darzustellen, wird gelöst, indem sie bei den Hyperboloiden auf die andere reducirt wird, „zwei auf einander senkrechte Seiten eines gegebenen Kegels zu finden“, beim hyperbolischen Paraboloid aber auf diejenige,

„auf zwei gegebene Ebenen die Schenkel eines rechten Winkels zu legen.“ R. M.

D. Sinzow. Ueber eine Eigenschaft der Flächen zweiten Grades. Kasan Ges. (2) **6**, 42-46.

Analytischer Beweis des anscheinend von S. Lie stammenden Satzes: Die geradlinigen Erzeugenden einer einem Tetraeder umbeschriebenen Fläche zweiten Grades schneiden die Flächen des Tetraeders in vier Punkten, deren Doppelverhältnis dasselbe für alle Erzeugenden eines Systems ist; es ist dasselbe für alle Erzeugenden des anderen Systems, aber verschieden von dem ersten. Si.

H. Andoyer. Sur l'intersection de deux quadriques. Nouv. Ann. (3) **15**, 153-173.

Bezüglich eines Tetraeders seien $f=0$, $g=0$ die Gleichungen zweier Flächen zweiten Grades. Dann stellt $\lambda f+\mu g=0$ einen Büschel solcher Flächen dar. Durch das Studium der Discriminante Δ der Form $\lambda f+\mu g$ charakterisirt der Verf. alle möglichen Arten solcher Flächenbüschel und alle möglichen Formen der gemeinsamen Schnittcurve. Scht.

A. Pellet. Sur le mouvement d'une droite assujettie à quatre conditions. (Question 322). J. de Math. spéc. (4) **5**, 38-41.

Der vom Verf. zum Beweise vorgelegte und nun von ihm selbst bewiesene Satz lautet: Wenn vier Punkte einer Geraden gezwungen werden, sich auf vier Quadriflächen zu bewegen, die einen Durchmesser gemeinsam haben, paarweise ähnlich sind und ähnlich liegen, so giebt es einen Punkt der Geraden, der eine ebene Curve beschreibt; jeder andere Punkt der Geraden beschreibt eine Curve, die auf einer zu einer der gegebenen Flächen ähnlichen und ähnlich liegenden Quadrifläche enthalten ist. Lp.

A. F. Huisken. De doorsnijding eener drieassige ellipsoïde door een vlakkenbundel. Diss. Groningen 1896, 55 S.

Bestimmung des Ortes der Brennpunkte der Kegelschnitte, in denen ein Ellipsoid durch einen Ebenenbüschel geschnitten wird. Mo.

F. Balitrand. Détermination des points d'inflexion dans le développement de la section plane d'un cône. Nouv. Ann. (3) **15**, 65-68.

Aus Anlass der Kritik einer Methode von Seiten Carvallo's (vergl. F. d. M. **25**, 956, 1894; Nouv. Ann. **13**, 429) werden für folgenden Satz zwei Beweise geliefert. Ist in einem Punkte A eines ebenen Schnittes eines Kegels die Schnittebene normal zur Fläche, aber nicht zur Kegelseite, so entspricht nach Abwickelung des Kegels dem A ein Inflexionspunkt des abgewickelten Kegelschnitts. H.

J. S. Townsend. A problem in geometry. Messenger (2) **25**, 145.

Der Gegenstand der Note besteht in einem Nachweise der 32 Punkte, in denen die Doppelcurve auf der abwickelbaren Oberfläche, welche durch die Tangenten der zweien Flächen zweiter Ordnung u und v gemeinsamen Curve erzeugt wird, von u geschnitten wird. Glr. (Lp.)

P. Lang. Ueber die Krümmungsverhältnisse der drei Scharen von Flächen zweiten Grades, die mit einem gegebenen ungleichaxigen Ellipsoide confocal sind. Pr. (No. 510) Realsch. Kreuznach. 16 S. 4°.

Es werden die allgemeinen Formeln für den reciproken Wert des Krümmungshalbmessers, die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes, die mittlere Krümmung, das Krümmungsmass und die Nabelpunkte abgeleitet und dann auf die in der Ueberschrift genannten Flächen angewandt. Eine Vereinfachung wird dadurch erzielt, dass eine Coordinatenebene parallel der Tangentenebene in dem betrachteten Punkte gewählt wird. T.

A. R. Forsyth. Geodesics on quadrics, not of revolution. London M. S. Proc. **27**, 250-280.

Der Verf. gewinnt sowohl die Gleichungen der geodätischen als auch der Krümmungslinien dreiaxiger Flächen zweiten Grades aus der bekannten Gleichung $d(p.D)/ds = 0$, wo p das Perpendikel von dem Mittelpunkte der Fläche auf die Tangentialebene in einem Curvenpunkte und D die Länge des zur Richtung der Geodätischen parallelen Halbmessers ist, durch eine sehr elegante Methode, die sich von jenen unterscheidet, welche Jacobi und Weierstrass gaben. Die darauffolgende eingehende Discussion der verschiedenen Fälle, die bei dem Ellipsoid, den Hyperboloiden und den Paraboloiden eintreten können, bieten weniger Neues, obwohl sie wegen ihrer Vollständigkeit bemerkenswert sind. Auch die Behandlung mittels Abel'scher Functionen ist von Weierstrass und im Anschluss hieran von dem Referenten wenigstens für das Ellipsoid längst durchgeführt (Weierstrass, Monatsber. der Ak. z. Berlin, 1861, 986-997; v. Braunmühl, Math. Ann. **20**, 557-586; F. d. M. **14**, 689-691, 1882). Bm.

A. R. Forsyth. Conjugate points on geodesics on an oblate spheroid. Messenger (2) **25**, 161-169.

Eine geodätische Curve auf einer Oberfläche kann bis zu jeder Länge fortgesetzt werden, wenn sie nicht zufällig eine geschlossene Curve ist; aber die Länge des Bogens der Curve zwischen zwei beliebigen Punkten braucht nicht ohne weiteres die kürzeste Oberflächenentfernung zwischen den Punkten zu sein. So darf zum Beispiel in dem Falle eines Grosskreises auf einer Kugel, wenn man den Kreis von einem Punkte nach der einen Seite hin durchläuft, der kürzeste Bogen nicht grösser als ein Halbkreis sein. Aus Jacobi's Forschungen in der

Variationsrechnung ergiebt sich, dass im allgemeinen irgend einem Punkte A auf einer Curve, der eine besondere Maximal- oder Minimal-Eigenschaft besitzt, ein conjugirter Punkt B entspricht. Hierbei besteht zwischen den Punkten A und B die Beziehung, dass ein in A beginnender Curvenbogen sich nicht bis nach B hin erstrecken darf, wenn die eigene Maximal- oder Minimal-Eigenschaft erhalten bleiben soll. So ist auf einem geodätischen Grosskreise einer Kugel der conjugirte Punkt zu einem vorgegebenen der diametral gegenüber liegende Punkt. Der Zweck des gegenwärtigen Aufsatzes besteht in der Ermittelung einer Gleichung, welche den conjugirten Punkt zu einem vorgegebenen auf einer geodätischen Linie bestimmt, die auf einem abgeplatteten Sphäroid gezogen ist. Glr. (Lp.)

E. O. Lovett. Invariants of curves and surfaces of the second degree by the group of motions and the group of similitude. Annals of Math. **11**, 33-47.

Nach der von Lie herrührenden Methode werden die Invarianten berechnet, die ein Kegelschnitt gegenüber der Gruppe der euklidischen Bewegungen und gegenüber der Gruppe der Aehnlichkeitstransformationen der Ebene besitzt. Im Raume wird die entsprechende Aufgabe für Flächen zweiten Grades gelöst. Scht.

G. B. Mathews. A geometrical locus. Quart. J. **28**, 190-192.

Wenn AB und CD zwei windschiefe Strecken im Raume sind, S eine Fläche zweiter Ordnung ist, und an diese von einem Punkte P der Tangentialkegel gelegt wird, so möge dieser die Geraden AB und CD in A', B', resp. in C', D' schneiden. Gesucht wird der Ort für P, so dass das Doppelverhältnis $(ABA'B')$ gleich $(CDC'D')$ oder gleich $(CDD'C')$ ist. Man findet eine Fläche sechster Ordnung, welche in zwei kubische Flächen degenerirt, falls S ein Kegel ist, oder falls S die beiden Geraden AB und CD berührt. Man erhält so eine Verallgemeinerung des Steiner'schen Satzes über den Ort eines Punktes, von dem aus zwei ebene Strecken unter gleichen oder supplementaren Winkeln gesehen werden. R. M.

L. Gottscho. Miscellen aus der Theorie der Curven und Flächen zweiter Ordnung unter Anwendung der Methode des Unendlichgrossen. Diss. Freiburg. 61 S. 8°.

G. Lapointe. Extension à l'espace d'une propriété de l'hyperbole équilatère. Rev. de Math. spéc. **7**, 2-4.

G. Papelier. Note sur les équations linéaires. Rev. de Math. spéc. **7**, 81-85.

F. Dumont. Théorème sur la détermination d'une surface du troisième ordre générale par la hessienne. Nouv. Ann. (3) **15**, 312-317.

Der hier bewiesene Satz lautet: Eine Fläche dritter Ordnung ist vollständig bestimmt, wenn eine Fläche vierter Ordnung mit zehn Doppelpunkten gegeben ist, welche die Ecken eines Pentaeders für ihre Hesse'sche bilden. H.

F. Dumont. Sur la représentation de la surface cubique générale sur un plan. Nouv. Ann. (3) **15**, 318-325.

Der Artikel giebt eine grosse Anzahl abzählender Bemerkungen über Abbildung der allgemeinen Fläche dritten Grades auf der Ebene, ohne Herleitung. H.

A. Sucharda. Ueber die asymptotischen Curven gewisser Flächen dritter Ordnung mit gewöhnlichem Knotenpunkte. Böhm. Akad. **5**, No. 9, 1-32. Mit 11 Fig. auf V Tafeln. (Böhmisch.)

Es wird der Verlauf der asymptotischen Curven bei vier Typen einer Fläche dritter Ordnung $(u_2)+(u_3)=0$ untersucht, bei welcher $(u_3)=0$ in Ebenen zerfällt, und durch deren gewöhnlichen Knotenpunkt resp. 6, 4, 2, 0 reelle Gerade hindurchgehen. Der Verf. betont, die Anregung zu dieser Arbeit dem Prof. W. Dyck zu verdanken, welcher für die gedachten Typen geeignete Gleichungen vorschlug. Da bei den zugehörigen Differentialgleichungen der ersten drei Typen eine directe Integration ausgeschlossen erscheint, wird bei denselben bloss der schematische Verlauf der Curven studirt und die Richtigkeit desselben aus Darboux'schen und Dyck'schen Arbeiten verificirt. Die entsprechende bildliche Darstellung dieser Curven in der ersten und zweiten Projection geschieht mit Hülfe einer angenäherten, doch in den gegebenen Grenzen genügend genauen Methode des Verfassers. Sda.

E. Bally. Note sur le cône de Chasles et la cubique des normales. J. de Math. spéc. (4) **5**, 198-208.

Chasles'scher Kegel einer Mittelpunkts-Oberfläche zweiter Ordnung ist der Ort aller Geraden, die durch einen gegebenen Punkt A gehen und mit ihren conjugirten Geraden rechte Winkel einschliessen. Als besondere Erzeugende liegen auf ihm: die Verbindungslinie von A mit dem Mittelpunkte und das Lot von A auf die Polarebene von A, die Parallelen durch A mit den Axen der Fläche, die sechs Normalen von A auf die Fläche, die Axen desjenigen Schnittes der Fläche, für den A Mittelpunkt ist, die Axen des Tangentialkegels von A an die Fläche. Ueber diesen Kegel wird eine Anzahl von Sätzen nach synthetischer Methode hergeleitet. Der zweite betrachtete Ort wird definirt als Ort eines Punktes M, dessen Polarebene in Bezug auf die Fläche zu AM senkrecht ist; der Ort ist eine kubische Raumcurve ζ auf dem Chasles'schen Kegel von A und geht durch A und den Mittelpunkt der Fläche.

Auch für diese Raumcurve werden einige Sätze, zum Teil synthetisch, zum Teil analytisch bewiesen. So ist der Ort der kubischen Curven ζ, die durch einen gegebenen Punkt gehen, der Chasles'sche Kegel dieses Punktes. Die kubische Curve ζ des Punktes (α, β, γ) ist durch die Gleichungen definirt: $x(a^2+\lambda) = a^2\alpha$, $y(b^2+\lambda) = b^2\beta$, $z(c^2+\lambda) = c^2\gamma$, wo λ ein variabler Parameter. Verschiedene bei Prüfungen gestellte Aufgaben werden auf diese Gebilde zurückgeführt. Lp.

Elgé. Sur une génération par points de la cubique aux pieds des normales à une quadrique. J. de Math. spéc. (4) **5**, 7-8.

Als Ort des Mittelpunktes eines Flächenbüschels durch die Schnittcurve der gegebenen Fläche und einer beliebigen Kugel. Lp.

D. Andere specielle Raumgebilde.

R. Nicodemi. Rigate gobbe di quarto grado nella congruenza delle normali ad una quadrica. Atti della Accademia Pontaniana. Memoria n° 5. 14 S.

Die Normalen einer Quadrifläche Ω in den Punkten ihres Schnittes mit einer Ebene ε bilden eine Regelfläche Σ der Ordnung 4 und des Geschlechtes 0. Im allgemeinen, d. h. wenn ε keine besondere Lage in Bezug auf Ω hat, gehört diese Regelfläche zur ersten Species in der wohlbekannten Klassification von Cremona. Wenn aber ε normal zu einer Hauptebene von Ω ist oder durch den Mittelpunkt geht, so gehört Ω zur zweiten Species. Und wenn ε eine Berührungsebene von Σ ist, zerfällt Ω in zwei hyperbolische Paraboloide. — Diese Sätze und die Darstellung von Σ in einer Centralprojection, für welche ε die Tafel und ihr Pol in Bezug auf Σ das Projectionscentrum ist, sind die Hauptgegenstände der Nicodemi'schen Arbeit. La.

P. A. Schoute. Over het oppervlak van Steiner. Amsterdam, Sitz. Ber. Akad. **4**, 224-230 und 272-285.

Es handelt sich um die Fläche $S^4 \equiv y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2-2kxyz = 0$, in welche die Steiner'sche Fläche (Römerfläche) mit triplanarem dreifachen Punkte durch projective Transformation verwandelt werden kann. Quadratische Kegelflächen durch die drei Doppelgeraden schneiden Kegelschnitte aus. Involutorische Paarung dieser Kegelflächen mittels der Tangentialebenen von S^4. Parabolische Curve der S^4. Ort der Centra der oben erwähnten Kegelschnitte.

Neuer Beweis der Cremona-Sturm'schen Sätze, wonach S^4 keine Raumcurve ungerader Ordnung und keine biquadratische Raumcurve erster Art ohne Doppelpunkt enthält. Ferner werden studirt die unicursalen Raumcurven vierter Ordnung und die biquadratischen Kegelflächen, durch welche sie aus O projicirt werden. Mo.

H. Weber. Darstellung der Fresnel'schen Wellenfläche durch elliptische Functionen. Zürich. Naturf. Ges. **41**, 2. Teil, 82-91.

Die Fresnel'sche Wellenfläche ist bekanntlich ein specieller Fall der Kummer'schen Fläche, deren Coordinaten sich als Quotienten hyperelliptischer ϑ-Functionen ($p = 2$) darstellen lassen. H. Weber hat im J. für Math. **84** (F. d. M. **10**, 533, 1878) eine solche Darstellung gegeben und gezeigt, wie im specielleren Falle der Wellenfläche die hyperelliptischen ϑ-Functionen in zwei elliptische zerfallen, so dass damit eine Darstellung der Coordinaten der Punkte der Wellenfläche durch elliptische ϑ-Functionen geleistet war. Daran schlossen sich Arbeiten von Volterra (Acta Math. **16**; F. d. M. **24**, 1022, 1892) und Humbert (American Journ. **14** u. Journ. de Math. (4) **9**; F. d. M. **25**, 1260, 1893/94). Verf. stellt sich nun hier die Aufgabe, eine von dem allgemeineren Fall unabhängige Darstellung der Punktcoordinaten durch elliptische Functionen direct zu erhalten, was ihm dadurch gelingt, dass er dieselben durch gewisse Parameter p und q ausdrückt, welche so beschaffen sind, dass die Curven $p =$ const. auf dem äusseren Mantel der Wellenfläche von einer Schar concentrischer Kugeln ausgeschnitten werden, während die Curven $q =$ const. von ähnlichen Ellipsoiden auf der Wellenfläche erzeugt werden. Für den inneren Mantel vertauschen sich die Rollen von p und q. $p =$ const. und $q =$ const. bilden auf beiden Mänteln zwei orthogonale Curvensysteme, durch welche die Wellenfläche auf das Ellipsoid (aber nicht in den kleinsten Teilen ähnlich) abgebildet wird. Die so dargestellten Coordinaten lassen sich dann leicht durch elliptische Functionen mit zwei verschiedenen Moduln ausdrücken, und man hat den Vorteil, dass bei dieser Darstellung die beiden Mäntel getrennt erscheinen. Bm.

A. Mannheim. Propriété nouvelle de la surface de l'onde. C. R. **122**, 708-711.

Der Verf. teilt eine neue Eigenschaft der Wellenfläche mit: Trifft die Gerade, welche einen Punkt m_1 der Wellenfläche mit dem Fusspunkte des vom Mittelpunkte o der Fläche auf ihre Tangentialebene in m_1 gefällten Lotes verbindet, eine der Hauptebenen der Wellenfläche in einem Punkte r, und bezeichnet e den Fusspunkt des von m_1 auf die Gerade or gefällten Lotes, so hat man bei beliebigem m_1 $oe \times or$ $=$ const. Diese Constante ist das Quadrat des Halbmessers des in der gewählten Hauptebene gelegenen Kreises der Wellenfläche.

Dieses Theorem wird zur Lösung der folgenden Aufgabe — und das ist der Hauptzweck der Notiz — angewandt: Die Axen einer Wellenfläche zu bestimmen, wenn man die Hauptebenen derselben, einen ihrer Punkte und ihre Tangentialebene in diesem Punkte kennt. Jhk.

G. Leinekugel. Note sur une surface remarquable du quatrième order. J. de Math. spéc. (4) **5**, 145-150.

Als „Question 492“ hatte der Verf. den folgenden Satz zum Beweise

vorgelegt: Man betrachtet zwei Oberflächen zweiter Ordnung (Σ), (Σ'), die sich längs einer ebenen Curve (C) berühren, und in der Ebene dieser Curve nimmt man zwei ihrer Punkte σ, σ' an. Die ebenen Vierecke, von denen σ und σ' zwei Gegenecken sind, während die beiden anderen Gegenecken die Fläche (Σ) beschreiben, und deren Verbindungslinie die Fläche (Σ') tangirt, haben zwei weitere Ecken, welche zwei Flächen zweiter Ordnung beschreiben. Einen von Mannheim gegen die Richtigkeit des Satzes erhobenen Einwand widerlegt der Verf.; dagegen erweist sich eine Bemerkung von G. de Longchamps als richtig, dass der vom Verf. geführte Beweis, der den Schnitt jeder durch $\sigma\sigma'$ gelegten Ebene mit der Ortsfläche als aus zwei Kegelschnitten bestehend zeigt, nicht ausreicht. Die Ortsfläche entpuppt sich als Fläche vierter Ordnung, auf welcher ausser den beiden Doppelpunkten noch zwei andere liegen. Dass eine solche Fläche einen Kegelschnitt als Doppellinie besitzen muss, ist aus der Kummer'schen Abhandlung im J. für Math. **64**, 68ff. bekannt (auch Berl. Monatsber. 1863). Diese berühmte Arbeit scheint aber dem Verf entgangen zu sein; denn weder erwähnt er sie, noch hat er den Doppelkegelschnitt seiner Fläche, auf den die beiden wandernden Doppelpunkte der Kegelschnitte durch die Gerade $\sigma\sigma'$ hinweisen, erkannt oder aufgesucht. Lp.

W. Booth. **On Hamilton's singular points and planes on Fresnel's wave surface.** Dublin Proc.

J. de Vries. **Zur Geometrie der Ringfläche.** Nieuw Archief (2) **3**, 72-76.

Es wird bewiesen, dass der Torus ausser den Parallelen und Meridianen und den Schnittkreisen der Doppeltangentialebenen keine Kreise trägt. Mo.

R. Lachlan. **On the double foci of a bicircular quartic and the nodal focal curves of a cyclide.** Lond. M. S. Proc. **27**, 71-85.

Bericht in Abschnitt IX, Kapitel 2D, S. 492 dieses Bandes.

G. de Longchamps. **École Polytechnique. Concours du 11 juin 1896.** J. de Math. spéc. (4) **5**, 159-163.

Die Aufgabe, deren ausführliche Lösung der Herausgeber des Journals selbst giebt, lautet: Gegeben ein Kreis, der in rechtwinkligen Coordinaten die Gleichungen hat: $x = a$, $y^2+z^2 = a^2$. Man betrachte 1) den Kegel S, welcher den Kreis zur Basis, den Punkt A auf der z-Axe mit $z = \lambda a$ zur Spitze hat; 2) die Oberfläche S_1, welche durch Gerade erzeugt wird, die zur xy-Ebene parallel sind und an der z-Axe sowie an dem gegebenen Kreise entlang gleiten. Verlangt wird: I. Bildung der beiden Gleichungen für die Oberflächen S und S_1. II. Aufstellung des Ausdrucks für den Sinus des Winkels der beiden Tangentialebenen zu den Oberflächen in einem Punkte des Kreises, wo $z = \mu a$

ist, und Berechnung dieses Sinus auf drei Decimalen für $\lambda = 0{,}5$ und $\mu = 0{,}5\sqrt{3}$. III. Bestimmung des Schnittes beider Flächen; Construction zweier Projectionen desselben für $\lambda = 0{,}5$; Verfolgung seiner Wandelungen, wenn λ von 0 bis ∞ geht. Lp.

L. Heffter. Ueber Modellirung von Isogonalflächen. Schlömilch Z. **41**, 163-166.

In einem Aufsatz „Ueber gewisse Flächen vierter Ordnung (Isogonalflächen)" (J. für Math. **115**; F. d. M. **26**, 744, 1895) hat Verf. auf eine Art von Flächen aufmerksam gemacht, die einem äusserst einfachen Problem entspringen, aber nichts desto weniger interessante Formen aufweisen. In Verfolgung dieses Gesichtspunktes giebt er in der vorliegenden Note an, wie man von diesen Flächenformen ein anschauliches Bild gewinnen kann, und beschreibt die hierzu construirten Modelle und Apparate, welche nach seinen Angaben vom Mechaniker Wilhelm Schmidt in Giessen hergestellt worden sind. Wbg.

J. Schreiner. Ueber diejenige Kardioide, bei welcher die Ebenen des rollenden und des festen Kreises zu einander senkrecht bleiben. Pr. Gymn. Kempten. 34 S. 8°. Mit 1 Fig.-Taf.

Rollt ein Kreis auf einem anderen von gleichem Radius, während die Ebenen beider senkrecht zu einander bleiben, so beschreibt ein Punkt P des rollenden Kreises die in Frage kommende Kardioide. Sie ist eine Raumcurve vierter Ordnung mit einem Rückkehrpunkt, und die durch sie gehenden Flächen zweiter Ordnung sind im allgemeinen Rotationsflächen, deren Mittelpunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen; letztere lässt sich zur Bestimmung der Schmiegungsebene in einem beliebigen Curvenpunkte mit Vorteil verwenden. Die Doppelcurve der Tangentenfläche der Kardioide ist wiederum eine Hyperbel. Js.

Buffone. Studio di un'elica sferica ed algebrica. Batt. G. **34**, 152-176.

Von der Bemerkung ausgehend, dass das Verhältnis der ersten zur zweiten Krümmung bei Schraubenlinien constant ist, stellt der Verf. zunächst die Gleichungen sphärischer Schrauben durch die Beziehungen zwischen diesen beiden Krümmungen und dem Bogen der Curve her und setzt sie dann in rechtwinklige Coordinaten um. Hierauf untersucht er, für welchen Charakter der eintretenden Constanten diese Curven algebraisch werden, und behandelt schliesslich eine ganz specielle sphärische Schraube, deren Gleichungen durch $x = 3\sin\varphi - 2\sin^3\varphi$, $y = 2\cos^3\varphi$, $z = \sqrt{3}\sin\varphi$ gegeben sind. Dabei findet er als Projectionen auf die xy-Ebene eine Epicykloide mit zwei Spitzen, auf die xz-Ebene eine Curve dritter Ordnung mit einer Spitze im unendlich fernen Punkte der x-Axe und als Projection auf die yz-Ebene eine Curve sechster

Ordnung, symmetrisch zu den beiden Coordinatenaxen. Aus der eingehenden Untersuchung dieser Projectionen werden dann als Eigenschaften der Raumcurve abgeleitet, 1) dass sie von der sechsten Ordnung ist, und 2) dass sie vier Spitzen besitzt.

Die Aufstellung der Gleichungen für die Tangente, für die einfach und doppelt osculirenden Developpabeln, sowie die Anwendung der Cayley-Zeuthen'schen Formeln beschliessen die Abhandlung. Bm.

J. Thomae. Ueber die durch die leuchtende Sonnenkugel und den Saturnring erzeugte Schattenfläche. Leipz. Ber. **48**, 1896, 530-582.

Durch neuere astronomische Beobachtungen ist der Verf. wieder auf das schon von Laplace behandelte Schattenproblem geführt worden. Es gilt, die einhüllende Fläche des Halbschattens zu bestimmen, und zwar nicht bloss mit astronomischen Annäherungsmethoden. Seit Salmon kennt man die Gleichung dieser Fläche für den Fall, dass der leuchtende und der schattengebende Körper von Oberflächen zweiter Ordnung begrenzt sind; sie ist von achter Ordnung mit vier Doppelkegelschnitten. Verf. liefert nun eine eingehende Studie über diese Fläche, indem er zur Vereinfachung annimmt, dass der leuchtende Körper eine Kugel, der schattengebende eine kreisförmige Ebene sei. Die Gleichung der Fläche wird zuerst in Ebenencoordinaten aufgestellt; und es wird neben dem schattengebenden Kreise noch ein weiterer, in der Symmetrieebene liegender Doppelkegelschnitt aufgedeckt und discutirt. Die Ebenen des noch vorhandenen dritten und vierten Kegelschnitts bilden mit den beiden vorigen das in Bezug auf Kugel und Kreis conjugirte Tetraeder. In jeder dieser Ebenen liegen ausserdem vier erzeugende Geraden; jede Ecke ist Spitze eines Kegels vierter Klasse; auf jeder Erzeugenden bestimmen die vier Ebenen ein constantes Doppelverhältnis. Legt man das Coordinatensystem in dieses Tetraeder, so kann man die Ebenencoordinaten der Fläche als elliptische Functionen eines Parameters darstellen, wobei eben jenes Doppelverhältnis den Modul bildet. Diesen Parameter kann man aus den Gleichungen der Erzeugenden eliminiren und so zur vollständigen Gleichung der Fläche in Tetraedercoordinaten gelangen, wobei die Coefficienten sich durch den Modul ausdrücken lassen. Auf weitere Einzelheiten soll hier nicht eingegangen werden. R. M.

G. Humbert. Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes du genre trois. Journ. de Math. (5) **2**, 263-293.

Nähere Ausführung jener Untersuchungen (C. R. **120**) des Verf., über welche schon F. d. M. **26**, 518, 1895 berichtet wurde. Kr.

L. Raffy. Sur deux classes de surfaces analogues aux surfaces tétraédrales. S. M. F. Bull. **24**, 2-19.

Tetraedrale Flächen sind bekanntlich durch die Gleichungen dargestellt:

$$x = A(u-a)^m(v-a)^m,$$
$$y = B(u-b)^m(v-b)^m,$$
$$z = C(u-c)^m(v-c)^m,$$

wo $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ zwei Scharen conjugirter Curven darstellen. Es werden nun hier diejenigen Flächen betrachtet, welche durch die allgemeineren Gleichungen: $x = U_1(u)V_1(v)$, $y = U_2(u)V_2(v)$, $z = U_3(u)V_3(v)$ gegeben sind, in denen die Functionen U und V so beschaffen sind, dass $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ ebenfalls conjugirte Curvenscharen bilden. Es gelingt dem Verf., alle Flächen dieser Gattung zu bestimmen und zu zeigen, dass ihre Asymptotenlinien durch zwei Quadraturen bestimmt werden. Von den drei Klassen solcher Flächen, welche sich ergeben, ist eine bereits von Peterson (Journal de la S. m. de Moscou 1866) und Jamet (Ann. de l'Ec. Norm. (3) **4**; F. d. M. **19**, 816-818, 1887) betrachtet worden, während die durch die Gleichungen:

$$x = u^{m_1} e^{m_1 \int \frac{g(v)dv}{v+m_1}}, \quad y = u^{m_2} e^{m_2 \int \frac{g(v)dv}{v+m_2}}, \quad z = u^{m_3} e^{m_3 \int \frac{g(v)dv}{v+m_3}}$$

gegebene neu ist. — Ueber die erste Flächengattung führt der Autor noch einige interessante Sätze an. Bm.

M. Falchi. **Nota circa un particolare problema sulle superficie minime.** Batt. G. **34**, 89-97.

Versteht man unter einer allgemeinen Schraubenfläche die Fläche, welche entsteht, wenn alle Punkte einer Curve (die ohne Beschränkung der Allgemeinheit als eben vorausgesetzt werden darf) Schraubenlinien von gleicher Axe und gleicher Ganghöhe beschreiben, so handelt es sich um die Aufgabe, diejenige allgemeine Schraubenfläche zu finden, deren Oberfläche ein Minimum des Inhalts besitzt, ein Problem, das zum Teil schon von Scherk im J. für Math. **13**, 185 gelöst worden ist. Die Lagrange'sche Bedingung für Minimalflächen führt zu einer Differentialgleichung, die auf eine lineare von der ersten Ordnung zurückgeführt, also allgemein integrirt werden kann. Je nachdem die Integrationsconstante positiv oder negativ ist, erhält man zwei verschiedene Lösungen, deren weitere Discussion der Verf. sich noch vorbehält. In der vorliegenden Arbeit behandelt er nur die beiden Grenzfälle der Schraubenbewegung, dass die Ganghöhe 0 (Rotation), resp. ∞ (Translation) ist, in welchen Fällen sich als Resultate die durch Rotation der Kettenlinie um eine Gerade entstehende Fläche, resp. die Ebene ergeben. Eine singuläre Lösung der Differentialgleichung liefert die gewöhnliche Schraubenfläche. F.

Guichard. **Sur les surfaces minima non euclidiennes.** Ann. de l'Éc. Norm. (3) **13**, 401-414.

Legt man der Massbestimmung im Raume irgend eine Fundamentalfläche zweiter Ordnung (Q) zu Grunde, so entsprechen den Minimal-

flächen der euklidischen Geometrie die Flächen (M), für welche die beiden Tangenten an (Q) in jedem Punkte conjugirt sind. Die Ermittelung der Flächen (M) erfordert nach Darboux, dem man diese Verallgemeinerung der Minimalflächen verdankt, die Integration der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (A) $\partial^2\omega/\partial p\partial q = \sin\omega$, also derselben Differentialgleichung, von der die Flächen constanten Krümmungsmasses des euklidischen Raumes abhängen. Während Darboux diesen Satz durch elegante Rechnungen abgeleitet hatte, zeigt Guichard in dem ersten Teile seiner Abhandlung, wie man auch auf Grund einfacher geometrischer Ueberlegungen zu den fundamentalen Formeln für die Flächen (M) und zu der Differentialgleichung (A) gelangen kann. In dem zweiten Teile giebt er Anwendungen seiner Sätze über Eigenschaften krummer Oberflächen, die nur von der sphärischen Abbildung abhängen (C. R. **116**, 1238-1240, 1893). St.

E. Sabinin. Ueber eine Fläche constanter negativer Krümmung. Mosk. Math. Samml. **19**, 507-518. (Russisch.)

Für die Liouville'sche Fläche (Monge, Application de l'Analyse, 5e éd., p. 597-608) wird das Theorem, dass die Summe der Winkel eines geodätischen Dreiecks kleiner als 2π ist, ohne Hülfe der Sätze der Flächentheorie analytisch bewiesen.

Zum Schluss wird bemerkt, dass aus der Gauss'schen Formel $m=(rt-s^2):(1+p^2+q^2)^2$ ganz einfach direct folgt, die Liouville'sche Fläche habe eine negative constante Krümmung. Si.

P. Sweschnikow. Ueber eine Art von Flächen. Kasan Ges. (2) **6**, No. 1, 1-16. (Russisch.)

Eine Curve A rollt ohne Gleiten auf einer anderen unbeweglichen Curve B, so dass ihre Osculationsebenen im gemeinsamen Berührungspunkte einen constanten Winkel α bilden. Jeder mit A fest verbundene Punkt M beschreibt eine gewisse Curve Γ. Aendern wir α, so bilden die entsprechenden Curven Γ eine Fläche Σ. Es werden Ausdrücke für Flächen- und Volumenelement aufgestellt. Das Volumen ist von der Curve B unabhängig (?). Es werden einige Specialfälle betrachtet, wie Röhrenfläche u. a. Si.

E. Gebilde in Räumen von mehr als drei Dimensionen.

G. Fano. Sulle varietà algebriche dello spazio a quattro dimensioni con un gruppo continuo integrabile di trasformazioni projettive in sè. Ven. Ist. Atti (7) **7**, 1069-1103.

Wie bekannt, bezeichnet man als integrabel jede r-gliedrige Gruppe, deren so und sovielte Derivirte bloss aus der identischen Transformation besteht. Erinnern wir auch an den folgenden Lie'schen Satz: Eine r-gliedrige Gruppe $X_1f, \ldots, X_rf$ ist dann und nur dann integrabel,

wenn sich in ihr r unabhängige infinitesimale Transformationen $Y_1 f, \ldots, Y_r f$ so auswählen lassen, dass $Y_1 f, \ldots, Y_i f$ jedesmal eine i-gliedrige Untergruppe erzeugen, die in der r-gliedrigen invariant ist. Durch Anwendung dieses Satzes beweist der Verf., dass im vierdimensionalen Raume R_4 jede continuirliche integrable Gruppe von projectiven Transformationen mindestens einen festen Doppelpunkt besitzt, eine feste durch diesen Punkt gehende Doppelgerade, eine feste durch diese Gerade gehende Doppelebene und einen festen durch diese Ebene gehenden Doppelraum. Diese Bemerkung dient als Grundlage für die Bestimmung aller algebraischen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten von R_4, welche eine integrable continuirliche Gruppe projectiver Transformationen in sich besitzen, welche Bestimmung der Hauptzweck der vorliegenden Abhandlung ist. Wir können nicht die Analyse wiedergeben, welche diesem Zwecke dient; es genüge, die Resultate derselben anzuführen:

Die dreidimensionalen algebraischen Mannigfaltigkeiten des R_4, die eine continuirliche integrable Gruppe von ∞^4 projectiven Transformationen enthalten, sind:

I. Eine Mannigfaltigkeit vierter Ordnung, welche aus ∞^1 Ebenen besteht und eine dreifache Ebene besitzt; ihre Gleichung ist:

$$x_2^4 + x_1^3 x_3 + x_1^2 x_2 x_4 + x_1 x_2^2 x_5 = 0.$$

II. Eine kubische Mannigfaltigkeit mit zwei Doppelkegelschnitten; ihre Gleichung ist: $x_1 x_4^2 + x_2 x_3^2 = x_1 x_2 x_5$.

III. Eine andere kubische Mannigfaltigkeit, welche zwei sich schneidende Geraden besitzt und folgende Gleichung hat:

$$x_1^2 x_4 + x_2^3 x_5 + x_1 x_3 x_5 = 0.$$

IV. Eine biquadratische Mannigfaltigkeit, welche eine Doppelebene, eine darin enthaltene dreifache Gerade und einen auf dieser gelegenen singulären Punkt besitzt; ihre Gleichung ist

$$6x_2^4 - 12 x_1 x_2^2 x_3 + 4 x_1^2 x_2 x_4 - x_1^3 x_5 + 3 x_1^2 x_3^2 = 0.$$

V. Mannigfaltigkeiten beliebiger Ordnung, welche eine Gleichung der Form $x_1^{k-2} f = x_2^k$ haben, wo f eine quadratische Form ist.

Man hat ferner die kubische Mannigfaltigkeit $x_1^2 x_5 - 3 x_1 x_2 x_4 + 2 x_2^3 - x_1 x_3^2 = 0$, welche ∞^5 lineare Verwandtschaften in sich hat.

La.

R. Banal. Sulle varietà a tre dimensioni con una curvatura nulla e due eguali. Annali di Mat. (2) **24**, 213-240.

Es lässt sich nicht bestreiten, dass man bis jetzt über die Geometrie der aus einem ebenen R_4 ausgeschiedenen R_3 sehr wenig gewusst hat, und man wird dem Verf. auch darin Recht geben müssen, dass es nicht anders sein konnte, so lange man Analogien mit dem aus einem ebenen R_3, dem euklidischen Raume, ausgeschiedenen R_2, den gewöhnlichen krummen Oberflächen, nachging; denn in Wahrheit bilden diese R_2 in vieler Beziehung einen Ausnahmefall gegenüber dem aus einem ebenen R_{n+1} ausgeschiedenen R_n. Zu den Schwierigkeiten, die das

Versagen der geometrischen Anschauung bereitet, kommt aber noch eine zweite dazu, die unübersehbare Verwickelung der analytischen Operationen. Diesen Uebelstand beseitigen jedoch die in neuester Zeit von G. Ricci ersonnenen Methoden der „absoluten Differentialrechnung“, so weit das der Natur der Sache nach möglich ist, und auf Anregung und unter Benutzung der Symbole Ricci's ist die vorliegende Abhandlung entstanden.

Im ersten Kapitel betrachtet der Verf. die aus einem ebenen R_4 ausgeschiedenen R_3, deren Kronecker'sches Krümmungsmass

$$K = \frac{1}{r_1 r_2 r_3} = 0$$

ist. Diese Flächen sind aus folgendem Grunde von besonderem Interesse. Hat man einen R_3 der betrachteten Art, und ist das Quadrat des Linienelementes ds durch $ds^2 = \Sigma a_{rs} dx_r dx_s$ $(r, s = 1, 2, 3)$ gegeben, so werden im Gegensatze zu den R_2 die Coefficienten der zweiten zu ihr gehörigen fundamentalen quadratischen Differentialform vermöge der Fundamentalgleichungen, die den Gleichungen von Gauss und Mainardi für die R_2 entsprechen, im allgemeinen bereits vollständig bestimmt; es giebt also im allgemeinen keine wirklichen Biegungen eines solchen R_3, er ist vielmehr durch sein Linienelement bis auf Bewegungen und Spiegelungen eindeutig bestimmt. In besonderen Fällen kann jedoch dieses Theorem versagen, und das tritt gerade, wie Killing gezeigt hat, für $K = 0$ ein.

Die Bedingungen, welche die a_{r} erfüllen müssen, damit der zugehörige R_3 aus einem ebenen R_4 ausgeschieden werden kann, hatte bereits Ricci angegeben. Der Verf. fügt jetzt die Bedingung hinzu, dass $K = 0$ sein soll, und untersucht, welche Gestalt die Fundamentalgleichungen in diesem Falle annehmen.

Nach diesen Vorbereitungen wendet er sich zu dem besonderen Falle, dass $r_1 = \infty$, $r_2 = r_3$ sein soll. Unter dieser Voraussetzung nehmen die Fundamentalgleichungen eine besonders einfache Gestalt an, und ihre Integration führt zu einer charakteristischen Form des Linienelementes ds des so beschaffenen R_3; es wird nämlich $ds^2 = da^2 + k_1^2 a^2 (d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\chi^2)$. Dabei ist k_1 eine Constante, deren Wert zwischen -1 und $+1$ liegt, und $r_2 = r_3 = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{k_1^2} - 1}$. Es giebt also, abgesehen von Bewegungen und Spiegelungen, nur ∞^1 R_3 der verlangten Art; nähert sich k_1 dem Grenzwerte ± 1, so erhält man den euklidischen Raum. Die R_2 $a = \text{const.}$ sind Flächen von constantem positivem Krümmungsmasse $1/ak$; bei den Flächen $\chi = \text{const.}$ sind beide Krümmungen Null, bei den Flächen $\Theta = \text{const.}$ nur die eine, während die andere gleich $\frac{1}{k_1 a} \cot\Theta$ ist.

Das Linienelement ds lässt sich noch auf eine andere bemerkenswerte Gestalt bringen. Setzt man:

$$\alpha=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}k_1},\quad \Theta=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{z^2}},\quad \chi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

so wird $ds^2=k_1^2(x^2+y^2+z^2)^{k_1-1}(dx^2+dy^2+dz^2)$, und diese Formel zeigt, dass der zugehörige R_3 conform auf den euklidischen Raum abgebildet werden kann.

Den Schluss bildet die Untersuchung des bis dahin ausgeschlossenen Falles, dass $r_2=r_3$ constant ist. Es ergiebt sich $ds^2=d\alpha^2+(d\Theta^2+\sin^2\Theta d\chi^2)/c^2$, und für

$$\alpha=\frac{1}{2c}\log(x^2+y^2+z^2),\quad \Theta=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{z^2}},\quad \chi=\operatorname{arctg}(y/x)$$

findet man $ds^2=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{dx^2+dy^2+dz^2}{x^2+y^2+z^2}$, so dass wieder eine conforme Abbildung auf den euklidischen Raum möglich ist. St.

P. del Pezzo. Una trasformazione cremoniana fra spazi a quattro dimensioni. Napoli Rend. (3) **2**, 336-344.

Die vom Verf. erforschte birationale Transformation wird durch die Formeln $y_0:y_1:y_2:y_3:y_4=x_0^2:x_0x_1:x_0x_2:x_3x_2+ax_1^2+bx_1x_2+cx_2^2:x_1x_4$ analytisch dargestellt, deren inverse die folgenden sind: $x_0:x_1:x_2:x_3:x_4=y_0y_2:y_1y_2:y_2^2:y_0y_3+ay_1^2+by_1y_2+cy_2^2:y_0y_4$. In beiden vierdimensionalen entsprechenden Räumen besteht das homaloidische System aus Quadrikegeln erster Species. Der Verf. bemerkt, dass diese Transformation als die analoge einer wohlbekannten zwischen zwei gewöhnlichen Räumen angesehen werden kann; ferner dass sie auf beliebige lineare Räume ausgedehnt werden kann. Von dieser allgemeinen Transformation giebt er auch die analytische Darstellung. La.

P. H. Schoute. Het vierdimensionale prismoïde. Amsterdam Abhandlungen (verhandelingen) der Akad. **5**, No. 2, 20 S. mit 1 Tafel.

Es wird gezeigt, dass die Inhaltsformel für das Prismatoid auch für den analogen vierdimensionalen Körper gilt. Mo.

A. del Re. Sulla successiva proiezione di una varietà quadratica su sè stessa. Rom. Acc. L. Rend. (5) **5**$_2$, 365-372.

Es sei $\varphi=\Sigma a_{ik}u_iu_k$ $(i,k=1,2,\dots,n+1)$ die Gleichung einer Quadrifläche des n-dimensionalen Raumes R_n in Ebenencoordinaten; ferner $\varphi_h=\Sigma a_{ik}u_i^{(h)}u_k^{(h)}$. Dann stellen analytisch die Gleichungen $\varrho\xi_i'=\varphi_h\xi_i-u_\xi^{(h)}\partial\varphi_h/\partial u_i^{(h)}$ $(i=1,2,\dots,n+1)$ die Projection der Fläche auf sich selbst dar; das Projectionscentrum ist der Pol P_h der Hyperebene π_h, deren Coordinaten $u_1^{(h)},\dots,u_{n+1}^{(h)}$ sind, während ξ_i, ξ_i' die Coordinaten zweier entsprechenden Punkte sind. Die obigen Gleichungen

können in einer zweiten Form geschrieben werden; dann erkennt man in ihnen die Verallgemeinerung der Gleichungen, welche Cayley für den Fall $n = 3$ im Phil. Mag. 1853 veröffentlicht hat. — Wendet man die obigen Gleichungen mehrmals an, so gelangt man zur analytischen Darstellung der Producte beliebig vieler Projectionen der Quadriflächen auf sich selbst. Die entstehenden Formeln werden vom Verf. durch ein bemerkenswertes Verfahren erhalten und in einer eleganten Form geschrieben; doch sind sie zu verwickelt, um in diesem Bericht Platz zu finden. — Zum Schluss macht der Verf. eine Anwendung seiner Schlüsse auf die Transformation durch reciproke Radien; er glaubt so, einen Irrtum in einer Arbeit von Mannheim (vgl. F. d. M. **3**, 420, 1871) zu entdecken; aber eine Vergleichung der Originalarbeit lässt sogleich den Widerspruch verschwinden. La.

X. Stouff. Sur une généralisation de la formule de l'aire du triangle sphérique. C. R. **122**, 303-304.

Verallgemeinerung der Formel für die Fläche des sphärischen Dreiecks auf den n-dimensionalen sphärischen Raum von Riemann. Die Formel wird eine andere, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Aus ihr lassen sich Relationen entwickeln, welche im Falle der Polyeder von $n+1$ Dimensionen den Euler'schen entsprechen. Bm.

E. J. Nanson. The content of the common self-conjugate n-gon of two n-ary quadrics. Messenger (2) **26**, 62-64.

Ausdruck für den Inhalt des selbstconjugirten n-Ecks bezüglich der beiden n-dehnigen Quadriräume $\Sigma a_{ij} x_i x_j = 0$ und $\Sigma a'_{ij} x_i x_j = 0$.

Das Resultat enthält, wie in den Fällen $n = 3$ und $n = 4$, die bekannten Werte für den Flächeninhalt des gemeinsamen selbstconjugirten Dreiecks zweier Kegelschnitte und für das Volumen des gemeinsamen selbstconjugirten Tetraeders zweier Quadriflächen in Bezug auf irgend ein System von Punktcoordinaten. Glr. (Lp.)

L. Berzolari. Sulle equazioni differenziali delle quadriche di uno spazio ad n dimensioni. Rom. Acc. L. Rend. (5) **5**$_1$, 247-254.

Ist $z = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ die allgemeine Gleichung der in einem euklidischen n-dimensionalen Raume mit den cartesischen Coordinaten $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z$ liegenden $(n-1)$-dimensionalen Räume zweiter Ordnung, und setzt man: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} = z_{\lambda\mu}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x_\lambda \partial x_\mu \partial x_\nu} = z_{\lambda\mu\nu}$,

so genügt die Function z von $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ den folgenden partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung:

$$\text{(a)} \qquad 2 z_{\lambda\mu} z_{\mu\mu} z_{\lambda\lambda\lambda} + z_{\lambda\lambda}^2 z_{\mu\mu\mu} - 3 z_{\lambda\lambda} z_{\mu\mu} z_{\lambda\lambda\mu} = 0,$$

$$\text{(b)} \quad z_{\lambda\lambda\lambda} z_{\mu\mu} z_{\nu\nu} z_{\mu\nu} + z_{\mu\mu\mu} z_{\nu\nu} z_{\lambda\lambda} z_{\nu\lambda} + z_{\nu\nu\nu} z_{\lambda\lambda} z_{\mu\mu} z_{\lambda\mu} - 3 z_{\lambda\mu\nu} z_{\lambda\lambda} z_{\mu\mu} z_{\nu\nu} = 0.$$

Hier muss man in (a) für (λ, μ) jede der $(n-1)(n-2)$ Combinationen mit Permutation, in (b) für (λ, μ, ν) jede der $\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)$ Combinationen ohne Permutation der Zahlen 1, 2, ..., $n-1$ setzen. Die Gesamtzahl der Differentialgleichungen ist also $\frac{1}{6}n(n^2-7)+1$, was sich auch, wie der Verf. angiebt, durch Erweiterung einer von Halphen (Sur le contact des surfaces, S. M. F. Bull. **3**, 28; F. d. M. **7**, 465, 1875) für $n=3$ benutzten Schlussweise erkennen lässt. Vi.

G. Schlumberger. Ueber n-dimensionale lineare und quadratische Kugelsysteme. Diss. Zürich. VI + 77 S. 8°. Mit 1 Taf.

In der Absicht, später eine ausführliche Theorie der projectivischen Beziehung linearer Kugelsysteme zu geben und ihr die Jacobi'sche Erzeugungsweise der Flächen zweiten Grades einzuordnen, giebt der Verf. hier zunächst eine allgemeine Darstellung der Grundeigenschaften der n-dimensionalen linearen Kugelgeometrie, und zwar auf wesentlich analytischer Grundlage. Gegenstand der Arbeit sind besonders die Begriffe der Distanz, des Winkels, die homogenen Coordinaten einer Kugel, die linearen, insbesondere die orthogonalen Mannigfaltigkeiten, sowie zum Schluss eine eingehende Erörterung der quadratischen Mannigfaltigkeiten, des Ortes ihrer Punktkugeln, der Büschel solcher Mannigfaltigkeiten u. s. w.

Zum Schluss giebt der Verf. Anwendung seiner allgemeinen Resultate auf die quadratischen Systeme von Kreisen in der ebenen linearen Kreisgeometrie, resp. auf die als Punktort zugehörige bicirculare Curve vierter Ordnung. Sfs.

Kapitel 4.

Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).

R. de Saussure. On the representation of imaginary plane curves. Johns Hopkins Univ. Circ. **15**, 39-40.

Es bedeute J eine feste imaginäre Ebene im Raum; durch einen Punkt m dieser Ebene J geht dann eine (und auch nur eine) reelle gerade Linie M. Sind die Coordinaten von m: $x=p+ai$, $y=q+bi$, $z=i$ $(i=\sqrt{-1})$, so sind die Gleichungen der reellen Geraden: $X=p+aZ$, $Y=q+bZ$.

Einer in J gezogenen imaginären ebenen Curve c entspricht eine Congruenz von reellen Geraden. Im besonderen wird diejenige Congruenz besprochen, welche einer imaginären Geraden entspricht.

Wz.

K. Zindler. Eine neue Erzeugungsweise des linearen Complexes durch zweimalige Rotation. Deutsche Math. Ver. **4**, 99-100.

Dreht man eine Regelschar eines gleichseitigen hyperbolischen Para-

boloids um ihre Haupterzeugende und dann die so erhaltene Congruenz um eine im Scheitel des Paraboloids auf der Haupterzeugenden senkrechte Gerade mit sonst beliebiger Richtung, so erhält man einen linearen Complex. Wae.

G. Fano. **Aggiunto alla nota: „Sulle congruenze di rette del terzo ordine prive di linea singolare“.** Torino Atti **31,** 708-715.

Der Verf. hat in einer früheren Arbeit (F. d. M. **25,** 1293, 1893/94) die Frage offen gelassen, ob es Congruenzen dritter Ordnung ohne singuläre Linien giebt, die von der siebenten Klasse und dem Geschlechte 6 sind. Mit Hülfe von Untersuchungen, welche inzwischen Enriques und Castelnuovo über algebraische Flächen angestellt haben (vergl. den Bericht in Abschnitt IX, S. 518ff. dieses Bandes), gelingt es ihm nun, zu zeigen, dass es solche Congruenzen nicht giebt, und dass daher der Satz gilt: Alle Congruenzen dritter Ordnung ohne singuläre Linien, die nicht einem linearen Complexe angehören, sind auf die Ebene abbildbar; mit Ausnahme einer Congruenz sechster Klasse, deren Geschlecht 5 ist, ist das Geschlecht der Congruenzen $\leqq 4$. Wae.

F. Rudio. **Zur Theorie der Strahlensysteme, deren Brennflächen sich aus Flächen zweiten Grades zusammensetzen.** Zürich. Naturf. Ges. **41,** 2. Teil, 76-81.

Es wird die Gleichung der Mittelfläche dieses Strahlensystems aufgestellt in der Form $\pi^2 = 4\varrho\varrho'$. Diese Fläche ist von der zwölften Ordnung und hat die Schnittcurve der beiden F_2 zur Doppelcurve. Sie ist von achter Ordnung und hat zwei Doppelcurven, wenn eine der F_2 ein Kegelschnitt wird; sie ist von vierter Ordnung und hat einen Doppelkegelschnitt, wenn beide F_2 Kegelschnitte werden. In letzterem Falle kann sie auf zwei Arten als Ort eines Kegelschnitts constanter Grösse und constanter Stellung angesehen werden. Wae.

G. Ricci. **Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque.** Rom. Acc. L. Mem. (5) **2,** 276-322.

L. Cremona. **Rapporto.** Daselbst. 275.

Der § 1 dieser Abhandlung enthält eine Zusammenfassung einiger früher vom Verf. erhaltenen Resultate (vgl. unter anderen die folgenden Schriften: Principii di una teoria delle forme differenziali quadratiche, Annali di Mat. (2) **12,** 135-168, F. d. M. **16,** 230, 1884; Delle derivazioni covarianti e controvarianti e del loro uso nella analisi applicata, Studi editi dall'Università di Padova etc., Padova 1888, F. d. M. **20,** 282, 1888; Résumé de quelques travaux sur les systèmes variables de fonctions associés à une forme différentielle quadratique, Darboux Bull. (2) **16,** 167-189, F. d. M. **24,** 371, 1892). Die folgenden vier Paragraphen sind der Theorie der in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit („Grundmannigfaltigkeit“) liegenden Liniencongruenzen gewidmet. Unter

den in §§ II, III behandelten Fragen mögen die folgenden angeführt werden: Bedingungen dafür, dass die Linien einer gegebenen Congruenz geodätisch sind, geodätische Krümmung, Normalcongruenzen, Bestimmung der Systeme von je $(n-1)$ Congruenzen, welche zu je zwei und zu einer gegebenen Congruenz orthogonal sind, orthogonale Flächensysteme, welche eine gegebene Congruenz gemeinschaftlich haben. Die allgemeinen Resultate werden in § IV auf den besonderen Fall einer dreidimensionalen Grundmannigfaltigkeit angewandt. Endlich beschäftigt sich § 5 mit den in einer euklidischen $(n+1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit liegenden n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. Vi.

E. v. Weber. Ueber Linienconnexe. Gött. Nachr. 1896, 282-287.

Sind x_i, y_i die Klein'schen Liniencoordinaten zweier Geraden, so bestimmt die in x_i, y_i homogene Gleichung $F(x, y) = 0$ einen Linienconnex; seine ∞^6 schneidenden Geradenpaare S bilden eine Hauptcoincidenz. Jedem S sind ∞^1 Flächenelemente zweiter Ordnung zugeordnet, welche die Geraden von S zu Haupttangenten haben. Demnach ist dem Connex eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung $\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ zugeordnet, wo Φ in r, s, t homogen ist.

Das Integrationsproblem dieser Gleichung oder des Connexes lautet: Alle ∞^2 einer S zu finden, die zwei totalen Differentialgleichungen genügen, welche die vereinigte Lage benachbarter Elemente ausdrücken.

Jedes S bestimmt einen Strahlenbüschel, in welchem unendlich nahe zu S ein S' liegt; S und S' werden von dem adjungirten Paar harmonisch getrennt, dessen Gerade die charakteristischen Richtungen der Elemente sind und die den adjungirten Connex erfüllen.

Ist dieses adjungirte Paar zu drei auf einander folgenden S harmonisch, so giebt es in dem obigen Strahlenbüschel eine Involution von S. Dann zerfällt Φ in Factoren, die linear in r, s, t sind. Speciell gehören zu lineolinearen Connexen mit symmetrischer Determinante die partiellen Differentialgleichungen der Minimalflächen und des logarithmischen Potentials.

Wird die obige Involution parabolisch, so fallen die Charakteristikensysteme zusammen, und Φ zerfällt in Factoren von der Form $r+2N_i s + N_i^2 t$, z. B. wenn F frei von y ist, wo die Differentialgleichung diejenige der Regelflächen des Complexes $F = 0$ wird.

Verschwindet die Involution identisch, so erhält $F = 0$ die Form $F(x_i y_k - x_k y_i) = 0$; die Differentialgleichung wird erster Ordnung, und die Theorie dieser Linienconnexe wird äquivalent zur gewöhnlichen Connextheorie. Wae.

R. de Saussure. Étude de géométrie cinématique réglée. American J. 18, 304-346.

R. de Saussure. Sur une géométrie de l'espace réglée. C. R. 123, 734-737.

Es werden die ∞^4 Punktepaare einer imaginären Kugel den ∞^4

Geraden des Raumes zugeordnet. Einer Rotation der Kugel in sich entspricht eine Torsion (Schraubung) um eine Gerade, bei welcher eine Gerade eine circulare Congruenz beschreibt. Der Distanz $p+qi$ zweier Punkte der Kugel entspricht für die entsprechenden Geraden eine Grösse, welche Distangle genannt wird und die Form $P+QI$ hat, wo Q der Winkel und P der kürzeste Abstand der beiden Geraden ist. I ist hierbei eine Einheit, die als Krümmungsradius des Geradenraumes angesehen werden kann.

Es gelingt hiermit, Relationen zwischen Punkten der Kugel direct in Relationen zwischen Raumgeraden umzusetzen.

Den ∞^2 Punkten der Kugel, die eine Curve erfüllen, entspricht eine Congruenz, welche analytisch genannt wird, und die aus den Normalen einer Developpabeln besteht. Es werden die tangentialen und normalen Recticongruenzen (die aus den senkrecht schneidenden Geraden einer Geraden bestehen), die osculirenden circularen Congruenzen, die Krümmungsaxe etc. für einen Strahl einer analytischen Congruenz aufgestellt.

Als Element der kinematischen Geometrie des Raumes wird die Gerade angesetzt, und es werden Bewegungen mit einem und zwei Freiheitsgraden betrachtet. Der Viration (Schrotung nach Reuleaux) zweier Regelflächen auf einander wird die Viration zweier Congruenzen zugesellt.

Die allgemeine Bewegung vom Freiheitsgrade zwei ist gegeben durch zwei Trajectoriencongruenzen zweier Strahlen und lässt sich elementar ersetzen durch Rotationen um zwei Axen D und Δ (identisch mit den Schönemann-Mannheim'schen Geraden).

Sind die beiden gegebenen Trajectoriencongruenzen analytisch, so beschreibt jeder Strahl eine analytische Congruenz, und die Bewegung heisst dann analytisch; sie ist das Bild einer allgemeinen Bewegung der Kugel in sich. Hieraus wird die Construction der Krümmungsaxe, die zu einer Geraden des Raumes gehört, als entsprechend zu der Savary'schen Construction für Rouletten abgeleitet.

Jede Bewegung mit einem Freiheitsgrad ist analytisch und kann elementar ersetzt werden durch Viration von einer circularen Congruenz auf einer ebensolchen oder auf einer Recticongruenz, welche letzteren Virationen für sich betrachtet werden.

Die Regelflächen werden, als in analytischen Congruenzen enthalten, von diesem linienkinematischen Gesichtspunkte aus betrachtet.

Zum Schlusse werden Zusammensetzungen von Torsionen aus Zusammensetzungen von Rotationen auf der Kugel übertragen. Wae.

D. Sinzow. Theorie der Connexe im Raume im Zusammenhang mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Kasan Univ. 1894-95, auch sep. 1895. II + 254 S. (Russisch.)

Versuch einer Darstellung der Theorie der Configurationen mit dem Elemente Punkt-Ebene, wie es für die Configurationen mit dem Elemente Punkt-Gerade in der Ebene in den Clebsch'schen Vorlesungen über

Geometrie Bd. **1** von F. Lindemann gemacht worden ist. Nach der 11 Seiten starken Einleitung, in welcher der Verf. einen Ueberblick über die Beziehung der Aufgabe zu anderen von Clebsch in Götting. Abhandl. **17** aufgestellten Fragen und über die schon vorhandene Litteratur giebt, geht er im 1. Kapitel (S. 14-75) zu allgemeinen Eigenschaften der Connexe über. Hier werden nach der Erklärung des Begriffes der Hauptelemente des Connexes die Zahlen für die verschiedenen Fälle des Durchschneidens zweier, dreier u. s. w. Connexe mit Hülfe der Schubert'schen Symbolik ermittelt. Es wird dann erwähnt (§ 3), dass auch für die betrachteten Configurationen ein Uebertragungsprincip aufgestellt werden kann; weitere Paragraphen sind den singulären Elementen und dem conjugirten Connexe gewidmet. Für den letzteren werden einige der von Cyparissos Stephanos (Darboux Bull. (2) **4**, 318-328; F. d. M. **12**, 689, 1880) aufgestellten analogen Sätze bewiesen. Was aber die singulären Elemente betrifft, so zeigt der Verf., dass es solche Elemente sind, wie der Punkt (der singuläre Punkt der betreffenden Connexfläche) oder die Ebene (singuläre Tangentialebene der dem Punkte entsprechenden Connexfläche), dass also der Connex keine weiteren Singularitäten besitzt, als die seiner Flächen. Hier müssten aber die Hauptelemente des Connexes besonders hervorgehoben werden; für sie nämlich wird die Gleichung der Connexfläche $0 = 0$, es existirt also eigentlich keine Fläche. Wenn man aber hier, wie es auch öfter in der analytischen Geometrie der Einheit der Ausdrucksweise halber geschieht, die Fläche $0 = 0$ als Connexfläche betrachtet, so kann man sagen, die Fläche habe alle ihre Punkte (d. h. alle Punkte des Raumes) zu singulären Punkten, und dann werden auch die Hauptelemente zu singulären Elementen der Connexflächen. Für die weitere Untersuchung des Connexes und seiner Singularitäten ist von Wichtigkeit der Tangentialconnex (1, 1), welcher hier dieselbe Rolle spielen muss wie die Tangentialebene für die Fläche.

Kapitel 2 (S. 76-149) ist der Hauptcoincidenz des Connexes gewidmet, d. h. dem Inbegriff der Elemente des Connexes, deren Punkt und Ebene in vereinigter Lage liegen. Es erhellt, dass die Lie'sche Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, geometrisch genommen, auf der Einführung des Connexelementes beruht. Implexe von Fouret, Untersuchungen von Darboux über singuläre Lösungen bilden den weiteren Inhalt des Kapitels. Kapitel 3 (S. 150-191) ist dem Connex $(m, 1)$ gewidmet, welcher für $m = 2$ schon von R. Krause betrachtet ist. Seine Resultate werden verallgemeinert. Dann wird die Hauptcoincidenz des Connexes $(m, 1)$ und die mit ihr zusammenhängende Differentialgleichung betrachtet. Die Resultate von Darboux (Darboux Bull. (2) **2**, C. R. **86**, 1012; F. d. M. **10**, 214, 1878) und Autonne werden auf den Fall von vier homogenen Coordinaten übertragen.

Das Kapitel 4 (S. 191-249) endlich beschäftigt sich mit dem Connexe (1, 1). Hier wird eine Zusammenstellung und Umarbeitung des vorhandenen Stoffes gegeben, da für die weitere Ausbildung der Theorie des

allgemeinen Connexes (m, n) ein vorläufiges Studium dieses einfachsten Falles geboten erscheint.

Zum Schluss (S. 250-254) werden die vorausgehenden Entwickelungen auf den Fall von n homogenen Coordinaten übertragen. Si.

Kapitel 5.

Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

S. Lie. Geometrie der Berührungstransformationen. Dargestellt von S. Lie und G. Scheffers. I. Band. Leipzig: B. G. Teubner. XII + 694 S. gr. 8°.

Die analytische Theorie der Berührungstransformationen findet man im zweiten Bande der von Lie und Engel herausgegebenen Vorlesungen über endliche continuirliche Transformationsgruppen dargestellt (cf. F. d. M. **21**, 356, 1889; **23**, 364, 1891).

Der vorliegende (erste) Band entwickelt diese Theorie von geometrischen Gesichtspunkten aus; er verfolgt in diesem Sinne das Ziel, den Leser in die grundlegenden Abhandlungen Lie's aus den Jahren 1870-1872 einzuführen.

Das Buch zerfällt in drei grössere Abschnitte. Im ersten Abschnitt wird die Lehre von den Linienelementen der Ebene begründet, und es werden die zugehörigen Berührungstransformationen (kürzer „B.-T"), insbesondere die infinitesimalen, entwickelt und aufgestellt.

Die Erweiterung auf den (gewöhnlichen) Raum geht dann in doppelter Richtung vor sich: auf der einen Seite stehen die Linienelemente des Raumes, auf der anderen die Flächenelemente. Das ist der Inhalt des zweiten und dritten Abschnitts; zugleich wird eine geometrische Theorie der mit den Linien- und Flächenelementen verknüpften Differentialgleichungen aufgebaut, während eine eingehendere Untersuchung der bezüglichen B.-T. einem zweiten Bande vorbehalten ist.

Der erste Abschnitt beginnt zweckmässigerweise mit einer Reihe klassischer, den Geometern längst geläufiger Transformationen, die sich als B.-T. in einer Ebene (resp. einer Ebene in eine andere) auffassen lassen. Dahin gehören die Orthogonalprojection einer Ebene auf eine andere, die allgemeine ebene projective Punkttransformation und die Inversion in der Ebene (Transformation durch reciproke Radien).

Durch eine solche Transformation wird je einem Punkte P einer Ebene ein anderer Punkt P' (derselben oder einer anderen Ebene) zugeordnet und umgekehrt. Wegen der Stetigkeit der Transformation entspricht auch jedem, zu P benachbarten Punkte Q ein bestimmter, zu P' be-

nachbarter Punkt Q'. Bezeichnet man mit Lie die Figur eines Punktes nebst einer durch ihn gehenden Richtung (Geraden) als ein Linienelement (kürzer „L.-E."), so führt also unsere Transformation jedes L.-E. der Ebene wiederum in ein solches über. Da hierbei sich berührende Curven wieder in solche übergehen, so heissen solche Transformationen „B.-T.", und zwar „uneigentliche", da die sämtlichen Linienelemente eines Punktes P wieder zu den sämtlichen Linienelementen eines Punktes P' werden. Seien (1) $x_1 = X(x, y)$, $y_1 = Y(x, y)$ die Gleichungen der Punkttransformation, so ergiebt die Differentiation für die Transformation der Richtungen: (2) $p_1 = \frac{Y_x + Y_y p}{X_x + X_y p}$, wo $p = \frac{dy}{dx}$, $p_1 = \frac{dy_1}{dx_1}$, und die X_x etc. partielle Differentialquotienten bedeuten. Die Gleichungen (1), (2) zusammen stellen die „erweiterte" Punkttransformation dar.

Darüber hinaus giebt es „eigentliche" B.-T., welche die Linienelemente einer Curve, aber auch eines Punktes im allgemeinen in die Linienelemente einer Curve überführen.

Als treffende Beispiele hierfür werden untersucht die „Transformation durch reciproke Polaren", die „Dilatation", die „Fusspunkttransformation".

Um nun die B.-T. der Ebene allgemein zu entwickeln, wird es offenbar erforderlich, einen Begriff aufzustellen, der die Begriffe „Punkt" und „Curve", und nur diese, umfasst; das ist der „Elementverein". Analytisch bestimmt sich ein Elementverein als eine solche Schar von ∞^1 L.-E. (x, y, p), die der Differentialrelation: (3) $dy - p\,dx = 0$ genügen. Der Nutzen dieses Begriffes zeigt sich schon bei der Aufgabe, eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung $F(x, y, p) = 0$ zu integriren: man hat eben alle Elementvereine zu bestimmen, deren Elemente die Gleichung $F = 0$ erfüllen. Eine B.-T. der Ebene ist nun einfach eine solche Transformation: (4) $x_1 = X(x, y, p)$, $y_1 = Y(x, y, p)$, $p_1 = P(x, y, p)$, die jeden Verein von Elementen (x, y, p) wieder in einen Elementverein überführt. Das analytische Kriterium dafür ist das Bestehen einer Relation von der Form: (5) $dy_1 - p_1 dx_1 = \varrho(x, y, p)\,(dy - p\,dx)$, wo ϱ nicht identisch verschwinden darf.

Im Falle einer eigentlichen B.-T. ziehen die drei Relationen (4) eine einzige, von p und p_1 freie Relation nach sich: (6) $\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$, und umgekehrt bestimmt eine solche beliebig gegebene Gleichung (6) eine B.-T. völlig, wenn man noch die Forderung hinzufügt, dass $\Omega = 0$ bei variabeln x, y wirklich ∞^2 verschiedene Curven darstellt. Die Rechnung zeigt, dass man so alle B.-T. der Ebene durch „ausführbare" Operationen, nämlich durch Differentiationen und Eliminationen, erhält.

Eine zweite Methode zur Bestimmung aller B.-T. verlangt zwar Integrationen von Differentialgleichungen, dringt aber ungleich tiefer ein; sie beruht darauf, dass die Functionen X, Y, P in (4) durch gewisse

Differentialrelationen verknüpft sind, deren Bestehen umgekehrt ein Kriterium für eine B.-T. ergeben. Die Differentiation der Relation (5) führt nämlich zu der notwendigen und hinreichenden Relation zwischen X, Y: (7) $[X, Y] \equiv X_p(Y_x + pY_y) - Y_p(X_x + pX_y) = 0$, wo $[X, Y]$ als „Poisson'sches Klammersymbol" bezeichnet wird; X, Y „liegen dann in Involution".

Umgekehrt, ist (7) erfüllt, so ergeben sich für P und ϱ eindeutige Werte, so dass also (7) geradezu eine B.-T. definirt.

Zugleich ergiebt sich, dass $[PX] \equiv \varrho$, $[PY] \equiv \varrho P$ wird. Geometrisch sagt die Involutionsbeziehung (7) aus, dass die Gleichungen $X = \text{const.}$, $Y = \text{const.}$ die ∞^1 L.-E. (x, y, p) eines Elementvereines bilden.

Eine wichtige Eigenschaft der B.-T. (der Ebene) ist, dass jede Differentialgleichung zweiter Ordnung in x, y durch eine passende B.-T. in jede andere derartige Gleichung übergeführt werden kann, d. h. dass eine solche Differentialgleichung keine gegenüber allen B.-T. invariante Eigenschaft besitzt.

Trotz der angegebenen Methoden zur Bestimmung aller B.-T. (der Ebene) kann man keineswegs eine allgemeine explicite Form der B.-T. angeben. Dies wird erst ermöglicht durch Einführung der „infinitesimalen" B.-T., bei denen also die L.-E. nur unendlich kleine Aenderungen erfahren. Die allgemeine Form der infinitesimalen B.-T. ist explicite darstellbar; sie enthält eine willkürliche Function von x, y, p (nebst deren Ableitungen erster Ordnung).

Es liege eine continuirliche „eingliedrige" Schar von ∞^1 B.-T. vor: (8) $x_1 = X(x, y, p, a)$, $y_1 = Y(x, y, p, a)$, $p_1 = P(x, y, p, a)$, (wo a einen Parameter bedeutet), die eine „Gruppe" bildet, so dass also die Aufeinanderfolge zweier Transformationen (8) wieder einer Transformation (8) äquivalent ist. Die Gruppe enthalte zudem die „identische" Transformation, so dass, etwa für $a = 0$, (9) $x_1 = x$, $y_1 = y$, $p_1 = p$ wird. Für einen unendlich kleinen Wert δt von a resultirt dann eine „infinitesimale" B.-T.: (10) $x_1 = x + \xi\delta t + \cdots$, $y_1 = y + \eta\delta t + \cdots$, $p_1 = p + \pi\delta t + \cdots$.

Umgekehrt lässt sich zeigen, dass eine beliebig gegebene infinitesimale B.-T. stets in einer eingliederigen Gruppe von B.-T. enthalten ist.

Die Incremente δx, δy, δp einer infinitesimalen B.-T. haben die Relation (5) zu befriedigen. Durch Entwickelung nach Potenzen von δt und Coefficientenvergleichung ergiebt sich, dass die δx, δy, δp die Gestalt haben: (11) $\delta x = W_p\delta t$, $\delta y = (pW_p - W)\delta t$, $\delta p = -(W_x + pW_y)\delta t$, wo W eine ganz willkürliche Function von x, y, p ist.

Eine beliebige Function $f(x, y, p)$ erfährt bei der infinitesimalen B.-T. (11) den Zuwachs: (12) $\delta f = \{[Wf] - Wf_y\}\,\delta t = Bf\,.\,\delta t$, wo Bf als „Symbol" der infinitesimalen B.-T. dient, während W ihre „charakteristische Function" heisst.

Jede infinitesimale B.-T. (der Ebene) lässt zwei von einander unabhängige Functionen u, v von x, y, p invariant, und die allgemeinste invariante Function von x, y, p oder „Differentialinvariante erster Ord-

nung" ist eine beliebige Function jener beiden; kennt man von diesen eine, so findet man eine zweite durch Quadratur.

Liegen zwei infinitesimale B.-T. vor, $B_1 f$ und $B_2 f$, so ist auch der „Klammerausdruck" (13) $B_1(B_2 f) - B_2(B_1 f)$ eine infinitesimale B.-T. Dann und nur dann, wenn der Klammerausdruck verschwindet, sind $B_1 f$ und $B_2 f$ „vertauschbar", d. h. ihre Reihenfolge ist gleichgültig.

Zwei vertauschbare (und wirklich verschiedene) infinitesimale B.-T. lassen sich durch Einführung neuer Veränderlicher auf die Form der infinitesimalen „Translationen" $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ bringen.

Von den zahlreichen Anwendungen dieser Begriffe und Sätze heben wir nur die schwierigste hervor, die das merkwürdige und wichtige geometrische Problem vollständig löst: Welche Form muss das Quadrat des Bogenelements einer Fläche haben, auf der die Schar aller geodätischen Kreise unendlich viele B.-T. gestattet? Es sind das die Flächen constanter Krümmung und die Spiralflächen.

Wir müssen uns beeilen, zum zweiten Abschnitt überzugehen, der die L.-E. des Raumes behandelt. Der Uebergang wird dadurch vermittelt, dass jetzt x, y, p zugleich als Coordinaten eines Raumpunktes angesehen werden. Um den Bildpunkt des L.-E. (x, y, p) zu erhalten, hat man nur im Punkte des Elementes ein Lot von der Länge p aufzutragen: der Endpunkt des Lotes ist der Bildpunkt.

Auf diese Weise ordnet die Gleichung (5') $dy - p dx = 0$ jedem Punkte (x, y, p) des Raumes einen ebenen Büschel von Fortschreitungsrichtungen oder L.-E. zu.

Eine lineare homogene Gleichung in dx, dy, dz, deren Coefficienten Functionen von x, y, p sind, heisst eine „Pfaff'sche Gleichung": (5') ist also eine specielle Pfaff'sche Gleichung.

Die Elementvereine der (x, y)-Ebene bilden sich im Raume als die Integralcurven von (5') ab, d. h. als die Curven, deren L.-E. die Gleichung (5') erfüllen.

Ein besonderes Kapitel ist der Reduction der Pfaff'schen Gleichungen (und ihrer linken Seiten, der „Pfaff'schen Ausdrücke") auf kanonische Formen gewidmet. Die Rolle, welche dabei die Form (5') spielt, erkennt man aus dem Satze, dass sich jede Pfaff'sche Gleichung $X dx + Y dy + P dp = 0$ durch Einführung passender neuer Veränderlicher auf eine der beiden Formen $dx = 0$ und (5') bringen lässt, die selbst nicht in einander überführbar sind.

Indem wir die höchst interessanten Zusammenhänge zwischen gewissen Pfaff'schen Gleichungen einerseits, den Geraden eines Nullsystems und den Kreisen einer Ebene andererseits bei Seite lassen, gehen wir zu den allgemeineren, fundamentalen Betrachtungen über Monge'sche Gleichungen und Plücker'sche Liniencomplexe über. Wir schreiben jetzt lieber x, y, z für die Coordinaten eines Raumpunktes. Eine in dx, dy, dz homogene Gleichung: (14) $\Omega(x, y, z;\ dx, dy, dz) = 0$ heisst eine „Monge'sche", die also die Pfaff'sche als Specialfall enthält. Die Bestimmungsstücke („Coordinaten") eines L.-E. im Raume

sind die Coordinaten x, y, z eines Punktes und die beiden Verhältnisse der Incremente dx, dy, dz, welche die Richtung des L.-E. angeben.

Aus den ∞^5 L.-E. des Raumes sondert eine Monge'sche Gleichung (14) eine ∞^4-Schar aus; durch jeden Raumpunkt geht dann noch eine ∞^1-Schar von L.-E., deren Richtungen den „Elementarkegel" des Punktes bilden. Auf einer beliebigen Fläche werden daher durch (14) jedem Punkte der Fläche gewisse Fortschreitungsrichtungen zugeordnet, d. h. auf jeder Fläche liegen eine oder mehrere Scharen von ∞^1 Integralcurven von (14).

Insbesondere sind die Gleichungen (14) von Wichtigkeit, die ∞^3 Gerade als Integralcurven besitzen. Das ist dann, und nur dann, der Fall, wenn die Monge'sche Gleichung die (in den sechs Argumenten homogene) Gestalt hat:

$$(15)\quad \Phi(ydz-zdy,\ zdx-xdz,\ xdy-ydx,\ dx,\ dy,\ dz)=0.$$

Eine Schar von ∞^3 Geraden (die also ∞^4 L.-E. enthält), heisst ein „Plücker'scher Liniencomplex"; ein solcher ist demnach in allgemeinster Weise durch eine Monge'sche Gleichung vom Typus (15) definirt. Man kann so die Auffassung Lie's gerechtfertigt finden, nach der sich die Plücker'sche Liniengeometrie der Theorie der Monge'schen Gleichungen unterordnet.

Hier erweist sich bereits die Einführung des Begriffes „Flächenelement" (kürzer „F.-E."), d. i. des Inbegriffs eines Punktes und einer durch ihn gehenden Ebene, als fruchtbar. Dann bestimmt offenbar eine (nicht lineare) Monge'sche Gleichung (14) ∞^4 F.-E., und zwar so, dass sie jedem Raumpunkte die ∞^1 F.-E. zuordnet, die den Elementarkegel des Punktes umhüllen.

Mit Hülfe dieser Auffassung gelingt die Lösung des wichtigen Integrationsproblems, bei vorgelegter Monge'scher Gleichung (14) alle Flächen zu bestimmen, die in allen ihren Punkten die den Punkten zugeordneten Elementarkegel berühren; die gemeinten Flächen ergeben sich durch Integration einer gewissen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung in z: (16) $F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0.$

Andererseits wird jede Integralfläche von (14) von ∞^1 Curven, den Monge'schen „Charakteristiken" überdeckt, so dass in jedem Punkte der Fläche der zugehörige Elementarkegel längs der betreffenden Curve berührt.

Im Anschluss hieran haben die Verf. ein grösseres Kapitel über die Grundlagen der Plücker'schen Liniengeometrie und ihrer Beziehungen zu Differentialgleichungen eingeschaltet, sowie einen sehr dankenswerten historischen Bericht über ältere Untersuchungen über Geradenscharen im Raume, wobei die Verdienste von Malus mehr, als es sonst geschieht, gewürdigt werden.

Wie fruchtbar die Auffassungen der Verf. sind, zeigt ein specielles, aber sehr lesenswertes Kapitel über den tetraedralen Complex, d. i. die Schar der ein festes Tetraeder nach constantem Doppelverhältnis schnei-

denden Geraden. Eine bemerkenswerte Rolle spielt dabei die „logarithmische" Abbildung des Raumes.

Die ∞^1 Monge'schen Gleichungen der zum Coordinatentetraeder gehörigen ∞^1 tetraedralen Complexe lassen sich in die Form bringen:

$$(17) \qquad (b-c)\frac{dy}{y}\frac{dz}{z}+(c-a)\frac{dz}{z}\frac{dx}{x}+(a-b)\frac{dx}{x}\frac{dy}{y}=0.$$

Vermöge der neuen Veränderlichen: (18) $\xi = lx$, $\eta = ly$, $\zeta = lz$ nimmt (17) die wesentlich einfachere Gestalt an: (19) $(b-c)d\eta\, d\zeta + (c-a)d\zeta d\xi + (a-b)d\xi d\eta = 0$, und es gehen die ∞^4 L.-E., die (17) genügen, über in die ∞^4 L.-E., die (19) befriedigen.

Den Schluss dieser Entwickelungen bildet die Behandlung einiger schöner Probleme der Liniengeometrie, die auf partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung führen.

Das letzte Kapitel des zweiten Abschnitts, über Beziehungen zwischen Geraden und Kugeln, beansprucht eine besondere Bedeutung für sich, nicht nur inhaltlich, sondern auch historisch, da diese Untersuchungen Lie's wohl als erste die Aufmerksamkeit der Geometer erregten. Auf der einen Seite stehen die conformen Punkttransformationen des Raumes in engem Connex mit der Geometrie der Kreise in einer Ebene, insofern den ersteren diejenigen B.-T. der Ebene zugeordnet werden können, die jeden Kreis in einen Kreis überführen; auf der anderen Seite kann man den F.-E. einer Geraden die einer Kugel correspondiren lassen, wobei den Haupttangentencurven einer Fläche des einen Raumes die Krümmungslinien der zugeordneten Fläche des anderen Raumes entsprechen.

Zunächst werden alle (∞^6) Punkttransformationen der Ebene bestimmt, die jeden Kreis in einen Kreis überführen und dadurch von selbst conform sind. Ihre analytische Darstellung ist bekanntlich gegeben durch: (20) $w_1 = \dfrac{Aw+B}{Cw+D}$, wo w_1, w complexe Variabeln, A, B, C, D complexe Constanten bedeuten.

Hierauf wird die Gesamtheit aller (∞^{10}) conformen Punkttransformationen des Raumes bestimmt; eine solche führt stets jede Kugel in eine Kugel über, hängt also nur von einer endlichen Anzahl von Parametern ab (während sie in der Ebene noch von zwei willkürlichen Functionen abhängt). Dem entspricht, dass die conformen Punkttransformationen des Raumes eine endliche Gruppe bilden, die der Ebene eine unendliche. Die Bestimmung der conformen Raumtransformationen beruht nach Liouville auf ihrer Eigenschaft, aus Aehnlichkeitstransformationen und Inversionen zusammensetzbar zu sein. Eine fruchtbare Abbildung des Raumes auf die Ebene, die von den Geometern vielfach studirt ist, erhält man durch: (21) $x = X$, $y = Y$, $r = iZ$, wodurch dem Raumpunkte (X, Y, Z) der Kreis in der Ebene $Z = 0$ mit dem Mittelpunkte (x, y) und dem Radius r zugeordnet wird. Da bei einer conformen Punkttransformation im Raume jede Minimalcurve, d. i. jede Integralcurve der Gleichung $dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$, in eine Minimal-

curve übergeht, und nach (21) das ebene Bild einer Minimalgeraden ein L.-E. ist, so entspricht in der That vermöge (21) jeder conformen Punkttransformation des Raumes eine solche B.-T. der Ebene, die jeden Kreis in einen Kreis überführt und umgekehrt. Um die Beziehung zwischen den Geraden und Kugeln des Raumes zu verstehen, haben wir aus der Theorie der Pfaff'schen Gleichungen nachzuholen, dass die L.-E. eines allgemeinen Nullsystems dargestellt werden können durch die Relation (22) $xdy - ydx + dz \equiv d(z+xy) - 2ydx = 0$. Vermöge der quadratischen Transformation (23) $\xi = x$, $\eta = z + xy$, $\pi = 2y$ nimmt (22) die wohlbekannte specielle Form (5') an: (24) $d\eta - \pi d\xi = 0$; zugleich wird durch (23) eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den Punkten (x, y, z) des Raumes und den L.-E. (ξ, η, π) der Ebene hergestellt, wobei den ∞^3 Nullgeraden des Raumes, i. e. den Geraden des linearen Complexes (22), die ∞^3 Parabeln $\eta = a + b\xi + c\xi^2$, i. e. die Integralcurven der Differentialgleichung $d^2\eta/d\xi^2 = 0$, entsprechen.

Verbindet man die Abbildungen (23) und (21) mit einander, so wird jeder Raumpunkt (x, y, z) durch (23) in ein L.-E. (ξ, η, π) der (ξ, η)-Ebene abgebildet, und dieser ist durch (21) das Bild einer Minimalgeraden des Raumes (X, Y, Z), mithin wird jedem Raumpunkte (x, y, z) eine Minimalgerade des Raumes (X, Y, Z) zugeordnet; nach Ausführung der erforderlichen Elimination gelangt man zu den beiden Darstellungsgleichungen: (25) $X + iY + xZ + z = 0$, $x(X - iY) - Z - y = 0$. Umgekehrt entspricht so einem Punkte (X, Y, Z) eine Gerade des linearen Complexes (22) im Raume (x, y, z). Zusammenfassend kann man sagen, dass vermöge (25) eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen den L.-E. der Pfaff'schen Gleichung (22) und den L.-E. der Monge'schen Gleichung (26) $dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$ hergestellt ist.

Der lineare Complex (22) ordnet aber auch jedem F.-E. ein anderes „reciprokes" zu: man hat nur zu dem Punkte und der Ebene der F.-E. die Nullebene und den Nullpunkt aufzusuchen. Daher fliesst aus (25) auch eine ein-zweideutige Zuordnung von Flächen der Räume (x, y, z) und (X, Y, Z). Sind nämlich ω_1, ω_2 zwei vermöge (22) reciproke Flächen, so bilden sich die beiden Scharen von Curven des linearen Complexes, die auf ω_1 und ω_2 liegen, als die beiden auf einer Fläche Ω gelegenen Scharen von Minimalcurven ab.

Der wichtigste Specialfall ist der oben schon erwähnte: den F.-E. einer Kugel, i. e. einer Fläche zweiten Grades mit zwei getrennten Scharen von Minimalgeraden, correspondiren vermöge (25) die F.-E. zweier Geraden, die bez. des linearen Complexes (22) reciproke Polaren sind. Leider müssen wir es uns versagen, auf diese höchst interessante Abbildung noch näher einzugehen.

Vielmehr müssen wir uns beeilen, zu dem dritten und letzten Abschnitt zu kommen, der in die Theorie der F.-E. und die auf das Engste damit verknüpfte Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung einführen will.

Man wird $x, y, z, p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$ als die „Coordinaten“ eines F.-E. bezeichnen: alle F.-E. bilden eine ∞^5-Schar.

Eine partielle Differentialgleichung (27) $F(x, y, z, p, q) = 0$ erster Ordnung, die aber im besondern auch p, q nicht enthalten kann und dann zur Gleichung einer Fläche $F(x, y, z) = 0$ wird, scheidet ∞^4 F.-E. aus.

Das erste Kapitel entwickelt die Theorie der Gleichungen (27) nach Lagrange und bringt deren geometrische Deutung nach Monge, die aber hier durch consequente Benutzung des Begriffes F.-E. einfacher und übersichtlicher wird.

Die Integration von (27) verlangt die Bestimmung aller Flächen, deren F.-E. die Gleichung (27) erfüllen, oder genauer: die durch (27) gegebenen ∞^4 F.-E. sollen in ∞^2 Scharen von je ∞^2 Elementen so zerlegt werden, dass jede dieser ∞^2 Scharen aus allen F.-E. einer Fläche besteht. Die Gleichung dieser ∞^2 Flächen: (28) $z = \Phi(x, y; a, b)$ heisst eine „vollständige Lösung“ von (27); sie führt umgekehrt zu (27) zurück.

Ist nun $z = \varphi(x, y)$ irgend eine Lösung von (27), so sind drei Fälle denkbar: Erstens, die Fläche $z = \varphi$ hat alle ihre ∞^2 F.-E. mit einer unter den Flächen $z = \Phi$ gemein, dann ist die Lösung φ in der vollständigen Lösung Φ als „Particularlösung“ enthalten. Zweitens, die Fläche $z = \varphi$ hat je ∞^1 F.-E. mit jeder Fläche von gewissen ∞^1 Flächen (28) gemein, ist also deren Umhüllende. Man wählt dann aus der ∞^2 Schar (28) dadurch beliebige ∞^1 aus, dass man eine willkürliche Gleichung $\omega(a, b) = 0$ festsetzt, das liefert die „allgemeine“ Lösung von (27). Drittens, die Fläche $z \neq \varphi$ hat mit jeder Fläche $z = \Phi$ nur eine discrete Anzahl von F.-E. gemein, ist also die Umhüllende der ∞^2 Flächen (28) und heisst eine „singuläre Lösung“ von (27).

Die Lösungen des zweiten und dritten Falles ergeben sich aus (28) durch Differentiation und Elimination.

Jede analytische Gleichung (27) besitzt in der That, wie nach Cauchy gezeigt wird, immer eine vollständige Lösung (28). Die allgemeine Lösung von (27) ergiebt sich durch Elimination von a aus:

(29) $z = \Phi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial b} b'(a) = 0,$ wo $b(a)$ die durch $\omega(a, b) = 0$ involvirte willkürliche Function von a bedeutet.

Erteilt man dagegen a in (29) einen constanten Wert a_0, so stellt (29) eine „Charakteristik“ von (27) dar, d. i. die Curve, nach der die allgemeine Integralfläche von der Fläche $z = \Phi(x, y, a_0, \varphi(a_0))$ berührt wird. Offenbar liefert (29) alle Charakteristiken, sobald man darin a, $b(a)$, $b'(a)$ als drei willkürliche Parameter auffasst. Somit hat (27) höchstens ∞^3 Charakteristiken; eine genauere Untersuchung zeigt, dass es gerade ∞^3 sind.

Die ∞^3 Charakteristiken enthalten ∞^4 L.-E., die eine Monge'sche Gleichung $\Omega = 0$ (14) definiren, deren Integralcurven sie sind; sie ordnet jedem Punkte einen Elementarkegel zu, der identisch sein muss mit dem durch (27) zugeordneten.

Man erkennt, dass das gerade die Umkehrung einer früheren Betrachtung ist.

Die ∞^3 Charakteristiken lassen sich auch durch ein System von vier simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen definiren; nach Kenntnis der Charakteristiken kann man die durch eine beliebige gegebene Curve gehende Integralfläche construiren. Nach dieser mehr historisch gehaltenen Einleitung, bei der das F.-E. nur zur Vereinfachung der Sprechweise dient, gehen die Verf. dazu über, nunmehr systematisch der schon oben angedeuteten Auffassung Geltung zu verschaffen, nach der die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung geradezu als Teil der Geometrie der F.-E. erscheint.

Der alles beherrschende Begriff ist wiederum, wie in der Ebene, der eines „Vereines" von F.-E. Das Bindeglied ist der Begriff der „vereinigten Lage" zweier F.-E.: ein F.-E. (x, y, z, p, q) liegt mit einem unendlich benachbarten ($x+dx$, etc.) „vereinigt", wenn die Pfaff'sche Gleichung (30) $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ besteht. Eine Schar von F.-E. bildet dann einen „Verein", wenn jedes Element der Schar mit allen unendlich benachbarten Elementen der Schar vereinigt liegt.

Die Fruchtbarkeit dieses Begriffes des Elementvereines liegt darin, dass er nicht nur die Begriffe Fläche, Curve, Punkt, sondern auch die des Elementarkegels und des sogenannten „Elementstreifens" (dessen ∞^1 F.-E. längs einer Curve liegen) umfasst. Dort besteht der Verein aus ∞^2, hier aus ∞^1 Elementen. Das allgemeine Problem der Integration einer analytischen Gleichung (27) lässt sich dann einfach dahin formuliren, alle Elementvereine („Integralgebilde") in der durch (27) definirten ∞^4 Schar von F.-E. zu finden; hierdurch lassen sich alle früheren Integrationstheorien zusammenfassen, und die Schwierigkeiten der „Ausnahmefälle" verschwinden von selbst. Die „vollständige" Lösung von (27) ist jetzt, allgemeiner als bei Lagrange, eine Schar von ∞^2 verschiedenen Vereinen von je ∞^2 F.-E., die (27) genügen: ist keine solche bekannt, so gelangt man zu allen, (27) erfüllenden Vereinen von ∞^2 F.-E. durch Differentiationen und Eliminationen; diese beiden Operationen genügen schon zur Auffindung aller Vereine von ∞^1 F.-E., die (27) zulässt.

Die Monge'sche Charakteristik erweitert sich zum „charakteristischen Streifen". Man deute nämlich die Parameter a, b als Coordinaten des Punktes (a, b) einer Hülfsebene, in der also eine Gleichung $\omega(a, b) = 0$ eine Curve darstellt. Dann zeigt eine einfache Rechnung, dass zwei sich in einem Punkte (a, b) berührenden Curven $\omega_1(a, b) = 0$, $\omega_2(a, b) = 0$ im Raume zwei allgemeine Integralflächen von (27) entsprechen, die sich längs einer Curve, nämlich der Charakteristik (29), berühren, d. h. sie haben einen Elementstreifen gemein, und dies ist der „charakteristische Streifen", der sich also auf die (a, b)-Ebene als L.-E.

abbildet. Umgekehrt wird jede allgemeine Integralfläche von (27) von ∞^1 charakteristischen Streifen erzeugt.

Jede Gleichung (27) hat ∞^3 charakteristische Streifen.

Die eben besprochene Abbildung der Integralflächen auf eine (a, b)-Ebene wird combinirt mit einer zweiten solchen, die dadurch hergestellt wird, dass man den ganzen Raum durch eine allgemein, aber bestimmt gewählte (ξ, η)-Ebene schneidet. Die Zuordnung zwischen beiden Ebenen ist dann eine B.-T.

Diese Entwickelungen werden durch zweckmässige Deutung der sogenannten „Involutionsbeziehung" nach verschiedenen Richtungen hin vervollständigt und zu älteren Untersuchungen in Beziehung gesetzt.

Der Schluss des Buches vermittelt den Uebergang zum zweiten Bande. Es werden die Vorteile erörtert, die die Kenntnis einer oder mehrerer infinitesimaler Punkttransformationen, die eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung gestattet, für ihre Integration gewährt. Die Verf. beschränken sich jedoch im wesentlichen auf zweckmässig ausgewählte einzelne Fälle (Translationen, Rotationen, eine und zwei infinitesimale Punkttransformationen). In demselben Sinne werden einige in der Geometrie auftretende partielle Differentialgleichungen von besonderem Interesse untersucht. Es handelt sich der Reihe nach um die Bestimmung der Gleichungen (27), deren Charakteristiken auf allen Integralflächen entweder Haupttangentencurven, oder Krümmungslinien, oder geodätische Linien, oder Gerade sind; ferner die, deren Integralflächen zu Normalen lauter Gerade eines gegebenen Liniencomplexes haben, sowie die, deren Integralflächen ∞^1 geodätische Curven enthalten, die einem vorgelegten Liniencomplex angehören. Diese sechs Probleme werden, mit Ausnahme des dritten, vollständig und hauptsächlich mit geometrischen Mitteln gelöst.

Wir begnügen uns, im obigen dem Leser wenigstens eine annähernde Vorstellung von dem bedeutsamen Inhalt des Buches gegeben und dadurch zu tieferem Studium Anregung verschafft zu haben, und verzichten lieber auf eine Kritik, die sich doch nur gegen Einzelheiten richten könnte. Man vgl. die Besprechung von Study, Gött. Anz. 436-445, 1897.

My.

H. B. Newson. Continuous groups of projective transformations treated synthetically. Kansas Univ. Quart. **4**, 71-92 (1895), 243-249; **5**, 81-98.

H. B. Newson. Supplementary notes to the article on continuous groups. Kansas Univ. Quart. **4**, 169-170 (1895).

Der von Lie analytisch dargestellten Theorie der continuirlichen Gruppen projectiver Transformationen will der Verf. eine synthetische, auf die Construction dieser Transformationen gegründete gegenüberstellen. Er giebt die Elemente dieser Theorie bis zur Aufzählung der in der allgemeinen Gruppe projectiver Transformationen der Ebene enthaltenen continuirlichen Untergruppen. Auf die zu den eingliedrigen Gruppen gehörigen Bahncurven wird nicht mehr eingegangen. Der Behandlung

der projectiven Transformationen der Ebene liegt folgende Construction zu Grunde: Von den Punkten einer Geraden l werden an zwei dieselbe berührende Kegelschnitte Tangenten gezogen und die von einem und demselben Punkte von l ausgehenden Tangenten einander zugeordnet. Hält man l fest, während die beiden Kegelschnitte variiren, so wird jede projective Transformation, und zwar im allgemeinen nur einmal, erzeugt. Je nach der Lage, welche die Kegelschnitte zu einander haben, werden 5 specielle Fälle der projectiven Transformationen unterschieden. Die Aufzählung der verschiedenen Gruppen von Transformationen geschieht im Anschluss an die invariant bleibenden Gebilde. Was die Methode der Behandlung betrifft, so wird zwar ein Teil der Resultate rein geometrisch hergeleitet, doch beruht gerade der Nachweis des fundamentalen Satzes, dass jede Transformation durch unendliche Wiederholung einer infinitesimalen erzeugt werden kann, auf analytischer Betrachtung. Aus diesem Grunde kann von einer neuen Behandlungsweise der Theorie eigentlich nicht die Rede sein. Stz.

A. Emch. Projective groups of perspective collineations in the plane, treated synthetically. Kansas Univ. Quart. **5**, 1-35.

Unter einer perspectiven Collineation in der Ebene wird jede Collineation verstanden, welche die Punkte einer Geraden und einen nicht auf dieser gelegenen Punkt ungeändert lässt. Die involutorischen Collineationen sind also als specielle Fälle in den perspectiven enthalten. Als Grundlage für die Untersuchung dient dem Verf. die von Newson allgemein für Collineationen in der Ebene angegebene Construction (vgl. das vorangehende Referat), welche eine perspective Collineation liefert, wenn die beiden Hülfskegelschnitte einander in einem Punkte der Collineationsaxe berühren. Nachdem diese Construction auseinandergesetzt ist, folgt eine Klassification der perspectiven Collineationen, eine Untersuchung der infinitesimalen, sowie eine Aufzählung der von ihnen gebildeten Gruppen. Stz.

A. Emch. Involutoric transformation of the straight line. Kansas Univ. Quart. **4**, 111-116 (1895).

A. Emch. Involutoric collineation in the plane and in the space. Kansas Univ. Quart. **4**, 205-218.

Bekanntlich bleiben bei einer involutorischen Collineation in der Ebene die sämtlichen Punkte einer Geraden l (Axe) und ein nicht in l gelegener Punkt C (Centrum) invariant. Die involutorische Collineation wird dargestellt durch die Gleichungen

$$x_1 = \frac{ax}{bx+cy-a}, \qquad y_1 = \frac{ay}{bx+cy-a},$$

wo C der Anfangspunkt und $bx+cy-2a=0$ die Gleichung der Geraden l ist. Fasst man die Gesamtheit J der involutorischen Collineationen ins Auge, so bilden die Collineationen T, welche, mit dem System J zu-

sammengesetzt, dasselbe nicht ändern, eine Gruppe. Eine solche Collineation T hat die Form

$$x_2 = \frac{a_1 x_1}{b_1 x_1 + c_1 y_1 + a_1}, \qquad y_2 = \frac{a_1 y_1}{b_1 x_1 + c_1 y_1 + a_1}$$

und besitzt die charakteristische Eigenschaft, die durch C gehenden Geraden und die sämtlichen Punkte auf einer von diesen Geraden invariant zu lassen.

Dies ist der Inhalt der Arbeit, soweit sie sich mit der ebenen Geometrie beschäftigt. Im Raume hat man zwei Arten involutorischer Collineationen zu unterscheiden, von denen die eine, welche die Punkte einer Ebene und einen ausserhalb derselben gelegenen Punkt invariant lässt, mit einem kurzen Hinweis auf das Analogon in der Ebene erledigt wird. Die andere, bei welcher die Punkte zweier Geraden ungeändert bleiben, wird ausführlicher behandelt. Indessen gehen die hier angestellten Betrachtungen zum Teil über Bekanntes nicht hinaus, zum Teil benutzen sie eine fehlerhafte Entwickelung aus des Verf. Untersuchungen über die Involution in der Geraden, weshalb hierauf nicht näher eingegangen wird. Stz.

Th. Reye. Ueber quadratische Transformationen und rationale Flächen mit Kegelschnittscharen. Math. Ann. 48, 113-141.

Man beziehe die Oberflächen zweiter Ordnung eines Gebüsches, die einem Raume Σ angehören, collinear auf die Ebenen eines Raumes Σ_1. Einem Punkte des letzteren entspricht eine Gruppe von acht associirten Punkten, einer Geraden eine Raumcurve vierter Ordnung erster Art. Eine dem Raume Σ angehörende Fläche F^n n^{ter} Ordnung wird deshalb auf eine Oberfläche $4n^{\text{ter}}$ Ordnung, und zwar im allgemeinen eindeutig, abgebildet. Mehrdeutig würde die Beziehung erst dann, wenn die Punkte von F^n sich in Gruppen associirter Punkte zusammenfassen liessen. Einer Geraden von Σ entspricht im allgemeinen ein Kegelschnitt, jedoch eine gerade Linie, wenn sie in der Basis eines Büschels des grundlegenden Gebüsches vorkommt; das ist insbesondere bei den Geraden der Fall, welche von einem Knotenpunkte A, einem allen Flächen des Gebüsches gemeinsamen Punkte, ausgehen. Diesem Strahlenbündel entspricht eine Congruenz zweiten Grades, deren Brennfläche Φ_1^4 der Kernfläche des Flächenbündels entspricht.

Einer Ebene von Σ entspricht eine Steiner'sche Fläche. Einer Oberfläche zweiter Ordnung, welche r Knotenpunkte enthält, entspricht eine Fläche $(8-r)^{\text{ter}}$ Ordnung mit ebenen Schnitten vom Geschlecht 1, die ja Raumcurven vierter Ordnung erster Art entsprechen. Die Doppelcurve der Fläche ist folglich von der Ordnung $19-\frac{1}{2}(13-r)r$. Die Fläche enthält $3r+\frac{1}{6}r(r-1)(r-2)$ Gerade. Den beiden Geraden, welche die Fläche F^2 durch einen Knotenpunkt sendet, und ihrer Tangentialebene gehören drei Gerade der Fläche zu, eine weitere jedem Kegelschnitt der Fläche, der durch drei Knotenpunkte hindurchgeht. Kegelschnitte auf F^{8-r} entstehen aus Geraden auf F^2, aus Kegelschnitten,

die zwei, und Raumcurven dritter Ordnung, die vier Knotenpunkte enthalten und F^2 angehören. Deshalb liegen die Kegelschnitte auf F^{8-r} in $2+\frac{1}{2}r(r-1)+\frac{1}{12}r(r-1)(r-2)(r-3)$ verschiedenen Scharen angeordnet. Für $r=5$ erhält man noch fünf weitere Scharen, deren Kegelschnitten biquadratische Curven mit Knotenpunkt auf F^2 entsprechen. Aehnlich werden die Netze kubischer Raumcurven untersucht. Auf S. 126 wird diese erste Gruppe von Ergebnissen tabellarisch dargestellt.

Legt man jetzt eine Fläche F^3 zu Grunde, die in zwei Knotenpunkten A und B Doppelpunkte besitzt und durch $r=0, 1, 2, 3, 4$ Knotenpunkte hindurchgeht, so entspricht ihr eine Fläche F_2^{8-r} mit einer Kegelschnittschar, die daneben einzelne Kegelschnitte und auch Gerade enthält. Ihre Schnittcurven sind vom Geschlechte 2 und entstehen aus Raumcurven sechster Ordnung mit zwei Doppelpunkten, welche F^3 mit Flächen des Gebüsches gemein hat. Die hier entwickelten Resultate sind auf S. 133 zusammengestellt. Die letzte Fläche $F_2^{(4)}$, die so erhalten wurde, besitzt eine Doppelgerade. Benutzt man nun ein specielles Gebüsch von Flächen zweiter Ordnung, die diese Gerade enthalten, und legt F_2^4 durch $r=0, 1, 2, 3$ weitere Knotenpunkte des Gebüsches hindurch, so correspondirt eine F_3^{8-r} mit Schnitten vom Geschlecht 3. Ein ähnlicher Process, angewandt auf eine Fläche F_n^{n+2} $(n+2)^{\text{ter}}$ Ordnung mit n-facher Geraden, liefert eine F_{n+1}^{n+6-r}, deren ebene Schnitte vom Geschlecht $(n+1)$ sind. Zum Schluss transformirt der Verf. eine Fläche vierter Ordnung F_2^4, welche zwei Knotenpunkte zu dreifachen Punkten hat, daneben $s=0, 1, 2, 3, 4$ Knotenpunkte der Transformation einfach enthält. Das Ergebnis ist eine F_3^{10-s} mit einer Kegelschnittschar, einzelnen Geraden und kubischen Curven, deren Schnitte vom Geschlecht 3 sind. E. K.

W. Massny. Ueber ebene Curven, die bei circularer Inversion sich selbst zugeordnet sind. Pr. (No. 176) Gymn. Beuthen O.-S. 14 S. 4°.

Alle (algebraischen) ebenen Curven, die durch die Transformation durch reciproke Radii in sich selbst übergehen, haben in Polarcoordinaten ϱ, φ die Gleichung $\varrho+\frac{r^2}{\varrho}=\Theta(\varphi)$, wo r der Radius des Inversionskreises ist. Alle diese Curven können durch eine gewisse (nicht rational umkehrbare) kubische Transformation aus der allgemeinen Curve n^{ter} Ordnung, der Originalcurve, erzeugt werden; ihre Ordnung ist also im allgemeinen von der Form $3n$. Sie haben in dem Centrum der Inversion, sowie in den imaginären Kreispunkten n-fache Punkte und durchschneiden den Inversionskreis rechtwinklig; der Schnittpunkt der Tangenten in zwei einander entsprechenden Punkten einer solchen Curve ist von diesen gleich weit entfernt. Besonders betrachtet werden diejenigen Curven, die aus der geraden Linie, dem Kegelschnitt, speciell dem Kreise und der Ellipse, endlich einer Konchoide als Originalcurve hervorgehen. T.

K. Carda. **Elementare Bestimmung der Punkttransformationen des Raumes, welche alle Flächeninhalte invariant lassen.** Wien. Ber. **105,** 787-790.

Der Verf. beweist, dass diese Punkttransformationen Kugeln in congruente Kugeln überführen und daher den Bewegungen (resp. Spiegelungen) des Raumes identisch sind, und dass alle Punkttransformationen, die die Inhalte nach constantem Verhältnisse ändern, von den Aehnlichkeitstransformationen dargestellt werden. Sfs.

P. del Pezzo. Le trasformazioni coniche dello spazio. Napoli Rend. (3) **2,** 288-296.

Die birationalen Transformationen zwischen zwei gewöhnlichen Räumen, welche der Verf. betrachtet, haben die gemeinschaftliche Eigenschaft, dass in beiden Räumen die homaloidischen Systeme aus Kegeln bestehen; eben daraus ist der Name „konische Transformationen" entsprungen. Die einfachste ist die Transformation T, welche durch die Formeln $y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1^2 : x_1 x_2 : x_2 x_3 : x_3 x_4$ oder durch die inverse $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_1 y_2 : y_2^2 : y_1 y_3 : y_1 y_4$ dargestellt wird. Der Verf. bestimmt seine Haupteigenschaften; dann wendet er dieselbe auf eine Quadrifläche an, um eine bemerkenswerte Fläche vierter Ordnung zu erzeugen. Betrachtet man allgemein die Kegel n^{ter} Ordnung, welche eine $(n-1)$-fache Erzeugende und die entsprechenden Berührungsebenen gemeinschaftlich haben und durch dieselben $n-1$ Punkte gehen, so erhält man ein homaloidisches konisches System und daher eine konische Transformation Θ n^{ter} Ordnung; aber Θ ist das Product von Transformationen T. Zum Schluss deutet der Verf. die Ausdehnung seiner Resultate auf beliebig ausgedehnte Räume an. La.

P. Painlevé. Sur les transformations biuniformes des surfaces algébriques. C. R. **122,** 874-877.

Verf. studirt hier diejenigen doppeldeutigen Transformationen von algebraischen Flächen in sich, welche im Gegensatz zu denen der algebraischen Curven nicht birational zu sein brauchen, und gelangt zunächst zu dem Resultate, dass zwei Flächen S und s, welche durch eine solche Transformation in einander übergehen, notwendig von demselben Geschlechte p sein müssen. Ferner ergiebt sich, dass man zwei Klassen von Transformationen zu unterscheiden hat: die halbtranscendenten, welche eine algebraische Curve, die von einem Parameter abhängt, wieder in eine solche überführen, und die übrigen, denen diese Eigenschaft nicht zukommt; die ersteren können sich nur für $p > 1$, die letzteren nur für $p \leq 1$ darbieten, und von jeder Gattung giebt es zwei Typen, deren Gleichungen aufgestellt werden. Verf. bemerkt noch die Wichtigkeit dieser Transformationen für die Differentialgleichungen. Bm.

G. Fano. Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive in sè. Palermo Rend. **10**, 1 - 15.

Der Verf. bemerkt, dass die von Enriques ausgeführte Bestimmung aller Typen von continuirlichen Gruppen Cremona'scher Transformationen der Ebene (s. F. d. M. **25**, 643, 1893/94) ziemlich leicht zu dem Satze führt: Jede algebraische Fläche eines beliebigen Raumes, die bei einer projectiven Gruppe invariant bleibt und transitiv transformirt wird, lässt sich birational beziehen entweder auf die Ebene, oder auf eine Fläche zweiter Ordnung im R_3, oder auf einen rationalen Kegel n^{ter} Ordnung des R_{n+1}, und zwar so, dass der projectiven Gruppe der Fläche entweder eine projective Gruppe der Ebene, oder die projective Gruppe jener Fläche zweiter Ordnung im R_3, oder die projective Gruppe jenes Kegels im R_{n+1} entspricht. Die Arbeit entwickelt nun einen directen Beweis dieses Satzes. El.

G. Fano. Sui gruppi continui di trasformazioni Cremoniane del piano e sopra certi gruppi di trasformazioni projettive. Palermo Rend. **10**, 16-29.

Schon in der vorigen Arbeit hatte der Verf. angekündigt, dass die Aufgabe, alle continuirlichen Gruppen von Cremona'schen Transformationen eines beliebigen Raumes R_k auf Typen zurückzuführen, gelöst werden kann, sobald man alle Mannigfaltigkeiten M_k eines R_i $(i \geqq k)$ bestimmt hat, die continuirliche projective Gruppen gestatten. Jetzt führt er dies für die Ebene aus und gewinnt so die Enriques'schen Sätze über Gruppen von Cremona'schen Transformationen wieder. Er zeigt zunächst, dass zu jeder k-gliedrigen Gruppe von Cremona'schen Transformationen der Ebene auf unendlich viele Weisen eine rationale Fläche in einem höheren Raume construirt werden kann, die eine k-gliedrige projective Gruppe dieses Raumes gestattet, und zwar derart, dass, wenn man die Ebene in geeigneter Weise birational auf diese Fläche bezieht, die eine Gruppe der anderen entspricht. Gestützt auf die Ergebnisse der vorigen Arbeit, kann der Verf. jetzt leicht die Enriques'schen Typen von Gruppen Cremona'scher Transformationen der Ebene wiederfinden. Der grössere Teil der Arbeit (S. 26-29) beschäftigt sich damit, gewisse Ungenauigkeiten zu beseitigen, die in der Note des Verf. Sulle superficie algebriche con infinite trasformazioni projettive in sè (Rom. Acc. L. Rend. (5) **4**, 149-156; F. d. M. **25**, 727, 1895) enthalten sind. Es handelt sich dabei erstens darum, dass eine projective Transformation durch die bei ihr invarianten Punkte, Geraden u. s. w. und durch ein Paar entsprechender Punkte noch nicht vollständig bestimmt zu sein braucht, wenn einzelne der invarianten Punkte zusammenfallen. Zweitens handelt es sich um den Beweis des Satzes, dass jede algebraische Fläche, die bei einer projectiven Gruppe invariant bleibt und transitiv transformirt wird, rational ist. El.

G. Bohlmann. Continuirliche Gruppen von quadratischen Transformationen der Ebene. Gött. Nachr. 1896, 44-54.

Bericht auf S. 106 dieses Bandes.

S. Kantor. Ueber die endlichen Gruppen von Correlationen. J. für Math. **116,** 171-177.

Da jede $2n$-malige Wiederholung einer Correlation eine Collineation darstellt, so kann eine Gruppe niemals allein Correlationen enthalten. Der Ausdruck „Gruppe von Correlationen" ist daher ungenau, die in Rede stehenden Gruppen bestehen aus Correlationen und Collineationen, welche an Zahl einander gleich sein müssen. Die letzteren bilden eine ausgezeichnete Untergruppe. Die endlichen Gruppen von Collineationen in der Ebene sind von C. Jordan eingehend studirt worden. Kantor benutzt die Jordan'schen Resultate, welche geometrisch gedeutet werden, und zeigt, wie man aus den endlichen Collineationsgruppen der verschiedenen Typen durch Hinzunahme einer Correlation die Gruppen der verlangten Art construiren kann. Stz.

S. Kantor. Theorie der Transformationen im R_r, welche sich aus quadratischen zusammensetzen lassen. American J. **18,** 219-263.

Während alle birationalen Transformationen der Ebene aus quadratischen zusammensetzbar sind, bilden im R_r $(r > 2)$ die Transformationen, welche sich aus quadratischen zusammensetzen lassen, nur eine Untergruppe der Gruppe aller birationalen Transformationen. Die vorliegende Arbeit ist dem Studium dieser Untergruppe gewidmet und liefert als wichtigstes Resultat die Aufstellung der in ihr enthaltenen endlichen Gruppen und deren Zurückführung auf gewisse Typen. Stz.

B. Conforme Abbildung und dergleichen.

U. Bigler. Conforme Abbildung der inneren Fläche eines Kreises in die innere Fläche eines regulären Vielecks. Hoppe Arch. (2) **14,** 360-397.

Verf. zeigt, dass sich mittels der Function $\int_0 (1-x^n)^{-\frac{2}{n}} dx$ die innere Fläche eines Kreises in die innere Fläche eines regulären Vielecks conform abbilden lässt, und benutzt die dabei auftretenden Integrale zur Berechnung von $\Gamma(\frac{1}{3})$ sowie der elliptischen Functionen sn, cn, dn für die Argumente $K/3$ und $K'/3$. Die Arbeit verdankt ihre Entstehung einer Anregung des verstorbenen Prof. Schläfli. Wbg.

J. Pierpont. Note on C. S. Peirce's paper on „A quincuncial projection of the sphere". American J. **18,** 145-152.

Conforme Abbildung der Innenfläche eines Quadrates auf die eines Kreises mit Hülfe der Function $\zeta = \mathrm{cn}\left(z \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ Js.

F. Busse. Ueber diejenige punktweise eindeutige Beziehung zweier Flächenstücke auf einander, bei welcher jeder geodätischen Linie des einen eine Linie constanter geodätischer Krümmung des anderen entspricht. Berl. Ber. 1896, 651-664.

F. Busse. Ueber eine specielle conforme Abbildung der Flächen constanten Krümmungsmasses auf die Ebene. Diss. Berlin. Göttingen: Dieterich'sche Univ. Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner). 31 S. 8°.

Die Aufgabe, zwei Flächenstücke in der Art punktweise eindeutig auf einander zu beziehen, dass jeder geodätischen Linie des einen Flächenstückes eine geodätische Linie des anderen entspricht, wurde zuerst von Beltrami für den speciellen Fall, dass die eine Fläche eine Ebene ist, behandelt und später von Dini für reelle Flächen allgemein gelöst. — In der ersten Arbeit stellt Verf., indem er sich ebenfalls auf reelle Flächen beschränkt, das allgemeinere Problem: „Unter welchen Bedingungen lassen sich zwei Flächenstücke S und Σ in der Art punktweise eindeutig auf einander beziehen, dass jeder geodätischen Linie des Flächenstückes S eine Linie constanter geodätischer Krümmung des Flächenstückes Σ entspricht?" — Mit bemerkenswerter Benutzung der Invarianteneigenschaft der von Cayley so genannten „Schwarz'schen Derivirten" gegenüber linearen Substitutionen der abhängigen Variable erfolgt die Lösung dieses Problems durch den Beweis des folgenden Satzes: „Wenn sich zwei Flächenstücke S und Σ in der Art punktweise eindeutig auf einander beziehen lassen, dass jeder geodätischen Linie des Flächenstückes S eine Linie constanter geodätischer Krümmung des Flächenstückes Σ entspricht, so ist es immer möglich, ein Flächenstück S_1 zu finden, welches auf das Flächenstück S in der Art punktweise eindeutig bezogen wird, dass jeder geodätischen Linie des Flächenstückes S eine geodätische Linie des Flächenstückes S_1 entspricht, und welches auf das Flächenstück Σ in der Weise conform abgebildet wird, dass jeder geodätischen Linie des Flächenstückes S_1 eine Linie constanter geodätischer Krümmung des Flächenstückes Σ entspricht". Ausser den Flächenstücken S_1 der specielleren Dini'schen Aufgabe giebt es nur in dem Falle noch andere, den allgemeineren Bedingungen des hier gestellten Problems genügende Flächenstücke Σ, wenn S die Biegungsfläche einer Rotationsfläche ist. — Die gewonnenen Ergebnisse werden auf die Flächen constanten Krümmungsmasses angewandt.

In der zweiten Arbeit werden einige weitere Untersuchungen über derartige conforme Abbildungen von Flächen auf einander, im besonderen über die der Flächen constanten Krümmungsmasses auf die Ebene, mitgeteilt.

Im vierten Abschnitt der ersten Arbeit zeigt Verf., dass, wenn zwei Flächenstücke S_1 und Σ in der Art conform auf einander abgebildet

werden können, dass jeder geodätischen Linie von S_1 eine Linie constanter geodätischer Krümmung von Σ entspricht, bei dieser Abbildung auch jeder Linie constanter geodätischer Krümmung von S_1 eine Linie derselben Art des Flächenstückes Σ zugeordnet wird. — Im ersten Abschnitt der zweiten Arbeit wird dieser Satz dahin erweitert, dass die angegebene Beziehung zwischen zwei Flächenstücken auch dann besteht, wenn sie conform so auf einander abgebildet werden können, dass einer zweifach unendlichen Schar von Linien constanter geodätischer Krümmung des einen eine zweifach unendliche Schar von Linien derselben Art des anderen zugeordnet wird. Es genügen daher auch diesen allgemeinen Bedingungen nur die oben angegebenen Flächenstücke S_1 und Σ.

Im zweiten Abschnitt zeigt Verf., ohne auf das Resultat allgemeiner Untersuchungen wie in seiner ersten Arbeit zurückzugehen, direct, dass die einzigen Flächen, welche sich auf eine Ebene derart conform abbilden lassen, dass den geodätischen Linien der Fläche Kreisbogen oder gerade Linien der Ebene entsprechen, die Flächen constanten Krümmungsmasses sind. Die conformen Abbildungen dieser Art werden darauf kurz besprochen und dabei einige zuerst von Dini über die Abwickelung von Flächen constanter negativer Krümmung auf einander auf dem Wege der Rechnung erhaltene Sätze durch einfache geometrische Betrachtungen bewiesen.

In einem Anhange endlich wird die Litteratur über die Flächen constanten Krümmungsmasses, soweit sie dem Verfasser bekannt geworden ist, zusammengestellt. Wbg.

D. A. Gravé. Sur la construction des cartes géographiques. Journ. de Math. (5) **2**, 317-361.

Wie Lagrange in seiner Abhandlung „Sur la construction des cartes géographiques" alle Abbildungen einer Rotationsfläche auf eine Ebene gefunden hat, bei welcher die Gestalt der Flächenelemente erhalten bleibt und die Meridiane und Parallelkreise durch gerade Linien oder Kreise dargestellt werden, so löst Gravé die entsprechende Aufgabe für die „äquivalente" Abbildung, d. h. für eine solche, bei welcher der Flächeninhalt der kleinsten Teile derselbe bleibt. Das Problem führt, unabhängig von der speciellen Art der Rotationsfläche, auf die Differentialgleichung $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}=1$, deren allgemeines Integral sich leicht angeben lässt. Die in demselben auftretende willkürliche Function ist nun so zu bestimmen, dass die Meridiane und die Parallelkreise der Rotationsfläche durch Linien bestimmter Art abgebildet werden. Je nachdem beide Kategorien von Curven durch gerade Linien (die eine Curve umhüllen, oder durch einen Punkt hindurchgehen, oder parallel sein können), oder die eine durch gerade Linien, die andere durch Kreise, oder endlich (und das ist der die meisten Schwierigkeiten bietende Fall) beide durch Kreise dargestellt werden, erhält er im ganzen 11 verschiedene, den Bedingungen der Aufgabe entsprechende Arten der Abbildung,

für welche die Formeln am Schlusse der Arbeit zusammengestellt sind. Der Verf. fügt hinzu, dass, wenn er auch die Lösung nur für Rotationsflächen durchgeführt hat, die Resultate doch für jede krumme Oberfläche anwendbar sind, weil durch passende Wahl der Coordinaten die Bedingung für die äquivalente Abbildung stets auf die Form der vorher angegebenen Differentialgleichung gebracht werden kann. F.

D. A. Gravé. Ueber Hauptaufgaben der mathematischen Theorie der Kartenconstruction. St. Petersburg. IV + 197 S. 4°. (Russisch.)

Diese treffliche Arbeit besteht aus vier Kapiteln. In dem ersten (S. 1 bis 63) sind die Grundzüge der mathematischen Theorie der Kartenconstruction enthalten. Eine Reihe einfacher Aufgaben über Construction aller Flächen, welche mit Hülfe gewisser geometrischer Constructionen flächentreu oder mit Aehnlichkeit im Unendlichkleinen abgebildet werden können, wird aufgestellt und gelöst (wie epicylindrische, epikonische Projectionen, u. s. w.). Kapitel 2 (S. 64-131) ist den flächentreuen Abbildungen einer Rotationsfläche gewidmet. Es werden 11 Arten solcher Abbildungen gefunden, bei denen die Meridiane und die Parallelkreise durch Gerade und Kreise abgebildet werden, und es wird bewiesen, dass diese die einzigen sind.

Kapitel 3 (S. 140—170) trägt den Titel: Ueber die Aufgabe von Dirichlet. Ein Bericht darüber ist auch in Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24,** 111—136 (vgl. das Referat S. 318 dieses Bandes) publicirt.

Kapitel 4 ist den Projectionen von Tschebyschew gewidmet. Hier wird das Theorem von Tschebyschew bewiesen (vgl. Ass. Franç Caen **23,** 196-199; F. d. M. **26,** 775, 1895). Die auf dieses Theorem gegründete Abbildung wird untersucht, und ihre Vorzüge im Vergleiche mit der Lambert'schen werden hervorgehoben. Angewandt auf das Viereck, bestimmt durch die Parallelen 40° und 70° und zwei Meridiane mit der Entfernung von 40°, so dass das ganze europäische Russland abgebildet wird, giebt diese Methode zweimal (dritthalb-Mal) mindere Abweichung von Null für den Logarithmus des Masstabes, als die Lambert'sche. Si.

Zehnter Abschnitt.

Mechanik.

Kapitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

P. Appell. Traité de mécanique rationnelle. Tome deuxième: Dynamique des systèmes. — Mécanique analytique. Paris: Gauthier-Villars et Fils. IV + 538 S. 8°.

Den ersten Band dieses „Cours de mécanique de la faculté des sciences", wie oberhalb des Titels auf dem Titelblatte steht, haben wir in F. d. M. **24**, 803, 1892 besprochen und können jetzt dem zweiten Bande dieselben Vorzüge nachrühmen, welche wir am Schlusse jener Besprechung hervorhoben: Reichhaltigkeit der Gesichtspunkte, Berücksichtigung der neuesten Leistungen, gleichmässige Darstellung der allgemeinen Principien und Hinweisung auf eine grosse Zahl von Beispielen, sowie Specialuntersuchungen in den zahlreich gegebenen Uebungen, völlige Beherrschung der mathematischen Hülfsmittel.

Der erste Teil des zweiten Bandes gehört eigentlich noch in den ersten Band, weil er die „analytische Dynamik" des Massenpunktes behandelt und mit ihr die Mechanik des Massenpunktes zum Abschlusse bringt. Die kanonischen Bewegungsgleichungen und das Jacobi'sche Theorem bilden nebst den zugehörigen Anwendungen den Inhalt des betreffenden (XVI.) Kapitels.

Nun erst folgt im zweiten Teile die „Dynamik der Systeme". Der „Geometrie der Massen" gehört das erste Kapitel (XVII) über die Trägheitsmomente an; diesem folgen im XVIII. Kapitel die allgemeinen Sätze über die Bewegung der Systeme: Bewegung des Schwerpunktes, Satz über die Momente der Bewegungsgrössen, über die lebendige Kraft, die Energie. Die Bewegung eines starren Körpers ist auf drei Kapitel verteilt, von denen das erste die Bewegung um eine feste Axe oder parallel zu einer Ebene nebst der gleitenden und rollenden Reibung, sowie den Widerstand eines Mediums behandelt, das zweite die Be-

wegung um einen festen Punkt, das dritte die Bewegung eines freien Körpers. Besonders in den beiden letzteren Kapiteln ist die Fülle des verarbeiteten Stoffes bemerkenswert. Leider sind die beachtungswerten jüngsten russischen Untersuchungen aus diesem Gebiete bei der Abfassung des Werkes dem Verf. noch nicht bekannt gewesen; sonst würden wir uns gewiss einer ebenso gewissenhaften Darstellung derselben zu erfreuen haben, wie sie den neueren Arbeiten von Greenhill zu Teil geworden ist. Die Relativbewegung mit ihren bekannten Anwendungen füllt das XXII. Kapitel; wir heben ausser den gewöhnlichen Gegenständen, dem freien Falle an der Erdoberfläche, dem Foucault'schen Pendel und dem Gyroskop, eine hübsche Zugabe über das Zweirad hervor nach Bourlet (Traité des bicycles et bicyclettes. Paris: Gauthier-Villars et Fils).

Damit ist eine erste Gedankenreihe zu Ende geführt. Eine zweite allgemeinere gelangt in den Kapiteln XXIII bis XXV zur Darstellung; dieselbe umfasst die allgemeinsten Principien der analytischen Mechanik: das d'Alembert'sche Princip, die Lagrange'schen Gleichungen, die kanonischen Gleichungen, die Theoreme von Jacobi und Poisson, das Hamilton'sche Princip, das Princip der kleinsten Wirkung. Auch hier hatte der Verf. reichliche Gelegenheit, die in neuester Zeit gewonnenen Resultate dem Leser vorzuführen; wir nennen nur die Namen Mayer, Koenigs, Liouville, Stäckel. Als ein Vorzug des Buches ist zu erwähnen, dass diese abstracten Theorien durch Anwendung auf besondere Fälle oder durch die Forderung der Lösung von Uebungsaufgaben veranschaulicht werden, so z. B. über das Princip des letzten Multiplicators und über die Transformationen in der Mechanik.

Die letzten beiden Kapitel endlich erörtern die Gesetze des Stosses und einige Begriffe über Maschinen.

Im ganzen genommen, schliesst sich demnach der vorliegende Traité de mécanique rationnelle den klassischen französischen Vorbildern an; doch hat die durch die Jacobi'schen Vorlesungen über Dynamik hervorgerufene Litteratur die Gestaltung des Werkes merklich beeinflusst.

Lp.

W. J. Loudon. An elementary treatise on rigid dynamics. London: Macmillan and Co. IX + 236 S. 8°. [Nature **53**, 578.]

In dem grossen Lehrbuche der Dynamik starrer Körper von Routh besitzt der englische Student ein Werk, das er für einzig in seiner Art hält, und auf das er mit Recht stolz ist. Jedes andere Werk über denselben Gegenstand wird unfehlbar nach dem hohen Massstabe beurteilt, an den jenes Lehrbuch den englischen Leser gewöhnt hat, und dem fast mit Gewissheit irgend ein Einfluss zuzuschreiben ist. Gleichzeitig ist das Routh'sche Werk so erschöpfend, dass für ein weniger weit fortgeschrittenes Werk über den Gegenstand gerade noch Platz vorhanden ist. Solch ein Buch ist vorgesehen in Loudon's „Elementarem Lehrbuch", und für Studenten, die eine ordentliche Kenntnis der Differential- und Integralberechnung haben, dürfte es einen vortrefflichen

Führer zu einem etwas schwierigen Gegenstande bilden, in welchem es eine tüchtige Grundlage für höher stehende Schriften darbietet. Die Darstellung ist gedrängt, doch sind die grundlegenden Principien überall durch gut gewählte Beispiele beleuchtet, wodurch man dagegen geschützt bleibt, dass Kürze in Dunkelheit sich wandelt. In den beiden ersten Kapiteln ist alles Notwendige aus der Lehre über Trägheitsmomente gegeben, und mit dem dritten Kapitel beginnt die eigentliche Dynamik. Hier wäre es vielleicht angebracht gewesen, in grösserer Ausführlichkeit die Bedeutung und den Zweck des d'Alembert'schen Princips darzulegen, in Anbetracht seiner Stellung im Mittelpunkte der Dynamik; indessen ist die Auslegung seines Sinnes an den durchgearbeiteten Beispielen äusserst klar. Die Kapitel IV und V handeln von der Bewegung um eine feste Axe für die Fälle endlicher und impulsiver Kräfte; weiter wird die Bewegung um einen festen Punkt in den Kapiteln VI, VII, VIII erörtert. Der allgemeine Fall der Bewegung eines freien Körpers wird im IX. Kapitel erledigt; eine ausgezeichnete Besprechung des Gyroskops wird im X. und letzten Kapitel gegeben. Diese zehn Kapitel nebst einer Note über das Pendel und den Kreisel füllen 176 Seiten; dagegen enthalten die Seiten 176 - 236 eine Zusammenstellung von 306 Uebungsbeispielen. Hieraus erhellt, dass der Verf. sich auf die allgemeinen Methoden und Resultate seines Gegenstandes zu beschränken hatte. Innerhalb des gewählten Rahmens sind jedoch die Lösungsmethoden und die zur Behandlung ausgewählten Teile vortrefflich dazu geeignet, dem Anfänger gründliche Vorstellungen zu verschaffen und ihn für ein schwieriges Studium vorzubereiten. Gbs. (Lp.)

J. Massau. Cours de mécanique. Tome II. Dynamique, hydrostatique, hydraulique. Gand: Meyer - Van Loo. Autogr. VIII + 312 S. 8°.

Der erste Band ist in F. d. M. **25**, 1315, 1893/94 angezeigt worden.

Dynamik des Massenpunktes. 1. Allgemeines. 2. Allgemeine Theoreme. 3. und 4. Geradlinige oder krummlinige Bewegung eines freien Punktes. 5. und 6. Bewegung auf einer Curve oder einer Oberfläche. 7. Relative Bewegung.

Dynamik der materiellen Systeme. 1. Allgemeine Formeln. 2. Allgemeine Theoreme. 3. Trägheitsmomente. 4. und 5. Fall einer festen Axe oder eines festen Punktes. 6. Bewegung eines beliebigen starren Körpers. 7. Stoss der Körper.

Hydrostatik. 1. Allgemeine Theorie. 2. Anwendungen.

Hydrodynamik. 1. Allgemeine Theorie. 2. Flüssigkeiten und Gase. 3. Wirbel.

Der Verf. führt in seine Dynamik die lineare Vectorfunction ein und bedient sich ihrer in der Theorie der Trägheitsmomente, in derjenigen der Rotation der starren Körper und der Wirbel. Er hat den Beweis der Lagrange'schen und Hamilton'schen Gleichungen vereinfacht und beachtenswerte Vervollkommnungen in alle Fragen der relativen

Bewegungen eingeführt, z. B. in diejenigen, bei denen man der Bewegung der Erde Rechnung trägt. Mn. (Lp.)

V. Volterra. Lezioni di meccanica. Prime nozioni di cinematica. Livorno. Giusti. 98 S. 8°.

Der Inhalt dieser Broschüre, welche wohl das erste Heft eines Lehrbuches der Mechanik bildet, erhellt aus folgendem Verzeichnisse:

Kapitel I. Kinematik des Punktes: 1. Geradlinige Bewegung; 2. Vectoren; 3. Geschwindigkeit und Beschleunigung der krummlinigen Bewegung; 4. Relative Bewegung. — Kapitel II. Kinematik des unveränderlichen Systemes: 1. Momentanbewegungen und ihre Zusammensetzung; 2. Momentan-Translationen und -Drehungen; 3. Die allgemeinste Momentanbewegung; 4. Endliche Bewegungen; 5. Virtuelle Verschiebungen der Punkte eines starren Systemes; 6. Beschleunigungen der Punkte eines starren Systemes. Vi.

W. Keck. Vorträge über Mechanik als Grundlage für das Bau- und Maschinenwesen. Erster Teil: Mechanik starrer Körper. Mit 389 Holzschnitten. Hannover: Helwing'sche Verlhdlg. VII u. 319 S. gr. 8°.

Die Wissenschaft der Mechanik bildet für alle Untersuchungen des Technikers die notwendige und sichere Grundlage; die Principien der Mechanik in ihrer heutigen Gestalt sind aber von Galilei und Newton an so systematisch aufgebaut worden, dass jede Darstellung der Mechanik dieselben entwickeln muss, ihrer nicht zu entbehren vermag. Diese selbstverständlichen Gedanken werden zwar neuerdings von den Technikern in Frage gestellt, weil sie, in ihren praktischen Aufgaben befangen, die Erinnerung an den eigenen Bildungsgang verloren haben, oder weil sie wegen der seltenen Anwendungen, die ihnen von jenen Grundlagen des Lehrgebäudes scheinbar vorkommen, wähnen, diese grundlegenden Sätze der Mechanik seien nur müssige Spielereien der unpraktischen Theoretiker, die ihnen ihre kostbare Zeit rauben, sie mit nutzlosen Spitzfindigkeiten für ihren wahren Beruf unbrauchbar machen. Sobald aber ein denkender Praktiker dazu kommt, den Vortrag über Mechanik zu halten, so wird er dessen inne, dass die verachtete Theorie erst die wahre Einsicht ermöglicht, und es entstehen dann Vorlesungen, die sich von denen der Theoretiker recht wenig unterscheiden.

Ref. hat seit 24 Jahren an der Kriegsakademie Vorträge über Mechanik gehalten, war daher als ein von den Technikern für einen Theoretiker angesehener Lehrer neugierig, wie die von einem bewährten Praktiker gehaltenen Vorträge über Mechanik sich von den seinigen unterschieden, muss aber bekennen, dass der Unterschied sehr gering ist, im Grunde nur dadurch zur Erscheinung kommt, dass an der technischen Hochschule eine viel grössere Zeit zur Verfügung steht, und dass daher viel mehr specielle, natürlich auf das Bau- und Maschinenfach bezügliche Anwendungen ge-

macht werden können, als dies bei beschränkterer Stundenzahl möglich ist. Für derartige grössere Vorlesungen war ja bisher das Lehrbuch der technischen Mechanik von Ritter ein musterhaftes Werk, und Ref. befindet sich mit dem Verf. des vorliegenden Buches in der Wertschätzung jenes älteren Werkes in voller Uebereinstimmung.

Der wesentliche Unterschied des Keck'schen Lehrbuchs von dem Ritter'schen besteht darin, dass Ritter die Anwendung der Infinitesimalrechnung ausschliesst und erst in dem zweiten Teile seines Lehrganges, in der „analytischen Mechanik“, dieses Versäumnis nachholt, dass dagegen Keck das Hülfsmittel der höheren Analysis von vorn herein, wenn auch zunächst erst vorsichtig, zur Anwendung bringt, eine Aenderung, die sachlich gerechtfertigt, praktisch durch einen eigentümlichen Wechsel der Stundenverteilung für das erste Semester an der technischen Hochschule zu Hannover ausführbar gemacht ist. Ein anderer, in die Augen springender Unterschied ist die Zusammenziehung des Stoffes. Das Ritter'sche Lehrbuch enthält eben mehr als einen Lehrgang für das erste Studienjahr. Sein verdienter Verf. versteht es freilich, die Studenten zur Durcharbeitung des Ganzen zu nötigen; doch dürfte die von ihm angewandte Methode, die bei einem kleineren Zuhörerkreis noch durchführbar ist, bei einer Schar von drei- bis vierhundert Studenten vollständig versagen. Nichts desto weniger behalten die vielen, seiner Zeit neuen und originellen Untersuchungsergebnisse Ritter's, sowie ihre durchsichtigen Entwickelungen ihren Wert auch für die jetzige Zeit. Wir sind jedoch mit dem Verf. des vorliegenden Buches damit einverstanden, dass er durch eine Verkürzung des Umfanges den Stoff dem Fassungsvermögen eines Studenten im ersten Semester näher gebracht hat. In Bezug auf die Anschaulichkeit der Darstellung, die Deutlichkeit und Zweckmässigkeit der Figuren zeigt das vorliegende Werk den erfahrenen Lehrer, dem die guten Eigenschaften seines Lehrers Ritter zur zweiten Natur geworden sind. Ein näheres Eingehen auf den Inhalt erscheint im Jahrbuche nicht nötig. Lp.

P. Johannesson. **Das Beharrungsgesetz.** Pr. (Nr. 98) Sophien-Realgymn. Berlin. 26 S. 4°.

Von Dühring's kritischer Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik angeregt, zerpflückt der Verf. in philosophischer Betrachtung das Beharrungsgesetz in seine gedanklichen Bestandteile, wobei die bezüglichen neueren Arbeiten von Neumann, Streintz, Lange, Weber, Mach kritisch besprochen werden, geht dann zu der Frage über, ob sich diese Bestandteile irrtumsfrei zu einem Satze vereinigen lassen, sucht die Quelle (bei Galilei, Huygens, Newton) auf, aus welcher gewisse Irrtümer geflossen sind, und macht schliesslich den Versuch, der Beharrungsregel „eine Form zu geben, die in sich aufzunehmen dem Geiste zwanglos gelingt.“ Die Wahrheit des Beharrungsgesetzes gehört gemäss den Anschauungen des Verf. zu den Vereinbarungen; „es drückt keine Erkenntnis, sondern eine Vorschrift, eine sogenannte Forschungsregel

aus", nämlich: 1) „Führe alle Bewegungen auf geradlinige zurück; 2) beschreibe die Bewegungen mit Hülfe von Beschleunigungen; 3) betrachte die Massen als bewegungsbestimmende Ursachen". Lp.

Benedict Friedlaender und Immanuel Friedlaender. **Absolute oder relative Bewegung?** Berlin: Leonhard Simion. 35 S. 8°.

Ohne auf die umfangreiche Litteratur über die Frage einzugehen, wollen die Verf. die Schwierigkeiten, welche aus der Berufung auf den bekannten Newton'schen Versuch eines rotirenden Gefässes mit Wasser für die Auffassung der Rotationsbewegung als absoluter Bewegung entstanden sind, dadurch beseitigen, dass sie das Trägheitsgesetz in der bisherigen Fassung für fehlerhaft oder unvollständig erklären. Die Trägheit sei relativ zu fassen: „Alle Massen streben danach, ihren gegenseitigen Bewegungszustand nach Geschwindigkeit und Richtung aufrecht zu erhalten; zu jeder Aenderung ist positiver oder negativer Energieverbrauch erforderlich." Um die bei beschleunigter Annäherung und verzögerter Entfernung hiernach zu erwartenden abstossenden Wirkungen und die bei beschleunigter Entfernung und verzögerter Annäherung zu erfolgenden Anziehungen nachzuweisen, haben die Verf. einen Versuch ersonnen, durch den das Vorhandensein solcher Kräfte veranschaulicht werden soll. Die möglichst rasch rotirende Masse eines grossen Schwungrades müsste nämlich an einer Drehwage eine Ablenkung erzeugen. Bis jetzt haben die Beobachtungen kein positives Ergebnis geliefert.

Lp.

Clavenad. **Masse: Capacité pour le mouvement. Application aux masses Newtoniennes et la loi dite de l'attraction universelle.** L'éclair. électr. **7**, 348-351.

Weitere Betrachtungen über die Auffassung der Masse, über welche in F. d. M. **25**, 909, 1895 referirt ist. „In der ganzen Newton'schen Mechanik muss man die Masse, einen zerfliessenden Begriff, um nicht mehr zu sagen, durch die Beschleunigung, einen präcisen Begriff, ersetzen können." Die aphoristischen Auseinandersetzungen klingen zum Schlusse etwas mystisch aus. Lp.

E. Vicaire. **Sur la nature et sur les principes de la mécanique rationnelle.** Soc. Philom. Bull. (8) **8**, 19-20.

E. Vicaire. **Sur la nécessité du mouvement absolu en mécanique.** Soc. Philom. Bull. (8) **8**, 20-22; Brux. S. sc. **20** A, 46-55.

E. Vicaire. **Observations sur une note de M. Mansion.** Brux. S. sc. **20** A, 8-19.

P. Mansion. **Réponse.** Ibid. 19-20, 56.

E. Goedseels. **Note.** Ibid. 20-21.

E. Vicaire. **Observations critiques sur les „Leçons de Mécanique" de Kirchhoff.** Ibid. 96-99.

Weitere Ausführungen zu einer Erörterung der Principien der Mechanik, die Vicaire in zwei Aufsätzen des Jahres 1894 veröffentlicht hat („Sur le principe de l'inertie et sur la notion du mouvement absolu en mécanique" und „Sur la réalité de l'espace et le mouvement absolu" in Brux. S. sc. **18** A, 37-98 u. B, 283-310; F. d. M. **25**, 1319, 1893/94). Mansion trennt die theoretische Mechanik von der physikalischen Mechanik; Vicaire dagegen zieht es vor, beide zu vereinigen, und sucht sich dem Standpunkte von Mach zu nähern. Mn. (Lp.)

J. G. MacGregor. **The hypotheses of abstract dynamics and the question of the number of the elastic constants.** Phil. Mag. (5) **42**, 240-245.

In diesem Aufsatze wird der Versuch gemacht, die Hypothesen zu formuliren, die man braucht, wenn man, wie bei dem Studium der Flüssigkeiten und der elastischen Körper, als Bestandteile derselben solche Elemente annimmt, welche nur auf anstossende Elemente über Berührungsflächen hinweg Kräfte ausüben. Die rein dynamischen Hypothesen kommen auf zwei zurück, nämlich: 1) das Kraftgesetz (Newton's zweites Gesetz) und 2) das Spannungsgesetz, nämlich dass die durch die Spannungscomponenten $P, Q, \dots$ während einer Deformation geleistete Arbeit, oder das Integral zwischen dem Anfangs- und dem Endzustande der Deformation $e, f, \dots$ von

$$\iiint (Pde + Qdf + Rdg + Sda + Tdb + Udc)\,dx\,dy\,dz$$

auf die Erzeugung eines gleichwertigen Betrages an potentieller Energie hinausläuft; dieses ist gleichbedeutend mit der Annahme, dass die Spannungscomponenten $P, Q, \dots$ an einem Punkte den Masszahlen für die Aenderung (bezüglich der entsprechenden Componenten der Deformation $e, f, \dots$) einer Function aller dieser Componenten proportional sind. Indessen ist noch eine dritte Hypothese aufzustellen, nämlich 3) das Gesetz von der Constitution der Körper, dass Körper als aus Elementen gebildet angesehen werden dürfen, die nur auf anstossende Elemente über ihre Berührungsflächen weg Kräfte ausüben. Die Tragweite dieser Resultate auf die Streitfrage bezüglich der mehr- oder minderzähligen Constanten in der Theorie der Elasticität wird dann erörtert; der anscheinende Unterschied zwischen den beiden Theorien wird der Verschiedenheit der Annahmen zugeschoben, die in Bezug auf die Constitution der Körper gemacht werden, nicht aber der zusätzlichen Annahme, welche die Theoretiker der geringeren Constantenzahl benutzt haben über jene hinaus, die den Energiegesetzen gleichwertig sind (vgl. F. d. M. **25**, 786, 1895). Gbs. (Lp.)

Leo Königsberger. **Ueber die Principien der Mechanik.** Berl. Ber. 1896, 899-944, 1173-1183.

Der Inhalt dieser umfangreichen und gehaltvollen Arbeit ist wesent-

lich mathematisch, speciell analytisch, wie der Verf. selbst auf S. 902 erklärt: „Ich betrachte den eben hergeleiteten Satz sowie all die folgenden Untersuchungen nur als Ergebnisse rein mathematischer Natur, ohne mich in eine Besprechung der Frage einzulassen, in wie weit die Physik die Einführung von Kräften erfordert, die nicht nur Functionen der Zeit und der Coordinaten sind, sondern auch von den Geschwindigkeiten, den Beschleunigungen und noch höheren Differentialquotienten des Weges, nach der Zeit genommen, abhängen.“ Das vom Verf. in die Formeln eingeführte „kinetische Potential“ H ist eine gegebene Function von t, den $3n$ Coordinaten der n Punkte des Systems und den Ableitungen derselben nach der Zeit bis zur ν^{ten} Ordnung einschliesslich. Wird $H = -T - U$ gesetzt, wo $T = \frac{1}{2}\Sigma m_k (x_k'^2 + y_k'^2 + z_k'^2)$ ist ($k = 1, 2, 3, \ldots, n$), so stellt U eine Function der $3n$ Coordinaten und der Zeit dar, welche das Potential der inneren Kräfte im gewöhnlichen Sinne bedeutet. Mit dieser verallgemeinerten Auffassung der Grundbegriffe werden die Principe der Mechanik der Reihe nach einzeln und in ihren gegenseitigen Beziehungen und Abhängigkeitsverhältnissen untersucht: das d'Alembert'sche Princip, die beiden Formen der Lagrange'schen Gleichungen, das Princip der kleinsten Wirkung, das Hamilton'sche Princip, das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft, das Gauss'sche Princip des kleinsten Zwanges. Zuletzt wird unter gewissen Bedingungen über die äusseren Kräfte nicht bloss der Existenzbeweis für das kinetische Potential geführt, sondern auch die analytische Form desselben aufgestellt. Alle oben angeführten Benennungen sind für die analytischen Formen eingeführt, welche aus dem kinetischen Potential in Analogie mit den üblichen Bezeichnungen folgen. Unter den abgeleiteten Sätzen führen wir zur Erläuterung an (S. 906/7): Das durch die Gleichung (23) dargestellte Hamilton'sche Princip ist in dieser erweiterten Gestalt der zweiten Form der erweiterten Lagrange'schen Gleichungen völlig äquivalent. (S. 911): Auch in diesem allgemeinsten Falle nimmt der Energievorrat des Systems fortwährend in dem Masse ab oder wächst, als die Kräfte P_x positive oder negative Arbeit leisten. (S. 915): Der Energievorrat eines Systems bestimmt dessen kinetisches Potential bis auf eine in den ersten Ableitungen lineare Function der Coordinaten, die nach Helmholtz in dem von ihm behandelten Falle den verborgenen Bewegungen entsprechen (S. 918). Aus der oben gegebenen Herleitung ist zugleich die Aequivalenz des verallgemeinerten Gauss'schen Satzes vom kleinsten Zwange mit den verallgemeinerten Lagrange'schen Gleichungen ersichtlich. — Hierbei möge erwähnt werden, dass sowohl an dieser Stelle wie in der ganzen Arbeit der Verf., bekanntlich ein ausgezeichneter Kenner der Helmholtz'schen Arbeiten, immer den engsten Anschluss an die Ideen dieses seines älteren Freundes herstellt und besonders hervorhebt, dass Hertz in seinen Principien der Mechanik im wesentlichen Helmholtz'sche Gedanken, allerdings in eigentümlich originaler Weise, verarbeitet hat.

Indem Referent darauf verzichten muss, die zahlreichen anderen Sätze herzusetzen, weil sie an sich zu umfangreich sind, möge es ge-

nügen, aus dem zweiten, kleineren Aufsatze das letzte Theorem anzuführen: Ist das kinetische Potential eine algebraische Function der Zeit, der Coordinaten und deren nach der Zeit genommenen Ableitungen bis zur ν^{ten} Ordnung hin, und besitzt das erweiterte Hamilton'sche Differentialgleichungssystem eine algebraische Integralfunction, so ist dieselbe entweder selbst eine rationale Function des kinetischen Potentials, der Zeit, der Coordinaten und deren nach der Zeit genommenen Ableitungen bis zur $(2\nu-1)^{\text{ten}}$ Ordnung hin oder eine algebraische Zusammensetzung solcher rationalen Integralfunctionen. Lp.

O. Hölder. Ueber die Principien von Hamilton und Maupertuis. Gött. Nachr. 1896, 122-157.

Die Arbeit knüpft an eine Stelle in der Einleitung zu den Hertz'schen Principien der Mechanik an, in welcher an dem Beispiele einer auf horizontaler Ebene rollenden Kugel ausgeführt wird, dass manchmal das Hamilton'sche Princip physikalisch falsche Resultate gebe, und dass das Ergebnis sich nicht ändere, wenn das Princip der kleinsten Wirkung benutzt wird. Die Lösung des hieraus sich ergebenden Widerspruches wird darin von Hertz gefunden, dass die betreffende Kugel ein nicht holonomes System vorstelle, während das Hamilton'sche Princip und das der kleinsten Wirkung nur auf holonome Systeme Anwendung finde. „Diese Lösung würde nun befriedigen, stände ihr nicht die allgemeine Ueberzeugung entgegen, dass das Hamilton'sche Princip bloss eine Umformung des d'Alembert'schen ist, und dass dieses allgemein gilt. Die Abweichung von der gewöhnlichen Anschauung, zu der Hertz' Theorie führt, lässt sich auch nicht daraus erklären, dass er ein neues Gesetz zu Grunde gelegt hat; denn sein Grundgesetz ist in den Fällen, die er betrachtet, mit dem d'Alembert'schen gleichwertig. Somit drängt sich die im Grunde rein mathematische Frage auf: Erfordert die übliche Herleitung des Hamilton'schen Princips aus dem d'Alembert'schen eine einschränkende Bedingung? Der Beantwortung dient die vorliegende Arbeit. Als Antwort wird sich ergeben, dass, wenn das d'Alembert'sche Princip allgemein gilt, auch das Hamilton'sche in seiner vollkommensten Fassung allgemein gültig sein muss. Wählt man aber die von Hertz angenommene Fassung, so tritt in der That die von ihm bezeichnete Beschränkung ein. Ich werde in dieser Arbeit noch einige andere Punkte genauer, als dies bis jetzt geschehen ist, erläutern: einmal den Begriff der Variation einer Bewegung selbst, dann die Formen des Princips der kleinsten Wirkung und das Verhältnis dieses Princips zu dem von Hamilton, welche beiden Principien durch ein allgemeines Integralprincip umfasst werden können. Es wird zugleich gezeigt werden, dass auch das Princip der kleinsten Wirkung so formulirt werden kann, das es gültig bleibt, wenn die Zeit in die Bedingungsgleichungen eingeht“. Lp.

M. Radakovic. Ueber die analytische Darstellung des Zwanges eines materiellen Systemes in allgemeinen Coordinaten. Monatsh. f. Math. **7**, 27-33.

Transformation des Ausdrucks für den Zwang eines materiellen Systems aus der analytischen Darstellung desselben mittels rechtwinkliger Coordinaten in eine solche mit Hülfe allgemeiner Coordinaten nach einem Beweisgange, welcher von den in den früheren Arbeiten über dieses Thema benutzten Wegen abweicht. Man vergleiche Lipschitz' „Bemerkungen zu dem Princip des kleinsten Zwanges“ (Journal für Math. **82**, 316) und Wassmuth in Wien-Ber. **104**, 281-285; F. d. M. **25**, 808, 1895. Lp.

Weitere Litteratur.

J. A. Bocquet. Cours élémentaire de mécanique appliquée à l'usage des écoles primaires supérieures, des écoles professionelles, etc. 3e éd. Paris: Baudry. VII + 450 S. 8°.

J. Boulvin. Cours de mécanique appliquée aux machines, professé à l'École spéciale du génie civil de Gand. 5e fascicule: Machines à vapeur. Paris: Bernard. 304 S. 8°.

F. Castellano. Lezioni di meccanica. Torino.

L. Cumming. Mechanics for beginners, treated experimentally: statics, dynamics, and hydrostatics. London: Rivington, Percival, and Co. VIII + 247 S. 12mo. [Nature **54**, 546.]

G. Dariès. Mécanique, hydraulique, thermodynamique. Paris: Dunod & Vicq. VIII + 376 S. 16mo.

J. D. Everett. On absolute and relative motion. Brit. Ass. Rep. (Ipswich) 1895, 620.

H. Frédéric. Doctrine fondamentale et nouvelle de la transformation des forces. Paris. 8°.

W. Gallatly. Mechanics for beginners. London: Macmillan and Co. XII + 253 S. 16mo. [Nature **54**, 148.]

H. Hancock. Textbook of mechanics and hydrostatics. London: D. van Nostrand and Co. 408 S. (1895).

R. Lauenstein. Leitfaden der Mechanik. Elementares Lehrbuch für technische Mittelschulen und zum Selbstunterricht. 2. Auflage. Stuttgart. J. G. Cotta Nachf. VI + 177 S. 8°.

O. J. Lodge. Elementary mechanics. New edition revised by author and A. Lodge. London: Chambers. 308 S. 8°.

O. J. Lodge, M. J. Jackson, L. Cumming. The pound as a force, and the expression of concrete quantities generally. Nature **55**, 124-126.

J. Perry. The force of one pound. Nature **55**, 176-178.

C. S. Jackson. Units of force. Nature **55**, 198.

TH. MACKENZIE. Practical mechanics, applied to the requirements of the sailor. London: Charles Griffin and Co. XII + 175 S. [Nature **54**, 364-365.]

G. MANEUVRIER. Traité élémentaire de mécanique rationnelle et appliquée. Paris: Hachette et Cie. 320 S. 16mo.

G. M. MINCHIN. A treatise on statics with applications to physics. 5th ed. Vol. I. Equilibrium of coplanar forces. London: Frowde. 416 S. 8°.

O. MONDIET et V. THABOURIN. Cours élémentaire de mécanique. Statique. Paris: Hachette et Cie. 184 S. 8°.

AUG. RITTER. Lehrbuch der technischen Mechanik. 7. Aufl. Leipzig: Baumgärtner. XV + 793 S. 8°.

E. J. ROUTH. A treatise on analytical statics. 2nd ed. Vol. 1. London, Cambridge: Warehouse. 404 S. 8°.

J. SCHNEIDER. Laerebog i elementaer Mekanik. Omarbeidet og udvidet af S. H. STRÖM. Christiania. IV + 158 S. 8°.

A. WAGENER. Elemente der Mechanik. Dessau. VII u. 123 S. gr. 8°. (1895).

J. WEISBACH. Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. 5. Aufl., bearbeitet von G. Herrmann. (In 3 Teilen.) 1. Teil: Lehrbuch der theoretischen Mechanik. 2. Abdruck. XXVIII + 1311 S. 3. Teil, 1. Hälfte: Die Maschinen zur Formveränderung. IX + 1222 S. Braunschweig: F. Vieweg u. Sohn. 8°.

TH. W. WRIGHT. Elements of mechanics. New York: Van Nostrand. London: Spon. V + 372 S. [„The force of one pound". Nature **55**, 49-51, Anzeige von J. Perry.]

H. G. ZEUTHEN. Forelaesninger over Bevaegelseslaere ved Polyteknisk Laereanstalt. Kjöbenhavn. 116 S. 8° (1895).

Kapitel 2.

Kinematik.

F. P. RUFFINI. Delle accelerazioni che nel moto di un sistema rigido con un punto fisso sono dirette a uno stesso punto qualsivoglia dato. Sep. aus Rend. Bologna 1896, 11 S. u. 2 S. 8°.

Bei der Drehung eines starren Körpers um einen festen Punkt ist für die Rotation um die augenblickliche Drehaxe der Ort der Punkte mit Beschleunigungen, die nach einem beliebig vorgegebenen Punkte S gerichtet sind, der Schnitt eines einschaligen Hyperboloids, das durch den Punkt S geht, mit einem Kegel zweiter Ordnung, dessen Mittelpunkt in demselben Punkte S liegt. Ist die augenblickliche Drehaxe eine permanente Rotationsaxe, so ist der gesuchte Ort ein Kreis in einer zur Drehaxe senkrechten Ebene, der diese Axe schneidet und durch S

Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

begründet

von

Carl Ohrtmann.

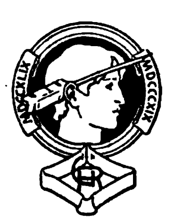
Im Verein mit anderen Mathematikern
und unter besonderer Mitwirkung der Herren
Felix Müller und **Albert Wangerin**

herausgegeben

von

Emil Lampe.

Band XXVII.
Jahrgang 1896.
(In 3 Heften.)
Heft 3.



Berlin.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1899.

Bogen 37 bis Schluss.





geht. Wenn ausserdem die Rotationsgeschwindigkeit constant ist, so geht der Ort in das Lot von S auf die Drehaxe über. Die letzteren besonderen Fälle waren in der ersten Mitteilung nicht richtig angegeben.
Lp.

J. SOBOTKA. Eine Aufgabe aus der Geometrie der Bewegung und ihr Zusammenhang mit einigen cyklometrischen Aufgaben. Monatsh. f. Math. 7, 347-369.

Der Verf. geht von der Aufgabe aus, die Normale einer Curve (m) zu construiren, von deren Punkten an gegebene Curven (a) und (b) Tangenten von constantem Längenverhältnis k^2 gezogen werden können. Die Normale geht, wie die Verallgemeinerung einer Mannheim'schen Construction zeigt, durch denjenigen Punkt μ der Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte α und β von (a) und (b), für den $\mu\alpha : \mu\beta = k^2$ ist.

Sind (a) und (b) Kreise, so ist (m) bekanntlich ein Kreis des durch (a) und (b) bestimmten Büschels, woraus sich Folgerungen für Kreisbüschel ergeben.

Der Verf. bestimmt weiter alle Kreise k_3, die mit zwei Kreisen k_1 und k_2 gemeinsame Tangenten von gegebenem Längenverhältnis λ^2 besitzen. Die Mannigfaltigkeit dieser Kreise lässt sich am einfachsten im Anschluss an Fiedler's Cyklographie dahin bestimmen, dass sie die Bildkreise eines Rotationshyperboloids sind, dessen Axe die Centrale $O_1 O_2$ im Verhältnis λ^2 teilt und durch einen Kegelschnitt geht, dessen Orthogonalprojection in der Kreisebene der Ort der Centra aller Kreise ist, die k_1 und k_2 gleichsinnig berühren.

Es folgen analoge Aufgaben für drei Kreise, sowie weitere Anwendungen, Sätze und Constructionen für die so bestimmten Kreisreihen und die in ihnen enthaltenen Büschel u. s. w.; insbesondere fasst der Verf. diejenigen Fälle ins Auge, in denen die bezüglichen Tangenten gleich sind.
Sfs.

B. PROCHAZKA. Ueber Schnittpunkts-Trajectorien. Casopis 25, 81-103, 161-186 (Böhmisch).

Behandelt die einfache und die zusammengesetzte Translationsbewegung eines unveränderlichen ebenen Gebildes, die Schnittpunktstrajectorie bei zwei Translationsbewegungen, die einfache Rotation eines unveränderlichen ebenen Gebildes, die Schnittpunktstrajectorie bei Rotation von zwei ebenen Gebilden um verschiedene Mittelpunkte, die Schnittpunktstrajectorie bei gleichzeitiger rotatorischer und translatorischer Bewegung zweier ebenen Systeme mit Bezug auf die Construction der Tangente und des Krümmungsmittelpunktes, unter Berücksichtigung der einschlägigen Litteratur.
Sda.

J. CARDINAAL. Construction de l'accélération du point de rencontre de deux tiges mobiles. Nieuw Archief (2) 3, 53-56.

Die betreffende Construction ist auf ein Minimum von Elementarconstructionen zurückgeführt. Mo.

R. Sée. Théorème de géométrie cinématique. Nouv. Ann. (3) **15**, 173-174.

Aus dem Satze, dass die Charakteristik einer bewegten Ebene die Punkte enthält, deren Bewegungsrichtung in die Ebene fällt, leitet der Verf. den Satz ab, dass die Charakteristik einer Ebene, die eine Fläche umhüllt, Tangente dieser Fläche ist, nebst anderen ähnlichen auf der Hand liegenden Resultaten. Sfs.

R. Bricard. Sur un déplacement remarquable. C. R. **123**, 939-940.

Der Verf. spricht folgenden Satz aus: Sind C und C' zwei projectivisch bezogene, unveränderliche Kegelschnitte, und beschreiben die fünf Punkte m'_1, m'_2, ..., m'_5 sphärische Curven, deren Centra die entsprechenden Punkte m_1, m_2, ..., m_5 sind, so beschreibt jeder Punkt m' von C' eine sphärische Curve, deren Centrum der entsprechende Punkt m von C ist.

Ein besonderer Fall des Satzes ist folgender: Ein Dreieck $a'b'c'$ bewege sich so, dass es einer Ebene π parallel bleibt und a', b', c' sphärische Curven um drei feste Punkte a, b, c von π beschreiben, deren Dreieck zu $a'b'c'$ ähnlich ist; so beschreibt jeder Punkt des $a'b'c'$ umbeschriebenen Kreises eine analoge sphärische Curve.

Uebrigens hat im letzten Fall die Bewegung von π die Besonderheit, dass man ihr in jeder Lage unendlich viele mit den Bedingungen des Systems verträgliche unendlich kleine Bewegungen erteilen kann.

Sfs.

V. Rouquet. Sur un cas particulier du mouvement à cinq conditions. Toulouse Ann. **10** F, 1-23.

Pirondini hatte gezeigt, dass eine Curve, die fest mit dem Hauptrieder einer Curve c verbunden ist, nur dann eine Bewegung annimmt, bei der sie orthogonal bleibt zu den Bahncurven aller ihrer Punkte, wenn 1) c eine Bertrand'sche Curve ist, und 2) eine Gerade, die noch zwei Constanten enthält (Nouv. Ann. (3) **9**; F. d. M. **22**, 773, 1890).

Abgesehen von einem neuen und vervollständigten Beweise dieses Satzes betrachtet der Verf. noch die von den genannten Geraden bei der Bewegung erzeugten Flächen. Er zeigt zunächst, dass diese Geraden die Geraden l einer bestimmten linearen Congruenz sind, die zwei feste Geraden d und d' schneiden, und dass die von einer Geraden l beschriebene Fläche auf die Bertrand'schen Regelflächen abwickelbar ist, d. h. auf diejenigen, deren Erzeugende Hauptnormalen für zwei ihrer orthogonalen Trajectorien sind, und zwar sind das die Bildcurven derjenigen, die von den Schnittpunkten von l mit d und d' beschrieben werden.

Es folgen Erörterungen besonderer Fälle, sowie die Herleitung der Formeln, die die Bestimmung der bezüglichen Regelflächen ermöglichen.
Sfs.

V. Rouquet. Note sur un cas particulier du mouvement à cinq conditions. Toulouse Mém. (9) 8, 264-269.

Wenn bei der Bewegung des fundamentalen Dreibeins [gebildet aus Tangente, Haupt- und Binormale] einer Curve (O), deren beide Krümmungen nicht gleichzeitig constant sind, eine mit diesem Dreibein unveränderlich verbundene und mit ihm fortgeführte Linie Σ beständig auf den Bahncurven ihrer einzelnen Punkte normal bleibt, so ist 1) die Curve (O) eine Bertrand'sche Curve, 2) die Linie Σ ein beliebiger Strahl aus der Congruenz, welche die Geraden D und D' zu Leitlinien besitzt, die bezw. zur Binormale der Curve (O) und zur Binormale der conjugirten Curve (O) parallel sind und die beiden Curven (O') und (O) schneiden (vergl. das vorangehende Referat). Lp.

V. Jelínek. Ueber den rollenden Kegel. Casopis 25, 149-151 (Böhmisch).

Für Anfänger berechnete Darstellung. Sda.

P. Somoff. Ueber die Schraubenbewegungen eines starren Körpers, dessen Bedingungen durch Ungleichungen ausgedrückt werden. Warschau Univ. Nachr. 1896, 1-88 (Russisch).

In dieser Arbeit werden die Bedingungen untersucht, welche die Schraubenbewegungen eines starren Körpers beschränken, der sich auf einige unbewegliche Flächen stützt, falls der Stützpunkt sich nach einer bestimmten Seite entfernen kann. Nach dieser Seite ist die Normale n gerichtet. Der Autor findet, dass bei einer Stützfläche der Schraubenparameter p durch die Bedingung $p \geqq \delta \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi$ beschränkt wird, wenn die Richtung der Winkelgeschwindigkeit ω mit der Richtung der Normale n einen spitzen Winkel bildet, dagegen durch die Bedingung $p \leqq \delta \,.\, \mathrm{tg}\,\varphi$, wenn die Richtung der Winkelgeschwindigkeit ω mit der Richtung der Normale n einen stumpfen Winkel bildet. Hier ist δ die absolute Grösse der kürzesten Entfernung zwischen der Normale n und der Schraubenaxe, φ der Winkel, welchen die Normale n mit der Schraubenaxe bildet. Dieser Winkel wird von 0 bis π bestimmt und in der Richtung des Uhrzeigers (für den Beobachter, welcher von der Schraubenaxe zu der Normale n in der Richtung δ schaut) von dem Vector n aus gezählt.

Im Falle zweier Stützflächen betrachtet der Autor die sphärischen Darstellungen n_1 und n_2 der beiden Normalen der Stützflächen und zieht die Aequatoren, welche die Pole n_1 und n_2 haben. Diese Aequatoren teilen die Oberfläche der Kugel in vier Gebiete.

Wenn die sphärische Darstellung des Vectors ω in die Gebiete der

Pole n_1 und n_2 oder in die entgegengesetzten Gebiete fällt, so muss der Parameter p ausserhalb der Grössen $\delta_1 \operatorname{tg}\varphi_1$, $\delta_2 \operatorname{tg}\varphi_2$ fallen.

Wenn aber die sphärischen Darstellungen des Vectors ω in die beiden anderen Gebiete fallen, so muss der Parameter p zwischen den oben erwähnten Grössen enthalten sein.

Der Autor erweitert diese Untersuchungen auf die Fälle, wenn mehrere Stützflächen vorhanden sind, und giebt eine Reihe interessanter Theoreme für die besonderen Fälle $p = 0$ und $p = \infty$. Jk.

Sir Robert Ball. Note on a point in theoretical dynamics. Cambr. Proc. **9**, 193-195.

Untersuchung über die Frage, ob ein starrer Körper so gedacht werden kann, dass α die augenblickliche Schraube ist, die der Schraube η als impulsiver Schraube entspricht, während β in demselben Verhältnisse zu ξ steht. Es wird gezeigt, dass die vier Schrauben nicht willkürlich gewählt werden können, sondern zwei Bedingungen unterliegen, deren Form angegeben wird. Lp.

J. Kleiber. Die Amsler'schen Flächensätze im Gebiete affin veränderlicher Systeme und auf den Flächen constanter Gauss'scher Krümmung. Hoppe Arch. (2) **14**, 405-435.

Man vergleiche die Referate über Amsler in F. d. M. **13**, 668, 1881; **24**, 275, 1892. Verf. betrachtet zunächst eine affin veränderliche Ebene E' und macht sie dadurch zwangläufig, dass er fünf allgemeinen Punkten von E' ihre Bahnen in einer festen Ebene E vorschreibt. Es werde speciell angenommen, dass jeder der fünf Punkte eine geschlossene Bahn durchlaufe; dann müssen alle anderen Punkte ebenfalls geschlossene Bahnen erzeugen. Wird alsdann nicht mehr die Bahncurve, sondern bloss ihr Flächeninhalt vorgeschrieben, so besteht nur eine relative Zwangläufigkeit, und doch besteht zwischen den Flächeninhalten der von sieben Punkten beschriebenen Bahnen eine homogene lineare Relation. Im Falle, dass sechs Punkte auf einem Kegelschnitte liegen, existirt bereits zwischen ihren sechs Flächen eine solche Relation. Diese und andere Sätze lassen sich topographisch veranschaulichen, wenn man in jedem Punkte der E' eine Ordinate errichtet, deren Länge die Grösse der jeweilig erzeugten Fläche darstellt. Man erhält so ein Paraboloid, welches speciell ein Rotationsparaboloid wird, wenn die Affinität in Aehnlichkeit übergeht.

Der zweite Teil legt einige Formeln für die Bewegungen einer geodätischen Strecke auf Flächen constanter Krümmung fest; auch werden einige einschlägige mechanische Apparate (Pantagraph und Plagiograph) besprochen. R. M.

J. Kleiber. Beitrag zur kinematischen Theorie der Gelenkmechanismen. Schlömilch Z. **41**, 177-198, 233-257, 281-304.

Die Abhandlung bezweckt eine genetisch zusammenfassende Darstellung der im Gebiete der niederen Kinematik gewonnenen Resultate und will mit den geringsten Mitteln die grösste Klarheit erzielen. Der Verf. bedient sich dazu der „Punktfunctionen“; sowie nämlich die Coordinaten der Verbindungslinie zweier Punkte P_1 und P_2 nach dem Schema $x = \varkappa x_1 + \lambda x_2$ sich darstellen lassen, rechnet er unmittelbar mit dem Ausdrucke $\varkappa P_1 + \lambda P_2$, oder allgemeiner mit

$$Q = \varkappa_1 P_1 + \varkappa_2 P_2 + \varkappa_3 P_3 + \cdots,$$

wo Q einen Punkt bedeutet. Gewisse hieraus gebildete Matrizen geben die Schemata z. B. für die „Pantagraphen“, deren Theorie im § 2 des Aufsatzes geliefert wird. Auf diese Weise gelingt es in der That, einen Zusammenhang vereinzelter Erscheinungen herzustellen und unter anderem eine Reihe von Sätzen über Gebilde der niederen Kinematik zu beweisen, welche der Verf. gelegentlich der Beschreibung von Modellen im Katalog der Münchener Ausstellung 1893 ohne Beweis mitgeteilt hatte. In dem zweiten Aufsatze, der die §§ 4-6 der Arbeit enthält, werden nach dieser Methode die übergeschlossenen Mechanismen, das Punktviereck und ähnlich veränderliche Figuren behandelt. Die einzelnen Ergebnisse fliessen aus dem Verfahren mit grosser Leichtigkeit und lassen ihre natürliche Verwandtschaft erkennen.

In dem dritten Aufsatz, dem zweiten Teile der Arbeit (§§ 7-10), werden die Gebilde höherer Punktfunctionen behandelt. Zur Darstellung eines Punktes P wird hier die complexe Form benutzt, so dass $P = x + iy = re^{i\varphi}$ gesetzt wird. Das Spiegelbild von P in der x-Axe wird mit δP bezeichnet, also $\delta P = x - iy = re^{-i\varphi}$. Demnach behandelt der § 7 den „Process δ“ und seine Anwendungen. Zu erwähnen ist hieraus besonders die Gleichung der Koppelcurve bei der Dreistabbewegung. Der achte Paragraph ist den Kreis- und Kugelpunkten gewidmet, der neunte den linear verwandten Gelenkvierecken. In diesem letzteren Paragraphen tritt die Verwendbarkeit der benutzten Betrachtungen besonders gut hervor. Wie in allen Entwickelungen Determinanten-Relationen zur Ableitung der Sätze benutzt werden, so beschäftigt sich endlich der letzte Paragraph mit einem „zweiten Ränderungsprincipe“, aus dem gleichfalls mit Leichtigkeit kinematische Beziehungen fliessen.

Lp.

T. A. Hearson. The kinematics of machines. Lond. Phil. Trans. **187** A, 15-40.

Systematische Aufzählung und Klassification der kinematisch möglichen Mechanismen im Anschlusse an Reuleaux (vergl. F. d. M. **26**, 806, 1895). Einfache und zusammengesetzte Mechanismen. Die ersteren (Vierstab - Mechanismen) werden eingeteilt in ebene, sphärische, cylindrische und räumliche. Innerhalb dieser Abteilungen kann, je nach der Verbindung und den Grössenverhältnissen der einzelnen Glieder, die Relativbewegung des einen Gliedes zu dem anliegenden aus einer vollen Rotation, einem Auf- und Abschwingen zwischen gewissen Extrem-

lagen und aus einem Schleifen bestehen. Diese Fälle werden durch die Buchstaben *O*, *U* und *J* angedeutet, und darauf wird der Charakter der Bewegung durch ein Aggregat dieser Buchstaben beschrieben. Der Unterschied gegen Reuleaux besteht darin, dass dieser zwischen den *O*- und *U*-Bewegungen nicht ausdrücklich unterscheidet, da er nur die Verbindungen, nicht die Grössenverhältnisse der Glieder als wesentlich berücksichtigt. A. S.

J. J. Guest. Mechanism for describing conic sections. Proc. and Trans. R. S. Canada (2) **2** [3], 25-35.

1) Ist $ABCD$ ein überschlagenes Viereck, bei welchem die beiden sich kreuzenden Seiten $AB = CD$ und die beiden Gegenseiten $AC = BD$ sind, so beschreibt der Schnittpunkt P von AC und BD, falls AB festgehalten wird, eine Hyperbel mit den Brennpunkten A und B. 2) Ist $LMKN$ ein „Hart'sches Centraparallelogramm" (wie das in 1. beschriebene Viereck), und construirt man über den Seiten desselben als Grundlinien die vier unter einander ähnlichen, gleichschenkligen Dreiecke LSM, MPK, KQN, NOL, so ist $OSPQ$ ein Parallelogramm von constantem Inhalte. Hält man O fest, lässt Q auf einer durch O gehenden Geraden gleiten, so beschreibt P eine Hyperbel. 3) Ein dritter Mechanismus erzeugt Kegelschnitte mittels Inversion aus den Curven $r = a + b\cos\theta$. Lp.

A. Astor. Quelques applications de géométrie cinématique. Grenoble Ann. **8**, 1-15.

F. Masi. La teoria dei meccanismi. Bologna: Zanichelli. 384 S. 8° (1897).

J. J. Sylvester. Del plagiógrafo ó pantógrafo de inclinación. Archivo de Mat. **1**, 112-114.

Uebersetzt aus Nature **12**, 168. Tx.

Wittenbauer. Der Beschleunigungszustand kinematischer Ketten und seine constructive Ermittelung. Civiling. **42**, 57-80 u. 777-780.

Rodenberg. Der Beschleunigungszustand kinematischer Ketten und seine constructive Ermittelung. Civiling. **42**, 565-574.

Kapitel 3.

Statik.

A. Statik fester Körper.

H. J. HOLLENDER. Ueber eine neue graphische Methode der Zusammensetzung von Kräften. Leipzig: B. G. Teubner. VI + 44 S. 8°. Mit 4 Taf.

Die vorgetragene Methode beruht auf einer weiteren Ausbildung des namentlich zur Bestimmung der statischen Momente eines allgemeinen ebenen Kräftesystems häufig angewandten Verfahrens, wonach jede Kraft in zwei Componenten zerlegt wird, von denen die eine durch den Momentenpunkt geht, die andere in einer festen Geraden liegt. Das Summationspolygon der ersteren Componenten (vom Verf. „Componentenpolygon" genannt) tritt bei den bezüglichen Constructionen an Stelle des sonst benutzten Seilpolygons. Während beim Seilpolygon die Poldistanz nur für parallele Kräfte constant ist, trifft dies beim Componentenpolygon auch für zerstreut in der Ebene liegende Kräfte zu, so dass sich z. B. eine einfache Bestimmung der Momentenfläche für diesen allgemeinen Fall ergiebt. Verf. führt die betreffenden Constructionen zunächst für das allgemeine Kräftesystem durch und giebt schliesslich einige praktische Anwendungen (Bestimmung von Schwerpunkt, Momentenfläche, Trägheitsmoment) für das Parallelsystem. Hk.

A. BOTELHO. Estudo sobre os systemas de forças girantes. Lisboa (1894).

Diese Schrift enthält eine Uebersicht über die Theorie der Drehung von Kräften um ihre Angriffspunkte. Es befinden sich in ihr einige der wichtigeren Resultate, welche Daniel A. da Silva in einer bezüglichen Abhandlung gegeben hatte, die in den Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa ((2) **3**, 1851) erschienen ist; ferner solche, die G. Darboux in seiner Abhandlung über das astatische Gleichgewicht bekannt gemacht hat (Bordeaux Mém. (2) **2**, 1 - 65; F. d. M. **9**, 615, 1877). Tx. (Lp.)

E. ISÈ. Composizione delle forze di 3° ordine. Atti della Accademia Pontaniana. **26.** Memoria No. 8. 13 S.

Der Verf. führt seine Studien fort (vgl. F. d. M. **26**, 903, 1895), indem er sich mit der Zusammensetzung der Kräfte dritter Ordnung beschäftigt. Um seinen Zweck zu erreichen, setzt er einige Sätze der sphärischen Trigonometrie und einige Eigenschaften gewisser Durchmessertripel eines Ellipsoids auseinander. La.

H. Dellac. Solution de la question 488. J. de Math. élém. (4) **5,** 138-142.

Wenn zwei nicht in einer und derselben Ebene liegende Kräfte P, Q gegeben sind, so soll die allgemeine Resultante, die Centralaxe der Reduction und der Wert des kleinsten Paares gefunden werden.

Lp.

H. Dellac. Question 489. J. de Math. élém. (4) **5,** 184-188.

Auf der Peripherie der Basis eines Kreiskegels mit der Spitze S trägt man, von dem Punkte A beginnend, einen gegebenen Bogen a wiederholt ab und verbindet S mit den so erhaltenen Punkten $A, B', C', \cdots$. Auf diesen Erzeugenden trägt man die Längen ab: $SA = l$, $SB = ml$, $SC = m^2 l, \ldots$, wo m ein echter Bruch ist. 1) Man betrachte die Geraden SA, SB, SC, ... als Kräfte; ihre Resultante zu finden. 2) Man betrachte die Geraden AB, BC, CD, ... der Grösse und Richtung nach als Kräfte. Die resultirende Einzelkraft, das resultirende Paar für S als Reductionspunkt, die Grösse des kleinsten Paares zu finden.

Lp.

G. Bardelli. Sull'uso delle coordinate obliquangole nella meccanica razionale. Lomb. Ist. Rend. (2) **29,** 174-183.

Unter Bezugnahme auf seinen früheren Aufsatz vom Jahre 1892 (F. d. M. **24,** 840, 1892) und den von Pomey in Nouv. Ann. (3) **14** (F. d. M. **26,** 809, 1893) veröffentlichten Artikel leitet der Verf. die Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers auf einem anschaulicheren Wege ab als Pomey, wobei er u. a. den kürzesten Abstand zweier windschiefen Geraden in schiefwinkligen Coordinaten aufzustellen genötigt ist.

Lp.

D. de Francesco. Sulla statica dei corpi rigidi nello spazio a quattro dimensioni. Batt. G. **34,** 182-191.

Unter Berufung auf die Erfolge, welche in der Geometrie die Betrachtung der Räume von mehr als drei Dimensionen gehabt hat, dehnt der Verf. die fundamentalen Begriffe und Sätze der Statik auf den Raum von vier Dimensionen aus, eine Verallgemeinerung, die deshalb leicht zu bewerkstelligen war, weil die in Betracht zu ziehenden Grössen, wie Kräfte, Kräftepaare, Momente, schon in der Statik des Raumes von drei Dimensionen unter der Form von Strecken betrachtet werden.

Lp.

B. Mayor. Sur les forces de l'espace et les conditions d'équilibre d'une classe de systèmes déformables. C. R. **122,** 1185-1188.

Der Aufsatz giebt eine hübsche Erweiterung des Begriffes des Seilpolygons. Ein Kräftesystem, das auf einen starren Körper wirkt, ist definirt durch den linearen Complex seiner Geraden vom Momente Null und die Intensität seiner allgemeinen Resultante. Sind verschiedene

Kräftesysteme gegeben, definirt durch ihre Wirkungscomplexe $C_1, C_2, \ldots, C_n$ und ihre Resultanten $R_1, R_2, \ldots, R_n$, so bilde man das räumliche Polygon, dessen Seiten gleich und parallel mit den $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sind, und verbinde einen Punkt O des Raumes mit den Eckpunkten und den Endpunkten von R_1 bis R_n. Ferner sei $C_{0,1}$ ein linearer Complex, dessen Axe mit dem ersten Polarstrahl parallel ist. Durch die Congruenz, welche $C_{0,1}$ und C_1 gemeinsam haben, lege man den Complex $C_{1,2}$, dessen Axe mit dem zweiten Polarstrahl parallel ist; ebenso durch $C_{1,2}$ und C_2 den Complex $C_{2,3}$, dessen Axe mit dem dritten Polarstrahl parallel ist, u. s. w. Die Complexe $C_{0,1}, C_{1,2}, \ldots, C_{n,n+1}$ bilden eine „Seilkette" bezüglich der Kräftesysteme für den Pol O. Dann gelten die Sätze: Beliebig viele Kräftesysteme an einem starren Körper sind immer auf zwei Systeme zurückführbar, welche 1) als Wirkungscomplexe die äussersten Complexe einer ihrer Seilketten besitzen, 2) als allgemeine Resultanten die beiden äussersten Polarstrahlen. Das Schliessen des Resultantenpolygones und der Seilkette (d. h. das Zusammenfallen der äussersten Complexe) ist die Bedingung für das Gleichgewicht der Kräftesysteme. Die entsprechenden Complexe zweier Ketten in Bezug auf dieselben Kräftesysteme schneiden sich nach Congruenzen, die alle in einem und demselben linearen Complexe enthalten sind, dessen Axe der die Pole dieser Kette verbindenden Geraden parallel ist. Diese Sätze werden auf n mit einander verbundene Körper angewandt. Lp.

Fr. Schur. Ueber ebene einfache Fachwerke. Math. Ann. 48, 142-194.

Der Verf. giebt eine vollständige und voraussetzungslose Theorie der einfachen Fachwerke auf neuer Grundlage mit Hülfe rein geometrischer Methoden. Als Angelpunkt dient der Satz, dass ein Fachwerk stabil ist oder nicht, je nachdem es durch seine Gliederung und die Richtungen seiner Stäbe seiner Form nach vollständig bestimmt ist oder nicht. Ebenso werden fast alle in Betracht kommenden Aufgaben zurückgeführt auf die Fundamentalaufgabe, ein einfaches stabiles Fachwerk zu construiren, von dem die Gliederung und die Richtungen der Stäbe gegeben sind. Die Lösung dieser Spannungsaufgabe löst zugleich das Spannungsproblem nach verschiedenen Methoden. Die vollständige Lösung zeigt auch, dass die Methode von Müller-Breslau stets zum Ziele führt; endlich aber hat sie den Verf. auf eine neue, stets anwendbare Methode geführt.

Um zu einer entsprechenden Erweiterung der Cremona'schen Methode zu kommen, wird zuerst der allgemeinen Idee eines Kräfteplanes, wie sie aus dem einfachsten Falle der Dreiecksnetze erwachsen ist, in folgerichtiger Entwickelung diejenige Bestimmtheit gegeben, welche die Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz eines Kräfteplanes erfordert. Hierzu bedarf es scharfer Begriffsbestimmungen und der Entwickelung der wesentlichen Eigenschaften von sogenannten Zerlegungen eines Fachwerkes in einfache Polygone.

Das Resultat ist, dass jede zu einem Kräfteplane führende Zerlegung eines einfachen stabilen Fachwerks auf diejenige Zerlegung eines gleich gegliederten Fachwerks zurückgeführt werden kann, welche in der schlichten Zerlegung des von ihm überdeckten Teiles der Ebene unmittelbar vorliegt, also auf diejenige Art der Zerlegung, die bisher ausschliesslich angewandt wurde, und die schliesslich die einzige ist, an deren praktische Anwendung ernsthaft gedacht werden kann.

Die Einführung gewisser idealer Knotenpunkte und Stäbe gestattet so, das Spannungsproblem für jedes einfache, stabile Fachwerk und bei jeder Annahme der äusseren Kräfte in übersichtlicher Weise zu lösen. Die wirkliche Construction des Kräfteplanes ist hierbei ebenfalls in der Lösung der Fundamentalaufgabe enthalten, insofern der um das Kräftepolygon und die Seilstrahlen erweiterte Kräfteplan als ein stabiles Fachwerk nachgewiesen wird, das zwei Stäbe mehr besitzt, als zu seiner Stabilität notwendig und hinreichend sind. Im letzten Paragraphen werden die Beziehungen der beiden reciproken Figuren des Fachwerks und des zugehörigen Kräfteplanes zum Nullsystem in erschöpfender Weise behandelt; vor allem wird gezeigt, dass jene Figuren in jedem Falle als Parallelprojectionen zweier in Beziehung auf ein Nullsystem reciproker Polyeder angesehen werden können. Von dem einen dieser Polyeder wird zugleich eine von der Kenntnis des Kräfteplanes unabhängige Construction gegeben. Lp.

N. Joukowsky. Gleichgewichtsbedingung eines festen Körpers, welcher sich mit seiner Unterfläche auf eine unbewegliche Ebene stützt und sich mit Reibung längs dieser Ebene bewegen kann. Moskau Phys. Sect. 9 (Heft 1) 34-42 (Russisch, 1897).

Der Autor untersucht dasselbe Problem, welches schon von N. Schiller bearbeitet war, und zeigt, welche Bedeutung für dieses Problem die Function $L(x, y)$ hat, welche Function die Summe der Momente der Reibungskräfte bei Drehung der Unterfläche um das Centrum (x, y) darstellt, wobei die Momente in Bezug auf dieses Centrum genommen werden. Es wird gezeigt, dass jedem gegebenen Centrum (x, y) eine bestimmte Kraft F entspricht, welche der Tangente der Curve $L =$ const. parallel ist, wobei die Tangente durch das erwähnte Centrum gelegt wird (die Curve wird durch dasselbe Centrum geführt).

Die Grösse der Kraft F wird durch die Formel $F = dL/dn$ ausgedrückt, wo dn das Element der Normale der Curve $L =$ const. ist. Umgekehrt entspricht jeder gegebenen Geraden (Richtung der Kraft F) ein ganz bestimmtes Drehungscentrum (x, y) und eine ganz bestimmte Grösse der Kraft F. Die in der Stützfläche liegende Kraft P kann den Körper nicht in Bewegung bringen, wenn $P \leqq F$, wo F die durch die Richtung der Kraft P bestimmte Reibungskraft ist. Seine Theorie erklärt der Autor durch ein Beispiel. Jk.

OTTO FISCHER. Beiträge zur Muskelstatik. Erste Abhandlung: Ueber das Gleichgewicht zwischen Schwere und Muskeln am zweigliedrigen System. (Aus dem anatomischen Institut der Universität Leipzig.) Leipz. Abh. **23** [Nr. IV], 271-368.

Die Arbeit giebt die Fortsetzung derjenigen Untersuchungen, deren erste sich auf die Wirkungsweise eingelenkiger Muskeln bezog und in Leipz. Abh. **22**, 55-197, 1895 erschienen ist. Die Muskelstatik zweigliedriger Systeme ist keineswegs durch die Untersuchung der Gleichgewichtsbedingungen für ein einziges Glied erledigt. Während nämlich ein jeder Muskel im Stande ist, bei irgend einer Stellung des gegen einen feststehenden Körperteil beweglichen Gliedes der Schwere das Gleichgewicht zu halten, zeigt sich bei der Untersuchung der zweigliedrigen Systeme, dass ein bestimmter Muskel nicht bei jeder beliebigen Stellung der beiden Glieder der Schwere das Gleichgewicht halten kann, sondern dass er diese Aufgabe nur bei ganz bestimmten, für ihn charakteristischen Stellungen zu lösen vermag. Um die Beziehungen abzuleiten, welche im Falle des Gleichgewichts zwischen der Schwere und den Muskelkräften für ein derartiges zweigliedriges Körpersystem stattfinden müssen, hat der Verf. zwei verschiedene Wege eingeschlagen. Nach der ersten Methode hat er diejenigen Bedingungen aufgesucht, unter denen die beiden betrachteten Glieder, das erste am fixirt gedachten Körper eingelenkte Glied und das zweite am ersten Gliede eingelenkte, keine Drehungen mehr ausführen können, d. h. die Bedingungen, unter denen die Drehungen, welche alle am Systeme angreifenden Kräfte für die beiden Glieder hervorrufen, sich an jedem Gliede aufheben. Eine zweite Methode zur Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen besteht in der Anwendung des die ganze Statik umfassenden Princips der virtuellen Verrückungen. Durch die Benutzung beider Wege gewinnt der Verf. eine Kontrolle für die Richtigkeit der Endresultate. Die Betrachtung wird zunächst auf das specielle Beispiel des im Ellenbogengelenke gegliederten Armsystems bezogen. Die für dieses System erhaltenen Resultate gelten mutatis mutandis für jedes den gemachten Voraussetzungen entsprechende zweigliedrige System des menschlichen und tierischen Körpers. Die Mitteilung der Ergebnisse würde zu viel Raum beanspruchen. Lp.

O. FISCHER. Ueber Grundlagen und Ziele der Muskelmechanik. Arch. f. Anat. u. Physiol. 1896, 363-377.

Antrittsvorlesung, in welcher der Verf. darlegt, auf welchen Grundlagen eine erfolgreiche Behandlung der Probleme der Muskelmechanik geschehen kann, und welchen Zielen diese Wissenschaft zuzustreben hat. Lp.

J. R. EWALD. Die Hebelwirkung des Fusses, wenn man sich auf die Zehen erhebt. 2. Mitteilung. Pflüger's Arch. **64**, 53-56.

Auf einer gleicharmigen Wippe steht am einen Ende ein Mensch,

während am anderen Ende ein Gegengewicht A von gleicher Schwere vorhanden ist. Hinter dem Menschen befindet sich ein fester Ständer, an demselben über dem Kopfe des Menschen ein festes Brett. Erhebt sich die (vorher nach vorn gebeugte) Person auf die Zehen, so hebt sie ein zweites Gewicht B von der Grösse wie A. Hieraus folgert der Verf. im Widerspruche gegen O. Fischer, dass der Fuss bei der Erhebung auf die Zehen als zweiarmiger Hebel wirkt (vergl. F. d. M. **26**, 812, 1896). Lp.

L. Gensen. **Zeichnerische Bestimmung von Schwerpunkten.** Centralbl. der Bauverw. **16**, 191.

Bestimmung des Schwerpunktes von Winkeleisen. Von der Mitte jedes der beiden Schenkel trägt man in der Längsrichtung die Dicke des anderen Schenkels ab und verbindet die vier Punkte kreuzweise. Um zu demselben Punkte zu gelangen, braucht man nur eine dieser Linien zu ziehen, muss dann aber durch die Schenkelmitten Senkrechte zu den Schenkeln ziehen, welche sich in einem Punkte O schneiden mögen, und weiter durch O eine Parallele zu der Verbindungslinie der mittleren Ecken der äusseren und der inneren Begrenzung des Winkeleisens. Diese Linie geht durch den fraglichen Schnittpunkt der beiden erst bezeichneten Linien. F. K.

L. Gensen. **Seilzug durch drei gegebene Punkte nebst einigen Anwendungen auf den Dreigelenkbogen.** Civiling. **42**, 471-476.

Der Verf. behandelt die Aufgabe, durch drei gegebene Punkte A, C, B einen Seilzug zu legen. Aus den gegebenen Kräften P_1, P_2, ..., P_n wird zunächst ein Linienzug $a\,a_1\,a_2 \dots a_n$ gebildet, so dass $a\,a_n$ die Resultante der Kräfte darstellt. Verbindet man nun irgend einen Pol O' mit den Ecken des Kräftepolygons, so erhält man die Richtungen irgend eines Seilpolygons, und $O'a$ sowie $a_n O'$ sind zwei Kräfte, welche die Gesamtheit der gegebenen Kräfte im Gleichgewicht halten, wenn sie in der ersten und der letzten Seite eines Seilpolygons wirken. Lässt man nun den Pol O' auf einer geraden Linie wandern, welche $a_n a$ in f schneiden möge, so schneiden sich entsprechende Seiten der von einem festen Punkte A ausgehenden Seilpolygone in festen Punkten, die sämtlich auf einer durch A gehenden Parallele zu $O'f$ liegen. Dreht sich nun die Gerade $O'f$, so dreht sich die Gerade der festen Punkte der Seilpolygone um A, und jeder der Schnittpunkte entsprechender Seiten bewegt sich dabei auf einer Parallele zu einer von f nach der passend gewählten Ecke des Kräftepolygons gezogenen Geraden. Soll nun C auf der $(i+1)^{\text{ten}}$ Seite des Seilpolygons liegen, B dagegen auf der letzten, so haben wir folgendermassen zu verfahren. Nachdem das durch A gehende, zu einem beliebigen Pol O' gehörende Seilpolygon gezeichnet ist, ziehe man durch B eine Parallele zu $a_n a$, welche die letzte Seite in B' schneiden möge. Dann verbinde man A mit B' und suche den Schnittpunkt D_i' der $(i+1)^{\text{ten}}$ Seite des Seilpolygons mit AB'.

Durch O' ziehen wir eine Parallele zu AB', welche $a_n a$ in f trifft, und verbinden f mit a_i. Zu dieser letzt bezeichneten Geraden ziehen wir eine Parallele durch D'_{i+1}, welche die Verbindungsgerade AB in D_{i+1} schneiden möge. Dann ist CD_{i+1} die $(i+1)^{te}$ Seite des gesuchten Seilpolygons. Der Pol des entsprechenden Kräfteplans muss natürlich erstlich auf einer durch f gehenden Parallele zu AB und zweitens auf einer durch a_i gehenden Parallele zu CD_{i+1} liegen, wodurch er und mit ihm das gesuchte Seilpolygon vollständig bestimmt ist. Diese Construction wird auf einige besondere Fälle angewandt. F. K.

A. Francke. Der steife Seilträger. Zeitschr. f. Bauwesen **46**, 567-592.

Für scharf gespannte Träger entwickelt der Verf. die Differentialgleichung $EJ\frac{d^4y}{dx^4}-S\frac{d^2y}{dx^2}-p=0$, in welcher p die specifische Belastung ist; E und J haben die übliche Bedeutung, S ist die Spannung. Diese Differentialgleichung gilt auch noch für den Fall, wenn der Träger ursprünglich gekrümmt war; nur ist dann an die Stelle von p die Grösse $p'=p+S\frac{d^2z}{dx^2}$ zu setzen, wo z die Senkung in unbelastetem Zustande bedeutet. Da die Differentialgleichung dem Mathematiker keinerlei Schwierigkeit bietet, so können wir uns hier mit der Angabe begnügen, dass der Verf. die Integration ausführt, indem er den Einfluss berücksichtigt, welchen Unstetigkeiten in der Belastung ausüben. Wir überlassen es den Interessenten, die Durchführung im einzelnen und die Anwendungen auf praktische Fragen dem Original zu entnehmen. F. K.

E. Duporcq. Sur les centres de gravité des courbes parallèles. S. M. F. Bull. **24**, 192-194.

Als Folgerungen der in F. d. M. **26**, 792, 1895 besprochenen Untersuchungen spricht der Verf. hier mehrere Sätze über die Schwerpunkte paralleler Curven aus: „Geschlossene, unter einander parallele Curven haben denselben Krümmungsschwerpunkt. Die Schwerpunkte ihrer Umfänge liegen auf einer durch diesen festen Punkt gehenden Geraden, und ihre Abstände von diesem Punkte sind den zugehörigen Umfängen umgekehrt proportional“.

„Sind ω der einer Familie von Curven C gemeinsame Krümmungsschwerpunkt, $x\omega x'$ die den Ort der Umfangsschwerpunkte dieser Curven bildende Gerade, γ der Flächenschwerpunkt derjenigen Curve Γ unter den C, deren Umfang Null ist, so ist der Ort der Flächenschwerpunkte der Curven C ein Kegelschnitt, der als Mittelpunkt die Mitte von $\gamma\omega$ hat und in ω die Gerade $x\omega x'$ berührt“.

Zum Schlusse werden entsprechende Sätze für nicht geschlossene parallele Curven aufgestellt. Lp.

A. G. Greenhill. The spherical catenary. Lond. M. S. Proc. **27,** 123-185.

Nach Aufzählung der Arbeiten über die sphärische Kettenlinie spricht sich der Verf. über den Zweck seiner Arbeit folgendermassen aus: „Der Gegenstand der gegenwärtigen Abhandlung ist die Einführung einer besonderen Form des bei der Lösung dieser Aufgabe erforderlichen elliptischen Integrals dritter Gattung und die Erörterung der besonderen Fälle, welche eintreten, wenn dieses Integral dadurch pseudoelliptisch wird, dass der Parameter einem aliquoten (dem μ^{ten}) Teile der Periode gleich wird. Somit ist die einzige elliptische Transcendente, welche in der Lösung verbleibt, das elliptische Integral erster Gattung, und wenn durch eine besondere numerische Wahl der Constanten dieses Glied zum Verschwinden gebracht werden kann, so wird die sphärische Kettenlinie eine geschlossene algebraische Curve". Wie in den beiden grossen Abhandlungen des Verf. über den Kreisel, die in F. d. M. **26,** 846-849, 1895 besprochen wurden, handelt es sich auch in der vorliegenden Arbeit um eine Anwendung der Theorie der elliptischen Functionen auf das gewählte Problem, insbesondere um eine Anwendung der von dem Verf. in dem Aufsatze „Pseudoelliptic integrals and their dynamical applications" (1894) aufgestellten Sätze und Formeln. Der Charakter der Arbeit ist ein ähnlicher wie derjenige der „Transformation and division of elliptic functions", worüber man das betreffende Referat auf S. 345 dieses Bandes vergleiche.

Die ersten 15 Paragraphen dienen zur Herleitung der allgemeinen Gleichungen; danach werden die besonderen Fälle für die Zahl μ ausführlich durchgegangen, nämlich $\mu = 3, 4, \ldots, 10, 12, 14, 16$. Die erste genau berechnete rein algebraische sphärische Kettenlinie mit pentagonaler Symmetrie ist die für $\mu = 10$. Die mühsamen Zahlenrechnungen sind, wie in den früheren Arbeiten über das Kreiselproblem, auch hier von Dewar durchgeführt worden, ebenso die hiernach angefertigten Zeichnungen und stereoskopischen Darstellungen. In einem Nachtrage werden auch die Rechnungen für $\mu = 7$ in dem Falle der algebraischen Kettenlinie mitgeteilt. Die vom Verf. in besonderer freundlicher Sendung überreichten sieben stereoskopischen Bilder algebraischer sphärischer Kettenlinien zeigen die den Zahlen 5, 7, 4, 9, 11, 13, 15 correspondirenden Symmetrieverhältnisse. Die Anzahl (644) der numerirten Gleichungen der Abhandlung giebt eine Vorstellung von der Grösse des in ihr bewältigten Rechenwerkes. Lp.

L. Lecornu. Sur l'équilibre d'une enveloppe ellipsoïdale. C. R. **122,** 218-220.

Bekanntlich hat der Verf. durch seine Arbeiten über das Gleichgewicht der biegsamen und unausdehnbaren Flächen (vgl. F. d. M. **12,** 729, 1880 und **16,** 784, 1884) zu einer mehrseitigen Behandlung dieses Gegenstandes durch verschiedene Autoren den Anstoss gegeben. Doch ist das von ihm aufgestellte System linearer partieller Differential-

gleichungen erster Ordnung, von dem die Lösung des Problems abhängt, nur selten der Integration zugängig. In der vorliegenden Note berichtet er nun über eine grössere, bei der Pariser Akademie eingereichte Arbeit, in welcher es ihm gelungen sei, den Fall zu behandeln, bei dem die materielle Fläche die Gestalt eines dreiaxigen Ellipsoids hat und durch einen constanten Druck, wie den einer Flüssigkeit, gespannt erhalten wird. Ausser den praktischen Anwendungen der Ergebnisse, besonders für die Construction des Luftballons, schreibt der Verf. seinem Verfahren auch das Verdienst zu, gewisse Fragen der allgemeinen Theorie zu beleuchten, z. B. die Art der Bestimmung der bei der Integration auftretenden willkürlichen Functionen. Nach der Angabe der Note werden zuerst elliptische Coordinaten benutzt, die Gleichgewichtsbedingungen durch Beziehung auf die imaginären Erzeugenden des Ellipsoids transformirt; dann wird die Integration bewerkstelligt, sowie die Bestimmung der willkürlichen Functionen. Endlich werden die imaginären Grössen durch Rückkehr zu den elliptischen Coordinaten fortgeschafft. Da die mitgeteilten Formeln ohne Beweis abgedruckt sind, so verzichten wir auf die Wiedergabe. Wir erwähnen jedoch noch die Bestimmung der „isostatischen“ Linien, d. h. derjenigen Curven, von denen jedes Element senkrecht zu der es angreifenden Spannung ist, und von denen je zwei durch einen vorgegebenen Punkt gehen. Lp.

H. Engels. Untersuchungen über den Seitendruck der Erde auf Fundamentkörper. Zeitschr. f. Bauwesen **46**, 409-431.

Die Versuchsanordnung war in den Grundzügen folgende:

In dem Boden eines Kastens befand sich eine Oeffnung, durch welche ein Sandsteinkörper S bequem hindurch geschoben werden konnte. Dieser Sandsteinkörper hing vermittels einer eingegipsten Eisenstange an einer Feder F, die oben in einer Schraube s endigte, welche durch Drehung einer Schraubenmutter m gehoben und gesenkt werden konnte. Zunächst liess man den Körper s frei hängen; dann wurde Kies von solcher Korngrösse, dass derselbe nicht durch den Zwischenraum der Oeffnung und des Sandsteinkörpers dringen konnte, in den Kasten geschüttet. Wie zu erwarten war, blieb der Stein in Ruhe, und folglich übte in diesem Falle die Erde gegen den Stein einen Druck aus, der horizontal gerichtet war, und das zeigte sich selbst dann noch, wenn die Erde um den Stein herum gleichmässig abgeböscht war. Wurde statt des cylindrischen Steines ein kegelförmiger genommen, so galt, falls die Spitze nach unten gerichtet war, dasselbe, während im umgekehrten Fall der Stein sich sofort senkte, die Federkraft vergrösserte sich etwas, und die Erde übte also in diesem Falle nicht eine horizontale, sondern abwärts gerichtete Kraft aus.

Nun wurde die Schraubenmutter gedreht, die Spindel senkte sich, die Feder natürlich mit, und auch der Stein sank abwärts, aber erheblich weniger als die Feder, so dass eine Entlastung der Feder eintrat. Das Uebergewicht, welches nun das Eigengewicht des Steines gegenüber

der Federkraft hatte, musste natürlich durch die Reibung des Steines am Erdreich aufgehoben werden. Beobachtete man nun die zu einer bestimmten Senkung des Steines gehörende Senkung der Spindel, so konnte man sehr leicht die Abnahme der Federkraft und damit sofort den Effect der Reibung bestimmen. Um nun aus der Tangentialkraft die Normalkraft zu berechnen, zieht der Verf. die Ergebnisse anderer Versuche heran. Eine Steinplatte wird auf eine sandige Unterlage gelegt und dann auf die Steinplatte eine allmählich wachsende horizontale Zugkraft ausgeübt; jeder Zugkraft entsprach eine Verschiebung der Platte und umgekehrt jeder Verschiebung eine gewisse Zugkraft. Indem man nun die letztere messend bestimmte, konnte man das zu der Verrückung gehörende Verhältnis μ von der Tangentialcomponente zur Normalcomponente des vom Stein auf den Sand ausgeübten Druckes bestimmen. Dieses Verhältnis wird auf die anderen Versuche übertragen (ob mit Recht, erscheint mir äusserst zweifelhaft) um aus den gemessenen Tangentialkräften die Normalcomponente zu bestimmen.

Bezüglich der angewandten Vorsichtsmassregeln, der Versuchsergebnisse im einzelnen und der daran geknüpften Folgerungen verweise ich auf die interessante Abhandlung. F. K.

M. Koenen. Berechnung des Seiten- und Bodendrucks in Silozellen. Centralbl. der Bauverw. **16**, 446-447.

Die Berechnung beruht nicht auf einer strengen Theorie des Gleichgewichts von Schuttmassen, sondern kann höchstens als eine überschlägliche gelten. Es wird angenommen, dass in einem Querschnitt der Normaldruck constant ist; sein Wert möge N_1 sein. Ebenso soll der Normaldruck gegen die verticale Wand in gleicher Höhe constant sein; sein Wert sei N_2. Ferner soll die nach oben gerichtete Tangentialkraft, welche eine Folge der Reibung ist, $N \operatorname{tang} \varrho_1$ sein. Dann kommt man sofort auf die Gleichung $dN_1 = dx\left(\gamma - N_2 \operatorname{tang} \varrho_1 \frac{U}{F}\right)$, welche die Abhängigkeit des Druckes von der Tiefe giebt. γ ist das specifische Gewicht, U der Umfang, F der Flächeninhalt des Querschnitts. Der Verfasser sagt „Nun ist nach bekannten Gesetzen $N_2 = N_1 \operatorname{tang}^2(45^\circ - \varrho/2)$“. Das wäre richtig, wenn N_1, N_2 Hauptdrucke wären. Das ist aber nicht der Fall; denn das Flächenelement von N_2 soll ja, wie ausdrücklich gesagt wird, eine tangentiale Kraft besitzen. Demnach ist die Berechnung nicht ganz zutreffend. F. K.

Th. Hoech. Ueber Erddruck und Stützmauern. Centralbl. der Bauverw. **16**, 134-136, 314-315, 497-498.

Zimmermann. Ueber Erddruck und Stützmauern. Centralbl. der Bauverw. **16**, 150-153, 354, 518.

L. Brennecke. Ueber Erddruck und Stützmauern. Centralbl. der Bauverw. **16**, 178, 355, 519.

Cremer. Ueber Erddruck und Stützmauern. Centralbl. d. Bauverw. **16**, 497.

Hoech knüpft an die bekannten Versuchsergebnisse über den Erddruck an, zu welchen Donath gelangt war. Indem er zunächst den vermindernden Einfluss, welchen die Seitenwände auf die Grösse des Erddrucks ausüben, anders berechnet als Donath und auch sonst in der Deutung der Versuchsresultate einige Aenderungen vornimmt, gelangt er zu Resultaten, welche erheblich besser mit Coulomb's Formel für den Erddruck übereinstimmen, als die Zahlenwerte von Donath. Die weiteren Betrachtungen in der ersten Notiz sind, abgesehen von einer gegen Brennecke gerichteten Bemerkung über dessen Bestimmung des Drucks von Wasser in sandigem Boden, rein technischer Natur.

Zimmermann bemängelt die Deutung, welche Hoech den Versuchen von Donath gegeben hat, entwickelt im Anschluss daran seine Anschauungen über die Zulässigkeit der Erddrucktheorie für unbegrenztes Erdreich zur Bestimmung des Seitendrucks gegen Futtermauern und beleuchtet von diesem Gesichtspunkte aus die Versuche Donath's.

Brennecke verteidigt sich gegen den Angriff von Hoech.

Cremer vertritt den Standpunkt, dass der Erddruck gegen verticale Wände nicht horizontal gerichtet ist. F. K.

H. Erdbelastung von Bauwerken. Deutsche Bauztg. **30**, 238-239, 295.

Nachdem kurz und ohne Begründung, wie mir scheint ziemlich willkürlich, die Bestimmung des Drucks der Erde gegen Wände für die verschiedenen Fälle der Praxis angegeben ist, wird noch kurz darauf hingewiesen, wie man bei einem Gewölbe den Druck der Erde in Rechnung zu stellen habe. F. K.

Sveistrup. Erdbelastung von Bauwerken. Deutsche Bauztg. **30**, 295.

S. erhebt einige Bedenken und stellt eine Frage bezüglich eines in der vorangehenden Notiz unberücksichtigt gebliebenen Falles. F. K.

E. Mischpeter. Die Behandlung des Trägheitsmoments in der Schule. Pr. Realgymn. auf der Burg Königsberg i. Pr. 18 S. 4°.

Eine für die Zwecke des Mittelschulunterrichts recht vollständige Bearbeitung der Lehre von den Trägheitsmomenten; so werden in den letzten Paragraphen nach dem physischen Pendel und der Atwood'schen Fallmaschine auch die Torsionsschwingungen und das ballistische Pendel behandelt. Die Darstellung ist dadurch ausgezeichnet, dass immerfort Versuche zur Erläuterung und Bestätigung der Begriffe und Sätze herbeigezogen werden. Die mathematische Ermittelung der Trägheitsmomente wird mit Hülfe der Summenformeln für die gleich hohen Potenzen der Zahlen von 1 bis n bewirkt. Lp.

A. Bantlin. **Elementare Ableitung der Trägheitsmomente.** Zeitschr. Deutsch. Ing. **40**, 950-956, 1054-1059.

Man kann das Trägheitsmoment eines Querschnittes bezüglich einer in ihm liegenden Axe geometrisch als Volumen darstellen, indem man senkrecht über jedem Querschnittspunkte das Quadrat seines Abstandes von der Axe als Linie aufträgt. Das Moment stellt sich dann als das über dem Querschnitte liegende Volumen eines parabolischen Cylinders dar. Das polare Trägheitsmoment ist daher die Summe zweier solcher Volumina. Für gewisse einfache Querschnittsformen wird daraus der Wert des Trägheitsmomentes abgeleitet. Unter Benutzung des ermittelten polaren Trägheitsmomentes eines Kreises wird dann das Trägheitsmoment einiger einfachen Rotationskörper ermittelt, indem aus dem gegebenen Rotationskörper mit der Meridiangleichung $r = f(z)$ ein zweiter abgeleitet wird, dessen Meridiangleichung $r = (f(z))^2$ lautet. Die Hälfte des Volumens dieses zweiten Körpers ist das Trägheitsmoment für das Volumen des ersten. Schliesslich kommen noch die Trägheitsmomente einiger gekrümmter Flächen zur Sprache. Der Kegelmantel wird in der Ebene ausgebreitet und dann über ihm ein Rotationsparaboloid errichtet. Zum Schluss wird noch das Trägheitsmoment einer Geraden in Bezug auf eine sie unter dem Winkel α schneidende Axe bestimmt.

Es liegt wohl auf der Hand, dass das beschriebene Verfahren nur in ganz bestimmten einfachen Fällen anwendbar ist; der Verf. hätte deshalb seinem Artikel wohl besser den Titel „Elementare Ableitung einiger Trägheitsmomente“ gegeben. Zudem ist das Verfahren in den behandelten einfachen Fällen, welche sich mit den einfachen Formeln der Integralrechnung durch eine oder zwei Zeilen erledigen lassen, ein recht umständliches und also wohl höchstens da anzuwenden, wo der Unterricht in der Mechanik zum Begriff des Trägheitsmomentes führt, während ein Unterricht in der Integralrechnung nicht stattfindet. Daran kann auch der vom Verf. für sein Verfahren in Anspruch genommene Vorzug der grösseren Anschaulichkeit nichts ändern; denn mit demselben ist offenbar die Gefahr verknüpft, dass das Bewusstsein von der Verschiedenheit der Dimensionen von Trägheitsmoment und Masse verwischt werde.

Und nun noch eins. Die Σ- und Δ-Zeichen des Verfs. sind nichts anderes als abweichend von der gewöhnlichen Weise geschriebene Integral- und Differentialzeichen. Das kann ja auch nicht Wunder nehmen, denn das Trägheitsmoment einer stetig verteilten Masse ist eben ein Integral und die Bestimmung desselben eine Aufgabe der Integralrechnung. Daran kann doch wohl im Ernste niemand zweifeln. Deshalb wirft der aus den Worten „Was ein Trägheitsmoment ist, muss der Ingenieur doch wissen; das kann er aber nicht wissen, wenn er keine Integralrechnung versteht“ gefolgerte Vorwurf eines „nicht genügenden Eindringens in die Sache“ gegen den anerkannten und verdienstvollen Lehrer der darstellenden Geometrie und Graphostatik an der Berliner technischen Hochschule ein bemerkenswertes Licht auf das mathematische Denken des Herrn Bantlin. F. K.

Teichmann. Ueber statische und Trägheitsmomente von Querschnitten. Zeitschr. Deutsch. Ing. **40**, 910-911.

Die in Frage stehenden Momente kann man sehr leicht auf Quadraturen zurückführen, indem man die Grössen y^2/l und y^3/l^2 als reducirte Ordinaten auffasst. F. K.

Mohr. Beitrag zur Geometrie der Massen. Civiling. **42**, 237-248.

Es seien u, v, w die Coordinaten eines Massenpunktes m in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, r und s seine Abstände von zwei durch den Anfangspunkt A gehenden Ebenen. Dann ist bekanntlich

$$r = u\cos(ru)+v\cos(rv)+w\cos(rw),$$
$$s = u\cos(su)+v\cos(sv)+w\cos(sw).$$

Das Centrifugalmoment bezüglich zweier Ebenen R und S wird daher durch den Ausdruck Σrsm dargestellt. Um diesen Ausdruck zu untersuchen, ordnet der Verf. einer Ebene R eine Strecke $\bar{r}$ zu, deren Endpunkt die Coordinaten $r_u = \Sigma rum$, $r_v = \Sigma rvm$, $r_w = \Sigma rwm$ hat. Dann ist offenbar $\Sigma rsm = r_u\cos(su)+r_v\cos(sv)+r_w\cos(sw)$ oder $\Sigma rsm = s_u\cos(ru)+s_v\cos(rv)+s_w\cos(rw)$. Das bezeichnete Centrifugalmoment ist also sowohl die Projection von $\bar{r}$ auf s, als auch die Projection von $\bar{s}$ auf die Axe r. Projicirt man den Endpunkt von $\bar{r}$ auf alle durch A gehenden Axen, so erhält man eine Kugel mit dem Durchmesser $\bar{r}$, welche die Momentenkugel (R) genannt wird. Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Ebene R kann als Centrifugalmoment zweier mit R zusammenfallenden Ebenen angesehen werden; wir werden dasselbe als Abschnitt der Momentenkugel (R) auf der Axe r gewinnen. Für die Axen, welche die Kugel (R) im Punkte A berühren, ergiebt sich offenbar das Centrifugalmoment Null; die zugehörigen Ebenen (Nullebenen) bilden einen Büschel, dessen Axe mit $\bar{r}$ zusammenfällt.

Die Hauptebenen S und zugehörigen Hauptaxen s werden hier dadurch definirt, dass die Strecke $\bar{s}$ mit der Axe s zusammenfallen muss. Nachdem die Aufgabe der rechnerischen Bestimmung der Hauptaxen gelöst ist, werden die Hauptaxen zu Coordinatenaxen gemacht; die entsprechenden Momentenstrecken mögen sein $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$. Dann ist der Durchmesser der zu einer Richtung r gehörenden Momentenkugel durch die Gleichung $\bar{r}^2 = \bar{x}^2\cos^2(xr)+\bar{y}^2\cos^2(yr)+\bar{z}^2\cos^2(zr)$ bestimmt, und das Trägheitsmoment bezüglich der Ebene R ist

$$r_r = \bar{x}\cos^2(xr)+\bar{y}\cos^2(yr)+\bar{z}\cos^2(zr),$$

während das Trägheitsmoment bezüglich der Axe r gleich $\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}-r_r$ ist. Diese Grössen werden folgendermassen construirt. Vom Coordinatenanfangspunkt aus werden auf der Abscissenaxe die vier Strecken

$$OX = \bar{x},\quad OY = \bar{y},\quad OZ = \bar{z},\quad \overline{OP} = \bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$$
$$\{\text{es wird vorausgesetzt } \bar{x}<\bar{y}<\bar{z}\}$$

abgetragen; die Mittelpunkte der beiden Strecken XY und YZ seien B und C. Um B und C beschreibe man Kreise über den Durchmessern XY, resp. YZ und ziehe ferner von den Mittelpunkten dieser Kreise aus unter den Winkeln $2(xr)$ zu BX, resp. $2(zr)$ zu CZ zwei gerade Linien, welche die betreffenden Kreise in D und E schneiden mögen. Nun wird um B mit dem Radius BE und um C mit dem Radius CD ein Kreisbogen beschrieben. Der Schnittpunkt beider Bogen sei F. Dann ist $OF = \bar{r}$, die Abscisse OQ von F ist gleich r_r, und endlich ist $QP = OP - OQ$ das Moment bezüglich der Axe r. Nachdem noch auf die Analogie mit den Spannungen eines elastischen Körpers hingewiesen ist, leitet der Verf. die Momente für einen beliebigen Punkt aus den Hauptmomenten für den Schwerpunkt ab. F. K.

Weitere Litteratur.

A. H. Barker. Graphical calculus. With an introduction by J. Goodman. London. 198 S. 8°.

R. Lauenstein. Die graphische Statik. Elementares Lehrbuch für technische Unterrichtsanstalten und zum Gebrauch in der Praxis. 3. Aufl. Stuttgart: J. G. Cotta Nachfolger. VI + 166 S. 8°.

H. F. B. Müller-Breslau. Die graphische Statik der Bauconstructionen. 2. Aufl. 2. Band. 2. Abteilung. 1. Lieferung. Leipzig: Baumgärtner. S. 1-96. 8°. Mit 2 Tafeln.

J. Pflüger. Tratado de estatica grafica. Santiago de Chile. VI + 135 S. 4°.

M. d'Ocagne. Application générale de la nomographie au calcul des profils de remblai et déblai, avec une instruction pratique pour la construction et le mode d'emploi des abaques à points isoplèthes. Paris: Dunod & Vicq. 80 S. 8°.

Winter. Die graphische Bestimmung der Tangentenlängen beim Entwerfen von Spurplänen. Deutsche Bauztg. **30**, 555. F. K.

H. Hancock. On the number of catenaries that may be drawn through two fixed points. Annals of Math. **10**, 159-174.
Bericht auf S. 291 dieses Bandes.

B. Hydrostatik.

W. Briggs and G. H. Bryan. Elementary textbook of hydrostatics. 2[nd] ed. London: Clive (Univ. Tutorial Series). 216 S. 12mo.

O. Hoppe. Elementares Lehrbuch der technischen Mechanik für Studirende und zum Selbstunterricht. Leipzig: Arthur Felix. gr. 8°. Erste Abteilung: Mechanik des Punktes, Mechanik der Körper.

XIV + 361 S. mit 453 Abb. im Text (1894). — Zweite Abteilung: Mechanik der tropfbaren und gasförmigen Flüssigkeiten. XI + 135 S. mit 106 Abb. (1895). Besprechung im Centralbl. der Bauverw. **16**, 53. F. K.

O. Flamm. Ueber die Stabilität von Schiffen. Ann. d. Hydr. **24**, 508-518.

In diesem vor der mathematischen Gesellschaft zu Hamburg gehaltenen Vortrage erörtert der Verf. zunächst die Beziehungen zwischen dem Schiffsschwerpunkte und der Deplacementscurve einerseits und der statischen Stabilität des Schiffes andererseits. Darauf untersucht er auch die dynamische Stabilität, d. h. die Arbeit, welche erforderlich ist, um das Schiff bis zu einem gewissen Winkel überzuneigen. Nach diesen Vorbereitungen wird die Stabilitätsuntersuchung für den Einfluss von Wind und Wellen erledigt. F. K.

P. Duhem. Sur la stabilité d'un navire qui porte du lest liquide. Journ. de Math. (5) **2**, 23-40.

Das hydrostatische Problem für die Stabilitätsbestimmung eines Schiffes mit flüssigem Ballast besteht in der Frage nach der Stabilität eines an der Trennungsfläche zweier Flüssigkeiten schwimmenden Körpers, der im Innern eine Höhlung mit einer dritten Flüssigkeit besitzt, die ihrerseits mit einer der umgebenden Flüssigkeiten in Berührung ist. Der Verf. geht von einer Ungleichung aus, deren Erfüllung die Stabilität des schwimmenden Körpers verbürgt, und folgert daraus eine Stabilitätsbedingung, deren Erfüllung notwendig, aber vielleicht nicht ausreichend ist, und eine andere, deren Erfüllung zwar hinreicht, aber vielleicht nicht unbedingt erforderlich ist. Weiter wird gefolgert, dass, wenn ein schwimmender Körper mit flüssigem Ballast im stabilen Gleichgewicht ist, dieser Körper auch im Gleichgewicht bleibt, wenn der Ballast erstarrt. Die Umkehrung dieses Satzes ist unzulässig. Der Fall, dass die mitwirkende Kraft die Schwere, ist und die Flüssigkeiten homogen sind, wird besonders untersucht. Der Fall einer mit der offenen Seite nach unten eingetauchten Glocke steht in naher Beziehung und ist ein anderer Speciallfall des oben genannten hydrostatischen Problems. Der Verf. giebt die Stabilitätsbedingung für den Fall, dass die Schwere wirkt, und eine geometrische Interpretation derselben. F. K.

P. Duhem. De l'influence qu'un chargement liquide exerce sur la stabilité d'un navire. Sep. aus Bull. de l'Ass. techn. math. 1896. 8 S.

Guyou und später Pollard und Dudebout haben für die Stabilität eines Schiffes mit flüssiger Belastung notwendige Bedingungen aufgestellt, indem sie folgende Arten von Verrückungen zuliessen:

1) die von dem Schiffe verdrängte Flüssigkeit ist dieselbe;
2) das Niveau des umgebenden Wassers bleibt dasselbe;

3) die flüssige Belastung behält eine horizontale Ebene als obere Begrenzung.

Indem eine beliebige Verrückung zu Grunde gelegt wird, gelingt es dem Verf., die fragliche Bedingung nicht nur als notwendig, sondern auch als hinreichend zu erkennen. F. K.

E. Guyou. Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants. Journ. de Math. (5) **2**, 21-22.

Weist einige Bemerkungen zurück, welche Duhem im Bande (5) **1** desselben Journals gegen hydrostatische Betrachtungen in Guyou's Théorie du navire gerichtet hat. F. K.

J. Leflaive. Étude de la stabilité des navires par la méthode des petits modèles. C. R. **122**, 704-708.

Im wesentlichen nur von technischem Interesse. F. K.

J. Leflaive. Étude théorique sur la plongée des sous-marins. C. R. **123**, 860-864.

P. Pizzetti. Sopra un punto della teoria di Laplace relativa alla figura di equilibrio di una massa fluida rotante. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{5}_1$, 109-116.

In der Mécanique céleste hat Laplace bewiesen, dass in zwei Fällen eine rotirende flüssige Masse, deren Oberfläche wenig von einer Kugel abweicht, als Gleichgewichtsfigur mit einer gewissen Annäherung ein Rotationsellipsoid hat; nämlich erstens, wenn die Masse homogen ist, und zweitens, wenn die flüssige Masse nicht homogen ist und die Dichtigkeit in der Weise vom Centrum zur Oberfläche abnimmt, dass die Flächen constanter Dichtigkeit wenig verschieden von Kugelflächen sind. — Gegen den Laplace'schen Beweis für den zweiten Fall sind Bedenken erhoben worden, z. B. von Helmert und von Tisserand. Der Verf. giebt in der vorliegenden Abhandlung eine Modification des Laplace'schen Beweises, durch welche jene Bedenken beseitigt werden. F. K.

K. Schwarzschild. Die Poincaré'sche Theorie des Gleichgewichtes einer homogenen rotirenden Flüssigkeitsmasse. Diss. München. 89 S. 4°; N. Ann. der Sternw. München **3**.

Der Verf. beabsichtigt, die bahnbrechenden Untersuchungen von Poincaré den in der Astronomie üblichen Formen näher zu bringen. Er beschränkt sich dabei auf reibende Flüssigkeiten und ellipsoidische Gleichgewichtsfiguren. Als Hülfsmittel dient ihm eine mit dem Namen der Orthogonalfunctionen belegte Verallgemeinerung der Lamé'schen Functionen. Die Anwendungen, welche Poincaré selbst von seinen Principien gemacht hat, sind im allgemeinen nur skizzirt, dagegen ist ausführlicher die Gleichgewichtsfigur eines kleinen Mondes behandelt.

F. K.

S. KRÜGER. Ellipsoïdale evenwichtsvormen eener wentelende homogene vloeistofmassa. Leiden: J. W. von Leeuwen. 186 S. (Inauguraldissertation.)

Bekanntlich entdeckte Jacobi, dass ein dreiaxiges Ellipsoid Gleichgewichtsfigur einer mit constanter Geschwindigkeit rotirenden Flüssigkeit sein kann. Für den Fall, dass Dichtigkeit und Geschwindigkeit denen der Erde entsprechen, wurde das Axenverhältnis von vielen Autoren berechnet, welche zum Teil die Arbeiten ihrer Vorgänger nicht gekannt zu haben scheinen und sehr abweichende Resultate erhielten. (Meyer, Kostka, Roche, Matthiessen, Giesen, Hagen, Darwin). Der Verf. erhält durch Anwendung der $\wp$-Function $a:b:c = 52{,}41:1{,}002313:1$, was mit den Kostka'schen Zahlen am besten stimmt. Ferner wird eine rotirende Flüssigkeit unter dem Einfluss eines entfernten Punktes untersucht. Die merkwürdigen Resultate, welche Poincaré (Acta Math. 7) erhalten hat, werden durch die $\wp$-Function auf einfacherem Wege hergeleitet. Mo.

P. MÖLLER. Zur Berechnung der Schwimmdocks. Centralbl. der Bauverw. **16**, 234-235. F. K.

Kapitel 4.

Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

A. MAYER. Die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentiales. Leipz. Ber. **48**, 1896, 519-529.

In seiner Abhandlung „Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung" (Journ. für Math. **100**, 137 und 213, cf. F. d. M. **18**, 941, 1886) hat Helmholtz beiläufig, doch ohne Beweis, angegeben, welche Bedingungen die Lagrange'schen Ausdrücke der bewegenden Kräfte $P_1, P_2, \dots, P_n$ eines Systems materieller Punkte mit den unabhängigen Bestimmungsstücken $p_1, p_2, \dots, p_n$ erfüllen müssen, damit für die Bewegung jenes Systems ein kinetisches Potential H existirt. Für diese Helmholtz'sche Bemerkung wird in der vorliegenden Arbeit ein kurzer und directer Beweis gegeben, der unabhängig davon ist, ob in den P_λ die Zeit selbst auftritt oder nicht.

Den Ausgangspunkt bildet das Princip, durch welches Jacobi gelehrt hat, die partiellen Ableitungen von vollständigen Differentialquotienten durch blosse Variationen zu berechnen; d. h. es werden die Gleichungen angewandt, die sich daraus ergeben, dass, wenn V irgend eine Function von t, von den p und ihren ersten Differentialquotienten nach t ist, $\delta \frac{dV}{dt} = \frac{d\delta V}{dt}$ ist.

Die zu beantwortende Frage lässt sich so formuliren: Welche Bedingungen müssen n gegebene Functionen $P_1, \ldots, P_n$ der Variabeln $p_1, \ldots, p_n$, sowie ihrer ersten und zweiten Differentialquotienten nach t und eventuell auch nach der unabhängigen Variable t selbst erfüllen, damit eine Function H von $t, p_1, \ldots, p_n, p'_1, \ldots, p'_n$ existire, welche die n Gleichungen (1) $-\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial p'_i}\right) = P_i$ identisch befriedigt. Indem der Verf. die Gleichungen (1) durch die Substitutionen $\frac{\partial H}{\partial p'_i} = \psi_i$ auf $2n$ andere zurückführt, auf diese das Jacobi'sche Princip anwendet und die Integrabilitätsbedingungen benutzt, findet er, in Uebereinstimmung mit Helmholtz, dass die $P_1, \ldots, P_n$ solche in den p'' lineare Functionen sein müssen, zwischen denen die $n(2n-1)$ Relationen identisch bestehen:

$$\text{(a)}\quad \frac{\partial P_i}{\partial p''_k} = \frac{\partial P_k}{\partial p''_i}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{\partial P_i}{\partial p'_k} + \frac{\partial P_k}{\partial p'_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p''_k} + \frac{\partial P_k}{\partial p''_i}\right),$$

$$\text{(c)}\quad \frac{\partial P_i}{\partial p_k} - \frac{\partial P_k}{\partial p_i} = \tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p'_k} - \frac{\partial P_k}{\partial p'_i}\right).$$

Es handelt sich weiter darum, zu zeigen, dass diese notwendigen Bedingungen auch hinreichend sind. Dazu ist erforderlich, dass sich, so oft die Bedingungen (a), (b), (c) erfüllt sind, die n Functionen ψ_i so bestimmen lassen, dass die $\frac{1}{2}n(3n-1)$ Gleichungen

$$\text{(d)}\quad \frac{\partial \psi_i}{\partial p'_k} = \frac{\partial P_k}{\partial p''_i}, \qquad \text{(e)}\quad \frac{\partial \psi_i}{\partial p_k} - \frac{\partial \psi_k}{\partial p_i} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial P_i}{\partial p'_k} - \frac{\partial P_k}{\partial p'_i}\right)$$

identisch befriedigt werden. Dass dies der Fall ist, ergiebt sich folgendermassen. Aus (d) folgt, dass die Functionen ψ die Form haben:

$$\psi_\lambda = \chi_\lambda(t, p_1, \ldots, p_n, p'_1, \ldots, p'_n) + \omega_\lambda(t, p_1, \ldots, p_n),$$

wo χ_λ sich durch blosse Quadraturen bestimmen lässt, während ω_λ eine willkürliche Function ist. Weiter lässt sich zeigen, dass man mittels (e) alle Functionen ω bis auf eine, die willkürlich bleibt, bestimmen kann. Uebrigens sind die allgemeinsten Werte der Functionen ω_λ von der Form $\omega_\lambda = u_\lambda + \frac{\partial \Phi}{\partial p_\lambda}$, falls die u_λ irgend ein bestimmtes System von Functionen ω_λ bilden, während Φ für jedes λ ein und dieselbe willkürliche Function von t und $p_1, \ldots, p_n$ ist. Daraus folgt, dass der allgemeinste Wert von H die Form hat $H = H_1 + \frac{d\Phi}{dt}$, falls $H = H_1$ irgend eine bestimmte Lösung, Φ wieder eine willkürliche Function ist.

Mittels der benutzten Methode wird man, wie der Verf. bemerkt, auch die von Königsberger in seiner Arbeit „Ueber die Principien der Mechanik“ (s. S. 572) angegebene Ausdehnung des Helmholtz'schen Satzes auf den Fall, dass die P auch höhere Differential-

quotienten der p nach t enthalten, mit einem Minimum von Rechnung ableiten können. Wn.

IGN. SCHÜTZ. Ueber das Verhältnis des Princips der geradesten Bahn zum Princip der kleinsten Wirkung. Wien. Anz. 1896, 162-165.

Durch Aufdeckung einer Lücke im Hertz'schen Beweisgange (Artikel 161, S. 105 der Principien der Mechanik) ist der Verf. zur Erkenntnis geführt, dass das Princip der geradesten Bahn auf alle jene, und nur auf alle jene physikalischen Systeme anwendbar ist, für welche auch das Princip der kleinsten Wirkung in Anspruch genommen werden kann, und dass demnach die Aussagen der beiden Principien nach Umfang und Inhalt einander vollkommen decken, oder mit anderen Worten: Ein physikalisches System ist entweder solcher Art, dass für dasselbe beide Principien benutzt werden können; oder es ist von solcher Art, dass beide Principien versagen. Lp.

R. DE SAUSSURE. Sur une mécanique réglée. C. R. **123**, 796-799.

Der Verf. zeigt, wie man aus den Principien seiner Liniengeometrie (vergl. S. 544 dieses Bandes) die Fundamentalgleichungen der Mechanik eines starren Körpers ableiten kann. Lp.

F. SIACCI. Sur une proposition de mécanique. C. R. **123**, 395-396.

F. SIACCI. Sulla stabilità dell'equilibrio, e sopra una proposizione di Lagrange. Rom. Acc. L. Rend. (5) **5**$_2$, 121-122.

Berichtigung der Fassung eines Satzes der Mécanique analytique von Lagrange (4e éd., p. 70). Der von Lagrange bewiesene Satz muss lauten: „Wenn das System durch eine Lage geht, in der es im Gleichgewicht verharren könnte, so ist die lebendige Kraft in dieser Lage ein Grösstes oder Kleinstes; oder genauer: das Differential der lebendigen Kraft ist Null.“ Hiernach ist eine bezügliche Stelle in Appell's Traité de mécanique **2**, 354 zu berichtigen. Lp.

A. KNESER. Zwei Sätze über Bewegungen in der Nähe labiler Gleichgewichtslagen. Sitz.-Ber. Dorpater Naturf.-Ges. **11**, 153-161.

I. Asymptotische Annäherung an eine Lage labilen Gleichgewichts ist stets möglich, wenn die Lage der bewegten Massen von zwei Variabeln abhängt, ihre Verbindungen von der Zeit unabhängig sind und die wirkenden Kräfte ein Potential haben, welches eine analytische Function jener Variabeln ist und in der Gleichgewichtslage ein solches Minimum hat, dass in der Taylor'schen Entwickelung die quadratischen Glieder eine nicht singuläre, definite quadratische Form bilden. II. Die Bahncurven aller Bewegungen, bei welchen asymptotische Annäherung an die Gleichgewichtslage stattfindet, bedecken eine gewisse Umgebung derselben

genau einfach; d. h. in jeder von der Gleichgewichtslage hinreichend wenig entfernten Lage der Massen beginnt eine und nur eine Bewegung der bezeichneten Art. Der allgemeine Beweis beider Sätze ergiebt sich aus zwei an das Princip der kleinsten Action anknüpfenden Betrachtungen, durch welche die Begriffe des Gauss'schen Krümmungsmasses und der conformen Abbildung so zu sagen auf dynamische Probleme übertragen werden. Lp.

E. Herrmann. Bemerkungen über die verticale Componente der ablenkenden Kraft der Erdrotation. Meteor. Zeitschr. **13**, 184-186.

Nils Ekholm. Ueber die Grössenordnung der Kräfte, die verticale Beschleunigungen der Luft hervorrufen. Ebenda, 186-189.

Beide Artikel wenden sich gegen die Angriffe, welche die Abhandlung Ekholm's „Ueber die einwirkende Kraft der Erdrotation auf die Luftbewegung“ (vergl. F. d. M. **25**, 1893, 1893/94) von Sprung und Köppen erfahren hat. Der erste Aufsatz geht von den Finger'schen hydrodynamischen Gleichungen des Problems aus (Wien. Ber. **81**; F. d. M. **12**, 707, 1880) und erörtert mit ihrer Hülfe die gegen Ekholm erhobenen Einwände. Dieser Letztere dagegen wägt gegen einander diejenigen Kräfte ab, welche verticale Beschleunigungen der Luft erzeugen können. Lp.

E. Herrmann. Noch einmal der „Satz von der Erhaltung der Fläche“. Meteor. Zeitschr. **13**, 353-357.

M. Möller. Zum vorangehenden Artikel. Ebenda, 357-358.

Gegen die Ausführungen von Möller (Meteor. Zeitschr. **11**, 469—471, 1894) begründet Herrmann ausführlich seine Ansichten durch Zurückgreifen auf die hydrodynamischen Differentialgleichungen, widerspricht besonders der einseitigen Anwendung eines einzelnen, willkürlich herausgegriffenen mechanischen Satzes unter Vernachlässigung aller entgegenstehenden Bedingungen und verharrt daher bei der früher ausgesprochenen Meinung, indem er jedoch in den Bedingungen für den stabilen oder labilen Gleichgewichtszustand einen Punkt findet, wo sich seine Ansichten mit den Möller'schen begegnen. Möller erklärt in der folgenden Note, es sei nur ein scheinbarer Meinungsgegensatz vorhanden gewesen. Lp.

J. D. Everett. On absolute and relative motion. Brit. Ass. Rep. Ipswich (1895), **65**, 620.

Aus dem ganz kurzen Auszuge des Vortrages geht nur hervor, dass der Verf. meint, das d'Alembert'sche Princip liefere ein Mittel zur Prüfung der Gleichmässigkeit der Translationsbewegung, und die bekannten Versuche mit rotirenden Körpern geben Mittel zur Erkenntnis der Rotation als absoluter Bewegung. Lp.

„CROMERITE“. A mechanical problem. Nature **54**, 622.

Erörterungen über die Frage, ob ein in einem geschlossenen Kasten befindlicher Mensch durch einen Sprung gegen den Deckel eine Bewegung des Kastens erzeugen kann. Lp.

E. MORTARA. Osservazione sul principio delle aree. Parma: Battei. 7 S. 16mo.

G. SUSLOFF. Monocyklische Systeme von Helmholtz. Moskau. Phys. Sect. (1) **8**, 24-33 (Russisch).

Diese Arbeit enthält eine Darlegung und Umarbeitung der von Helmholtz in seinen „Principien der Statik monocyklischer Systeme“ gefundenen Resultate. Jk.

T. LEVI-CIVITA. Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche. Annali di Mat. (2) **24**, 255-300.

Die Einleitung dieser Abhandlung giebt zuerst eine Uebersicht über die Resultate, welche durch die bezüglichen Arbeiten von Appell, Painlevé und Liouville in den letzten Jahren gewonnen sind. Man vergleiche betreffs derselben F. d. M. **24**, 857, 1892; **25**, 1384 ff., 1893/94; **26**, 824 ff., 1895. Trotz der beachtenswerten Sätze, welche in diesen Arbeiten ausgesprochen sind, ist das allgemeine Problem der Bestimmung aller Correspondirenden zu einem gegebenen Systeme (A) noch nicht behandelt worden. R. Liouville hat die Differentialgleichungen dafür aufgestellt, ohne jedoch die wirkliche Integration in Angriff zu nehmen, was, nach einer Bemerkung des Verf., von seinen Formeln aus kein angenehmes Geschäft sein dürfte. Das Studium dieser Aufgabe bildet nun den Hauptzweck der vorliegenden Arbeit. Der Verf. beginnt mit der Definition correspondirender Systeme und zeigt zunächst, wie die Integration eines Systems derjenigen jedes correspondirenden Systems gleich zu achten ist. Darauf erörtert er die Beziehungen, welche zwischen den beiden Variabeln t und t_1 bestehen müssen, und findet auf directem Wege die schon bekannten Formen wieder, welche verschieden ausfallen, je nachdem Kräfte einwirken oder nicht. Die weitere Untersuchung wird dann auf den Fall beschränkt, in welchem keine Kräfte wirksam sind, oder auf das Problem der Erhaltung der Geodätischen: Gegeben ist eine Mannigfaltigkeit φ, deren lineares Element $ds = dt\sqrt{2T}$ sei; alle Mannigfaltigkeiten Φ zu bestimmen, die wenigstens in einem gewissen Gebiete eindeutig auf φ abbildbar sind, so dass jeder Geodätischen von Φ eine Geodätische von φ entspricht. Dieses Problem entspricht nämlich genau der Ueberführung eines Systems (A) in das correspondirende System (A_1), wenn die Kräfte Null sind, und findet seine vollständige Erledigung. Nach Festlegung der Gleichungen, welche die beiderseitigen Coefficienten verbinden, werden dieselben durch Einführung der covarianten Ableitungen von Ricci transformirt, die sich in allen Untersuchungen bewähren, welche einen

invarianten Charakter besitzen. Aus den so transformirten Differentialgleichungen wird sofort die Existenz eines primären quadratischen Integrales erschlossen. Hiernach werden gewisse Rechnungsmethoden von Ricci aus der Theorie der krummen Oberflächen in Räumen von beliebig vielen Dimensionen dazu benutzt, um den Gleichungen des Problems ein viel einfacheres Aussehen zu verschaffen, unter welchem die geometrische Deutung von selbst sich darbietet. Dieselbe enthüllt in den Paaren correspondirender Mannigfaltigkeiten (d. h. deren Geodätische zusammenfallen) die Existenz gewisser besonderer Oberflächen, die, als Coordinatenflächen gewählt, den Quadraten der Linienelemente besondere Formen verschaffen. Hierdurch wird die Zurückführung eines beliebigen Paares correspondirender Systeme auf n völlig bestimmte Typen (t_1), (t_2), ..., (t_n) ermöglicht, wobei jeder Typus durch die Ueberführbarkeit der ds und ds_1 in gewisse kanonische Formen gekennzeichnet ist. Wenn nun ein System (A) ohne Kräfte gegeben ist, oder, was dasselbe ist, ein ds und ein Typus (t_m) fixirt ist, so kann man alle correspondirenden ds_1 bilden, falls dieselben existiren (d. h. solche, die zu correspondirenden Systemen dieses Typus gehören). Ihr allgemeiner Ausdruck hängt von zwei willkürlichen Constanten bei (t_1), (t_2), ..., (t_{n-1}), von einer bei (t_n) ab. Von zwei correspondirenden Systemen des Typus (t_m) gestattet jedes $n-m+1$ verschiedene quadratische primäre Integrale; hierdurch wird ein Liouville'scher Satz vervollständigt. — In einer Fortsetzung werden Resultate für Systeme in Aussicht gestellt, die von Kräften angegriffen werden. Lp.

T. Levi-Civita. Sugli integrali algebrici delle equazioni dinamiche Torino Atti **31**, 816-823.

In C. R. **103**, 460—463 (F. d. M. **18**, 845, 1886) hat Koenigs den Satz aufgestellt, dass, wenn ein Massensystem, welches Kräften unterworfen ist, die ein Potential besitzen, in Bezug auf die Geschwindigkeiten ein algebraisches Integral zulässt, es ausserdem mindestens ein rationales Integral gestattet. Der Verf. weist in seinem Aufsatze nach: a) dass der Koenigs'sche Satz auch gilt, wenn die Kräfte nicht aus einem Potential herrühren; b) dass, wenn bei einem Massensysteme mit von der Zeit unabhängigen Verbindungen, welches Kräften nicht unterworfen ist, ein von der Zeit unabhängiges rationales Integral besteht, auch mindestens ein homogenes Integral vorhanden ist; c) dass, falls ein Massensystem mit von der Zeit unabhängigen Verbindungen für ein von den Geschwindigkeiten unabhängiges Kräftesystem ein in Bezug auf die Geschwindigkeiten rationales Integral $A/B = \text{const.}$ zulässt, das nämliche Massensystem bei Abwesenheit von Kräften als Integral A'/B' gestattet, wo A' und B' den Inbegriff der Glieder höchsten Grades in den Polynomen A und B bezeichnen. Die Beziehungen zu den Arbeiten von Painlevé (C. R. 1892), Ricci (Ven. Ist. Atti 1894), Cerruti (Rom. Acc. L. Rend. 1895) werden kurz erörtert. Lp.

G. Picciatti. Sulla trasformazione delle equazioni della dinamica in alcuni casi particolari. Ven. Ist. Atti. (7) **7,** 175-189.

Der Verf. knüpft an die Untersuchungen von Painlevé an, welche in F. d. M. **25,** 1384 ff., 1893/94 besprochen sind, um einen Satz über die Transformirbarkeit des Systems

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \qquad \left(q_i' = \frac{dq_i}{dt}, \ i = 1,2, \ldots, n\right),$$

in das System

$$\text{(A}_1\text{)} \qquad \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial q_i} = Q_i' \qquad \left(q_i' = \frac{dq_i}{dt_1}, i = 1, 2, \ldots, n\right)$$

für besondere Formen der T und T_1 einfacher als Painlevé zu beweisen. Als Probe der erreichten Resultate führen wir den Satz an: Wenn wir jeder Bewegung des Systems (A), falls die Kräfte Q_i aus einem Potentiale Q fliessen, eine Bewegung des Systems (A_1) derart entsprechen lassen wollen, dass die Q_i' nur von den q_r abhängen, so ist es notwendig und hinreichend, dass die Ausdrücke der lebendigen Kräfte der beiden Systeme sind:

$$2T = \frac{1}{\lambda}\sum_{r=1}^{n} H_r \, \pi_r \left(\frac{\theta_i - \theta_r}{\theta_i}\right)\left(\frac{dq_r}{dt}\right)^2,$$

$$2T_1 = \frac{1}{\pi(\theta)}\sum_{r=1}^{n} H_r \pi_r (\theta_i - \theta_r)\left(\frac{dq_r}{dt_1}\right)^2,$$

wo λ eine willkürliche Function der q_r ist. Die einzige Transformation, welche zum Uebergange von (A) zu (A_1) dient, ist $dt_1 = \lambda dt$; die Relation zwischen dem Q_i und Q_i' ist:

$$Q_i' = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{Q}{\lambda \theta_i}\right).$$

Lp.

G. di Pirro. Sulle trasformazioni delle equazioni della dinamica. Palermo Rend. **10,** 241-253.

Die Ergebnisse der in F. d. M. **26,** 825, 1895 angezeigten Arbeit des Verf. aus Palermo Rend. **9,** 169—185 beruhen auf dem folgenden Satze: Ist

$$S = \tfrac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} a_r \left(\frac{dp_r}{dt}\right)^2, \quad S_1 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{ds_1}{dt_1}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} b_r \left(\frac{dq_r}{dt}\right)^2,$$

wo die Coefficienten a_r und b_r Functionen von p_r und q_r bezw. allein sind, so lässt sich das Lagrange'sche System der Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial p_r'}\right) - \frac{\partial S}{\partial p_r} = P_r \text{ in } \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial S_1}{\partial q_r'}\right) - \frac{\partial S_1}{\partial q_r} = Q_r$$

transformiren mittels der Formeln

$$p_r = q_r, \ dt = \lambda\,(p_1, p_2, \ldots, p_r)\, dt_1,$$

so dass den von den p_r allein abhängenden Kräften P_r die von den q_r allein abhängenden Kräfte Q_r entsprechen, wofern die folgenden Bedingungen erfüllt sind. Ist Π_r^s die s^{te} Potenz einer willkürlichen Function, die nur von den Coordinaten p_r abhängt, ferner $\Phi = |\Pi_r^s|$ $(s = 0, 1, 2, \dots, n-1;\ r = 1, 2, 3, \dots, n)$ und $\Phi_r^{(k)}$ der Coefficient von Π_r^k in Φ, so ist zu nehmen:

$$\lambda = C(\Pi_1 + h)(\Pi_2 + h) \dots (\Pi_n + h),$$

$$a_r = \frac{\Phi}{\Phi_r^{(n-1)}}, \quad b_r = \frac{a_r}{\lambda(\Pi_r + h)}, \quad Q_r = \lambda^2 \frac{b_r}{a_r} P_r,$$

wo C und h willkürliche Constanten sind.

Wenn nun aber $\Pi_r = \Pi_s =$ const. ist, so wird die Determinante Φ identisch Null, und a_r nebst b_r erscheinen unter der Form 0/0. Dieser Fall wird jetzt näher untersucht. Hierbei stellt sich heraus, dass, wenn k unter den Π_i einander gleich sind, eine besondere Lösung existirt, so dass also $n-1$ verschiedene Klassen von Problemen hiermit charakterisirt sind, die $n-k+1$ quadratische orthogonale Integrale besitzen. Lp.

G. di Pirro. Sur les intégrales quadratiques des équations de la dynamique. C. R. **123**, 1054-1057.

P. Appell. Remarques sur la communication de M. di Pirro. C. R. **123**, 1057.

In einer früheren Note (C. R. **116**, F. d. M. **25**, 1377, 1893/94) hat Stäckel eine Klasse von Problemen der Mechanik angegeben, deren Differentialgleichungen homogene, quadratische, orthogonale Integrale in Bezug auf die Geschwindigkeiten besitzen. Da aber damals nicht festgestellt wurde, ob diese Eigenschaft auch anderen Problemen zukommt, so behandelt G. di Pirro diese Frage und gelangt zu einem allgemeinen Satze, der die Bedingungen für die Existenz von Integralen der bezeichneten Art ausspricht. Die von Stäckel aufgefundene Klasse von Problemen bildet danach in der That nur einen besonderen Fall. Appell weist in einem Zusatze auf den Zusammenhang der vom Verf. erreichten Resultate mit denen hin, die Levi-Civita abgeleitet hat. Lp.

G. di Pirro. Sugli integrali primi quadratici delle equazioni della meccanica. Annali di Mat. (2) **24**, 315-334.

Unter den mechanischen Problemen, deren Gleichungen man vermittelst der Hamilton-Jacobi'schen Methode integriren kann, verdienen diejenigen besonders erwähnt zu werden, welche Stäckel in C. R. **116**, 485—487, 1893 bekannt gegeben hat, und welche die von Liouville im Journ. de Math. (1) **11, 12** betrachteten Fälle der Bewegung umfassen. Diese Probleme, für welche der Ausdruck der lebendigen Kraft auf eine orthogonale quadratische Form reducirt voraus-

gesetzt wird, sind auch dadurch bemerkenswert, dass sie ausser den Integrale der lebendigen Kraft noch $n-1$ andere, in den Geschwindigkeitscomponenten quadratische orthogonale Integrale besitzen, wenn n die Anzahl der Freiheitsgrade des Systems ist. Da diese Eigenschaft von Liouville und von Stäckel nur beiläufig bemerkt ist, und da man nicht weiss, ob dieselbe den von ihnen erforschten Fällen allein zukommt, oder mit anderen gemeinsam ist, so hat der Verf. die directe Untersuchung derjenigen Probleme unternommen, welche ausser dem Integrale der lebendigen Kraft andere quadratische orthogonale Integrale in der Voraussetzung zulassen, nach welcher der Ausdruck der lebendigen Kraft auf eine orthogonale Form reducirbar ist. Für $n=3$ ist die Lösung der Frage vom Verf. vollständig durchgeführt. Für ein beliebiges n hat er ein Theorem bewiesen, welches dem von Stäckel betrachteten Falle der Bewegung andere $n-2$ Fälle beizugesellen gestattet, für welche $n-2$, $n-3$, ..., 3, 2, 1 quadratische orthogonale Integrale vorhanden sind ausser demjenigen der lebendigen Kraft. Damit hat man eine besondere Klassifizirung der Probleme der Mechanik je nach der Anzahl der quadratischen orthogonalen Integrale, welche sie zulassen. — Stäckel hat durch eine Note in Annali di Mat. (2) **25,** 55—60 (1897) gezeigt, dass seine Note: „Sur l'intégration de l'équation différentielle de Hamilton" in C. R. **121,** 489—492, 1895 (F. d. M. **26,** 822, 1895) auch die hier charakterisirten Probleme umfasst. Lp.

P. Painlevé. Sur les transformations des équations de la dynamique. C. R. **123,** 392-395.

Einige Zusätze zu der grösseren Abhandlung des Verf. über dasselbe Thema im Journ. de Math. (4) **10,** (vergl. F. d. M. **25,** 1386, 1894) in Bezug auf die „correspondirenden Systeme". Aus den mitgeteilten Sätzen erhellt, dass die Berechnung aller Correspondirenden eines gegebenen Systems (A) immer nur die Integration linearer Gleichungen erheischt, und dass man in dem Falle $n=2$ im Stande ist, alle Correspondirenden zweiter Art zu bilden. Lp.

P. Painlevé. Sur les singularités des équations de la dynamique. C. R. **123,** 636-639.

Ein materielles System S mit von der Zeit unabhängigen Verbindungen und mit n Graden der Freiheit sei Kräften unterworfen, die weder von den Geschwindigkeiten noch von der Zeit abhängen. Die Aufgabe der Dynamik besteht darin, die Lage von S in einem beliebigen Augenblicke t zu berechnen, wenn man die Lage und die Geschwindigkeiten von S im Augenblicke $t=0$ kennt. Der Verf. wirft die Frage auf, ob die Sache theoretisch möglich sei. Wenn nämlich S durch gewisse singuläre Lagen geht, kommt es bekanntlich vor, dass die Erforschung der Bewegung nicht fortgeführt werden kann. Allein eine noch viel weniger erwartete Schwierigkeit besteht in der Thatsache, dass,

wenn t sich dem Werte t_1 nähert, S nicht mit Notwendigkeit einer Grenzlage zustrebt; dieses wird an einigen Beispielen gezeigt, und indem der Verf. Ergebnisse, welche für die analytischen Differentialgleichungen erzielt werden, auf das reelle Gebiet anwendet, erhält er einige allgemeine Sätze. Lp.

P. Painlevé. Sur les singularités des équations de la dynamique et sur le problème des trois corps. C. R. **123**, 871-873.

Fortsetzung der im vorangehenden Referate besprochenen Untersuchung. Als erster Satz wird der folgende ausgesprochen: „Wenn t dem Werte t_1 zustrebt, nähert sich entweder S mit endlichen und bestimmten Geschwindigkeiten einer bestimmten Lage in endlicher Entfernung, oder das Minimum $\varrho(t)$ der Grössen $1/T$, $1/K$, F nähert sich der Null“ ($T=$ lebendige Kraft, $M.K^2=$ Trägheitsmoment von S für den Nullpunkt, $F=$ Product aller Bedingungen des Systems). Aus diesem Satze werden verschiedene Folgerungen gezogen, insbesondere für das Vielkörperproblem. Wir führen den speciellen Satz an: „Das Dreikörperproblem ist mit Hülfe der Reihen (a) integrirbar, wenn man diejenigen Anfangsbedingungen ausnimmt, für welche zwei der Körper nach Verlauf einer endlichen Zeit t_1 in einem bestimmten Punkte des Raumes auf einander stossen.“ Lp.

H. Poincaré. Sur les solutions périodiques et le principe de la moindre action. C. R. **123**, 915-918.

Der Verf. zeigt, dass man nach einer gewissen Schlussweise in manchen Fällen die Theorie der periodischen Lösungen von Bahnen an das Princip der kleinsten Wirkung anknüpfen kann, und erläutert diesen Gedanken durch das Beispiel dreier Massenpunkte a, b, c, die sich in einer Ebene bewegen und nach dem umgekehrten Verhältnisse des Kubus der Entfernung anziehen. Da diese Schlussweise aber nur anwendbar ist, wenn die Anziehung für sehr kleine Abstände von derselben oder von höherer Ordnung ist wie der Kubus der Abstände, so kann man in dem Falle des Newton'schen Gesetzes dieses Verfahren nicht benutzen. Lp.

T. Levi-Civita. Sul moto di un sistema di punti materiali soggetti a resistenze proporzionali alle rispettive velocità. Ven. Ist. Atti (7) **7**, 1004-1008.

In Anlehnung an die Arbeit von E. Padova: „Sul moto di rotazione di un corpo rigido“ (Torino Atti **21**, 38—47; F. d. M. **18**, 881, 1886) beweist der Verf. den Satz: Die Differentialgleichungen (D), welche die Bewegung eines materiellen Systems S beherrschen, wenn seine einzelnen Punkte Widerstände (des Mittels, der Reibung oder sonst welche) erfahren, die den bezüglichen Geschwindigkeiten proportional sind, können aus den die freie Bewegung des nämlichen Systems S betreffenden Gleichungen (D_1) erhalten werden, vermittelst der Vertau-

schung der unabhängigen Veränderlichen: $dt_1 = e^{-\lambda t} dt$. (In dieser Formel bezeichnet t_1 die Zeit für die freie Bewegung, t für die den Widerständen unterworfene, λ das constante Verhältnis zwischen dem Widerstande und der Geschwindigkeit.) Lp.

E. J. Nanson. The period-equation of a constrained system oscillating about a position of equilibrium. Messenger (2) **26**, 59-62.

Die Gleichung lautet:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda + b_{11}, & \dots, & a_{1l}\lambda + b_{1l}, & c_{11}, & \dots, & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{l1}\lambda + b_{l1}, & \dots, & a_{ll}\lambda + b_{ll}, & c_{l1}, & \dots, & c_{lm} \\ c_{11}, & \dots, & c_{l1}, & 0, & \dots, & 0 \\ \vdots & & & & & \\ c_{1m}, & \dots, & c_{lm}, & 0, & \dots, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wo die Coefficienten a_{ij} so beschaffen sind, dass $\sum a_{ij} x_i x_j$ eine positive Function ohne Zeichenwechsel bedeutet, und $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$, $l > m$. Der Zweck des Aufsatzes besteht darin, zu zeigen, dass die Wurzeln der Gleichung alle reell sind, die Anzahl der innerhalb gegebener Grenzen liegenden Wurzeln zu finden, die Bedingungen dafür abzuleiten, dass alle Wurzeln negativ sind, und endlich in dem Nachweise, dass die Ergebnisse gültig bleiben, wenn $\sum a_{ij} x_i x_j$ nicht dasselbe Zeichen immer behält und positiv ist für alle, jedoch nur für solche Werte der x_i, die den m linearen Gleichungen genügen $\sum_i c_{ik} x_i = 0$. Glr. (Lp.)

P. Nekrassow. Einige von den dynamischen Gleichungen, welche vermittelst der Methode complexer Grössen integrirt werden können. Moskau. Math. Samml. **18**, 728-730. (Russisch.)

Der Autor untersucht die Bewegung eines materiellen Punktes (x, y) in einer Ebene unter der Wirkung einer Kraft, deren Componenten X, Y durch folgende Formel bestimmt sind:

$$z = x + y\sqrt{a},\quad F(z, \sqrt{a}) = X + Y\sqrt{a},$$

wo X und Y als rationale Functionen von a betrachtet werden. In Folge dessen erhält man:

$$\frac{dX}{dy} = a\,\frac{dY}{dx},\quad \frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy}.$$

Wenn sich a der Einheit nähert, dann zeigt die erste Gleichung die Existenz einer Kräftefunction π an, wobei $X\,dx + Y\,dy = d\pi$. Die zweite Gleichung ist die Integrabilitätsbedingung der Differentialgleichung: $Ydx + Xdy = d\pi_1$. Im betrachteten Falle besteht neben dem Integral der lebendigen Kraft: $\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \pi = \text{const.}$ noch ein Integral: $x'y' - \pi_1 = \text{const.}$

Die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung wird so zu Ende geführt.

Der betrachtete Fall wird durch folgende Substitution verallgemeinert:

$$z = (\alpha + \alpha' \sqrt{a})\, x + (\beta + \beta' \sqrt{a})\, y, \quad F(x, \sqrt{a}) = X + Y\sqrt{a},$$

wobei auch zwei Integrale der Differentialgleichung der Bewegung gefunden werden.

Der Autor verbindet seine Bemerkung mit der von ihm gegebenen Verallgemeinerung der Methode von Imschenetzky zur Integration der kanonischen Differentialgleichungen mit der Methode der complexen Grössen. (Mosk. Math. Samml. **8**, 254; F. d. M. **8**, 179, 1875.)

Jk.

A. Cabreira. Sobre as velocidades na espiral. Teixeira J. **12**, 49-51.

Der Verf. untersucht kurz die Bewegung auf der archimedischen und auf der logarithmischen Spirale. Tx. (Lp.)

P. Tait. Movimiento armónico. Archivo de Mat. **1**, 114-119, 128-135, 154-159.

Uebersetzt aus Encyclopaedia Britannica **15**, 685 ff. Tx. (Lp.)

R. S. Ball. On a form of the differential equations of dynamics. Rep. Austral. Assoc. **6**, 215-217 (1895).

E. Borel. Remarque sur les problèmes de forces centrales. Nouv. Ann. (3) **15**, 236-238.

Bemerkungen über einen Fehlschluss, den man in dem Falle einer Kreisbahn bei den Differentialgleichungen für die Polarcoordinaten des beweglichen Punktes machen kann. Lp.

H. Püning. Herleitung des ersten und dritten Kepler'schen Gesetzes aus dem Newton'schen Gravitationsgesetze. Poske Z. **9**, 26-28.

Eine elementare Herleitung, welche das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft beim Uebergange aus einer der die Sonne umgebenden kugelförmigen Niveauflächen in die nächstfolgende benutzt.

Lp.

F. O. Otto. Ein Attractionsproblem. Pr. (No. 592) Werdau. 64 S. 8° u. 1 Taf.

Die Arbeit behandelt die Bestimmung der freien Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einflusse einer nach einem festen Centrum hin gerichteten Kraft von der Form: $\frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^3} + \frac{C}{r^4}$. Der Polarwinkel φ

ergiebt sich hierbei als ein elliptisches Integral erster Gattung mit der Variable $1/r$, die Zeit t als ein zusammengesetzteres elliptisches Integral. Der wesentliche Inhalt der Abhandlung besteht in einer Bearbeitung dieser Integrale nach der Jacobi'schen Bezeichnung der elliptischen Transcendenten unter Sonderung vieler Einzelfälle und in der Erörterung einiger in den Bahnen auftretenden Gestalten von Curven.

Lp.

C. Cailler. Sur le mouvement d'une planète dans un milieu résistant. Assoc. Franç. Bordeaux (1895) **24**, 211-219.

Der Verf. geht von einer Bemerkung in Jacobi's Vorlesungen über Dynamik (16te Vorlesung, S. 125 ff.) aus und wendet die Betrachtung auf den besonderen Fall an, für den es möglich ist, die Schwierigkeit des Problems um einen weiteren Schritt herabzudrücken, nämlich wenn ein Planet sich in einem Mittel bewegt, dessen Widerstand der vierten Potenz der Geschwindigkeit proportional ist. Dann kommt die Lösung auf die Integration einer einzigen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Variabeln zurück. Zwar sei die Existenz eines widerstehenden Mittels mindestens problematisch und das Widerstandsgesetz dieses hypothetischen Mittels durchaus unbekannt. Daher sei es auch wenig wahrscheinlich, dass der Widerstand nach einer so hohen Potenz variire; das Interesse der Note sei aber auch mehr theoretisch als praktisch, und man solle in ihr nur eine elementare Anwendung der schönen Lie'schen Integrationsmethoden erblicken. Lp.

A. Astor. Courbes unicursales décrites sous l'influence d'une force centrale. Grenoble Ann. **5**, 215-225 (1893).

J. Richard. Sur le mouvement des planètes; application au rayon de courbure de l'ellipse. Rev. de Math. spéc. **6**, 465-467.

H. Franzen. Ueber die Bewegung eines materiellen Punktes unter der gleichzeitigen Einwirkung einer Newton'schen Centralkraft und der Erdschwere. Diss. Halle. 50 S. 8°.

D. Gravé. Sur le problème de trois corps. Nouv. Ann. (3) **15**, 537-547.

In dem Journ. de Math. **17**, 32 hat Bertrand das „Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la mécanique" veröffentlicht, und dort finden sich gewisse Differentialgleichungen, mit denen jetzt Gravé sich beschäftigt. Er erhebt nämlich die Frage nach den Integralen der Bertrand'schen Gleichungen, die vom Kräftegesetz unabhängig sind. Die Untersuchung ergiebt dann, dass keine anderen, vom Kräftegesetz unabhängigen Integrale dieser Gleichungen vorkommen als die schon sonst bekannten. Lp.

H. Poincaré. Sur la méthode de Bruns. C. R. **123**, 1224-1228.

In Acta Mathematica **11**, 25—96 (F. d. M. **19**, 935 ff., 1887) hat Bruns bewiesen, dass das Dreikörperproblem kein anderes algebraisches Integral zulässt als die bekannten Integrale. Dieser Beweis enthält, wie Poincaré in der vorliegenden Note zeigt, an einer Stelle einen Fehlschluss, durch den vielleicht das ganze Ergebnis hätte fraglich werden können. Durch eine neue Untersuchung dieses Umstandes gelingt es jedoch Poincaré, diesen Mangel des Beweises auf anderem Wege wie Bruns zu beseitigen, er schliesst die Mitteilung mit der Erklärung: „Ich bin glücklich, dass ich seine elegante Analyse in einem einzelnen Punkte habe vervollständigen können“. Lp.

H. Poincaré. Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps. C. R. **123**, 1031-1035.

Es seien A, B, C die drei Körper; x_1, x_2, x_3 die Coordinaten von A; x_4, x_5, x_6 die von B; x_7, x_8, x_9 die von C; $m_1 = m_2 = m_3$ die Masse von A, $m_4 = m_5 = m_6$ die von B, $m_7 = m_8 = m_9$ die von C; endlich

$$U = \frac{m_1 m_4}{AB} + \frac{m_1 m_7}{AC} + \frac{m_4 m_7}{BC}, \quad F = \Sigma \frac{y_i^2}{2m_i} - U,$$

so sind die Bewegungsgleichungen:

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i} \text{ oder } \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Ausser den beiden bekannten Transformationen dieser Gleichungen giebt Poincaré die dritte an:

$$\begin{matrix} x'_1 = x_1 - x_7, & x'_2 = x_2 - x_8, & x'_3 = x_3 - x_9, \\ x'_4 = x_4 - x_7, & x'_5 = x_5 - x_8, & x'_6 = x_6 - x_9, \end{matrix} \quad y'_i = m_i \frac{dx_i}{dt} \; (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Bei dieser Vertauschung der Variabeln wird 1) die kanonische Form der Gleichungen nicht geändert; 2) ebensowenig die Form der Integrale der Flächen. 3) Die Function F wird:

$$F = \Sigma \frac{y_i'^2}{2m'_i} - U + \frac{y'_1 y'_4 + y'_2 y'_5 + y'_3 y'_6}{m_7},$$

wo $m'_1 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7}$, $m'_4 = \frac{m_4 m_7}{m_4 + m_7}$. Die Form der Störungsfunction ist also ebenso einfach wie bei der gewöhnlichen Transformation, was an der Behandlung der osculirenden Elemente gezeigt wird. Lp.

H. Andoyer. Sur l'extension que l'on peut donner au théorème de Poisson, relatif à l'invariabilité des grands axes. C. R. **123**, 790-793.

Die Sätze von Lagrange und Poisson bezüglich der Unveränderlichkeit der grossen Axen bei den Planetenbahnen werden für $2r$ paar-

weise conjugirte Variabeln $p_1, p_2, \ldots, p_r; q_1, q_2, \ldots, q_r$ verallgemeinert. Der Verf. giebt an, er habe sein bezügliches Theorem bis zu den Gliedern vierter Ordnung einschiesslich durch directe Rechnung bewiesen und dann den Gang des Beweises durch Induction weiter fortgesetzt. Lp.

A. G. Wythoff (Fräulein). Over de stabiliteit van elliptische banen, beschreven onder de werking van drie centrale krachten. Nieuw Archief (2) **3**, 1-29.

Es handelt sich um die elliptische Bewegung unter der Wirkung dreier Centralkräfte, von denen zwei aus den Brennpunkten nach dem Newton'schen Gesetz wirken, während die dritte aus dem Centrum proportional der Entfernung wirkt. Stabilität. Bahn der unendlich wenig gestörten Bewegung. Mo.

O. Hettwer. Zur Bewegung eines schweren Punktes auf einer krummen Linie von der Gleichung $r^m = a^m \cos m\vartheta$. Pr. (No. 51) Gymn. z. Gr. Kloster. Berlin: R. Gaertner's Verl. 32 S. 4°.

Der Verf. hat bei den betrachteten Curven solche Fälle aufgesucht, die sich durch elliptische Functionen erledigen lassen, ohne jedoch die frühere Litteratur über den Gegenstand zu berücksichtigen. So lag für die Parabel z. B. eine Arbeit von Dienger vor im Grunert'schen Archiv **11**, 88—94 (1848) und die elegante Behandlung durch Glaisher im Quarterly J. **19** (F. d. M. **15**, 813, 1883); vom Referenten sind in den Verh. der Berl. Phys. Ges. **7** (F. d. M. **20**, 940, 1888) mehrere bezügliche Beispiele kurz angegeben und erledigt worden. Die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Fälle sind: I. $m = -2$, gleichseitige Hyperbel; nur bei besonderer Annahme der Constanten gehen die hyperelliptischen Integrale in elliptische über. II. $m = -1$, gerade Linie (bekannt). III. $m = -\frac{1}{2}$, Parabel; die Behauptung, dieser Fall liefere keine eleganten Resultate bei allgemeiner Behandlung, ist durch die oben angeführte Note von Glaisher widerlegt. IV. $m = \frac{1}{2}$, Kardioide; ausführlich behandelt S. 7—20 für die verschiedenen Werte der Constante der Anfangsgeschwindigkeit, indem alle Grössen durch elliptische Functionen in der Jacobi'schen Bezeichnung ausgedrückt werden. V. $m = 1$, Kreis; bekannt. VI. $m = 2$, Lemniskate; erledigt auf S. 20-32. — Als Ganzes betrachtet, sehen wir also zwei Uebungsbeispiele für die Anwendungen der elliptischen Functionen auf die reibungslose Bewegung eines schweren Massenpunktes auf der Kardioide und der Lemniskate in der Arbeit erledigt, wobei der Verf. Schlömilch's Behandlung der elliptischen Integrale benutzt hat. Von den übrigen merkwürdigen mechanischen Eigenschaften der betrachteten Curven (vergl. Bassani, Sulle curve $r^m \cos m\vartheta = a^m$, Batt. G. **24**, 1886) ist nichts erwähnt. Lp.

C. Seidemann. Ein mechanisches Doppelproblem. Ein Muster zur Lösung aller Probleme, welche noch auf elliptische Functionen führen. Für Studirende auf Universität und Polytechnicum. Halle a. S.: C. A. Kaemmerer & Co. IV u. 95 S. gr. 8° mit 4 lithogr. Taf. im Anhang.

Wie der Verf. im Vorworte angiebt, ist die Arbeit eine Umarbeitung seiner 1891 bei der Leipziger Universität eingereichten und nur zum Teile im Drucke abgelieferten Dissertation. Sie handelt über die Bewegung eines schweren Punktes auf der Rotationsfläche $9ar^2 = z(z-3a)^2$, also auf der vierten der Kobb'schen Flächen, bei welchen die Bewegungsgleichungen auf elliptische Functionen führen. Das „Doppelproblem" entsteht dadurch, dass die Richtung der Schwere das eine Mal mit der positiven, das andere Mal mit der negativen z-Axe zusammenfallend angenommen wird. Die Behandlung schliesst sich an Enneper-Müller's „Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte" (1890) an, verwendet die Jacobi'sche Art der Bezeichnung und ist als Uebung im Gebrauche der elliptischen Functionen zweckdienlich. Mit der Litteratur des Gegenstandes ist der Verf. nur unvollkommen bekannt. Dasselbe Thema ist in der Dissertation von Koebke erledigt: „Beiträge zur Untersuchung der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Rotationsfläche" (Halle 1892; vergl. F. d. M. **24**, 874, 1892), wo auch die Bewegung auf der fünften Kobb'schen Fläche schon untersucht ist. Dass das Verzeichnis der Kobb'schen Flächen durch Stäckel um eine neue Fläche vermehrt ist (vergl. F. d. M. **25**, 1418, 1893/94), die dann auch sofort bezüglich des in Rede stehenden Problems das Thema zu einer Arbeit geliefert hat (Friedr. Schmidt, F. d. M. **25**, 1419, 1893/94), ist dem Verf. ebenso verborgen geblieben wie anscheinend die Dissertation von Stäckel aus dem Jahre 1885 (F. d. M. **17**, 881, 1885), in welcher zuerst eine Zusammenstellung der bezüglichen Litteratur stattgefunden hat. Uebrigens fehlt die Dissertation des Verf. in dem Verzeichnis der Doctor-Dissertationen aus der reinen und angewandten Mathematik, München 1893. Lp.

M. Petrovitch. Remarques sur les équations de dynamique et sur le mouvement tautochrone. American J. **18**, 135-144.

Unter Einführung der reciproken Werte der Coordinaten eines beweglichen Massenpunktes werden die drei Differentialgleichungen der Bewegung, bei welcher die Resultante der einwirkenden Kraft in algebraischer Abhängigkeit von der Lage des Punktes und von den Componenten seiner Geschwindigkeit angenommen ist, ferner die Möglichkeit einer expliciten Aenderung mit der Zeit zugelassen wird, in eine diesen Annahmen entsprechende Form (1) gebracht. Dann wird der Satz bewiesen: Wofern nicht die Gleichungen (1) der Bewegung eine merkwürdige (vorher definirte) Gruppe zulassen, ist eine der beiden folgenden Bedingungen sicher erfüllt: 1) Entweder sind Werte wie $t = t_1$, wo t_1 die Zeit bezeichnet, innerhalb deren der bewegliche Punkt den Coordi-

natenanfang erreicht, **transcendente** Singularitäten der Coordinaten ξ, η, ζ, die mit den Anfangsdaten variiren; 2) oder die Bewegung ist tautochron bezüglich des Coordinatenanfangs, d. h. die vom Punkte verbrauchte Zeit bei dem Uebergange aus einer beliebigen Lage bis zum Nullpunkte ändert sich nicht mit den Anfangsdaten. Die weiteren Erörterungen betreffen den Fall, wo die Gleichungen (1) die vorher ausgeschlossenen merkwürdigen Gruppen zulassen. Lp.

W. de Tannenberg. Équations du mouvement d'un point matériel sur une surface quand on tient compte du frottement. Nouv. Ann. (3) **15**, 201-207.

Die Herleitung der Gleichungen für die Bewegung eines Punktes auf krummer Oberfläche unter Berücksichtigung der Reibung bewirkt der Verf. im Anschlusse an die Theorie der krummen Oberflächen, indem er die Coordinaten eines Punktes durch zwei Variabeln u und v ausdrückt, wo $u =$ const. und $v =$ const. Systeme von sich rechtwinklig schneidenden Curven der Oberfläche bedeuten. Lp.

Hadamard. Une propriété des mouvements sur une surface. C. R. **122**, 983-985.

Wie bei der Bewegung eines schweren Punktes auf einer Kugelfläche alle Bahnlinien in die untere Halbkugel eindringen, so giebt es auf einer beliebigen geschlossenen Oberfläche, die für einen von beliebigen gegebenen Kräften angegriffenen Punkt das Bewegungsfeld bildet, immer ein Gebiet R, das a priori angebbar ist, in welches jede Bahnlinie des Punktes hinein verlaufen muss. Ein Punkt, in welchem die Kräftefunction ein Minimum ist, gehört diesem Gebiete R nicht an, ist also eine Lage des instabilen Gleichgewichtes. Lp.

A. Razzaboni. Sul movimento d'un punto materiale sopra una superficie non levigata. Batt. G. **34**, 37-47.

Die Bewegung eines Massenpunktes auf einer rauhen Curve oder krummen Oberfläche ist in den letzten Jahren wiederholt Gegenstand der Forschung gewesen, und zwar von Appell, de Saint-Germain und Mayer (vergl. F. d. M. **24**, 856 und 875, 1892; **25**, 1420, 1893/94). Führt man die unbekannte Reaction der Oberfläche auf den Punkt ein (die Resultante aus der normalen Reaction und der Reibungskraft), so kann die Bewegung wie die eines freien Punktes behandelt werden; nach einem Verfahren analog demjenigen, welches bei Appell, Traité de mécanique rationnelle **1**, 469 zur Bestimmung der vom Coordinatensystem unabhängigen Bewegungsgleichungen eines Punktes auf einer polirten Oberfläche führt, erhält man leicht drei Gleichungen, welche mit Berücksichtigung ihrer Form manchmal zweckmässig die in Rede stehenden ersetzen können. Wenn z. B. die Oberfläche ein verticaler Cylinder ist und der Punkt einzig der Einwirkung der Schwere unterliegt, so findet

der Verf. einen neuen Fall, in welchem eine derartige Bewegung vollständig bestimmbar ist, nämlich wenn der rechtwinklige Querschnitt des Cylinders eine logarithmische Spirale ist. — Zuletzt wird durch eine Discussion der allgemeinen Formeln der Satz gewonnen: „Die Bewegung eines Punktes auf einer rauhen Oberfläche bei Abwesenheit von einwirkenden Kräften ist völlig bestimmt, falls man die Geodätischen der Oberfläche kennt.“ Lp.

G. Lippmann. Sur l'entretien du mouvement du pendule sans perturbations. C. R. **122**, 104-108; Journ. de phys. (3) **5**, 429-434.

Zur Erzielung eines regelmässigen Ganges beim Pendel verzichtet Lippmann auf den Anker, weil derselbe vermöge der Reibungen und Stösse selbst grössere Unregelmässigkeiten veranlasst; er lässt vielmehr das Pendel frei schwingen und ersetzt den durch die Dämpfungen herbeigeführten Verlust an Energie durch Impulse, welche durch Ladungen und Entladungen statischer Elektricität im passenden Momente gegeben werden. Ist μ der Bruchteil, um welchen der Ausschlag des Pendels bei einer einfachen Schwingung durch die Dämpfung verringert wird, T die Periode, a die constant zu erhaltende Schwingungsweite, y der Winkel des Pendels mit der Verticale in dem Augenblicke, wo der Impuls gegeben wird, so wird nach einer kurz angedeuteten Rechnung die Dauer der betreffenden Schwingung um den Betrag $\theta = \frac{2\pi}{T}\frac{y}{a}\mu$ geändert, nämlich vergrössert beim Aufstieg, verkleinert beim Abstieg des Pendels. Empfängt daher das Pendel zwei gleiche Folgestösse an derselben Stelle beim Aufstieg wie beim Abstieg, so ist die algebraische Summe der erzeugten Störungen in aller Strenge Null. Den hierdurch gegebenen Plan verwirklicht der Verf. durch die von ihm beschriebene Einrichtung, bei welcher ein Condensator regelmässig mit den Polen einer offenen Säule verbunden wird, die Contacte beim Schwingen des Pendels an sehr schwachen elastischen Federn entstehen. Lp.

H. Schubert. Elementare Ableitung einer genaueren Pendelformel. Naturw. Wochenschr. **11**, 73-74.

Auf elementare Weise findet der Verf.

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot(1+\tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha) < T < \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{1}{2}\alpha},$$

wo die Bezeichnungen die üblichen sind. Lp.

G. Lorenzoni. L'effetto della flessione del pendolo sul tempo della sua oscillazione. Ven. Ist. Atti (7) **7**, 466-474.

Bei Gelegenheit der Berliner internationalen geodätischen Versammlung im Jahre 1895 hielt Kühnen einen Vortrag über den Einfluss der

elastischen Durchbiegung der Stange eines Pendels auf die Schwingungsdauer. Die im preussischen geodätischen Institute angestellten Versuche hatten eine Verkürzung der Schwingungsdauer durch den Mangel an Starrheit in der Pendelstange ergeben. Nachdem der Verf. eine kurze Betrachtung über die Entstehung der Durchbiegung vorangeschickt hat, macht er auf eine theoretische Untersuchung dieser Frage aufmerksam, welche 1884 von Peirce im Coast and geodetic survey unter dem Titel erschienen ist: „Note on the effect of the flexure of a pendulum upon its period of oscillation", und in welcher umgekehrt eine Vergrösserung der Schwingungsdauer behauptet worden war. Wegen dieses Widerspruchs mit den Versuchsergebnissen nimmt der Verf. genau die von Peirce behandelte Aufgabe wieder auf, bei der das Pendel auf zwei getrennte Massen an einer elastischen Linie reducirt angenommen war. Durch Wiederholung der Schlüsse, aber in richtiger Weise, kommt dann der Verf. zu dem mit dem Versuche übereinstimmenden Ergebnisse, dass die Elasticität des Pendels seine Schwingungsdauer verkürzt. Lp.

G. von Grofe. **Die Bewegung eines mathematischen Pendels von veränderlicher Länge. Aus dem Nachlass herausgegeben von Kneser.** Dorpat. Naturf.-Ges. 1896, 176-185.

Der Aufsatz behandelt die Schwingungen eines Pendels von der Länge $a+bt$, wo a und b positive Constanten, t die Zeit bedeuten, also dasselbe Problem, das jüngst in viel grösserer Ausdehnung von Lecornu behandelt ist (vergl. F. d. M. **26**, 833, 1895). Ist φ der variable Ausschlagswinkel, und bezeichnen φ' und φ'' die Differentialquotienten von φ nach t, so lautet die vom Verf. abgeleitete Differentialgleichung des Problems: $(a+bt)\varphi''+2b\varphi'=-g\sin\varphi$, ihr erstes Integral

$$\tfrac{1}{2}(a+bt)\varphi'^2+\tfrac{3}{2}b\int_{t_0}^{t}\varphi'^2dt=\frac{g\cos\varphi+A}{a+bt},$$

wo A eine Constante ist. Aus beiden Gleichungen werden einige Folgerungen gezogen. So kommt der Verf., gerade wie Lecornu, für unendlich kleine Schwingungen auf die Darstellung der Bewegung durch Bessel'sche Functionen. Für unendlich grosse Zeit wird die Amplitude zuletzt Null, u. s. w. Lp.

G. Peano. **Sul pendolo di lunghezza variabile.** Palermo Rend. **10**, 36-37.

Um zu zeigen, wie ein Mensch in einer Schaukel durch Heben und Senken des Schwerpunktes den Ausschlag vergrössern kann, leitet der Verf. einen Satz für ein mathematisches Pendel von veränderlicher Länge ab (O Aufhängepunkt, OB verticale Lage, OA und OC die beiden extremen Lagen). „Wenn ein Pendel von veränderlicher Länge in einer Schwingung die Linie ABC beschreibt, so ist das durch Umdrehung

des Sectors AOB um die Verticale OB beschriebene Volumen gleich demjenigen, das durch die Umdrehung des Sectors BOC beschrieben wird." Daher muss, wenn der Ausschlag grösser werden soll, das Pendel verlängert werden beim Niedergang, verkürzt werden beim Aufgang.

Lp.

L. Lecornu. Sur le pendule de longueur brusquement variable. S. M. F. Bull. **24**, 133-136.

Wenn bei einem Fadenpendel in dem Augenblicke des Durchganges durch die Verticale eine plötzliche Verkürzung vorgenommen wird, so kann man mit Delaunay schliessen (Leçons de mécanique élémentaire), dass die lineare Geschwindigkeit ungeändert bleibt; nach dem Principe von der Erhaltung der Bewegungsgrösse folgt dagegen, dass die lineare Geschwindigkeit sich umgekehrt proportional der Länge ändern muss. Durch vorsichtige Behandlung der Bewegungsgleichungen zeigt der Verf., dass die letztere Ansicht richtig ist, und erörtert darauf den Satz von der Erhaltung der Kraft für den gegenwärtigen Fall. Hierdurch wird auch die Aufgabe von neuem beleuchtet, welche der Verf. in seinem Artikel „Théorie de l'escarpolette" behandelt hatte (vergl. F. d. M. **26**, 834, 1895).

Lp.

Baisch. Eine Erweiterung des Satzes vom Reversionspendel. Pr. (No. 608) K. Realanst. Heilbronn. 17 S. 4°.

Wenn ein Pendel aus einer gewichtslosen Stange und aus zwei Massenpunkten m_1, m_2 gebildet wird, welche in den Entfernungen r_1, r_2 bezw. vom Aufhängepunkte auf der Stange befestigt sind, so ist die Länge des isochron schwingenden mathematischen Pendels

$$l = \frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}{m_1 r_1 + m_2 r_2}.$$

Die graphische Darstellung zu einander gehöriger Wertepaare von r_1 und r_2 bei constant gegebenem l durch die Coordinaten r_1, r_2 eines Kreises für $m_1 = m_2$, einer Ellipse für $m_1 \gtrless m_2$, bildet den grösseren Teil der Arbeit. Die praktische Verwertung der Resultate für Reversionspendel, mit welcher der übrige Teil der Abhandlung sich beschäftigt, dürfte für genaue Messungen von Pendellängen deshalb nicht ganz zutreffen, als es dann nicht gestattet ist, die verschiebbaren beiden Massen wie materielle Punkte zu behandeln.

Lp.

A. de Saint-Germain. Note sur le pendule sphérique. Darboux Bull. (2) **20**, 114-116.

Aehnlich wie Hadamard in derselben Zeitschrift (vgl. F. d. M. **26**, 842, 1895) einen von der Theorie der elliptischen Functionen unabhängigen Beweis einer Eigenschaft der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt gegeben hat, wird hier der Puiseux'sche Satz bewiesen, dass, wenn das Pendel von der Lage, in welcher seine Höhe

ein Maximum ist, bis zu der geht, in welcher die Höhe ein Minimum ist, oder umgekehrt, sein Azimut um einen Winkel Ψ sich ändert, der über $\frac{1}{2}\pi$, aber unter π liegt. Lp.

M. Nordmann. Zur Behandlung innerer Kräfte im physikalischen Unterricht der Prima. Ein synthetisches Kapitel aus der Mechanik. Pr. (No. 267) Realgymn. Halberstadt No. 4, S. 21-44. 4°.

Der Verf. vermisst zwischen der Dynamik des materiellen Punktes und der Bewegung ausgedehnter Massen in der üblichen elementaren Mechanik ein Kapitel über die inneren Kräfte und ergänzt diese Lücke durch eine Anzahl ad hoc gebildeter Beispiele in der von ihm gewünschten Behandlung als „die natürliche Brücke zur Dynamik ausgedehnter Massen“. Eine knappe Auswahl dieser Aufgaben soll in etwa drei Lehrstundrn tüchtig durchgearbeitet, die Lösung durch Zahlenbeispiele oder Construction erläutert werden. Lp.

T. Levi-Civita. Sul moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso. Rom. Acc. L. Rend. (5) 5_2, 3-9, 122-127.

Um den Einfluss der Natur des beweglichen Körpers auf die Bewegung für sich allein zu beurteilen, beschäftigt sich der Verf. mit der lebendigen Kraft desselben und ermittelt ihre wesentlichen Charaktere durch eine Untersuchung ihrer gruppentheoretischen Eigenschaften nach den Arbeiten von Sophus Lie. Hierbei wird die Natur der Gruppe bestimmt, welche die lebendige Kraft T in sich selbst überführt.

Wenn die drei Trägheitsmomente für den festen Punkt unter einander gleich sind, so ist aus der entsprechenden Gruppe zu schliessen, dass die Differentialform T von constanter positiver Krümmung ist; demnach kann die Dynamik eines Punktes in einem elliptischen Raume mit der eines starren Körpers um einen festen Punkt in dem Falle identificirt werden, dass die drei Hauptträgheitsmomente gleich sind. Sind dagegen alle drei Trägheitsmomente, oder auch nur zwei verschieden, so ist der Ausdruck von T zweckmässig nicht auf einen anderen Typus zu bringen und kann als kanonisch angesehen werden für eine ganze Kategorie mit drei Freiheitsgraden. Der Verf. weist endlich auf eine merkwürdige Thatsache hin, welche aus den gruppentheoretischen Betrachtungen erhellt: die Existenz imaginärer Potentiale (auch wenn die drei Trägheitsmomente verschieden sind), für welche die Bewegungsgleichungen mit Hülfe von Quadraturen integrirt werden können.

In der zweiten Note deutet der Verf. zunächst kurz an, wie die gruppentheoretischen Betrachtungen sich zu der Untersuchung benutzen lassen, ob Kräftefunctionen vorkommen, für welche ausser dem Integrale der lebendigen Kräfte noch zwei andere lineare Integrale der Bewegungsgleichungen sich ergeben, und für welche deshalb die Integration auf Quadraturen zurückkommt. Der Hauptteil der Arbeit wird dann durch

die vollständige Behandlung eines Beispieles mit imaginärer Potentialfunction eingenommen, bei welchem die drei Constanten A, B, C von einander verschieden und die rechten Glieder der Bewegungsgleichungen (äussere Kräfte im reellen Falle) nicht alle Null sind. Lp.

T. Levi-Civita. Sul moto dei sistemi con tre gradi di libertà. Rom. Acc. L. Rend. (5) **5**$_2$, 164-171.

In der Einleitung wird der Inhalt folgendermassen zusammengefasst:

„Der Gegenstand dieser Note ist die Erforschung der materiellen Systeme S mit von der Zeit unabhängigen Verbindungen und mit drei Graden der Freiheit, für welches, wenn Kräfte nicht wirken, die drei Integrale der Flächen bestehen. Ich werde zeigen, dass derartige Voraussetzungen es gestatten, die Natur der lebendigen Kraft T zu kennzeichnen, und zu der Feststellung führen, dass T mit Hülfe einer passenden Wahl Lagrange'scher Coordinaten mit Sicherheit zurückführbar ist: entweder auf die einem starren Körper mit einem festen Punkte eigentümliche Form, oder auf die Form

$$\tfrac{1}{2}H^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2).$$

Daraus ergiebt sich, dass, auch wenn Kräfte wirken, die Dynamik der oben erwähnten Systeme gleich zu achten ist: im ersten Falle offenbar identisch mit der Dynamik eines starren Körpers um einen fest angenommenen Punkt desselben; im zweiten Falle (und in der Annahme, dass die Gesamtenergie des Systems constant sei), abgesehen von Quadraturen, der Dynamik eines materiellen Punktes". Lp.

P. A. Nekrassoff. Recherches analytiques sur un cas de rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe. Math. Ann. **47**, 445-530.

Der Fall der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt, welcher in dieser umfangreichen Arbeit einer gründlichen analytischen Behandlung unterworfen wird, ist zuerst von Hess untersucht worden (Math. Ann. **37**, vergl. F. d. M. **22**, 920, 1890). Sind nämlich x_0, y_0, z_0 die Coordinaten des Schwerpunktes des rotirenden Körpers, A, B, C die Trägheitsmomente in Bezug auf die Hauptträgheitsaxen durch den festen Punkt, so werden folgende Anfangsbedingungen über die Constanten angenommen:

$$y_0=0,\ A(B-C)x_0^2=C(A-B)z_0^2 \qquad (A>B>C).$$

Dann besteht ausser den drei bekannten algebraischen Integralen des Problems noch ein viertes, von Hess bereits angegebenes:

$$(4) \qquad Ax_0p+Cz_0r=0.$$

Nekrassoff zeigt, dass Frau von Kowalevsky diesen Fall nach ihren Methoden ebenfalls hätte finden müssen und ihn nur aus Unachtsamkeit übersehen hat, wie dies zuerst von Appelroth in der Moskauer Math. Samml. **16** (F. d. M. **24**, 888, 1892) dargelegt worden

ist. Der besondere Charakter dieses Falles bewirkt nicht, dass die Bewegung einen geringeren Grad von Allgemeinheit besitzt als die von Euler, Lagrange und S. Kowalevsky untersuchten lösbaren Fälle der Bewegungsgleichungen des Problems der Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt, da die Anzahl der zur Verfügung stehenden Constanten ebenso gross ist wie in jenen Fällen. In der Hess'schen Arbeit nun sind viele Eigenschaften der Bewegung dieses Falles unaufgeklärt geblieben. Der Verf. ist dazu gelangt, die Integration der complicirten Gleichung dieses Problems auf diejenige einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit eindeutigen, doppelt periodischen complexen Coefficienten zurückzuführen. Durch dieses Mittel verbreitet sich ein solches Licht über die Aufgabe, dass es möglich wird, das Bild der Rotation ziemlich vollständig zu entwerfen und die Rechnungen auf immer convergente Reihen zu beschränken, welche eine dem Probleme angemessene Einfachheit besitzen. Damit tritt dieser Fall der Rotation in die Reihe derjenigen ein, welche überhaupt genauer erkannt worden sind.

Unter dem rein mathematischen Gesichtspunkte bietet der hier untersuchte Fall verschiedenartige Besonderheiten.

Diesen Besonderheiten ist der Vorteil des Gebrauchs der complexen Grössen zuzuschreiben, deren geometrische Eigenschaften bei der Erforschung dieses Falles hervortreten, besonders bei ihrer Verknüpfung mit der sogenannten linearen Transformation, welche die Geraden und Kreise in Kreise verwandelt unter Wahrung der Aehnlichkeit in den unendlich kleinen Teilen. Die andere Besonderheit besteht darin, dass das Problem hier nicht auf eindeutige Functionen der Zeit gebracht wird, wie in den früher gelösten Fällen, sondern auf vieldeutige Functionen.

Der Verf. betont in der Einleitung, dass er seine eigenen Untersuchungen in der Abhandlung zur Darstellung bringt, dass er jedoch die in neuerer Zeit erschienenen russischen Arbeiten über den Gegenstand an geeigneter Stelle anführt. Lp.

N. Joukovsky. A propos d'une communication de M. R. Liouville, Sur la rotation des solides. C. R. **122**, 915-916.

Der von R. Liouville in C. R. **120**, 903-905 (F. d. M. **26**, 842, 1895) behandelte Fall der Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt ist vorher schon öfter untersucht worden, und zwar zuerst von Hess in Math. Ann. **37** (F. d. M. **22**, 920, 1890), später von Nekrassow (1892), Joukowsky (1893 u. 1894), Mlodzieiowski 1893). Man vergleiche das vorangehende Referat. Lp.

R. Liouville. Sur la rotation des solides et le principe de Maxwell. C. R. **122**, 1050-1051.

Zunächst entschuldigt sich der Verf. gegenüber einer Prioritätsreclamation, die von Joukowsky in einer vorangehenden Sitzung gegen

ihn erhoben war, mit seiner Unkenntnis der fremden Sprachen. Sodann weist er unter Bezugnahme auf die betreffende Note in C. R. **120** (F. d. M. **26**, 842, 1895) auf folgende Schlüsse hin:

Ist $\beta = 0$, $A(B-C)\alpha^2 = C(A-B)\gamma^2$, so giebt es kein eindeutiges Integral, das von den drei allen Fällen gemeinsamen Integralen sich unterscheidet. Damit besitzt man einen Fall, in welchem die von Poincaré als notwendig erkannten Bedingungen für die Möglichkeit eines vierten eindeutigen Integrales, die in dem Problem der Rotation immer bestätigt sind, nicht ausreichen. Bei der in Rede stehenden Frage der Mechanik versagt daher das Maxwell'sche Princip. Denn man kann die Anfangsbedingungen so wählen, dass $A\alpha p + C\gamma r$ beständig gleich Null ist, sich also nicht einem vorgegebenen Werte beständig nähern kann.

Lp.

KRISHNACHANDRA DE, J. L. KITCHIN, C. BICKERDIKE. Solution of question 12810. Ed. Times **64**, 69.

Ein homogener schwerer Stab stützt sich in geneigter Stellung mit dem einen Ende auf eine glatte horizontale Ebene, mit dem anderen auf eine glatte verticale Wand, so dass seine Horizontalprojection senkrecht zur verticalen Wand ist. In dem Augenblicke, wo er beim Abgleiten die Wand verlässt, ist der Druck auf die Horizontalebene ein Viertel seines Gewichtes. Lp.

J. HADAMARD. Sur la stabilité des rotations dans le mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe. Assoc. Franç. Bordeaux (1895), **24**, 1-6.

Der Verf. zeigt, dass die von O. Staude im J. für Math. **113** (F. d. M. **25**, 1428, 1894) abgeleiteten Ergebnisse dadurch erhalten werden können, dass man von der Theorie des relativen Gleichgewichtes ausgeht. Er discutirt die Bedingungen für ein Maximum der Kräftefunction und bestimmt die Intervalle, innerhalb deren die Lösungen der Aufgabe zu suchen sind. Zum Schlusse spricht er den Wunsch aus, dass die Untersuchung der Frage noch einmal wieder aufgenommen und einer gründlichen Erörterung unterzogen werden möchte. Lp.

F. KLEIN. Ueber die Bewegung des Kreisels. Gött. Nachr. 1896, 3-4.

F. KLEIN. Sur le mouvement d'un corps grave de révolution suspendu par un point de son axe (der Kreisel). Nouv. Ann. (3) **15**, 218-222.

In dieser kurzen Note giebt der Verf. den Kern seiner später veröffentlichten Untersuchungen über die Theorie des Kreisels an, so dass man dieselbe als vorläufiges Referat abdrucken könnte. Die Hauptsache besteht darin, dass die Drehungen um den festen Punkt O durch diejenigen unimodularen linearen Substitutionen $\zeta = (\alpha Z + \beta)/(\gamma Z + \delta)$ gegeben werden, bei denen einerseits α und δ, andererseits β und $-\gamma$ conjugirt imaginär sind (Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder. F. d.

M. **16**, 61, 1884). Als Resultat für den der Schwere unterworfenen Kreisel ergiebt sich, dass α, β, γ, δ elliptische Functionen zweiter Art werden, welche im Zähler und Nenner nur eine einzelne Thetafunction enthalten. Lp.

G. Koenigs. Sur les solutions périodiques du problème du mouvement d'un corps pesant quelconque, suspendu par un de ses points. C. R. **122**, 1048-1049.

Von den allgemeinen Bewegungsgleichungen der Drehung eines Körpers um einen festen Punkt ausgehend, gelangt man zu einer „Poinsot-Bewegung", indem man den Abstand μ des Anfangspunktes vom Schwerpunkte in den Differentialgleichungen gleich Null setzt, und erhält dann die Grössen p, q, r, γ, γ', γ'', als elliptische Functionen der Zeit. Der Verf. benachrichtigt die Akademie, dass nach seinen Untersuchungen für kleine Werte von μ, d. h. für den Fall eines Körpers von ganz beliebiger Gestalt, dessen Aufhängepunkt in der Nähe des Schwerpunktes sich befindet, ebenfalls unendlich viele periodische Lösungen bestehen. Lp.

Legoux. Sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Pression exercée sur le point fixe. Toulouse Mém. (9) **8**, 413-418.

In der Hauptsache Beweis des Satzes: Der bei der Bewegung von dem starren Körper auf den festen Punkt ausgeübte Druck wird erhalten, indem man zu dem aus der Verlegung der äusseren Kräfte nach diesem Punkte hervorgehenden statischen Drucke folgende drei Kräfte hinzufügt: Die erste ist dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit und dem Abstande des festen Punktes vom Schwerpunkte proportional und vom Ursprunge O nach diesem Schwerpunkte gerichtet. Die zweite ist zur Richtung OG und zur Winkelbeschleunigung senkrecht, wird ferner der Grösse nach durch den Inhalt des über diesen beiden, parallel mit sich nach dem Ursprunge verschobenen Strecken, construirten Parallelogrammes dargestellt. Die dritte, nach der momentanen Rotationsaxe gerichtete Kraft ist dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit und der Projection von OG auf diese Axe proportional. Anwendung dieses Satzes auf die sehr schnelle Bewegung eines in einem Punkte der Axe befestigten schweren Umdrehungskörpers. Lp.

G. T. Walker. On a dynamical top. Quart. Journ. **28**, 175-184.

Die Arbeit soll die Erscheinung begründen, dass alle glatten „celts" auf einer horizontalen Oberfläche nur in einer Richtung oder in keiner sich drehen. Die Beschreibung des zu diesem Zwecke construirten Kreisels ist jedoch so wenig klar, dass Ref. ohne die Figur, auf welche zwar hingewiesen, die aber nicht beigegeben ist, weder den Mechanismus des Kreisels noch die nachfolgende mathematische Behandlung hat verstehen können. Lp.

M. Koppe. Zur Kreiselbewegung. Poske Z. **9**, 127-131.

Auf S. 30 desselben Bandes der Zeitschrift ist für die Aufgabe, das Drehmoment zu berechnen, welches ein Kreisel beim Verdrehen seiner Axe hervorruft, eine Lösung gegeben, die für einen Ring oder eine Scheibe zu dem Werte $T\omega\, da/dt$ führt, wo ω die Rotationsgeschwindigkeit des Kreisels, da/dt die Winkelgeschwindigkeit seiner Axe, T das Trägheitsmoment für einen Durchmesser des Ringes oder der Scheibe bedeutet. Nach dem Verf. ist jedoch der richtige Wert $T_0\, \omega\, da/dt$, wo T_0 das Trägheitsmoment des Kreisels bezüglich seiner Symmetrieaxe ist, so dass dieser Wert bestehen bleibt, wenn der Kreisel ein Rotationskörper ist. Neben dem Beweise dieser Formel, die auf andere Weise vom Verf. schon im 4. Bande derselben Zeitschrift hergeleitet ist, enthält der Artikel eine Kritik der sonst gegebenen elementaren Darstellungen der Theorie der Kreiselbewegung. Lp.

A. G. Greenhill. The associated dynamics of a top and of a body under no forces. Lond. M. S. Proc. **27**, 545-612.

Bericht in F. d. M. **26**, 847—848, 1895.

R. Marcolongo. Sur une propriété de deux mouvements à la Poinsot concordants. Teixeira J. **13**, 17-21.

In dieser Note wendet der Verf. die in seiner Abhandlung: „Sopra due moti di Poinsot concordanti“ (Annali di Mat. (2) **21**; F. d. M. **25**, 1434, 1894) abgeleiteten Formeln zum Beweise des Greenhill'schen Satzes (Dynamics of a top. Lond. M. S. Proc. **26**, F. d. M. **26**, 846, 1895) an: Das Ende H der Axe des resultirenden Paares der Bewegungsgrössen beschreibt in dem Körper eine Herpolhodie in einer zur Axe senkrechten Ebene und in dem Raume eine andere Herpolhodie in einer Horizontalebene. Hierbei bedient er sich der Weierstrass'schen Functionen $\wp$ und σ. Tx. (Lp.)

Münter. Antwort auf die Kritik des Kreiselartikels Seite 570 des vor. Jahrg. Hoffmann Z. **27**, 19-21.

Franke, Schmidt. Erwiderungen auf die Antwort des Dr. Münter. Ebenda 99-101.

Polemik über die in F. d. M. **26**, 849, 1895 kurz erwähnten Artikel. Lp.

S. Tschaplygin. Ueber die Bewegung eines schweren Drehungskörpers auf einer horizontalen Fläche. Moskau Phys. Sect. **9**, Heft 1, 10-15 (Russisch, 1897).

Es wird eine horizontale Fläche genommen, welche kein Gleiten des Körpers zulässt, was zwei nicht integrirbare Gleichungen zwischen 5 Parametern der Aufgabe und ihrer Derivirten nach der Zeit giebt.

Im ersten Teil der Arbeit zeigt der Autor die Ungenauigkeit der Methode E. Lindelöf's für die Lösung desselben Problems (Acta societatis scientiarum Fennicae **21**, F. d. M. **25**, 1445, 1893/94). Diese Ungenauigkeit besteht nach der Ansicht des Autors darin, dass Lindelöf die Formel der lebendigen Kraft mit Hülfe der oben erwähnten Gleichungen (zwischen den Parametern) vereinfachte und sich dieser vereinfachten Formel bediente, um die Differentialgleichungen in der Lagrange'schen Form zu bekommen.

Der Autor macht die Lösung der Aufgabe von der Integration folgender Gleichungen abhängig:

$$A\frac{dp}{d\alpha}+B\frac{\zeta}{\xi}\frac{dr}{d\alpha}=Br+Ap\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\zeta\frac{dp}{d\alpha}-\frac{B+M\xi^2}{M\xi}\frac{dr}{d\alpha}=r\frac{d\xi}{d\alpha}-p\left(\frac{d\xi}{d\alpha}+\xi-\zeta\operatorname{tg}\alpha\right).$$

Hier ist α der Winkel, welchen die Symmetrieaxe des Körpers $o\zeta$ mit der Horizontalebene bildet; p und r sind die Projectionen der Winkelgeschwindigkeit auf die beweglichen Axen $o\xi$ und $o\zeta$, die in der verticalen Meridianebene des Körpers liegen und den Anfang im Schwerpunkte haben. A und B sind die Trägheitsmomente des Körpers in Bezug auf diese Axe; M ist die Masse des Körpers; ξ und ζ sind die Coordinaten des Berührungspunktes, welche Functionen des Winkels α sind, die sich nach der Meridiancurve mit Hülfe der Gleichung bestimmen:

$$\frac{d\xi}{d\zeta}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Wenn das oben angeführte Grundsystem der Gleichungen integrirt ist, dann wird die Aufgabe durch Quadraturen bis zu Ende gebracht. Darauf geht der Autor an particulare Fälle. Er zeigt unter anderem, dass das Grundsystem integrirt werden kann, wenn der Körper eine nicht homogene Kugel ist, deren Centrum mit dem Schwerpunkte nicht zusammenfällt.

Der Autor giebt ausserdem eine Methode zur Lösung obiger Probleme für den Fall, wenn zu dem Körper ein Gyroskop hinzugefügt ist, dessen Axe in zwei Punkten befestigt ist, welche auf der Symmetrieaxe des Körpers liegen. Das Grundsystem der Gleichungen unterscheidet sich von dem oben erwähnten System nur dadurch, dass in dem ersten Teile der ersten Gleichung eine Constante hinzugefügt ist. Jk.

S. Tschaplygin. Ueber eine mögliche Verallgemeinerung der Flächentheoreme mit Anwendung auf das Problem des Rollens der Kugeln. Moskau. Math. Samml. **20**, 1-32 (Russisch, 1897).

Der Autor nimmt an, dass das mechanische System eine besondere Axe von unveränderlicher Richtung hat. Diese Axe hat folgende Eigenschaften: Das System kann sich um diese Axe drehen; die Summe der Momente der äusseren Kräfte ist in Bezug auf diese Axe gleich

Null; ein Punkt dieser Axe hat eine Geschwindigkeit, welche der des Schwerpunktes parallel und proportional ist. Dann wird die Summe S der Momente der Bewegungsgrössen in Bezug auf diese Axe der Gleichung genügen: $S = \text{const.}$

Das ist das verallgemeinerte Integral der Flächen. Wenn das System so in zwei Teile geteilt werden kann, dass jeder Teil seine besondere Axe hat, und wenn die Summen der Momente der Kräfte, mit welchen ein Teil des Systems auf die anderen einwirkt, in Bezug auf diese zwei Axen sich in dem constanten Verhältnis $\frac{k}{k'}$ befinden, so ist

$$S + \frac{k}{k'} S' = \text{const.}$$

Die Existenzbedingungen dieser Integrale können in einigen Fällen erweitert werden, wenn man das System in mehrere Teile zerlegen kann.

Weiter nimmt der Autor an, dass ein Teil der Systeme eine besondere Axe hat und der andere Teil eine Translationsbewegung haben kann, in beliebiger Richtung, welche perpendiculär zu der erwähnten Axe ist. Das System befindet sich unter der Wirkung von Kräften, die durch Uebertragung auf einen Punkt eine resultirende Kraft geben, welche der Axe parallel ist. Wenn hierbei die Summe der Momente (in Bezug auf die besondere Axe) der Kräfte, mit welchen ein Teil des Systems auf den andern wirkt, gleich Null ist, so wird leicht ein Integral gefunden, welches die Summe der Momente der Bewegungsgrössen im ersten Teile des Systems mit den Componenten der Bewegungsgrössen des Schwerpunktes im zweiten Teile des Systems verbindet. Solcher Integrale kann es mehr als eines geben.

Alle diese Theoreme werden durch Beispiele erläutert. Von diesen Beispielen sind folgende besonders interessant:

1) Eine homogene hohle Kugel B rollt auf einer horizontalen Ebene. In ihrem Innern befindet sich eine andere Kugel A. Die Kugel B kann auf der Ebene, ebenso wie die Kugel A in B, rollen, ohne zu gleiten. Dieses Problem wird vom Autor bis zu Ende durch Quadraturen gelöst.

2) Die Kugel A kann sich ohne Reibung in der Kugel B bewegen, und die Kugel B rollt auf der Ebene ohne Gleiten. Dieses Problem gestattet drei Integrale des dritten oben erwähnten Typus und wird bis zu Ende gelöst. Dabei bewegt sich der Schwerpunkt der Kugel A so, wie ein schwerer materieller Punkt, der sich auf der Oberfläche eines bestimmten Umdrehungsellipsoids befindet, dessen Axe vertical bleibt und gleichförmig und geradlinig nach der horizontalen Richtung sich bewegt.

Jk.

L. Picart. Sur la rotation d'un corps variable. C. R. **122**, 1264-1265.

Mit Hülfe einer Poincaré'schen Methode wird aus den Liouville'schen Differentialgleichungen des Problems der Satz gefolgert: „Die einzige genaue Periode, welche in der Aenderung des Pols auf der

Oberfläche der Erdkugel bestehen kann, ist die sogenannte Euler'sche Periode." Man vergl. das Referat über die grössere Arbeit Picart's in F. d. M. **25**, 852, 1895. Lp.

E. et M. Fouché. Sur le déplacement de l'axe de rotation d'un corps solide dont une partie est rendue momentanément mobile par rapport au reste de la masse. C. R. **128**, 93-96.

Wenn ein materielles System, auf welches keine äussere Kraft einwirkt, in Bewegung um seinen Schwerpunkt begriffen gegeben wird, wobei die Bewegung zunächst so geschieht, als ob das System starr wäre, so kann man, wie bewiesen wird, durch einen geschlossenen Cyklus von Operationen, d. h. unter endlicher Zurückführung des Systems auf seine ursprüngliche Gestalt, und indem man nur innere Kräfte des Systems ins Spiel treten lässt, dahin gelangen, die Rotationsaxe des Systems zur Annahme einer beliebigen Lage zu bringen, die sie niemals hätte annehmen können, wenn das System unveränderlich geblieben wäre. Die Art der Ueberführung der Axe aus einer Anfangslage in eine vorgegebene relative Lage soll in einer späteren Mitteilung gelehrt werden. Lp.

V. Volterra. Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi policiclici. Annali di Mat. (2) **24**, 29-58.

Die vorliegende Arbeit bildet die Fortsetzung der Reihe von Abhandlungen, über welche in F. d. M. **26**, 854ff., 1895 referirt worden ist. Dort wurde die Rotation eines Körpers untersucht, in welchem stationäre Bewegungen bestehen; die Lösung wurde mit Hülfe der elliptischen Transcendenten erreicht. Hierbei war die Annahme gemacht worden, dass die inneren Bewegungen durch die Einwirkung innerer Kräfte stationär erhalten wurden. Gegenwärtig erörtert der Verf. genauer die Wirkungsart dieser inneren Kräfte, ihre Notwendigkeit zur Erhaltung der stationären inneren Bewegungen, die Folgen, welche eintreten, wenn sie jener Bedingung nicht genügen. Wir führen von den Ergebnissen der umfangreichen analytischen Untersuchung die folgenden an: Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die lebendige Kraft des Systems constant erhalten bleibe, kommen auf eine der folgenden Gruppen zurück:

1) dass die Rotationsbewegung des Systems permanent ist; 2) dass man hat $m_1 = \varepsilon\sqrt{A\,(A-B)}$, $m_2 = 0$, $m_3 = \pm\,\varepsilon\sqrt{C\,(B-C)}$, $A > B > C$, und dass als Anfangsbedingung die Gleichung gilt (über die Bezeichnungen vergl. das Referat im Jahrgange 1895):

$$\sqrt{A(A-B)}p \pm \sqrt{C(B-C)}\,r + \varepsilon\,(A-C) = 0;$$

3) dass das Trägheitsellipsoid ein Umdrehungsellipsoid ist bezüglich der Axe der inneren Bewegungen; 4) dass das Trägheitsellipsoid eine Kugel ist. In den beiden letzten Fällen können die Anfangsbedingungen der Bewegung beliebig sein.

Ein Körper, dessen Gestalt und Dichtigkeitsverteilung constant ist, in dessen Innerem ein polycyklisches System besteht, dessen Parameter sich unveränderlich erhalten können, und auf dessen cyklische Coordinaten keine Kraft einwirkt, rotirt unter der Einwirkung eines bewegenden Paares um einen festen Punkt wie ein anderer Körper, in welchem stationäre innere Bewegungen bestehen, und welcher von dem nämlichen bewegenden Paare angegriffen wird. Die cyklischen Intensitäten hängen in jedem Augenblicke von der Rotation des Körpers ab. Ist daher das bewegende Paar Null, so kann man die Componenten der Rotation und die cyklischen Intensitäten des Systems als elliptische Functionen der Zeit ausdrücken, ebenso auch die neun Richtungscosinus der Winkel, welche die beweglichen Axen mit den festen Axen bilden, mit Hülfe eindeutiger Functionen der Zeit.

In einer längeren Note am Ende der Arbeit wird die Abhandlung gewürdigt, welche Beltrami in Lomb. Ist. Rend. (2) **28** veröffentlicht hat (vergl. F. d. M. **26**, 821, 1895), und welche der Verf. bei Abfassung seiner Abhandlung noch nicht gekannt hatte. Aus einer Gleichung Beltrami's leitet Volterra das Theorem ab, welches die adiabatische Bewegung eines Systems, in welchem cyklische Bewegungen bestehen, auf eine isocyklische Bewegung zurückführt. Lp.

G. Peano. Sul moto del polo terrestre. Rom. Acc. L. Rend. (5) **5**$_1$, 163-168.

In einer gleichbetitelten Note derselben Sammlung hatte der Verf. 1895 die Grassmann'sche Ausdehnungslehre auf die Principien der Mechanik angewandt und als Zahlenbeispiel für den letzten Satz eine Schätzung der Geschwindigkeit vorgenommen, mit welcher sich die Pole vermöge der Bewegungen des flüssigen Teiles der Erdkugel verschieben (vergl. F. d. M. **26**, 861, 1895). Um den Gegenstand für einen weiteren Leserkreis verständlicher darzustellen, übersetzt er seine frühere Darstellung gegenwärtig in die Sprache der cartesischen Coordinaten, wobei er auch die andere Note berücksichtigt: Sul moto d'un sistema nel quale esistono moti interni variabili (F. d. M. **26**, 862, 1895).

Lp.

S. Newcomb. The influence of atmospheric and oceanic currents upon terrestrial latitudes. Nature **53**, 618-619.

Erörterungen über das Thema, welche sich an den folgenden Satz knüpfen: Eine keinem Zwange unterworfene, starre Kugel mit gleichen Trägheitsmomenten befinde sich in einem Zustande freier Rotation. Diese Kugel trage auf ihrer Oberfläche eine oder mehrere Schichten eines continuirlichen, beweglichen Stoffes. Dieser bewegliche Stoff werde in einem Zustande stetiger Bewegung bezüglich der Kugel durch Wirkungen und Gegenwirkungen zwischen demselben und der Kugel erhalten, ohne Einwirkung irgend einer äusseren Kraft. Es möge P der Pol der Drehaxe der Kugel sein, die auch ihre Momentanaxe sein wird, und es möge Q die Momentanaxe der gesamten Bewegungen des beweglichen Stoffs bezüglich

der Kugel sein. Endlich möge J das Trägheitsmoment der Kugel und M das Impulsmoment der ganzen beweglichen Masse um die Axe Q sein. Dann wird die Kugel eine solche Bewegung annehmen, dass der Pol P, während er in einer festen Richtung im Raume vom Kugelmittelpunkte aus bleibt, sich stetig in Bezug auf die Kugelmaterie um den Pol Q bewegt mit einer Winkelgeschwindigkeit M/J. Lp.

Sir Robert Ball. Note on a point in theoretical dynamics. Cambr. Proc. **9**, 193-195.

Gegeben seien zwei Schrauben, von denen die eine als Bewegungsschraube der anderen als Impulsschraube entsprechen soll, so ist es auf mannigfache Weise möglich, einen starren Körper hinzuzuconstruiren, welcher dieses Verhältnis realisirt. Dagegen ist es unmöglich, einen starren Körper zu finden, an welchem zwei gegebene Schrauben als Bewegungsschrauben zwei willkürlichen anderen als Impulsschrauben entsprechen — es sei denn, dass gewisse Bedingungen erfüllt sind. Wie lauten diese Bedingungen? Man lege durch die beiden Bewegungsschrauben, ebenso wie durch die beiden Impulsschrauben, je ein Cylindroid. Die Schrauben des einen Cylindroids sind projectiv auf die des anderen bezogen. Dabei sind drei ausgezeichnete Paare entsprechender Schrauben von vorn herein bekannt, also ist die projective Beziehung festgelegt. Nun müssen die Doppelverhältnisse, welche die beiden fraglichen Bewegungsschrauben mit den drei ausgezeichneten Bewegungsschrauben bilden, bez. gleich sein den Doppelverhältnissen, welche die beiden fraglichen Impulsschrauben mit den drei ausgezeichneten Impulsschrauben bestimmen. Hieraus ergeben sich die gesuchten Bedingungen. A. S.

A. S. Chessin. On the motion of a homogeneous sphere or spherical shell on an inclined plane, taking into account the rotation of the Earth. American M. S. Bull. (2) **2**, 302-309.

Wie die Rotation der Erde die Bewegung des Foucault'schen Pendels und Gyroskops, sowie eines frei fallenden Körpers beeinflusst, so findet auch, wie der Verf. hier nachweist, eine berechenbare Modification der Bewegung einer homogenen Kugel oder sphärischen Schale auf einer gegen den Horizont geneigten Ebene statt. Die Rechnung wird unter Vernachlässigung des Quadrates der Winkelgeschwindigkeit der Erde und in der Voraussetzung durchgeführt, dass die Kugel bloss rollt, nicht aber auch gleitet. Die Endformeln für die Coordinaten des Mittelpunktes der Kugel zeigen, dass, wenn die Kugel beim Beginne der Bewegung keine Geschwindigkeit besitzt, ihr Mittelpunkt eine semikubische Parabel beschreibt. Die Wirkung der Rotation der Erde auf die Bewegung des Mittelpunktes der Kugel oder der Kugelschale besteht also darin, sie von einer Neigungslinie der schiefen Ebene abzulenken. Diese Ablenkung kann ebenso gut nach Westen wie nach Osten vom Ortsmeridian stattfinden, in einem besonderen Falle auch verschwinden. Dies hängt von

der Orientirung der schiefen Ebene, ihrem Neigungswinkel und der Breite des Ortes ab. Lp.

P. Appell. Sur l'emploi des équations de Lagrange dans la théorie du choc et des percussions. Journ. de Math. (5) **2,** 5-20.

Nähere Ausführung der gleichbetitelten Note in C. R. **116,** über deren Inhalt das Referat in F. d. M. **25,** 1375, 1893/94 völlig ausreichende Auskunft giebt. In der vorliegenden Abhandlung werden nach den allgemeinen Ueberlegungen noch mehrere Beispiele erledigt, nämlich: 1) der directe Stoss zweier Kugeln, 2) das ballistische Pendel, 3) eine Kreisscheibe stösst gegen eine feste Axe, 4) das Carnot'sche Theorem vom Verluste an lebendiger Kraft. Lp.

L. Lecornu. Sur un mode nouveau de régulation des moteurs. C. R. **122,** 1188-1191.

H. Léauté. Remarques au sujet de la note précédente. C. R. **122,** 1191.

Zum Ersatze der Centrifugalregulatoren, welche bekanntlich die genaue Verwirklichung des Isochronismus im Gange einer Maschine nicht leisten, greift Lecornu auf einen älteren Gedanken zurück, der darin besteht, die Bewegungen der betrachteten Maschine mit denjenigen eines unabhängigen, mit gleichförmiger constanter Geschwindigkeit sich drehenden Mechanismus zu synchronisiren. Die vom Verf. zu diesem Behufe neu ersonnene Construction, deren Beschreibung nur summarisch ohne Abbildung gegeben ist, lässt sich so einrichten, dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung mit constanten Coefficienten, auf welche die Theorie des Mechanismus führt, keine periodischen Lösungen hat, sondern Integrale von der Form $C.e^{-\alpha t}$, die rasch einem constanten Endwerte zustreben. Léauté erkennt in seinen zugefügten Bemerkungen die Möglichkeit der praktischen Brauchbarkeit dieser Idee an, macht aber auf Schwierigkeiten in der Verwirklichung aufmerksam und meint, dass die störenden Oscillationen wegen der Mängel der praktischen Verwirklichung wohl auch sich einstellen dürften. Lp.

L. Lecornu. Sur la régulation des moteurs. C. R. **122,** 1322-1323.

Zusatz zu der oben besprochenen Note. Statt einer plötzlichen Aenderung des Motormomentes, dargestellt durch c, wird jetzt c beliebig als Function der Zeit angenommen, z. B. $c = c_0 \sin\gamma t$, und danach die früher berechnete Formel abgeändert. Lp.

M. Osnos. Vereinfachte Methode zur Ermittelung der „Ueberschuss"-Arbeit bei Bestimmung des Ungleichförmigkeitsgrades von Maschinen mit Kurbelmechanismus. Civiling. **42,** 557-564.

Die hier mitgeteilte Methode ist, ebenso wie die früher benutzte, eine graphische. Während man aber bisher mit Hülfe des Kurbelweg-

diagramms ein besonderes Diagramm der Tangentialkräfte construirte, in welchem dann erst die Planimetrirung der Ueberschlussflächen vorgenommen wurde, werden hier diese Flächen im Kurbeldiagramm selbst und im richtigen Massstab dargestellt. F. K.

Th. Beck. Historische Notizen XVIII. Leonardo da Vinci (1452-1519). Civiling. **42,** 400-456.

Die Accademia dei Lincei hat im Jahre 1894 begonnen, den Codice atlantico, die grösste Sammlung Leonardo'scher Handschriften und Skizzen, herauszugeben. Von den in Aussicht genommenen 35 Lieferungen waren damals fünf erschienen. Der Verf. bespricht ausführlich die in denselben enthaltenen Beschreibungen von Maschinen. F. K.

C. Cranz. Compendium der theoretischen äusseren Ballistik. Zum Gebrauch von Lehrern der Mechanik und Physik an Hochschulen; von Artillerieoffizieren; Instructoren an Schiessschulen, Artillerieschulen und Kriegsakademien; Mitgliedern von Artillerie- und Gewehr-Prüfungscommissionen; Gewerbetechnikern. Mit 110 Figuren im Text. Leipzig: B. G. Teubner. XII u. 511 S. gr. 8°.

Die ballistische Litteratur ist eine sehr umfangreiche, aber auch sehr zerstreute. Ausser denjenigen grösseren Werken, welche der Ballistik ausdrücklich gewidmet sind, und deren Zahl nicht allzugross ist, sind die bezüglichen Schriften teils in Gestalt von selbständigen Broschüren erschienen, teils aber, und zwar vorzugsweise, in Zeitschriften der verschiedensten Art: in mathematischen, in physikalischen, in militärwissenschaftlichen, in technischen Blättern veröffentlicht worden, und da nur die grössten Landesbibliotheken die Journale dieser auseinandergehenden Richtungen anschaffen können, so war es für den Einzelnen sehr schwer, eine Uebersicht über die einschlägigen Werke zu erhalten, oder gar Einsicht von ihnen zu nehmen. Der durch seine eigenen Arbeiten auf dem Gebiete der theoretischen, äusseren Ballistik bekannte Verf. des vorliegenden Buches hat daher allen Interessenten durch die Abfassung und Herausgabe desselben einen grossen Dienst geleistet; das erkennen selbst diejenigen an, welche die Behandlung einzelner Kapitel bemängeln, gewisse Partien streichen, neue Gegenstände hinzufügen möchten. Als erste Frucht einer langjährigen Arbeit bietet das Buch ungemein viel Belehrung; als Compendium kann es selbstverständlich die Fragen nicht mit derselben Tiefe und Ausdehnung behandeln wie Monographien. Voraussichtlich wird der Verf. selbst noch manches Material für eine folgende Auflage sammeln, die wahrscheinlich in Folge des stärkeren Bedarfes bei einem grösseren Leserkreise in nicht zu langer Zeit nötig werden wird. Was Ref. an diesem Werke, wie an den meisten deutschen und den französischen fast immer, vermisst, ist ein bequemes (alphabetisches) Sachregister. Ein Compendium soll zum Nach-

schlagen dienen; daher muss es ermöglicht werden, dass der Benutzer in kürzester Zeit herausbringt, an welcher Stelle der gesuchte Gegenstand oder Name im Buche vorkommt, oder ob er nicht darin enthalten ist. Dies gilt besonders für die vom Verf. so ausgiebig beigebrachten Litteraturnotizen. Ausser diesem allgemeinen Wunsche will Ref. keine weiteren Einzelheiten erwähnen, sondern vor allem der Uebersicht halber die Titel der einzelnen Abschnitte hersetzen.

1. Abriss einer Geschichte der theoretischen äusseren Ballistik. 2. Wurfbewegung ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand. 3. Ueber die wichtigsten Gesetze für den Luftwiderstand, insbesondere in seiner Abhängigkeit von der Geschwindigkeit. 4. Ueber die Integration der Differentialgleichungen für die Geschossbewegung im lufterfüllten Raum; das Geschoss als Massenpunkt betrachtet. 5. Die wichtigsten Näherungsmethoden zur Lösung des ballistischen Problems. 6. Ueber die Abhängigkeit des Luftwiderstandes von der äusseren Form des Geschosses. Berechnung von Resultante und Angriffspunkt. 7. Die constanten Geschossabweichungen, ihre Ursachen und ihre Berechnung. 8. Mitberücksichtigung der konischen Geschosspendelung in der Näherungslösung des ballistischen Problems. 9. Wahre und reducirte Querschnittsbelastung. Bedingung für die Stabilität des Geschosses während seines Flugs durch die Luft. Grad der Stabilität. 10. Die zufälligen Geschossabweichungen und deren Gesetz (Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die äussere Ballistik). 11. Fortsetzung. Verwendung der Schiessresultate zur Aufstellung von Schusstafeln. 12. Ueber das Eindringen des Geschosses in das materiell ausgedehnte Ziel. 13. Schematisches Verfahren zur Lösung der einzelnen ballistischen Aufgaben, mit Schlüssel der Bezeichnungen. 14. Vorschlag zur Aufstellung neuer ballistischer Tafeln. 15. Die wichtigsten mechanischen Hülfsmittel der theoretischen Ballistik. Anhang: I. Litteraturnoten. II. Tabellen. Namenregister, Verbesserungen und Zusätze.

Zum Schlusse unserer Anzeige heben wir diejenigen Untersuchungen hervor, welche der Verf. als seine eigenen in Anspruch nimmt. 1. Mitberücksichtigung der konischen Pendelung des Geschosses, also vor allem des Einflusses von Drall- und Geschosslänge bei der Näherungslösung des ballistischen Problems, wobei sich die mathematische Definition der wahren Querschnittsbelastung im Gegensatz zu der bisher meist benutzten reducirten Querschnittsbelastung von selbst aufdrängt. 2. Aufstellung einer Stabilitätsbedingung, d. h. einer Bedingung dafür, dass das Geschoss bei seinem Flug durch die Luft sich nicht überschlägt. 3. Nähere Untersuchung der Bahn der Geschossspitze während einer konischen Pendelung. 4. Ein Vorschlag zur Berechnung neuer, mehr empirischer, ballistischer Tabellen. 5. Eine einfache graphische Construction der Flugbahn, wobei man nur nötig hat, entweder das ballistische Problem ohne Rücksicht auf die Schwere zu lösen, oder die empirische Tabelle von Krupp zu verwenden.

Lp.

Fr. Ritter von Loessl. Die Luftwiderstands-Gesetze, der Fall durch die Luft und der Vogelflug. Mathematisch-mechanische Klärung auf experimenteller Grundlage entwickelt. Wien: Alfred Hölder. IV u. 304 S. gr. 8°.

Das Werk enthält die Ergebnisse längerer experimenteller und theoretischer Arbeiten des Verf. Die Versuche haben manche interessante Thatsache ans Licht gezogen oder bestätigt; dagegen sind die theoretischen Partien des Buches nur schwach fundirt und vielen Angriffen und Einwänden unterworfen. Da nur wenige bezügliche Schriften citirt werden und viele bekannte Thatsachen ohne Erwähnung bleiben, so scheint die Vermutung begründet, dass der Verf. ohne genügende Kenntnis seiner Vorgänger die Untersuchungen zumeist als Autodidakt durchgeführt hat. Die praktischen Erfahrungen, welche ihm als Oberingenieur zur Seite standen, haben gewiss dazu beigetragen, dass die Versuchsanordnungen zweckmässig getroffen und positive Ergebnisse erzielt wurden.

Von den beiden hauptsächlich benutzbaren Methoden, der kreisförmigen und der geradlinigen Bewegung des Versuchskörpers, ist die erstere an Rundlaufapparaten bevorzugt, und die Bemerkungen über die beste Art der Durchführung solcher Experimente sind sehr beachtenswert. Das Hauptresultat besteht in dem Nachweise eines Stauhügels unbewegter, mitgeführter Luft vor dem sich bewegenden Körper. Ist die Richtung der Bewegung senkrecht gegen eine ebene Platte, so ist die Böschung dieses Hügels 45° gegen die Platte. So hat der Lufthügel bei einer Kreisplatte, deren Bewegungsrichtung senkrecht zu ihrer Ebene ist, die Gestalt eines Kreiskegels, bei dem der Winkel zwischen der Axe und einer Seite 45° beträgt. Wenn die Bewegungsrichtung der ebenen Platte nicht zur Ebene senkrecht ist, so nimmt der Lufthügel eine unsymmetrische Form an, die der Verf. zwar durch mitgeführte brennende Kerzen experimentell bestimmt, für deren gesetzmässige Gestalt er aber nur eine willkürlich angenommene Hypothese geltend macht. — Wenn dadurch die Thatsache eines mit der bewegten Fläche fortgeführten Lufthügels bei den gewählten Geschwindigkeiten des Rundlaufapparates bis acht und zehn Metern in der Secunde ausser Zweifel gestellt ist, so ist damit der sicher gestellte Inhalt des Buches erschöpft. Durch Schlüsse, die nicht überzeugend sind, folgert der Verf. aus der Existenz des Lufthügels die Formel $P = v^2 F\gamma/g$ als die des Luftwiderstandes in Kilogrammen, wenn der Flächeninhalt F der zur Bewegungsrichtung senkrechten ebenen Platte in Quadratmetern ausgedrückt ist, v die relative Geschwindigkeit von Luft und Platte in Metern bedeutet, γ das Gewicht eines Kubikmeters Luft in Kilogrammen ist. Das so gefundene Widerstandsgesetz wird durch die Versuche bestätigt (abgesehen von gewissen, durch die Gestalt der Platte bedingten, hinzuzufügenden Erfahrungscoefficienten, die zwischen 1 und 0,83 liegen) und nunmehr für das allein mögliche und unter allen Umständen gültige Gesetz hingestellt, über welches z. B. Zahlenbeispiele bei 280 m und 442,6 m Geschwindigkeit gebildet werden. Ob der Verf. wirklich nichts erfahren hat von allen den vergeblichen Bemühungen, in der Ballistik ein einheitliches Widerstandsgesetz zu

finden, das für alle Geschwindigkeiten passt? Wir wollen deshalb auf die übrigen, für schiefe Bewegungen der Platte gebildeten Gesetze und die darauf gegründeten Zahlenrechnungen nicht eingehen. Dieser erste Teil des Werkes reicht bis S. 171.

Als Anwendung der entwickelten Theorien sucht der Verf. nun das „Gesetz des Falles durch die Luft, was nach Wissen des Verf. noch niemals unternommen wurde, oder doch bei der bestandenen Unklarheit über den Luftwiderstand nicht correct durchgeführt werden konnte.“ Natürlich findet er keine anderen Formeln als diejenigen, welche in jedem Lehrbuch der Mechanik für den Fall eines mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportionalen Widerstandes gleich bei der ersten Behandlung der geradlinigen ungleichförmigen Bewegung eines Punktes gegeben werden. Allerdings begnügt man sich dort immer mit der Ableitung der Formeln, während der Verf. eine grosse Zahl von durchgerechneten numerischen Beispielen, zum Teil tabellarisch zusammengestellt, mitteilt, so dass vierzig Seiten hierdurch gefüllt werden. Es dürfte für manchen Leser interessant sein, aus diesen Zahlen zu ersehen, wie rasch gewisse Zustände eintreten, die sich von den nur asymptotisch erreichbaren durch sehr geringe Abweichungen unterscheiden; die absoluten Zahlen an sich sind ja natürlich zweifelhaft, weil das zu Grunde gelegte Gesetz nicht sicher ist. — Der Rest des Buches macht endlich eine Anwendung der bis dahin gewonnenen Ergebnisse auf den Vogelflug, unter anderem auf den Flug einer Taube (S. 220—241), auf den auch nachher immer wieder zurückgegriffen wird; viele Erscheinungen erfahren hierbei plausible Erklärungen, die aus Mangel an einer anderen annehmbar erscheinen. Alle Betrachtungen sind immer durch viele Zahlenbeispiele erläutert.

Ref. hat das Buch weitläufiger angezeigt, als nach den als sicher anzusehenden Ergebnissen gerechtfertigt erscheint. Vor den sonstigen Schriften auf diesem Gebiete zeichnet es sich aber durch das Streben aus, die vorgetragenen Ansichten mit den sonst als gültig erkannten Gesetzen in Uebereinstimmung zu bringen, und verdient daher grössere Beachtung. Dagegen ist der Mangel an Berücksichtigung der Litteratur, besonders der ballistischen, durchaus zu rügen. Lp.

F. Siacci. Sulla resistenza dell'aria dei projetti. Rivista d'artiglieria e genio 1896, Jan., Febr., März.

F. Siacci. Ueber den Luftwiderstand bei Geschossen. Uebersetzt von Fellmer. Arch. f. Art. **103**, 258-280, 335-359.

F. Chapel. Sur une nouvelle étude de balistique extérieure de M. Siacci. Revue d'Art. **48**, 165-172.

Die merkwürdige Entdeckung von Chapel, dass der Luftwiderstand r gegen die Geschosse bei Geschwindigkeiten v oberhalb 300 m in der Secunde sich durch die lineare Gleichung $r = a(v - h)$ darstellen lässt, wo a und h Constanten bezeichnen (vergl. F. d. M. **26**,

863—864, 1895), hat Siacci bewogen, die Frage nach einer einheitlichen Formel für den Luftwiderstand aus dem folgenden Gesichtspunkte von neuem zu behandeln. Nimmt man r und v als cartesische Coordinaten eines Punktes, so stellt die Chapel'sche Gleichung eine Gerade dar, offenbar eine Asymptote für die das wahre Gesetz darstellende Curve. In der Annahme, dass diese letztere Curve eine einfache algebraische Curve mit Asymptote sei, versucht nun der Verf. eine Hyperbel durch den Punkt $r=0$, $v=0$ und vier andere passend gewählte Punkte. Aus den russischen und englischen Versuchen von Mayevski und Bashforth ergiebt sich so die Gleichung:

$$(1) \quad Cr = \delta i\,[0{,}1925v - 48{,}11 + \sqrt{(0{,}1725\,v - 47{,}89)^2 + 21{,}12}],$$

oder in rationaler Form:

$$\left(r\cdot\frac{C}{\delta i} - 0{,}365v + 96\right)\left(r\cdot\frac{C}{\delta i} - 0{,}02\,v + 0{,}22\right) = 96\cdot 0{,}22.$$

Hierin ist δ das Gewicht eines Kubikmeters Luft in Kilogrammen, geteilt durch 1,206, i der Formwert des Geschosses, C sein ballistischer Coefficient $= p/1000a^2$, wo a der Durchmesser des Geschosses in Metern, p sein Gewicht in Kilogrammen bedeutet.

„Dieselbe Hyperbel giebt ebensogut, ja vielleicht noch besser die Versuche der holländischen Gruppe (Hojel) und der Meppener Gruppe (Krupp) bis zu den grössten Geschwindigkeiten wieder, indem man einfach die Ordinaten (die Widerstände r) der Hyperbel mit dem Coefficienten 0,896 multiplicirt. Dieser Coefficient kann demnach als der mittlere Formwert der Geschosse der zweiten und dritten Gruppe angesehen werden, während 1 der auf die erste Gruppe bezügliche Formwert ist. Die Asymptote der Hyperbel, welche die beiden letzten Gruppen darstellt, nähert sich ausserordentlich der Geraden, welche Chapel vorschlägt, um die Widerstände für Geschwindigkeiten von 300 m und darüber darzustellen. Wenn diese Asymptote nicht genau dieselbe Gerade ist, so liegt dies daran, dass wir den Widerstand nicht durch eine Gerade, sondern durch eine Hyperbel darstellen wollen."

Diese Hyperbel ergiebt für den Widerstand also einen algebraisch irrationalen Ausdruck, der aber, in die Differentialausdrücke der vier ballistischen Functionen D, J, T, A eingeführt, drei derselben mit algebraischen und logarithmischen Ausdrücken integrabel macht, hinsichtlich der vierten zu einer höheren logarithmischen Function führt, deren numerische Werte sich leicht aus denen von J und D ableiten lassen. Ausserdem muss man auch die Werte einer gewissen Function β für die völlige Lösung des ballistischen Problems kennen, und der durch die Hyperbel dargestellte Widerstand führt für β zu elliptischen Integralen aller drei Gattungen.

Nun lässt sich aber die Hyperbel auf höchst einfachem analytischen Wege in zwei „Zwillingshyperbeln" teilen, von denen die eine den Widerstand von den kleinsten Geschwindigkeiten bis etwa 280 m hin darstellt, die andere von hier an weiter. Beide Zwillingshyperbeln be-

rühren die ursprüngliche Hyperbel und besitzen unter einander einen Contact zweiter Ordnung. Die Gleichungen beider Hyperbeln sind rational und machen daher die Aufstellung einer Tabelle der Function β sehr bequem.

Wir übergehen die Rechnungen des Verf., durch welche er zeigt, dass seine Formel den verschiedenen Gruppen von Versuchszahlen vortrefflich genügt, um andere Erörterungen von allgemeinerem Interesse hier zu erwähnen. Die somit aufgestellte, empirische Formel (1) für den Luftwiderstand gegen Geschosse reducirt sich für kleine Geschwindigkeiten von wenigen Metern nicht auf das Newton'sche quadratische Widerstandsgesetz $r = av^2$. Für die Ballistik ist dieser Umstand ohne Bedeutung, da Schiessversuche zum Zwecke unmittelbarer Widerstandsmessungen unter 140 m nicht bekannt sind. Das Newton'sche Gesetz ist eben experimentell nur für kleine Geschwindigkeiten bestätigt worden, die mit den schwächsten Geschossgeschwindigkeiten nichts zu thun haben. Um aber die für kleine Geschwindigkeiten der Geschosse doch schon etwas merkbaren Differenzen der Beobachtung und der Formel wegzuschaffen, bringt Siacci an der Formel (1) eine Correctur an, er setzt $r = \delta i F(v)/C$, oder:

$$(2)\quad r = \frac{\delta i}{C}\left[0{,}2002\,v - 48{,}05 + \sqrt{(0{,}1648\,v - 47{,}95)^2 + 9{,}6} + \frac{0{,}0442(v - 300)}{371 + \left(\frac{v}{200}\right)^{10}}\right].$$

Bei dieser Curve wächst die Verzögerung wie das Quadrat der Geschwindigkeit von $v = 0$ bis etwa $v = 240$ m. Die Curve (2) hat dieselbe Asymptote wie die erste Hyperbel: $r = \delta i(0{,}365\,v - 96)/C$; tangirt die Axe der Geschwindigkeiten und hat zwei Inflexionspunkte bei $v = 340$ und zwischen $v = 420$ und 430. Am Schlusse der Arbeit giebt der Verf. an, wie man die Gleichung (2) in zwei andere spalten kann, nämlich

$$(a)\quad F(v) = 0{,}035\,v - 0{,}18 + \frac{64}{311 - v} + \frac{0{,}0442\,v(v - 300)}{371 + \left(\frac{v}{200}\right)^{10}},$$

$$(b)\quad F(v) = 0{,}365\,v - 96 + \frac{53}{v - 273} + \frac{0{,}0442\,v(v - 300)}{371 + \left(\frac{v}{200}\right)^{10}},$$

von denen (a) für $v \leq 292$, (b) für $v \geq 292$ zu brauchen ist (vergl. oben die „Zwillingshyperbeln"). Während zuletzt schon eine Tafel (S. 352—359 der deutschen Uebersetzung) der Luftwiderstände für die Geschwindigkeiten $v = 0$ bis $v = 1200$ m, um je 1 m fortschreitend, gegeben ist, behält sich der Verf. vor, binnen kurzem eine neue Tabelle der vier ballistischen Functionen D, A, J, T, sowie auch der Function β auf Grund der neuen Formel (2) zu veröffentlichen.

Der Artikel von Chapel berichtet kurz über die wichtige und interessante Arbeit von Siacci und macht einige Bemerkungen über die Hauptfragen, die zu beantworten sind, nämlich 1) über die Siacci'schen ballistischen Functionen, 2) den Luftwiderstand zwischen 20 und 120 m, 3) den von Siacci gebrauchten ballistischen Coefficienten. Lp.

JOURNÉE. Note sur la résistance de l'air aux petites vitesses. Revue d'Art. **49**, 293-305.

Betreffs des Luftwiderstandes ist die Aufmerksamkeit jüngst besonders auf die Geschwindigkeiten unterhalb 300 m gelenkt worden. Der Verf. hat 1888 in der Normalschiessschule zahlreiche Versuche über die Endgeschwindigkeiten zwischen 50 m und 450 m an Jagdgeschossen ausgeführt und sucht jetzt diese Versuche zu dem erwähnten Zwecke auszunutzen. Setzt man, wie üblich, den Widerstand $r = a . F(v) . v^2$, so müsste $F(v)$ bei dem Newton'schen (quadratischen) Widerstandsgesetze constant sein. Die graphische Darstellung von $F(v)$ zeigt bei etwa $v = 175$ m ein Minimum für $F(v)$, wie schon Chapel in der Rev. d'Art. **45** angegeben hatte. Der Schluss des Artikels beschäftigt sich mit Vorschlägen zu Versuchen, die zur genauen Ermittelung des Luftwiderstandes bei Geschwindigkeiten unter 200 m anzustellen sind.

Lp.

J. M. INGALLS. The resistance of the air to the motion of oblong projectiles as influenced by the shape of the head. Journ. of the U. S. Artillery 1895.

Ein Auszug aus dieser Abhandlung ist in den Mitt. üb. Art u. Gen. **27**, 399—414 von Fellmer veröffentlicht worden; nach dieser „fast wörtlichen Uebertragung" des Hauptteils der Originalarbeit können wir nur berichten. Der Verf. hat für die Berechnung des Luftwiderstandes einer ebenen Fläche S, deren Normale mit der Richtung des Luftstroms von der Geschwindigkeit v den Winkel ε bildet, das empirische Gesetz von Duchemin zu Grunde gelegt:

$$\varrho = k\delta S v^2 . 2 \cos^2 \varepsilon / g(1 + \cos^2 \varepsilon)$$

und hieraus für eine Rotationsfläche um die x-Axe den Ausdruck des Luftwiderstandes abgeleitet:

$$\varrho = 2\pi k \frac{\delta}{g} v^2 \int_0^x \frac{y\,ds}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Nach Ausführung der Integration für ogivale, parabolische und konische Spitzenformen ergiebt sich eine grosse Ueberlegenheit der parabolischen Form. Am Schlusse wird die Rechnung auch noch für die Verfolgungscurve $y = (aR - x)(aR + bx)^{\frac{1}{2}} / c\sqrt{aR}$ durchgeführt. Der Widerstand ist etwas grösser als bei parabolischer Gestalt, aber kleiner als bei ogivaler. Lp.

E. Oekinghaus. **Die Hyperbel als ballistische Curve (Schluss).** Arch. f. Art. **103,** 185-235.

Der Aufsatz bildet den Schlussartikel zu den in F. d. M. **25,** 1462, 1893/94 und **26,** 864, 1895 besprochenen Veröffentlichungen. Der Verf. giebt den Inhalt selbst in den folgenden Worten an: „Die Theorie der Rotationserscheinungen der Langgeschosse während des Fluges bildet einen wichtigen Teil der allgemeinen Mechanik der Geschossbewegungen, da in derselben die innere und äussere Ballistik in die innigste Berührung zu einander treten. Die exacte Darstellung aller Bewegungsverhältnisse stösst aber auf so viele Schwierigkeiten, dass man genötigt ist, nur die hauptsächlichsten Störungskräfte in Rechnung zu ziehen. Gleichwohl lässt die Anwendung der Hyperbelhypothese, wenn auch nur in erster Annäherung, einige hinreichend genaue Resultate gewinnen, die vielleicht Ausgangspunkt für weitere Forschungen bilden können. Wir entwickeln auf Grund dieser Hypothese die Schwankungen der Geschossaxe, also die Nutation, Präcession, als Folge der konischen Pendelung etc. in Functionen der Zeit. Desgleichen haben wir die Gleichungen der Stabilität und besonders die der Derivation eingehend behandelt und aus den Bedingungen der letzteren einige Relationen abgeleitet, die vielleicht nützlich sein können. Dass die theoretischen Ergebnisse den praktischen Erfahrungen im allgemeinen entsprechen, ist jedenfalls von Wert auf einem Gebiete, auf welchem die Versuche und die Theorie noch lange nicht abgeschlossen sind. Zum Schluss haben wir noch die Bewegung rotationsloser Geschosse genauer behandelt und ihre Verwandtschaft mit verwandten anderen Problemen der Mechanik nachzuweisen gesucht."

Die einzelnen Abschnitte sind fortlaufend gezählt und tragen die Ueberschriften: XXXVII. Die Rotation der Langgeschosse. XXXVIII. Die Stabilität der Langgeschosse. XXXIX. Die Seitenabweichung der Langgeschosse. XL. Die Derivationsgleichungen für grössere Erhöhungen. XLI. Rotationslose Langgeschosse während des Fluges. Lp.

E. Oekinghaus. **Die ballistischen Leistungen des schweizerischen Gewehres Modell 1889.** Sep. aus Schweiz. Zs. f. Art. u. Genie 1896. 10 S. 8°.

Zur Bekräftigung der Hypothese, welche der Verf. in seiner Abhandlung: „Die Hyperbel als ballistische Curve" aufgestellt hat (F. d. M. **25,** 1462, 1893/94 und **26,** 864, 1895), werden hier die Ergebnisse von Zahlenrechnungen mitgeteilt, die er im Anschlusse an die von R. Wille verfasste Waffenlehre über die Leistungen des schweizerischen Gewehres Modell 1889 mit Hülfe seiner Formeln angestellt hat. Die Uebereinstimmung der errechneten Zahlen mit den in den Tabellen jenes Werkes enthaltenen zeigt, dass die vom Verf. gebrauchte Hyperbel sich gut dazu eignet, Interpolationswerte zu bestimmen. Lp.

E. Oekinghaus. **Ueber die Schallgeschwindigkeit beim scharfen Schuss.** Wien. Ber. **105,** 437-451.

Auch diese rechnerische Arbeit soll die Nützlichkeit der vom Verf. über die Flugbahn der Geschosse aufgestellten Hypothese beweisen. Da Mach 1889 die Ansicht geäussert und durch Rechnungen geprüft hatte, dass die von ihm photographirte Kopfwelle eines Geschosses eine Schallwelle sei, die sich erst dann vom Geschoss loslöse und ihm voraneile, wenn die Geschossgeschwindigkeit kleiner als die Schallgeschwindigkeit geworden sei, so setzt Verf. jetzt in seine Formeln die bei der Berechnung benutzten Krupp'schen Versuchszahlen ein und findet zwischen seinen Ergebnissen und denen der Versuche Differenzen von derselben Grössenordnung etwa wie Mach. Lp.

Freiherr von Zedlitz und Neukirch. Eine zweckmässige Umformung alter ballistischer Formeln. Arch. f. Art. **103**, 388-396.

Es seien x, y die Coordinaten des Bahnpunktes, X die Schussweite, ϑ der Neigungswinkel der Tangente im Punkte (x, y), φ der Abgangswinkel, ω der Fallwinkel, v die Geschwindigkeit im Punkte (x, y), V die Abgangsgeschwindigkeit, $\mathfrak{v}$ die Endgeschwindigkeit, t die Flugzeit, b der Luftwiderstandscoefficient, g die Beschleunigung der Schwere, so ist bei dem kubischen Widerstandsgesetze $v\cos\vartheta\dfrac{d(v\cos\vartheta)}{dx}=-bv^3\cos\vartheta$. Schreibt man rechts $\cos^3\vartheta$ statt $\cos\vartheta$ (was für flache Bahnen erlaubt ist) und setzt $bV\cos\varphi=a$, so folgt $v\cos\vartheta=V\cos\varphi/(1+ax)$. Durch Einführung dieses Ausdrucks für $v\cos\vartheta$ in die Differentialgleichungen der Bewegung gelangt man zu den Formelsystemen (I) und (II), in denen $p=V\cos\varphi/\mathfrak{v}\cos\omega$, $q=tV\cos\varphi/X$ gesetzt ist:

$$\text{(I)}\quad \sin 2\varphi=\frac{gX}{6V^2}(3+2p+p^2),\quad \text{tang}\,\omega=\frac{gX}{12V^2\cos^2\varphi}(1+2p+3p^2),$$
$$t=\frac{X}{2V\cos\varphi}(1+p);$$
$$\text{(II)}\quad \sin 2\varphi=\frac{gX}{3V^2}(1+2q^2),\quad \text{tang}\,\omega=\frac{gX}{6V^2\cos^2\varphi}(1-4q+6q^2),$$
$$\mathfrak{v}\cos\omega=\frac{V\cos\varphi}{2q-1}.$$

Diese Formeln erweisen sich nicht nur bis zu sehr hohen Elevationen, sondern auch für die thatsächlich vorkommenden Geschwindigkeitsbereiche als mit grosser Annäherung gültig, und zwar sogar bei verschiedenen Luftwiderstandsgesetzen. Lp.

P. Laurent. Note sur les fonctions secondaires de dérivation. Revue d'Art. **48**, 465-475.

Zur Vervollständigung der Nouvelle table balistique in Revue d'Art **42**, 301-320 (F. d. M. **25**, 1461, 1893/94) giebt der Verf. jetzt eine neue Tafel für die Hülfsfunction der Derivation des Geschosses, die auf den-

selben Widerstandsgesetzen wie die erste beruht, um zwischen beiden Tafeln eine Uebereinstimmung herzustellen. Lp.

A. Sprung. Ueber die Ablenkung der Geschosse durch die Erdrotation. Arch. f. Art. **103,** 13-23.

E. Oekinghaus. Erwiderung auf Dr. Sprung's Aufsatz im Januarheft d. J., betreffend „die Ablenkung der Geschosse durch die Erdrotation". Ebenda 89-92.

In den Fortschritten der Physik **49**$_3$, 421, 1893 hat Sprung eine von Oekinghaus aufgestellte Formel (F. d. M. **23,** 1249, 1891) für die Ablenkung eines auf einem rotirenden Sphäroid bewegten Körpers kritisirt, und er nimmt jetzt, durch diese Kritik veranlasst, eine von ihm früher schon begonnene Untersuchung wieder auf. Im Jahre 1879 hatte er nämlich in einer Polemik gegen Finger's Artikel aus Wien. Anz. 1877, 146-147 den Satz aufgestellt: „Die Bewegung der Geschosse muss offenbar im Trägheitskreise von statten gehen und wird daher von der Visirlinie bei allen Azimuten um einen gleichen Betrag nach rechts abweichen." (Nördliche Hemisphäre!) Das Ergebnis der gegenwärtigen Arbeit spricht er in folgender Weise aus: „In allen Fällen, in welchen der Elevationswinkel über 45° nicht hinausgeht, kann in mittleren und hohen Breiten der von den verticalen Bewegungen abhängige Einfluss der Erdrotation gegen denjenigen vernachlässigt werden, welcher durch die horizontalen Bewegungen bedingt ist; d. h. man darf die horizontale Projection der Geschossbahn als einen Kreis betrachten, welcher mit der Geschwindigkeit der Horizontalcomponente $v = v_0 \cos\alpha$ gleichförmig durchlaufen wird. Der Krümmungsmittelpunkt liegt auf der nördlichen Hemisphäre rechts, auf der südlichen links von der Bahn, und der Krümmungsradius wird durch die unter (10) angegebene Formel dargestellt": $\varrho = v/2\omega \sin\varphi$. — In der Erwiderung bestreitet Oekinghaus die Richtigkeit der Sprung'schen Betrachtungen und sucht die Irrtümer der Auffassung aufzudecken. Lp.

---

v. Scheve. Zur Aufstellung von Schusstafeln für Mörser und Haubitzen. Arch. f. Art. **103,** 236-257.

Im Anschluss an die frühere Veröffentlichung: „Tafeln für das indirecte und Wurffeuer" etc. (F. d. M. **18,** 880, 1886) hat der Verf. die Berechnung der Tafeln I bis IV entsprechend bis zu 45° Erhöhung fortgesetzt. In den Vorbemerkungen spricht er sich über das hierbei benutzte quadratische Luftwiderstandsgesetz und die auf der Methode Otto's basirten Tafeln weiter aus. Ausserdem folgert er aus seinen Formeln eine Reihe empirisch gefundener Gesetze für die berechneten Bahnen (Abgangswinkel unter 45°, Abgangsgeschwindigkeit unter 270°). Wir setzen folgende her: Die Schussweite ist gleich der vierfachen Steighöhe bei einer Summe von Abgangs- und Fallwinkel, die bei geringem Luftwiderstandseinfluss gleich 90° ist. Die Schussweite ist gleich dem dop-

pelten Wert des Quadrats der Scheitelgeschwindigkeit, dividirt durch die Fallbeschleunigung g und multiplicirt mit der Tangente des Mittels aus Abgangs- und Fallwinkel. Die Scheitelhöhe ist gleich dem Quadrat der Scheitelgeschwindigkeit, dividirt durch die doppelte Fallbeschleunigung und multiplicirt mit dem Quadrat der Tangente des Mittels aus Abgangs- und Fallwinkel, oder auch gleich einem Viertel der Schussweite mal der Tangente des Mittels aus Abgangs- und Fallwinkel. Die Schussweite ist nahezu gleich Scheitelgeschwindigkeit mal Flugzeit. Das Quadrat der halben Schussweite ist gleich dem doppelten Krümmungsradius für den Scheitel mal der Scheitelhöhe. Lp.

A. Indra. Einrichtung und Gebrauch des Coordimeters. Mitt. üb. Art. u. Gen. **27**, 525-564.

„Das Coordimeter hat den Zweck, die Coordinaten (Abscisse und Ordinate) eines Punktes der Flugbahn eines Geschosses in Bezug auf den Endpunkt der Bahn (als Nullpunkt) zu bestimmen.“ I. Theoretische Entwickelung des Instrumentes. II. Beschreibung des Coordimeters. III. Gebrauch des Coordimeters. — Mit Rücksicht auf die Tendenz des Jahrbuchs müssen wir uns mit einem Hinweis auf den ersten Teil dieses Aufsatzes begnügen, wo die mathematische Grundlage des Instrumentes entwickelt ist. Lp.

A. Michaut. Étude d'un matériel de campagne pour l'artillerie suisse. Revue d' Art. **48**, 509-539; **49**, 55-78, 216-244.

Die vorliegende Reihe von Artikeln enthält Betrachtungen über eine gleich betitelte Schrift des schweizerischen Artillerieobersten Schumacher, der zur Anleitung der zu einer Concurrenz aufgeforderten Ingenieure in jener Schrift die leitenden Gedanken niedergelegt hat. Für die Zwecke des Jahrbuchs ist nur das „fast wörtlich aus dem Original aufgenommene Kapitel“ zu erwähnen: Gegenseitige Abhängigkeit der Elemente des Feldgeschützes, nebst den Unterabteilungen: Lebendige Kraft des Geschosses beim Abgange, lebendige Kraft des Geschosses beim Aufschlage, Erhaltung der Geschwindigkeit, Wirkungsfähigkeit des Geschosses für eine gegebene Restgeschwindigkeit, Wirkungen des Geschosses auf das Geschütz und die Laffette. Lp.

A. Weigner. Zur Frage des künftigen Infanteriegewehres. Mitt. üb. Art. u. Gen. **27**, 293-320.

Die Forderung bezüglich der Kaliberfrage wird in folgende Punkte zusammengefasst: 1. Thunlichste Vergrösserung der Bahnrasanz, 2. Verminderung des Patronengewichtes, 3. Verminderung des Gesamtgewichtes des Gewehrs. Den Untersuchungen ist das biquadratische Luftwiderstandsgesetz zu Grunde gelegt, ferner das Lehrbuch der äusseren Ballistik von N. Ritter von Wuich.

Zuerst wird der Nachweis geliefert, dass die Krupp'schen Luftwiderstandswerte auch für Gewehrgeschosse der gegenwärtig gebräuch-

lichen Form Gültigkeit haben. Sodann wird das Verhältnis der Scheitelhöhe zu der, der horizontalen Schussweite entsprechenden Endfallhöhe für jene Fälle ermittelt, in welchen die Flugbahn von Geschossen mit bestimmter Querdichte für die angenommene Zielhöhe vollkommen bestreichend ist. Mit Hülfe dieser für Geschosse mit bestimmter Querdichte als constant anzusehenden Verhältniszahl wird für die in Betracht kommenden Schussweiten der notwendige Abgangswinkel bestimmt, unter welchem das Geschoss mit einer erst zu ermittelnden Anfangsgeschwindigkeit abgefeuert werden muss, damit das verlangte Rasanzverhältnis eintritt. Schliesslich wird der Einfluss der beiden Rasanzfactoren besprochen und gewürdigt. Aus diesen rein theoretischen und mathematisch geführten Untersuchungen werden endlich am Schlusse die praktischen Folgerungen gezogen. Lp.

A. WEIGNER. Zur Frage des zukünftigen Feldgeschützes. Mitt. üb. Art. u. Gen. **27,** 63-92, 143-160.

In dieser Abhandlung stehen zwar militärische Gesichtspunkte im Vordergrunde, doch stützt der Verf. seine Beweisgründe durch passende mathematische Betrachtungen aus der Ballistik und Festigkeitslehre.

Lp.

Weitere Litteratur.

L. L. BRUFF. A textbook of ordnance and gunnery. New York: Wiley and Sons. [Revue d'Art. **49,** 389-390.]

E. GIRARDON. Leçons d'artillerie. (Propriétés de la poudre et des explosifs; notions de balistique théorique et expérimentale; effets des projectiles; pointage et réglage du tir.) Paris: Berger-Levrault et Cie. [Arch. f. Art. **103,** 178-182.]

J. DE LA LLAVE Y GARCIA. Problemas de balistica aplicados a la fortificación y a la tactica. Madrid.

O. MATA Y MANEJA. Tratado de balistica interior. 2. edición, corregida y aumentada. Madrid. 299 S. [Revue d'Art. **48,** 409-410.]

DE SPARRE. Notice sur le tir courbe. Mémoire 4. Nancy. 8°.

J. BARTL. Die Berechnung der Centrifugalregulatoren. Civiling. **42,** 489-538. F. K.

J. KESSLER. Berechnung der Schwungräder und Centrifugalregulatoren. Elementare Darstellung mit erläuternden Rechenbeispielen. (Technische Lehrhefte, Maschinenbau, 6b). Hildburghausen: Pezoldt. IV + 37 S. 8°.

J. PALOQUE. Étude sur la bicyclette. Paris: Berger-Levrault. 79 S, 8°. Vergl. F. d. M. **26,** 851, 1895.

B. Hydrodynamik.

H. v. Helmholtz. Zwei hydrodynamische Abhandlungen. Herausgegeben von A. Wangerin. (Ostwald's Klassiker. No. 79). Leipzig: Wilhelm Engelmann. 79 S. 8°.

In dem vorliegenden Hefte der Ostwald'schen Sammlung werden die beiden berühmten Abhandlungen „Ueber Wirbelbewegungen" (1858) und „Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen" (1868) von Helmholtz durch Wangerin neu herausgegeben und erläutert. Die beiden Abhandlungen sind so allgemein bekannt, dass inhaltlich nichts zu bemerken ist. Ueber die Grundsätze, nach welchen die Herausgabe erfolgte, giebt folgende Bemerkung Aufschluss:

„Dem Neudruck beider Abhandlungen sind die Originale zu Grunde gelegt; doch sind einige Aenderungen, welche die gesammelten Abhandlungen enthalten, berücksichtigt, z. B. die Hinzufügung der Ueberschriften der einzelnen Paragraphen in der ersten Arbeit. Einzelne Druckfehler, die sofort als solche zu erkennen waren, sind bei dem Abdruck verbessert. Ueber einige andere Aenderungen, die sich als erforderlich herausstellten, ist in den Noten Näheres angegeben." F. K.

W. M. Hicks. On bicyclic vortex aggregates. Brit. Ass. Rep. **65**, 612 (Ipswich, 1895).

Ohne Beweis wird in dieser Note mitgeteilt, dass bei irgend einem Wirbelaggregat (vortex aggregate), wo die Bewegung in Ebenen durch eine Axe und symmetrisch zu letzterer erfolgt, ein zweiter Zustand der Bewegung, der in gewisser Weise mit dem ersten zusammenhängt, möglich ist, bei welchem die Bewegung in Kreisen um jene Axe erfolgt. Beide Bewegungen lassen sich superponiren. F. K.

W. M. Hicks. On Hill's special vortex. Brit. Ass. Rep. **65**, 612-613 (Ipswich, 1895).

Man kann einen zusammengesetzten Wirbel (vortex) construiren, bei welchem in auf einander folgenden Schalen die Rotation entgegengesetzt ist. Zwischen den Radien besteht eine algebraische Relation, welche mitgeteilt wird. F. K.

R. Hargreaves. The continuity of pressure in vortex motion. Lond. M. S. Proc. **27**, 281-299.

R. Hargreaves. An ellipsoidal vortex. Lond. M. S. Proc. **27**, 299-327.

In der ersten Abhandlung, welche als Bestandteil der dem zweiten Gegenstand gewidmeten Untersuchung der Gesellschaft mitgeteilt wurde, beschäftigt sich der Verf. mit der Stetigkeit des Drucks. Sie ist eine Ausdehnung und Anwendung der Helmholtz'schen Methoden für die Wirbelbewegung auf die Untersuchung und Bestimmung der Grössen du/dt, dv/dt und dw/dt; sind diese gefunden, so hat man natürlich auch den Druck. Was nun die Unstetigkeiten betrifft, so erscheinen dieselben erst in den zweiten Ableitungen und haben dieselben Eigenschaften

wie die Unstetigkeit, welche die zweiten Ableitungen eines Massenpotentials erfahren, wenn beim Durchgange durch ein Flächenelement eine Unstetigkeit in der Dichtigkeit eintritt. Den Schluss der ersten Abhandlung bildet eine Anwendung auf die Schwingungen eines Wirbels um eine Gleichgewichtslage.

In der zweiten Abhandlung wird ein Wirbel von der Form eines Umdrehungsellipsoides, welcher in Richtung seiner Symmetrieaxe fortschreitet, untersucht. Die umfangreiche Rechnung lässt eine auszugsweise Wiedergabe nicht recht zu. F. K.

L. Silberstein. Ueber die Entstehung von Wirbelbewegungen in einer reibungslosen Flüssigkeit. Krak. Anz. 1896, 280-290.

Wenn ein Flüssigkeitsteilchen, welches bisher keine Rotationsbewegung hatte, eine solche erhält, so sind die im Zeitelement dt erworbenen Componenten der Rotationsgeschwindigkeit $\xi' dt$, $\eta' dt$, $\zeta' dt$ bestimmt durch die Gleichungen

$$\xi' = \frac{1}{2\varrho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \varrho}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \varrho}{\partial y}\right), \quad \eta' = \frac{1}{2\varrho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \varrho}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \varrho}{\partial z}\right),$$

$$\zeta' = \frac{1}{2\varrho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \varrho}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right).$$

Man erkennt daraus, dass Wirbelbewegung nur da entstehen kann, wo sich eine Fläche constanten Druckes und eine Fläche constanter Dichtigkeit schneiden. Ferner sieht man, dass die entstehende Wirbellinie mit der Schnittlinie jener beiden Flächen zusammenfällt. Die Grösse der gewonnenen Geschwindigkeit ist $\omega' dt = \frac{1}{2\varrho^2}\sin\theta\,\frac{\partial p}{\partial n}\frac{\partial \varrho}{\partial \nu}$, wo $\partial p/\partial n$, $\partial \varrho/\partial \nu$ die nach den Normalen genommenen Ableitungen des Druckes und der Dichtigkeit sind, θ den Winkel der Normalen bezeichnet. Das Moment eines entstehenden Wirbelfadens ist von vorn herein in der ganzen Ausdehnung constant, womit allerdings nicht gesagt ist, dass es von der Zeit unabhängig sei. F. K.

W. Wien. Cyklonartige Bewegungsformen. Wiedemann Ann. **59**, 753-763.

Der Verf. behandelt in der vorliegenden Abhandlung eine Flüssigkeitsbewegung in einem cylindrisch begrenzten, oben und unten durch Ebenen abgeschlossenen Raum, welche längs einer zweiten, der ersten coaxialen Cylinderfläche unstetig wird. Die Aufgabe sowohl als das Resultat werden sich am besten durch die folgenden Worte des Verf. darstellen lassen.

„Die axiale und radiale Bewegung bildet im äusseren und im inneren Raume zwei Systeme, da keine Flüssigkeit durch die Unstetigkeitsfläche gehen kann. In der Nähe dieser Grenze steigt die Flüssig-

keit auf oder sinkt herab. In der Nähe der Cylinderaxe und an der äusseren Grenze findet dem entsprechend ein Herabsinken oder Aufsteigen statt. Zwischen beiden ist Horizontalströmung vorhanden, die an der unteren Grenze die entgegengesetzte Richtung wie an der oberen hat. Durch das Hinzukommen der Drehungsgeschwindigkeit im äusseren Raume bewegt sich die Flüssigkeit in Spirallinien auf das Centrum zu oder von demselben fort.“ F. K.

J. Brill. Note on the form of the energy integral in the motion of an incompressible fluid. Quart. J. **28**, 185-190.

Bezeichnet man den Ausdruck $p/\varrho + V + \frac{1}{2}q^2$ mit Q, so lassen sich drei Grössen α, m, β derart bestimmen, dass

$$u = \frac{\partial\alpha}{\partial x} + m\frac{\partial\beta}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\alpha}{\partial y} + m\frac{\partial\beta}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial\alpha}{\partial z} + m\frac{\partial\beta}{\partial z},$$

$$Q + \frac{\partial\alpha}{\partial t} + m\frac{\partial\beta}{\partial t} = f(t)$$

wird. Die Grössen m und β genügen den Differentialgleichungen

$$\frac{\partial m}{\partial t} + u\frac{\partial m}{\partial x} + v\frac{\partial m}{\partial y} + w\frac{\partial m}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} + u\frac{\partial\beta}{\partial x} + v\frac{\partial\beta}{\partial y} + w\frac{\partial\beta}{\partial z} = 0,$$

d. h. für ein Flüssigkeitsteilchen haben diese Grössen einen unveränderlichen Wert.

Bei Rücksicht auf die Viscosität gilt dies nicht mehr; es gelten zwar noch die Beziehungen zwischen u, v, w einerseits und α, m, β andererseits, dagegen muss die Gleichung für Q lauten:

$$Q + \chi + \frac{\partial\alpha}{\partial t} + m\frac{\partial\beta}{\partial t} = f(t),$$

wo χ der Differentialgleichung genügt:

$$\xi\frac{\partial\chi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\chi}{\partial y} + \zeta\frac{\partial\chi}{\partial z} = 2\nu\left[\xi\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\right) + \eta\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \zeta\left(\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\right].$$

F. K.

H. A. Lorentz. Eene algemeene stelling omtrent de beweging eener vloeistof met wrijving. Amst. Sitz.-Ber. **5**, 168-175.

Herleitung eines Theorems über zwei Bewegungszustände, welche in einem mit Flüssigkeit ganz angefüllten Raum möglich sind. Mo.

B. Stankewitsch. Ueber die Anwendung der Transformationsmethode vermittelst reciproker Radienvectoren. Warschau. 48 S. (Russisch, 1897).

Der Autor nimmt an, dass die Lösung eines Problems über die Bewegung einer Flüssigkeit innerhalb eines Cylinders, welcher sich um eine Axe dreht, bekannt ist, und giebt ein Mittel, von dieser Aufgabe zu der Aufgabe über die Bewegung einer unbegrenzten Flüssigkeit, in welcher ein unendlich langer Cylinder sich dreht, überzugehen.

Er zeigt, dass jedes Problem der ersten Kategorie immer mit einem bestimmten Problem der zweiten Kategorie zusammenfällt. Die Frage dreht sich um die Lösung einer Gleichung, welche zuweilen algebraisch ist. Die transformirte Bewegung der Flüssigkeit ergiebt sich, wenn man in der Potentialfunction φ der Geschwindigkeit und der Function ψ der Stromlinien die Coordinaten x und y durch die Coordinaten ξ und η ersetzt, mit Hülfe der Formel $x = a^2 \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}$, $y = a^2 \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}$.

Für die Durchschnittskontur des sich in der Flüssigkeit drehenden Cylinders kann eine beliebige geschlossene Curve aus dem System

$$-\psi\left(\frac{a^2\xi}{\xi^2+\eta^2}, \frac{a^2\eta}{\xi^2+\eta^2}\right) + \frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2) = \beta$$

genommen werden, wenn diese Curve innerhalb die transformirte Kontur des Cylinders des ersten Problems enthält.

In der weiteren Darlegung betrachtet der Autor verschiedene Beispiele der besprochenen Transformation. Jk.

B. Stankewitsch. Ueber ein Problem der Hydrokinematik. Warschau. 23 S. (Russisch, 1897).

Diese Arbeit ergänzt die vorige im Sinne einer ausführlicheren Bearbeitung des Problems der Bewegung von Cylindern, welche von eckigen Konturen begrenzt sind. Jk.

Lord Rayleigh. On the stability or instability of certain fluid motions. Lond. M. S. Proc. **27**, 5-12.

Lord Rayleigh. On the propagation of waves upon the plane surface separating two portions of fluid of different vorticities. Lond. M. S. Proc. **27**, 13-18.

A. E. H. Love. Examples illustrating Lord Rayleigh's theory of the stability or instability of certain fluid motions. Lond. M. S. Proc. **27**, 199-213.

A. B. Basset. On the stability of a frictionless liquid. Theory of critical planes. Math. Ann. **48**, 89-96.

In diesen Arbeiten handelt es sich um Flüssigkeitsbewegungen, deren Grundbestandteil so beschaffen ist, dass nur die eine Componente der Geschwindigkeit U einen von Null verschiedenen Wert hat und ihrerseits nur von y abhängt. Die ganze Bewegung geht zwischen zwei Wänden vor sich, welche der xz-Ebene parallel sind. Zu dieser Grund-

bewegung kommt eine in Richtung der x-Axe wellenförmig fortschreitende Störungsbewegung. Ist V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben, so wird die Abhängigkeit der transversalen Componente v von y durch die Gleichung $(U-V)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-k^2 v\right)=\frac{d^2 U}{dy^2}v$ gegeben. Die Verff., welche bezüglich einiger Punkte nicht derselben Meinung sind, untersuchen nun unter verschiedenen Voraussetzungen über die Beschaffenheit von U den Zusammenhang zwischen v und y. Hierbei spielen eine besondere Rolle diejenigen Elemente, in welchen $U=V$ ist, welche kritische Elemente genannt werden. F. K.

J. Boussinesq. Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section (tuyaux de conduite et canaux découverts), quand cet écoulement s'est régularisé en un régime uniforme, c'est-à-dire moyennement pareil à travers tous les sections normales du lit. C. R. **122**, 1289-1295.

J. Boussinesq. Formules des pressions moyennes locales dans un fluide animé de mouvements tourbillonnants et tumultueux. C. R. **122**, 1369-1375.

J. Boussinesq. Expression du frottement extérieur dans l'écoulement tumultueux d'un fluide. C. R. **122**, 1445-1451.

J. Boussinesq. Formules du coefficient des frottements intérieurs dans l'écoulement tumultueux graduellement varié des liquides. C. R. **122**, 1517-1523.

J. Boussinesq. Lois générales du régime uniforme dans les lits à grande section. C. R. **123**, 7-13.

J. Boussinesq. Du régime uniforme dans les canaux rectangulaires larges et dans les tuyaux ou canaux à section circulaire ou demi-circulaire. C, R. **123**, 77-83.

J. Boussinesq. Lois de deuxième approximation du régime uniforme dans les tuyaux circulaires et dans les canaux demicirculaires. C. R. **123**, 141-147.

Der Verf. zerlegt die Geschwindigkeit in einen regelmässigen, die mittlere Bewegung in der Umgebung einer Stelle und Zeit darstellenden Bestandteil und einen unregelmässigen Teil, welcher die plötzlichen Schwankungen eines zufälligen Hin- und Herbewegens beschreibt. Für die Bestimmung des ersteren kommen nur gewisse mittlere Werte der Druckcomponenten in Frage. Für diese werden nun Ausdrücke aufgestellt, in welchen ausser den Deformationscomponenten der mittleren Bewegung ein gewisser Coefficient, derjenige der inneren Reibung, vorkommt. Von der gewöhnlichen Auffassung abweichend, sieht der Verf. denselben nicht als eine Constante, sondern als eine durch den Bewegungszustand bedingte Function des Ortes an. Nach diesen all-

gemeinen Erörterungen wendet sich die Darstellung dem Problem des Durchflusses durch Röhren zu. Namentlich sucht der Verf. durch passende Bestimmung der den Reibungscoefficienten darstellenden Function die Geschwindigkeitsverteilung beim Durchfluss durch Röhren mit kreisförmigem Querschnitt mit den Beobachtungen von Bazin in Uebereinstimmung zu bringen.

Den Referenten haben die allgemein gehaltenen Erörterungen nicht von der Zuverlässigkeit der Resultate zu überzeugen vermocht. F. K.

J. Jacob. Ableitung der Formel für die Ausflussgeschwindigkeit der Gase. Poske Z. **9,** 86-87.

Kurze elementare Ableitung der in Frage stehenden Formeln und einfache Folgerungen aus denselben. F. K.

Hégly. Sur le passage d'un écoulement par orifice à un écoulement par déversoir. C. R. **122,** 916-919.

Vergleicht man die Formel für den Abfluss durch eine rechteckige Oeffnung mit dem Abflusse über ein Wehr, so müssten beide Formeln eigentlich dieselbe Abflussmenge geben, wenn im ersteren Falle das Niveau des zuströmenden Wassers allmählich so weit erniedrigt ist, dass der oberhalb der Oeffnung liegende Teil der Wand nicht mehr benetzt wird. Deshalb müsste, wenn m und M die Ausflusscoefficienten in den beiden Fällen sind, $m = M\sqrt{2}$ sein. Thatsächlich liegt die Sache aber etwas anders, weil das Niveau des Wassers, nachdem das letztere aufgehört hat, den oberen Teil der Wand zu benetzen, eine plötzliche Depression erfährt. Der Verf. berechnet nach Messungen von Bazin für concrete Fälle die Werte, welche diese Depressionen haben müssten, und stellt Betrachtungen darüber an, welchen Wert die Kenntnis der Depressionen für die Bestimmung der Ausflusscoefficienten oder der Contraction der Strahlen haben könnte. F. K.

A. Samuelson. Einige Gesetze des Widerstandes der Flüssigkeiten. Zeitschr. f. Luftschiff. **15,** 90-108.

Fortsetzung der in F. d. M. **26,** 890, 1895 besprochenen Notizen. Nachdem zuerst die Stabilität beim Gleichgewicht eines in der Luft wehenden Banners erörtert ist, wendet sich der Verf. den Gesetzen für den Widerstand einer in schräger Richtung fortschreitenden Platte zu. Er will plausibel machen, dass der Normaldruck unabhängig von der Neigung der Fortschreitungsrichtung zu der Platte selbst ist. Durch Fallversuche mit passend gewählten Fallkörpern soll die Richtigkeit des Princips dargethan werden. F. K.

C. Somigliana. Sulla espressione della forza viva nel problema del moto di un corpo rigido in un fluido incompressibile illimitato. Lomb. Ist. Rend. (2) **29,** 147-156.

Für äquivalente Axensysteme muss der Ausdruck der lebendigen Kraft bei dem oben genannten Probleme dieselbe Form ergeben. Es wird zunächst untersucht, welchen Ausdruck die lebendige Kraft haben muss für den Fall, dass man zu einem äquivalenten System gelangt, indem man das Axensystem um eine seiner Axen dreht, und zweitens, wenn die äquivalenten Systeme in der Beziehung der sogenannten Drehspiegelung stehen. F. K.

R. MARCOLONGO. Sur un cas particulier du mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini. Teixeira J. **12**, 161-174.

Gegenstand der Abhandlung ist die Integration der Bewegungsgleichungen eines Körpers in einer unbegrenzten Flüssigkeit, die von Clebsch (Math. Ann. **3**, 238-262; F. d. M. **2**, 733, 1870) auf die Form gebracht sind:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_3\dfrac{\partial T}{\partial y_2} - x_2\dfrac{\partial T}{\partial y_3}, \text{ etc.}, \\ \dfrac{dy_1}{dt} = x_3\dfrac{\partial T}{\partial x_2} - x_2\dfrac{\partial T}{\partial x_3} + y_3\dfrac{\partial T}{\partial y_2} - y_2\dfrac{\partial T}{\partial y_3}, \text{ etc.} \end{cases}$$

T ist die lebendige Kraft der Flüssigkeit und des Körpers und eine homogene positive quadratische Form der sechs Variabeln x_i, y_i $(i = 1, 2, 3)$. In dem Falle $2T = p(x_1^2+x_2^2)+p'x_3^2+2q(x_1y_1+x_2y_2)+2q'x_3y_3+r(y_1^2+y_2^2)+r'y_3^2$, der durch Stekloff in Math. Ann. **42** behandelt ist (F. d. M. **25**, 1499, 1893), ist die Integration durch elliptische Functionen zu bewerkstelligen. Halphen behandelt den Fall $p = p'$ in Bd. **2** seiner Fonctions elliptiques. Gegenwärtig erledigt Marcolongo denselben besonderen Fall vermittelst einer einfacheren und directeren Methode als Halphen. Am Schlusse wird auf die Verwandtschaft des behandelten Problems mit dem der Rotation eines schweren Umdrehungskörpers um einen Punkt seiner Axe hingewiesen. Tx. (Lp.)

R. LIOUVILLE. Sur le mouvement d'un solide dans un liquide indéfini. C. R. **123**, 874-876.

W. STEKLOFF. Sur le mouvement d'un solide dans un liquide indéfini. C. R. **123**, 1252-1253.

Liouville giebt die Bedingungen, welche zu erfüllen seien, wenn die sechs Differentialgleichungen für die Componenten des Impulses bei der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit ein viertes algebraisches Integral besitzen sollen.

Stekloff führt aus, dass der von ihm und der von Liapunow entdeckte integrable Fall diesen Bedingungen nicht zu genügen scheint. F. K.

W. SUTHERLAND. High tensions in moving liquids. Phil. Mag. (5) **42**, 111-115.

Das allen Buben bekannte Spiel des Werfens von „Butterstullen“ oder „Fröschen“ auf einer ruhigen Wasserfläche mit flachen glatten Steinen oder Kieseln könnte sich eines Tages als der Ausgangspunkt einer hydrodynamischen Theorie erweisen! Jedenfalls giebt der Schreiber des Briefes unter dem obigen Titel eine rohe Skizze einer Theorie der „Butterstullen und Frösche“, welche die Möglichkeit des Bestehens einer hohen Spannung in bewegten Flüssigkeiten ans Licht bringt, so dass in einer allgemeinen Theorie der Bewegung natürlicher Flüssigkeiten sowohl die Viscosität als auch die Empfänglichkeit für bestehende Spannung in Rechnung zu ziehen sind. Der Hauptpunkt ist der, dass, wenn ein Körper, der eine platte Oberfläche besitzt, mit dieser Fläche auf einer parallelen Flüssigkeitsfläche zum Eintauchen gebracht wird, der Körper ein Bestreben des Zurückspringens von der Oberfläche zeigt, wenn die zur Fläche parallele Geschwindigkeitscomponente einen gewissen Wert übersteigt; dieses Bestreben hängt von der Beziehung zwischen dem Inhalte der Fläche und der Masse des Körpers ab, ferner von dem Winkel, den die Richtung der Geschwindigkeit mit der Normale zur Flüssigkeitsfläche bildet. Für den Fall, in welchem die platte Fläche des Körpers ein Quadrat ist, wird eine Formel in Vorschlag gebracht, und die aus ihr abgeleiteten Resultate sollen den allgemeinen Gesetzen der „Butterstullen und Frösche“ entsprechen. Gbs. (Lp.)

A. VON DER FLIET. Zur Frage der Wellentheorie. St. Petersburg. 47 S. (Russisch).

Die Arbeit zerfällt in 3 Teile. Der erste Teil ist der Erklärung der stehenden Wellen in 2 Dimensionen gewidmet. Der Autor zeigt, dass durch Zusammensetzung zweier Bewegungen eines Punktes der Flüssigkeit in 2 Systemen von trochoidalen Wellen, welche einander entgegen laufen, man nicht die Lösung des Problems über die stehende Welle erhalten kann. Sodann giebt er eine annähernde Lösung von Boussinesq und zeigt, wie man durch diese Lösung zu einer genauen Lösung von E. Guyou übergehen kann. Indem der Autor diese letztere Methode umständlich behandelt, findet er die Gleichung der Bahn der Flüssigkeitsteilchen. Dabei erweist sich die Bewegung jedes Teilchens als eine periodische Bewegung auf einer geraden Linie, welche selbst periodisch in verticaler Richtung sich bewegt. Das Profil der Wellen ist eine Trochoide.

Der zweite Teil der Arbeit kann als ein Versuch angesehen werden, die Eigenschaften der Functionen complexer Grössen auf Wellenbewegung anzuwenden. Im dritten Teile endlich wird ein Fall von Wellenbewegung bei geringer Tiefe untersucht. Jk.

H. M. MACDONALD. Waves in canals and on a sloping bank. Lond. M. S. Proc. **27**, 622-632.

Der Verf. zeigt zunächst, dass das Geschwindigkeitspotential für Wellen in einem Canal mit dreieckigem Querschnitt, wenn Polarcoordi-

naten r und θ angewandt werden, deren Pol im tiefsten Punkte des Querschnitts liegt, nicht immer nach den Cosinus der Vielfachen von $\pi\theta/\alpha$ entwickelt werden dürfe, sondern nur, wenn der Oeffnungswinkel α des Querschnitts $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$ oder $\frac{2}{3}\pi$ ist, und zwar gewinnt man in den beiden letzteren Fällen nur die symmetrischen Wellen, während sich in dem erstgenannten Falle auch die unsymmetrischen Wellen auf diese Weise ergeben.

Dann werden Wellen in einem Gebiet behandelt, dessen Grenze eine geneigte Ebene ist, welche sich nach der Tiefe ins Unendliche erstreckt. Für den Fall stehender Wellen hat bekanntlich G. Kirchhoff eine Lösung in Form einer Exponentialsumme gegeben, unter der Voraussetzung, dass der Neigungswinkel der Ebene zum Horizont einen Wert von der Form $(2m+1)\pi/2n$ hat, wo m und n ganze Zahlen sein sollen. Fügt man die Bedingung hinzu, dass die Geschwindigkeit im Unendlichen endlich sein soll, so muss m gleich Null sein. Für Wellen, welche parallel der Wand fortschreiten, giebt es eine Lösung von derselben Form, wenn der Neigungswinkel gleich $\pi/(4n+2)$ ist. F. K.

Kurz. Die Wasserwellen. Schlömilch Z. **41**, 111-113.

Durch die Elemente der Physik von Christiansen angeregt, giebt der Verf. eine Ableitung der Gerstner'schen Wellenbewegung, welche auch Kirchhoff in seiner Mechanik darstellt. Dem Referenten scheint die Kurz'sche Bearbeitung keinen Fortschritt gegen die älteren Untersuchungen zu bedeuten. F. K.

Willy Wien. Ueber die auf einer schweren Flüssigkeit möglichen Wellen von sehr kleiner Höhe. Wiedemann Ann. **58**, 729-735.

Bei zweidimensionaler Flüssigkeitsbewegung können die Geschwindigkeitscomponenten $u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$ und $v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ gesetzt werden. Für ψ erhält man dann die Differentialgleichung

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}=0.$$

Wenn dieser Gleichung ein Ausdruck von der Form $\psi = ce^{-\beta x}\sin\gamma(y-\alpha t)-ax$ genügt, muss $c(\beta^2-\gamma^2)(a-\alpha)=0$ sein, also entweder $a-\alpha=0$ oder $\beta^2-\gamma^2=0$. Indem man untersucht, ob eine freie Grenze die Gleichung $y=x-b\sin\gamma(y-\alpha t)=0$ haben kann, gelangt man zu dem Resultat, dass dies nur für $\beta^2-\gamma^2=0$ der Fall ist, d. h. wenn ein Geschwindigkeitspotential vorhanden ist. Für zwei längs der Fläche $x-b\sin\gamma(y-\alpha t)=0$ an einander grenzende Flüssigkeiten möge das Potential nun sein: $\varphi_1 = c_1 e^{\gamma x}\cos\gamma(y-\alpha t)+a_1 y$, $\varphi_2 = c_2 e^{\gamma x}\cos\gamma(y-\alpha t)+a_2 y$. Dann ist $c_1 = b(a_1-\alpha)$ und $c_2 = b(a_2-\alpha)$. Die Gleichheit des Druckes an der Grenzfläche liefert

mit $\lambda/2\pi = 1/\gamma$ die Gleichung:

$$\frac{g\lambda(s_2 - s_1)}{2\pi} = (a_1 - a)^2 s_1 + (a_2 - a)^2 s.$$

F. K.

P. Lebedew. Ueber die ponderomotorische Wirkung der Wellen auf ruhende Resonatoren. II. Hydrodynamische Oscillationsresonatoren. Wiedemann Ann. **59**, 116-133.

Auf einer horizontalen Geraden befinden sich in gleichen Abständen die Mittelpunkte dreier Kugeln. Von den beiden äusseren Kugeln ist die eine aus Aluminium, die andere aus Kork gearbeitet, aber beide haben denselben Radius. Die erstere ist mittels einer biegsameren, die andere mittels einer steiferen Feder an einer horizontalen Messingplatte befestigt, welche ihrerseits an einem Torsionsfaden hängt. Die mittlere Kugel kann in horizontale Schwingungen versetzt werden, und zwar sowohl in Richtung der Verbindungsgeraden, als auch senkrecht zu ihr. Der Apparat befindet sich in Flüssigkeit.

Durch die Torsion werden die Unterschiede der Kräfte gemessen, welche die Flüssigkeit auf die Kugeln mit und ohne Mitschwingung ausübt. Auf die hier beobachteten erzwungenen Schwingungen wendet der Verf. die Theorie von Bjerknes für frei schwingende Kugeln an und findet im allgemeinen Uebereinstimmung von Theorie und Beobachtung.

F. K.

H. Poincaré. Sur l'équilibre et les mouvements des mers. Journ. de Math. (5) **2**, 57-102, 217-263.

Der Verf. behandelt das schwierige Problem der Flutbewegung. Erst kommen die Schwingungen mit sehr langer Periode zur Erörterung. In Rücksicht gezogen wird die Wirkung der Sterne, die Centrifugalkraft und auch die Anziehung der Flüssigkeitsschicht, welche unsere Erde bedeckt. Für das Potential dieser Flüssigkeitsschicht, welche im Inneren der Erde natürlich der Bedingung $\Delta^2 V = 0$ genügt, wird nun die Grenzbedingung aufgestellt, welche an der Oberfläche zu erfüllen ist. Dieselbe ist natürlich für die von Flüssigkeit bedeckten Teile der Erdoberfläche eine andere als für die Continente. Der Verf. beschäftigt sich mit der Aufgabe, diese Gleichung zu integriren, und führt zu dem Zwecke eine besondere Klasse von Functionen ein, welche mit den Kugelfunctionen eine gewisse Verwandtschaft haben, aber von der Form der Continente abhängen. Dann werden aber auch die Schwingungen kurzer Periode behandelt. Die erzwungenen Schwingungen werden auf die Eigenschwingungen der Flüssigkeit reducirt. Das Problem, diese Eigenschwingungen zu ermitteln, erweist sich als identisch mit den Schwingungen einer Membran, deren Dicke constant, deren Spannung aber variabel ist. Muss man jedoch die Krümmung der flüssigen Oberfläche in Rechnung ziehen, so ist die Membran, deren Schwingungen in Frage stehen, auch nicht mehr in der Dicke constant. — In dem zweiten Teile der Abhandlung berücksichtigt der Verf. auch bei den Schwingungen kleiner Periode die

bisher unberücksichtigt gebliebene Rotation der Erde, und führt das Problem auf die im ersten Teile entwickelten Principien zurück. F. K.

G. H. Ling. On the solution of a certain differential equation which presents itself in Laplace's kinetic theory of tides. Annals of Math. **10**, 95-125.

Laplace hat in seiner Theorie der Gezeiten (Mémoires de l'Académie royale de Paris, année 1775-1776) eine Differentialgleichung für die Fluthöhe, welche von einem anziehenden Körper bewirkt wird, aufgestellt und eine Lösung derselben entwickelt. Der Verf. giebt zunächst eine Uebersicht der an diesen Punkt anknüpfenden kritischen Litteratur. Alsdann wird die Laplace'sche Lösung der Differentialgleichung vorgeführt und mit den dagegen erhobenen Einwänden beleuchtet.

Dann wird die allgemeine Lösung der Differentialgleichung untersucht und aus dieser nun wieder die besondere Lösung für den von Laplace behandelten Fall eines die ganze Erde bedeckenden Oceans abgeleitet. Es ergiebt sich eine völlige Rechtfertigung der Lösung von Laplace.

Endlich werden aus der allgemeinen Lösung noch vier andere besondere Fälle abgeleitet:

1) See, welcher sich von einem Pol bis zu einem gewissen Breitengrade erstreckt.

2) Symmetrisch zum Aequator liegender See, welcher sich nach beiden Seiten bis zu einem gewissen Breitengrade erstreckt.

3) See, welcher von zwei Parallelkreisen derselben Hemisphäre begrenzt wird.

4) Fall eines Canals entlang einem Parallelkreise. F. K.

A. Kriloff. Théorie du tangage sur une mer houleuse. C. R. **122**, 183-186.

Bei den Schwankungen des Schiffes der Länge nach wird die Voraussetzung, dass die Dimensionen des Schiffes im Vergleich zu der Wellenlänge als klein zu betrachten sind, unzulässig. Der Verf. stellt nun zunächst die beiden Differentialgleichungen für die Verticalbewegung des Schwerpunktes und die Neigung der Schiffsaxe zum Horizont für eine beliebige Flüssigkeitsbewegung auf. Dann wird trochoidale Wellenbewegung vorausgesetzt und der entsprechende Ausdruck für den hydrodynamischen Druck in die obige Gleichung eingesetzt. Das führt auf die Ausführung von Doppelintegralen, welche sich ermitteln lassen, wenn die Form des Schiffes bekannt ist. Der Widerstand des Wassers wird proportional der Geschwindigkeit angesetzt. F. K.

M. d'Ocagne. Abaque de l'équation des marées diurnes et semi-diurnes. C. R. **122**, 298-301.

Die Gleichung zwischen Fluthöhe und der auf Winkel reducirten

Zeit lautet $h = \cos 2\theta + k \cos(\theta - \alpha)$, in welcher k und α Parameter sind, welche mit dem Ort und der Epoche variiren. Man setze nun

$$x = -\frac{2+\cos(\theta-\alpha)}{2-\cos(\theta-\alpha)}, \quad y = \frac{\cos 2\theta}{2-\cos(\theta-\alpha)}$$

und betrachte x und y als rechtwinklige Coordinaten; einem constanten θ entspricht die gerade Linie $(x-1)\cos 2\theta + 4y = 0$, einem constanten α eine gewisse Linie vierter Ordnung. Will man nun die zu einem gewissen θ, α, k gehörende Fluthöhe haben, so ziehe man durch den Schnitt der α-Linie und der Thetalinie, sowie durch den Punkt $x = 1$, $y = k$ eine gerade Linie. Die Ordinate des Schnittpunktes dieser Linie und der Linie $x + 1 = 0$ ist gleich $\frac{1}{2}h$. Natürlich muss man, um die zu einer Fluthöhe gehörende Zeit zu haben, die beiden Punkte $x = 1$, $y = k$ und $x = -1$, $y = \frac{1}{2}h$ verbinden und diese Linie mit der α-Linie zum Schneiden bringen. Durch den Schnittpunkt ist dann auch der Parameter θ vermittelst der Gleichung $\cos 2\theta = 4y/(1-x)$ bestimmt. Um die grösste Fluthöhe zu bestimmen, hat man vom Punkte $x = 1$, $y = k$ an die α-Linie eine Tangente zu ziehen. Die Ordinate des Schnittpunktes dieser Tangente mit $x = -1$ ist die halbe Fluthöhe, der Berührungspunkt liefert den Winkel θ. F. K.

A. Rateau. Sur la théorie des turbines, pompes et ventilateurs. C. R. **122**, 1268-1270.

Der Verf. will die Theorie der oben genannten hydraulischen Maschinen statt auf den Satz der lebendigen Kräfte auf den Flächensatz für die Bewegungsgrössen begründen. Die erforderliche Grundgleichung wird aufgestellt, und daran werden einige Folgerungen über den Nutzeffect geknüpft. F. K.

A. Föppl. Vereinfachte Darstellung meiner Theorie der Laval'schen Turbinenwelle. Civiling. **42**, 249-252.

Im Civiling **41** hatte Föppl unter Benutzung der Quaternionen eine Darstellung der obigen Theorie gegeben. Eine von ihm unbeachtet gelassene, von Stevart hervorgehobene Thatsache (Revue universelle des mines 1896) verleiht, wie in der vorliegenden Abhandlung gezeigt wird, der Theorie eine grössere Einfachheit und Eleganz. Am Schlusse der Notiz hebt der Verf. mit Nachdruck hervor, dass die jetzige Einfachheit der Theorie nicht in dem Verzicht auf die früher angewandten Vectoren ihren Grund habe. F. K.

J. Isaachsen. Ueber einige Wirkungen von Centrifugalkräften in Flüssigkeiten und Gasen. Civiling. **42**, 351-386.

Die ganz allgemein gehaltenen Betrachtungen erfordern, da die Hülfsmittel der Mathematik kaum herangezogen werden, an dieser Stelle keinen Bericht. F. K.

GERHARDT. Zur Berechnung von Windrädern. Centralbl. der Bauverw. **16**, 221-223.

Die grundlegende Formel $N = 0{,}00035\,d^2 v^3$ (N Pferdestärke, d Durchmesser des Rades, v Windgeschwindigkeit) wird ohne Ableitung und Begründung mitgeteilt. Die Tabelle über die Windstärken in den einzelnen Monaten und anderes mehr braucht hier nicht besprochen zu werden. F. K.

P. GIRARDVILLE. Sur le vol des oiseaux. Kasan Ges. **6**, (No. 3-4), 26-59.

Diese Arbeit zerfällt in 2 Teile. Im ersten Teile untersucht der Autor den Vogelflug von der praktischen Seite und giebt seine Erklärung der Zahlendaten, welche Labauret aus den Untersuchungen der Marey'schen photographischen Abbildungen bekommen hat. Der Autor zeigt, dass bei Betrachtung der verticalen und horizontalen Wirkungskraft der Flügel auf den Körper des Vogels man seine Aufmerksamkeit auf die Trägheitskraft der Flügel selbst richten muss.

Im zweiten Teile bietet der Autor theoretische Untersuchungen, welche, wie er glaubt, den starken Luftdruck (welcher bedeutend das Gewicht des Vogels übertrifft), der unter den Flügeln des Vogels in einigen Zeitintervallen entsteht, und die geringe Arbeit, welche zur Erlangung dieses Druckes von Seiten des Vogels erforderlich ist, erklären.

Der Autor betrachtet eine Cylinderfläche, welche um eine Momentanaxe rotirt. Diese Axe liegt seitwärts von der convexen Seite des Cylinders und ist der Axe des Cylinders parallel. An der concaven Seite der Cylinderfläche bildet sich eine Luftverdichtung, welche nicht nur von dem Quadrat der Geschwindigkeit v abhängt, sondern noch mehr von der Beschleunigung γ, welche Beschleunigung die Veränderungen der Geschwindigkeit nach der Richtung der Normale der Cylinderfläche bezeichnet. Auf jedes Quadratmeter erhält man infolge dieser Ursache eine Kraft $0{,}164\,\gamma$ kg. Da bei der Flügelbewegung des Vogels γ bis zu 200 Meter geht, so erhält man infolge dieser Beschleunigung γ eine recht bedeutende Kraft bis 33 kg. Diese Druckkraft vermindert sich in der Richtung von dem hinteren bis zum vorderen Teile des Cylinders (gerechnet in der Richtung der Bewegung). Der Autor findet, dass die Differenz zwischen dem grössten und geringsten Drucke durch die Formel $\frac{1}{15} V^2$ kg ausgedrückt wird. In dem vom Autor beobachteten Falle beträgt diese Differenz 6 kg. Die Arbeit, welche erforderlich ist, um die Flügel zu bewegen, hängt von der Wölbung des Flügels und von der gefundenen Druckdifferenz ab und ist durchaus nicht sehr gross, während nach der Zählung von Labauret man annehmen müsste, dass die Arbeit einer fliegenden Möwe $\frac{1}{10}$ Pferdekraft beträgt. Jk.

Weitere Litteratur.

J. BOUSSINESQ. Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section. Paris. VII + 64 S. 4°.

H. T. Bovey. A treatise on hydraulics. New York: John Wiley and Sons. London: Chapman and Hall. [Nature 53, 267.]

F. Chaudy. Machines hydrauliques. Paris: Dunod et Vicq. VIII + 402 S. (Bibliothèque du conducteur de travaux publics.)

C. E. Cullis. Die Bewegung durchlöcherter Körper in einer incompressiblen Flüssigkeit. Diss. Jena. 95 S. 4°.

Lord Kelvin. On the motion of a heterogeneous liquid, commencing from rest with a given motion of its boundary. Nature 54, 250-251.

Vorgetragen in Royal Society of Edinburgh am 6. April 1896.

E. Marchand. Nouvelle théorie des pompes centrifuges. Étude théorique et pratique. Paris: Bernard et Cie. 189 S. 8°.

G. Meissner. Hydraulik. Zweite Auflage. Vol. II. Jena: Costenoble.

Möller. Ein Beitrag zur Berechnung der Wellen und der Ebbe und Flutbewegung des Wassers. Zeitschr. f. Architectur u. Ingenieurw. 42, Heft 1-8. Neue Folge 1, Heft 1-4, 475-507. F. K.

P. Lévy Salvador. Hydraulique agricole. Première partie: Cours d'eaux non navigables ni flottables. Paris: Dunod & Vlacq. VIII + 483 S. 8°.

C. Sautreaux. Sur une question d'hydrodynamique. Grenoble Ann. 6, 1-17 (1894).

Touche. Calcul de la résistance des fluides ou à un disque mince. S. M. F. Bull. 24, 39-42. F. K.

Kapitel 5.

Potentialtheorie.

W. Wirtinger. Ueber eine Eigenschaft des Potentials unter Annahme eines Green'schen Wirkungsgesetzes. Wien. Ber. 105, 575-586.

Green hat in zweien seiner Arbeiten (Mathem. Papers, p. 117 u. 185) statt des Newton'schen Gesetzes ein allgemeineres zu Grunde gelegt, bei dem die Potentialfunction eines wirksamen Punktes durch kmr^{-1-a} gegeben ist. Er findet dabei, dass für dieses allgemeinere Gesetz nicht nur durch die gegebene Massenverteilung das Potential V eindeutig bestimmt ist, sondern dass auch umgekehrt aus dem gegebenen Werte von V sich die Massenverteilung ergiebt. Dieses von Green nur für Kugeln und Ellipsoide abgeleitete Resultat wird von Wirtinger verallgemeinert. Durch Verbindung der von Green geschaffenen Hülfsmittel mit dem Weierstrass'schen Begriff der Fortsetzung einer analytischen Function gelangt er zu folgendem Satze, welcher die eigentümliche Sonderstellung des Newton'schen Gesetzes innerhalb des allgemeinen Green'schen kennzeichnet: „Ist, unter Zugrundelegung

des Elementargesetzes $mr^{-1-\alpha}$ für das Potential, das Potential einer räumlichen Masse in einem endlichen massenfreien, übrigens beliebig kleinen Raumteil gegeben, so ist dadurch die Massenverteilung selbst eindeutig bestimmt in allen Fällen, in welchen α positiv und von Null verschieden ist, dagegen sicher nicht bestimmt für $\alpha = 0$.

Zum Beweise betrachte man die Function

$$W = \int \frac{k(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{(r^2+u^2)^{\frac{1+\alpha}{2}}}, \quad r^2 = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2,$$

die für $u = 0$ in das Potential V übergeht. Für diese Function ergiebt sich, wenn man um die Stelle x, y, z der Masse eine kleine Kugel abgrenzt, dann zuerst u, nachher den Kugelradius verschwinden lässt:

$$\lim_{u=0} \left(u^{\alpha-1}\frac{\partial W}{\partial u}\right) = -4\pi^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\alpha)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} k(x, y, z).$$

Kann man daher W ermitteln für alle Werte des u ausser $u = 0$, sobald V gegeben ist, so kann man mittelst der letzten Formel durch einen Grenzprocess die Dichtigkeit k finden, so lange α positiv und von Null verschieden ist.

Nun ist aber W ein eindeutiger Zweig einer analytischen Function, so lange x, y, z, u reell und ausserhalb desjenigen Gebietes bleiben, für welches $u = 0$ und zugleich x, y, z ein innerhalb der Masse gelegener Punkt ist. Da W ausserdem der Differentialgleichung

$$\Delta W + \frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\alpha-1}{u}\frac{\partial W}{\partial u} = 0, \quad \Delta W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}$$

genügt, so ist W vollständig bestimmt, wenn es nur in einem endlichen massenfreien Raumteil gegeben ist, für den $u = 0$ ist. In der That ergiebt sich aus der vorstehenden Differentialgleichung

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} V_n u^{2n},$$

und alle Coefficienten sind durch V_0 bestimmt. Kennt man also in einem noch so kleinen, aber endlichen massenfreien Raumteil V_0, d. i. das Potential der wirkenden Masse in Bezug auf äussere Punkte, so kennt man in einem endlichen Gebiete der Variabeln x, y, z, u die Function W und kann daraus k ableiten. — Die erwähnte Bestimmung der Coefficienten V_n aus V_0 versagt für $\alpha = 0$.

Die Function V_0 darf im Ausgangsgebiete nicht etwa willkürlich gegeben sein, sondern muss das Potential einer bloss räumlich verteilten, nicht aber auf Linien und Flächen concentrirten Masse sein. Der Verf. erörtert die notwendigen Bedingungen dafür und zeigt, indem er auf die Function W ein ähnliches Verfahren anwendet wie beim Beweise des gewöhnlichen Green'schen Satzes, dass jene Bedingungen auch hinreichend sind. Wn.

C. Neumann. Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen. Leipzig: B. G. Teubner. XXI + 292 S. gr. 8°.

Bericht in F. d. M. **26**, 893, 1895.

P. G. Tait. Note on centrobaric shells. Edinb. Proc. **21**, 117-118.

Ein elementarer, rein geometrischer Beweis für den Satz, dass von einer Kugelschale, deren Oberflächendichtigkeit dem Kubus des Abstandes von einem inneren Punkte umgekehrt proportional ist, das Potential auf äussere Punkte dasselbe ist, wie wenn ihre Masse im inneren Punkte vereinigt wäre. Dieselbe Methode kann auch auf die Eigenschaften der elektrischen Bilder angewandt werden. Lp.

E. Mathy. Expression des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur, au moyen des fonctions θ et ζ. Journ. de Math. (5) **2**, 305-316.

Sind $a > b > c$ die Axen des Ellipsoids, M seine Masse, x, y, z die Coordinaten des angezogenen äusseren Punktes, a', b', c' die Axen des durch letzteren Punkt gelegten confocalen Ellipsoids, so ergiebt sich durch einfache Umformung der bekannten Ausdrücke für die Anziehungscomponenten:

$$(1)\quad X = \frac{3Mx}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\left[-\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}v\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{a^2-c^2}\,\frac{\theta'(v)}{\theta(v)}\right]_{v=0}^{v=v_1},$$

wo v_1 durch die Gleichung

$$\mathrm{sn}(v_1) = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a'}$$

bestimmt ist. Bei Y und Z treten nur θ_3, resp. θ_2 an Stelle von θ, während zugleich im Nenner, aber nur in diesem, nicht auch in der Klammer, a, b, c cyklisch zu vertauschen sind.

Durch die Weierstrass'schen Functionen ausgedrückt, wird

$$(2)\quad X = \frac{3Mx}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}[\zeta(v+\omega_3)-\eta_3+e_3 v],$$

wobei v durch die Gleichung $\wp(v)-e_3 = a'^2$ bestimmt ist, während $e_1 = \frac{1}{3}(a^2+b^2-2c^2)$, $e_2 = \frac{1}{3}(a^2+c^2-2b^2)$, $e_3 = \frac{1}{3}(b^2+c^2-2a^2)$ sind. Der Ausdruck (2), der hier durch Umformung des Integralausdrucks für X ermittelt wird, folgt auch aus dem Werte, den Halphen (Traité des fonctions elliptiques II, p. 492) für das Potential des Ellipsoids angiebt. — Zum Schluss wird gezeigt, dass der eben erwähnte Halphen-sche Ausdruck der Gleichung $\Delta V = 0$ genügt. Wn.

E. Mathy. Calcul des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur. Gand: Hoste. 39 S. 8°.

Der Hauptteil dieser Inauguraldissertation befindet sich im Journ. de Math. (5) **2**, 305-316, worüber man den vorangehenden Bericht vergleiche. Mn. (Lp.)

E. W. Hobson. On some general formulae for the potentials of ellipsoids, shells, and disks. Lond. M. S. Proc. **27**, 519-544.

Das Problem der Anziehung der Ellipsoide wird hier dahin verallgemeinert, dass in einem $(n+1)$-dimensionalen Raume das von der „elliptischen Scheibe"

$$\frac{\xi_1^2}{a_1^2}+\frac{\xi_2^2}{a_2^2}+\cdots+\frac{\xi_n^2}{a_n^2}\leqq 1$$

auf den Punkt $x_1, x_2, \ldots, x_n, h$ ausgeübte Potential gesucht wird unter der Annahme, dass die Kraft der $(m+1)$-ten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional und zugleich die Dichtigkeit

$$\varrho=\left\{1-\frac{\xi_1^2}{a_1^2}-\cdots-\frac{\xi_n^2}{a_n^2}\right\}^{\lambda-1}F\left(\frac{\xi_1}{a_1},\frac{\xi_2}{a_2},\ldots,\frac{\xi_n}{a_n}\right)$$

ist, unter F eine Function verstanden, die für alle Punkte innerhalb der Scheibe in eine nach ganzen positiven Potenzen von $\xi_1, \ldots, \xi_n$ fortschreitende convergente Reihe entwickelt werden kann. Gelöst wird die Aufgabe mittelst der Dirichlet'schen Methode des discontinuirlichen Factors, und zwar wird als Factor das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{c(q+iz)}}{(q+iz)^\lambda}dz,\quad c=1-\Sigma\frac{\xi_i^2}{a_i^2},$$

benutzt, dessen Wert für negative c verschwindet, für positive c aber $=2\pi c^{\lambda-1}:\Gamma(\lambda)$ ist (cf. Meyer, Vorles. über bestimmte Integrale, S. 195, 196). Dabei wird eine symbolische Darstellung der Function F in Form einer Exponentialfunction benutzt. Das Resultat ergiebt sich in Form einer unendlichen Reihe von einfachen Integralen. Das Potential eines vollen Ellipsoids im Raume von n Dimensionen folgt daraus, wenn man $h=0$ setzt. Ferner wird auch der Fall behandelt, dass die anziehende Masse von zwei ähnlichen und ähnlich liegenden elliptischen Scheiben begrenzt wird. Es werden die in Bezug auf m möglichen verschiedenen Fälle discutirt, resp. die zuerst für m nötigen Beschränkungen fortgeschafft. Auch der Fall constanter Dichtigkeit findet seine Erledigung. Die Endresultate sind zu umfangreich, als dass sie hier wiedergegeben werden könnten. Bemerkt mag noch werden, dass mehrere der früher von Cayley (cf. F. d. M. **8**, 631, 1876) und Dyson (F. d. M. **23**, 1000, 1891) gefundenen Formeln in denen der vorliegenden Arbeit als specielle Fälle enthalten sind. Einige der Resultate des Verf. sind auf anderem Wege von Routh abgeleitet (F. d. M. **26**, 899, 1895). Wn.

E. J. Routh. **Theorems on the attraction of ellipsoids for certain laws of force other than the inverse square.** Phil. Trans. (A.) 186, 897-950.

In den ersten Paragraphen dieser umfangreichen und interessanten Arbeit kommt der Verf. unter den allgemeinen Bemerkungen (in § 5) auf das merkwürdige Jellett'sche Theorem zu sprechen, nach welchem, wenn V_k das Potential für das Kraftgesetz der umgekehrten $k$ten Potenz der Entfernung ist, man

$$V_{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k-2)} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right) V_k$$

hat. Hiernach kann man eine grosse Anzahl von Potentialen ohne Integralzeichen darstellen. In den §§ 8-11 bestimmt der Verf. das Potential eines dünnen homogenen „Homoioids" in einem inneren und äusseren Punkte, wenn die Kraft der $k$ten Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist, wobei k eine gerade Zahl bedeutet. Die Untersuchung spaltet sich in zwei Fälle, je nachdem $k > 3$ oder < 3 ist. Das Potential wird in dem einen Falle vollständig durch Integration ermittelt, in dem anderen dagegen auf eine einzige Quadratur gebracht. Die §§ 12-26 beschäftigen sich mit dem Potential eines dünnen heterogenen Homoioids, dessen Dichtigkeit $x^f y^g z^h$ ist, für dasselbe Kraftgesetz. Auch hier zerfällt die Untersuchung in einen integrabeln Fall und einen, der ein Integral enthält. Das Potential wird in beiden Fällen als eine Reihe mit einer endlichen Gliederanzahl ausgedrückt. Darauf behandeln die §§ 27-30 das Potential eines homogenen und eines heterogenen Ellipsoids in einem inneren Punkte für dasselbe Kraftgesetz. Das Potential eines Ellipsoids in einem äusseren Punkte, wenn es in ähnlichen Ellipsoidschalen geschichtet ist, bildet den Gegenstand der §§ 31-39. Als besondere Fälle werden diejenigen erledigt, bei denen das Kraftgesetz das der umgekehrten vierten, sechsten, achten und zehnten Potenz der Entfernung ist. Hieran schliesst sich in § 40 das Potential des heterogenen Ellipsoids für das Newton'sche Kraftgesetz. In den §§ 41-48 geht der Verf. auf die Potentiale eines Homoioids und eines Ellipsoids ein bei homogener oder heterogener Structur, wenn der Index k des Kraftgesetzes eine negative ungerade Zahl ist. Den Potentialen eines dünnen homogenen Homoioids für den Fall eines Kraftgesetzes 1) des umgekehrten Kubus, 2) der umgekehrten $k$ten Potenz der Entfernung bei ungeradem $k > 3$ sind die §§ 49-54 gewidmet. Den Schluss in §§ 55-57 bildet die Erörterung eines Falles, in welchem die Niveauflächen einer Scheibe confocale Flächen sind. Die früheren Untersuchungen hierher gehöriger Probleme werden vom Verf. gewissenhaft citirt, und ihre Ergebnisse mit den seinigen verglichen. Als eine Arbeit, die einen grossen Reichtum fertiger Resultate für besondere Probleme enthält, ist die Schrift allen denen zu empfehlen, welche sich dafür interessiren, die allgemeinen Lehren der Potentialtheorie an besonderen Fällen bestätigt zu sehen. Lp.

A. L. Dixon. **The potential of cyclids.** Lond. M. S. Proc. **27**, 226-249.

Es handelt sich darum, das Potential einer Cyklide in Form eines Doppelintegrals darzustellen; doch wird das Resultat nicht direct abgeleitet, sondern nur verificirt. — Die Grundlage der Betrachtung bildet das folgende, mittelst einer längeren Rechnung abgeleitete Resultat.

Für eine beliebige Zahl von Variabeln x_i sei

$$S = C + \Sigma \frac{x_i^2}{a_i+\lambda}, \quad P = \Pi(a_i+\lambda),$$
$$T = \Sigma \frac{p_i x_i}{a_i+\lambda}, \qquad \theta = \Sigma \frac{p_i^2}{a_i(a_i+\lambda)};$$

ferner bezeichne, wie üblich, ∇^2 die Summe der zweiten partiellen Ableitungen nach allen x, und es sei

$$Q = \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{P}} \frac{S^r \sin^{2r}\varphi\, d\varphi}{[T-(-\lambda\theta S)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi]^m},$$

so ist

$$\nabla^2\left(\int_{\lambda_1}^{\beta} Q\,d\lambda\right) = 0,$$

falls $r \geqq 1$, falls ferner λ_1 eine Wurzel der Gleichung $S = 0$, und falls endlich der Ausdruck

$$R = (4r-2)\int_0^\pi \frac{S^{r-1}\sin^{2r-2}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{P}[T-(-\lambda\theta S)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi]^m}$$

für $\lambda = \beta$ verschwindet. Dagegen ist

$$\nabla^2\left(\int_0^\beta Q\,d\lambda\right) = -(R)_{\lambda=0} = -\left(\frac{S^{r-1}}{\sqrt{P}T^m}\right)_{\lambda=0} \frac{1\cdot 3\ldots(2r-1)}{2.4\ldots(2r-2)}\, 2\pi.$$

Für $r = 0$ ist

$$\nabla^2\left(\int_0^\beta Q\,d\lambda\right) = 0$$

und

$$\lim_{\lambda=0}\left\{\Sigma_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_\lambda^\beta Q\,d\lambda\right) - \Sigma \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\int_0^\beta Q\,d\lambda\right)\right\} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Sigma\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{P}T^m}\right)_{\lambda=0}.$$

Nun lässt sich ein System confocaler Cykliden durch $S = 0$ darstellen, wenn die x_i die pentasphärischen Coordinaten eines Raumpunktes sind und $C = 0$ ist. (Vermöge der zwischen den pentasphärischen Coordinaten bestehenden identischen Relationen kann man übrigens S auf die Summe von vier Gliedern beschränken.) Ferner ist $\nabla^2 V = 0$ die Laplace'sche Gleichung in pentasphärischen Coordinaten, falls V in den

x_i von der Ordnung $-\frac{1}{2}$ ist. Diese Eigenschaft hat aber das Integral $\int_{\lambda_1}^{\beta} Q d\lambda$, wenn $m = 2r + \frac{1}{2}$ gesetzt wird; weiter verschwindet dieses Integral für unendlich ferne Punkte, und $\beta = \infty$ genügt der Gleichung, durch die β bestimmt ist. Somit haben die Ausdrücke

$$V_a = \int_{\lambda_1}^{\infty} Q d\lambda, \quad V_i = \int_{0}^{\infty} Q d\lambda$$

alle charakteristischen Eigenschaften und stellen das Potential der Cyklide

$$\Sigma \frac{x_i^2}{a_i} = 0$$

mit der Dichtigkeit

$$\left(\frac{S^{r-1}}{\sqrt{P}\, T^{2r+\frac{1}{2}}}\right)_{\lambda=0} \frac{1 \cdot 3 \ldots (2r-1)}{2 \cdot 4 \ldots (2r-2)} \cdot \frac{1}{2}$$

für äussere, resp. innere Punkte dar. Dabei ist

$$\Sigma \frac{x_i^2}{a_i + \lambda_i} = 0$$

die durch den äusseren Punkt gelegte confocale Cyklide. Für $r = 0$ stellen dieselben Ausdrücke das Potential einer unendlich dünnen Cyklidenschale mit der Dichtigkeit

$$\left(\frac{1}{\sqrt{P}\sqrt{T}}\right)_{\lambda=0} \frac{1}{\sqrt{\Sigma \frac{x_i^2}{a_i}}}$$

dar.

Das allgemeine Resultat wird auf mehrere specielle Fälle angewandt, insbesondere auf einen Kreisring (anchor ring), auf das zweischalige Hyperboloid etc. Als Grenzfall folgt ferner das Potential einer ebenen Scheibe, die von einer bicircularen Curve vierter Ordnung begrenzt wird, ferner eines Teiles einer Kugelfläche, der durch eine Cyklide ausgeschnitten wird, endlich das eines Cykliden-Cylinders.

Zum Schluss wird ein Satz über das Verhältnis der Potentialwerte confocaler Cykliden in Bezug auf correspondirende Punkte abgeleitet, ein Satz, der dem Ivory'schen Satze bezüglich der Anziehung der Ellipsoide analog ist. Wn.

H. Züge. Zum Problem der Anziehung homogener Ringkörper. Pr. (No. 326) Gymn. Wilhelmshaven. 16 S. 4°.

Betrachtet werden solche homogenen Rotationskörper, die durch Rotation einer geschlossenen Curve mit Mittelpunkt um eine nicht schneidende Axe entstehen. Für das Potential eines solchen Körpers in Bezug auf einen äusseren Punkt ergeben sich durch Einführung räumlicher Polar-

coordinaten, deren Pol der Fusspunkt des vom Mittelpunkte des Querschnitts auf die Axe gefällten Lotes ist, und Entwickelung der reciproken Entfernung die Formeln:

$$(1)\qquad U_1 = 2\pi \sum_0^\infty \alpha_n P_n(\cos\omega) R^n,$$

$$(2)\qquad U_2 = 2\pi \sum_0^\infty \beta_n P_n(\cos\omega) \frac{1}{R^{n+1}}.$$

Darin bezeichnet R den Abstand des angezogenen Punktes vom Pole, ω den Winkel, den R mit der Axe bildet, α_n und β_n gewisse, über die Fläche des Querschnitts zu erstreckende Integrale. Die Formel (1) setzt voraus, dass R kleiner ist als der kleinste Abstand eines Massenpunktes vom Pole, (2) dagegen, dass R grösser ist als der grösste Abstand eines Massenpunktes vom Pole. Der Fall, dass R zwischen diesen Grenzen liegt, wie auch der, dass der angezogene Punkt der Masse angehört, wird von der Betrachtung ausgeschlossen.

Liegt der angezogene Punkt auf der Axe selbst, so ist $P_n(\cos\omega) = 1$, und es wird:

$$(1')\quad U'_1 = 2\pi \sum_0^\infty \alpha_n R^n, \qquad (2')\quad U'_2 = 2\pi \sum_0^\infty \beta_n \frac{1}{R^{n+1}}.$$

Der Vergleich von (1′) und (2′) mit (1) und (2) ergiebt, dass, wenn man das Potential des Ringkörpers für Punkte der Axe kennt, man sofort das Potential für beliebige äussere Punkte bestimmen kann, jedoch nur unter der erwähnten Beschränkung für R.

Das wird benutzt zur Ermittelung des Potentials eines homogenen Ringkörpers mit kreisförmigem Querschnitt. Ist ϱ der Radius des rotirenden Kreises, r der Abstand des Kreismittelpunktes von der Axe, so lässt sich das Potential für einen Punkt der Axe durch das einfache Integral darstellen (vgl. eine frühere Arbeit des Verf., F. d. M. **20**, 1024, 1888):

$$U(0) = 4\pi r\varrho^2 \int_{r^2+R^2}^\infty \sqrt{(\tau-\varrho^2)(\tau-r^2-R^2)}\,\frac{d\tau}{\tau^2\sqrt{\tau}}.$$

Durch die Substitution $\sin^2\varphi = (r^2+R^2):\tau$ geht dasselbe über in:

$$U(0) = 8\pi r\varrho k \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1-\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

wo $k = \varrho : \sqrt{r^2+R^2}$ ist; und dieser Ausdruck lässt sich leicht nach Potenzen von k entwickeln. Weiter kann man die einzelnen Potenzen von k, je nachdem $R < r-\varrho$ oder $R > r+\varrho$ ist, nach steigenden oder fallenden Potenzen von $R:r$ entwickeln und hat dann nach Zusammenfassen gleich hoher Potenzen die Reihen (1′) resp. (2′), somit auch nach (1), (2) die Ausdrücke für das Potential in Bezug auf beliebige äussere Punkte. — Die Entwickelungen werden durchgeführt, ihre Convergenz wird nachgewiesen, und schliesslich werden die Anziehungscomponenten

berechnet. Verificirt werden die Formeln für den Fall $\varrho = 0$; ferner werden die Vereinfachungen angegeben, die sich für $r = \varrho$ ergeben.
Wn.

P. Pizzetti. **Intorno alla determinazione teorica della gravità alla superficie terrestre.** Torino Atti **31**, 859-870.

Der Zweck des Aufsatzes erhellt aus den folgenden einleitenden Worten.

„Die Annäherungsformeln, welche sich auf die Art der Aenderung der Schwere an der Oberfläche des Geoids beziehen, das wenig verschieden von einer Kugel angenommen wird, gelangen gewöhnlich unter der Voraussetzung zum Beweise, dass die Potentialfunction der Erdanziehung auf einen beliebigen Punkt ausserhalb oder auf der betrachteten Gleichgewichtsfläche mit Hülfe einer nach den negativen Potenzen des Fahrstrahls fortschreitenden Entwickelung ausdrückbar sei. Da nun aber die Oberfläche keine genau sphärische ist, so ist der Gebrauch einer solchen Entwickelung nicht gerechtfertigt, und daher ist die Gesetzmässigkeit der daraus abgeleiteten Formeln einigem Zweifel unterworfen. Wir wollen hier andeuten, wie man die eben erwähnten Formeln beweisen kann, ohne zu jener Entwickelung zu greifen, indem man sich statt dessen einer Formel bedient, welche aus der Green'schen folgt." (Betreffs früherer Untersuchungen des Verf. vergleiche man F. d. M. **25**, 1509 ff., 1893/94; **26**, 1079, 1895.) Lp.

E. Lampe. **Ueber Körper grösster Anziehung.** Berl. Phys. Ges. Verh. **15**, 84-100.

Zur Ergänzung der in den letzten Jahren von Sella, Pierpaoli, Ragnoli (vergl. F. d. M. **24**, 924, 1892; **25**, 1514 ff., 1893/94; **26**, 900, 1895) in gleicher Richtung unternommenen Arbeiten macht der Verf. darauf aufmerksam, dass von dem bekannten Körper grösster Anziehung an eine stetige Reihe von Körpern gleicher homogener Masse sich bilden lasse, deren nach dem Newton'schen Gesetze erfolgende Anziehung auf einen gegebenen Punkt stetig abnimmt. Als mathematisch leicht berechenbar erweist sich die Attraction derjenigen Umdrehungskörper, deren Meridiancurve in Polarcoordinaten r, φ die Form hat $r = a + b \cos^n \varphi$, wo n eine beliebige positive Zahl bedeutet, falls die Polaraxe gleichzeitig die Rotationsaxe ist und die Anziehung auf den Pol bei demjenigen Segmente berechnet wird, das durch eine Normalebene zur Polaraxe vom Körper abgetrennt wird und die positive Axe umgiebt. Bestimmt man für einen gegebenen Wert von n das Verhältnis a/b so, dass für diesen Körper das Maximum der Anziehung eintritt, so bestätigen die für von $n = \frac{1}{2}$ (dem Körper grösster Anziehung) an auf- oder absteigende Werte gewonnenen Zahlen jene von vorn herein einleuchtende Angabe. Bei den Segmenten mancher Rotationskörper mit der Meridiancurve $a + b \cos^m \varphi + c \cos^n \varphi = r$ ist die Anziehung auf den Pol derjenigen des Körpers grösster Anziehung in den ersten vier

Decimalen gleich. In dem zweiten Abschnitte der Arbeit werden ähnliche Maximalaufgaben für eine Anzahl einfach begrenzter anderer Rotationskörper behandelt. Am Schlusse wird auf einige Maximalaufgaben anderer Natur aus dem Gebiete der Newton'schen Attraction hingewiesen. Lp.

F. Richarz und O. Krigar-Menzel. Gravitationsconstante und mittlere Dichtigkeit der Erde, bestimmt durch Wägungen. Berl. Ber, 1896, 1305-1318.

C. Braun. Die Gravitationsconstante, die Masse und mittlere Dichte der Erde nach einer neuen experimentellen Bestimmung. Mit 3 Tafeln und 3 Textfiguren. Wien. Denkschr. **64**, 187-258.

R. v. Eötvös. Untersuchungen über Gravitation und Erdmagnetismus. Wiedemann Ann. **59**, 354-400; Ungar. Ber. **13**, 193-243.

Diese drei höchst bedeutsamen Arbeiten enthalten zwar manche nicht unwichtigen, theoretischen Untersuchungen, sind aber ihrer ganzen Anlage nach experimenteller Art; daher verweisen wir in Betreff näherer Inhaltsangabe auf die „Fortschritte der Physik" oder auf Wiedemann's Beiblätter. Lp.

Elfter Abschnitt.

Mathematische Physik.

Kapitel 1.

Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

A. Molecularphysik.

W. Voigt. Compendium der theoretischen Physik. In 2 Bänden. Erster Band: Mechanik starrer und nichtstarrer Körper. Wärmelehre. X + 610 S. (1895). Zweiter Band: Elektricität und Magnetismus. Optik. XIV + 810 S. (1896). Leipzig: Veit & Comp.

W. Voigt. Compendium der theoretischen Physik (Anzeige des Verfassers). Götting. Gel.-Anz. 740-754.

Wir haben es hier mit einem eigenartigen Werke zu thun, das sich von den vorhandenen Lehrbüchern wesentlich unterscheidet und die grösste Beachtung seitens der Fachgenossen verdient. Während die wenigen bisher veröffentlichten Werke, die die ganze theoretische Physik umfassen, mehr den Charakter einer Einleitung in diese Wissenschaft tragen und die verschiedenen Disciplinen neben einander entwickeln, ohne auf ihren inneren Zusammenhang einzugehen, hat W. Voigt sich zum ersten Male die Aufgabe gestellt, das ganze Gebiet der Physik möglichst einheitlich darzustellen. Er hat, um diese Aufgabe lösen zu können und um zugleich dem Lernenden die Gewinnung eines umfassenden Standpunkts zu erleichtern, auf die Behandlung solcher speciellen Probleme, die umständliche mathematische Entwickelungen verlangen, ohne zu Resultaten von wirklich physikalischem Interesse zu führen, ganz verzichtet; nur die Möglichkeit und der Weg zur Lösung sind häufig angedeutet. Ausführlich sind lediglich Probleme von allgemein physikalischer Bedeutung erörtert. Durch diese Beschränkung unterscheiden sich auch die einzelnen Abschnitte wesentlich von der Darstellung solcher Lehrbücher, die einzelnen Disciplinen der theoretischen Physik gewidmet sind. — Dagegen ist das grösste Gewicht auf das Verständnis der Grundlehren gelegt; in der Darstellung reihen sich zusammengehörige, resp. analoge theoretische Entwickelungen an einander, wenn sie auch verschiedenen Gebieten angehören; es treten die all-

gemeinen Gesetze und die Beziehungen verschiedener Gebiete zu einander schärfer hervor. Der Verf. geht ferner vielfach über das Niveau der ausführlichen Bearbeitung einzelner Kapitel insofern hinaus, als er die Fragestellungen möglichst allgemein formulirt. Fügen wir noch hinzu, dass die Entwickelungen nur verhältnismässig elementare mathematische Hülfsmittel benutzen, allerdings incl. der Grundlehren der höheren Analysis, so sind damit die hauptsächlichsten Eigentümlichkeiten des Werkes gekennzeichnet.

Weiter ist hervorzuheben, dass es sich in dem Buche nicht lediglich um eine zusammenfassende Darstellung bekannter Resultate handelt; das Ziel, das sich der Verf. gesteckt, erforderte vielfach Abänderungen älterer Entwickelungen, häufig auch die Einfügung neuer eigener Untersuchungen. Diese neuen, resp. abgeänderten Entwickelungen, auf deren hauptsächlichste weiterhin hinzuweisen sein wird, werden neben der eigenartigen Disposition und der eleganten Darstellung auch den reiferen Forscher interessiren und anregen; grossen Nutzen wird das Werk ferner Studirenden gewähren, die bereits einige Vorlesungen über specielle Gebiete der theoretischen Physik gehört haben; für die erste Einführung in die Wissenschaft ist es nicht bestimmt.

Ueber den reichen Inhalt des Buches kann hier nur ein kurzer Ueberblick gegeben werden, da eine eingehendere Besprechung einen zu grossen Raum erfordern würde.

Auf eine Einleitung, in der die Frage der physikalischen Einheiten und Dimensionen erörtert wird und die Gesichtspunkte aufgestellt werden, die bei der Verfügung über die Constanten physikalischer Gesetze in Betracht kommen, folgt als erster Teil die Mechanik starrer Körper. Dieser Teil hat wegen der allgemeinen Tendenz des Buches eine eigentümliche Gestalt erhalten, indem einerseits viele Probleme fehlen, die man sonst in Lehrbüchern der analytischen Mechanik findet, andererseits aber die mechanischen Theorien anderer Gebiete der Physik gewissermassen als specielle Beispiele aufgenommen sind. Das erste Kapitel betrifft die Bewegung eines einzelnen materiellen Punktes, wobei die Wirkungen der Schwere, der Centralkräfte, des Luftwiderstandes und der gleitenden Reibung als Beispiele dienen.

Es folgt (Kap. II) die Bewegung eines Systems materieller Punkte. Hier wird nach Ableitung der allgemeinen Sätze die Wechselwirkung von Centralkräften, besonders der Gravitation, und das Weber'sche Grundgesetz behandelt und daran eine Skizze der Weber'schen Theorie der Elektrodynamik geknüpft. Weiter schliesst sich hier die Entwickelung der kinetischen Gastheorie an, aus der wir als besonders bemerkenswert die eigenartige Ableitung der adiabatischen Temperaturänderung eines Gases hervorheben. Das Kapitel schliesst mit den Lagrange'schen und Hamilton'schen Gleichungen und der Darlegung der Grundgedanken der Helmholtz-Boltzmann'schen Cyklentheorie.

In Kapitel III (Bewegung starrer Körper) wird neben dem Rotationsproblem die moleculare Theorie der Elasticität entwickelt, ferner im Anschluss an die cyklischen Systeme, welche starre Körper enthalten,

Maxwell's Theorie der Elektrodynamik. Die Darstellung der genannten Theorien ist durchweg eigenartig; so liefert die moleculare Elasticitätstheorie zum ersten Male einen speciell für krystallinische Medien gültigen Ansatz, und daran schliesst sich eine Entwickelung der Principien, nach denen derartige Ansätze für die verschiedenen Krystallgruppen specialisirt werden. Es ist eine Tabelle beigefügt, die gewisse wichtige scalare Functionen für die einzelnen Krystallsysteme zusammenstellt; eine kleine Lücke dieser Tabelle ist am Schluss von Band II ausgefüllt. Hervorzuheben ist aus diesem Kapitel noch der Abschnitt über conservative Wechselwirkung zwischen starren Körpern.

Das letzte Kapitel bringt eine gedrängte Uebersicht der Potentialtheorie. Hier findet auch die Newton'sche Potentialfunction von neutralen Polsystemen ihre Stellung und deren Anwendung auf die moleculare Theorie der dielektrischen und magnetischen Influenz, sowie der Pyro- und Piëzoelektricität. Endlich mag noch darauf hingewiesen werden, dass in der ganzen Mechanik neben der Gleichung der lebendigen Kraft auch die Gleichgewichtsbedingung (Princip der virtuellen Arbeit) und die Bedingung für den Anfang der Bewegung aus der Ruhe stark betont werden.

Der zweite Teil ist der Mechanik nichtstarrer Körper gewidmet. Nachdem (Kap. I) die Grundgleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung solcher Körper entwickelt sind, werden dieselben zunächst (Kap. II) auf die Hydrostatik incl. der Capillaritätstheorie angewandt; fast alle auf letztere Theorie bezüglichen Entwickelungen des Verf. sind neu, von Resultaten insbesondere die Ausdrücke für die Wirkung der capillaren Oberflächenspannung, welche zur Geltung kommt, wenn die Grenze zweier Flüssigkeiten gegen die Oberfläche eines festen Körpers läuft. Aus den hydrostatischen Gleichungen werden auch die Grundgesetze der Elektrostatik abgeleitet.

In der Hydrodynamik (Kap. III) sind wiederum die Teile von geringerem physikalischen Interesse kurz behandelt, ausführlich dagegen die Bewegung imponderabler Fluida innerhalb ponderabler Körper, wie Strömungen von Wärme und Elektricität in Leitersystemen, die Diffusion und verwandte Erscheinungen.

Das folgende IV. Kapitel (Elasticität und Akustik) hat einen erheblich grösseren Umfang als die vorhergehenden. Behandelt werden die Gesetze der elastischen Kräfte, die Bewegung elastischer Flüssigkeiten und die Resonanzerscheinungen, letztere wieder in eigenartiger Entwickelung. Neu ist vor allem ein aus der Green'schen Gleichung abgeleiteter Satz, der über die Erregung von Schwingungen Aufschluss giebt. Dann folgen Gleichgewicht und Bewegung unbegrenzter elastischer Medien, Gleichgewicht begrenzter elastischer Körper, endlich in einfacherer und übersichtlicherer Behandlung als bei Kirchhoff die Theorie des elastischen Stabes und der elastischen Platte. Das letzte (V.) Kapitel endlich enthält die Theorie der inneren Reibung und der elastischen Nachwirkung, die hier als nicht wesentlich verschieden erscheinen. Anwendungen der Theorie werden auf incompressible Flüssigkeiten und elastische Stäbe,

insbesondere aber auf die Fortpflanzung ebener Wellen in einem unendlichen elastischen absorbirenden Medium gemacht, und damit sind die Grundlagen der mechanischen Theorie des Lichtes gewonnen. Die Betrachtung von Medien ohne innere Kräfte liefert eine mechanische Analogie zu den Gesetzen des elektromagnetischen Feldes. Einiges aus dem Inhalt dieses Kapitels konnte Voigt seinen eignen früheren Arbeiten entnehmen, anderes ist, ebenso wie die Darstellung, neu.

Den Schluss des ersten Bandes bildet (Teil III) die Wärmelehre, die durchweg in veränderter, allgemeinerer und einheitlicherer Weise und damit kürzer dargestellt ist als in anderen Büchern. Hier werden die reinen Wärmeerscheinungen als ideelle Grenzfälle complicirter „thermisch-mechanischer Umsetzungen“ (so lautet der Titel des ersten Kapitels) aufgefasst. Nach Aufstellung der Grunddefinitionen werden die bekannten beiden Hauptgleichungen für umkehrbare Vorgänge abgeleitet; es werden die Begriffe der Energie und Entropie eingehend erörtert und die Theorie in eine Gestalt gebracht, die ihre Anwendung auf elastische Körper ermöglicht; insbesondere ergeben sich hierbei die Gesetze der thermischen Dilatation und der adiabatischen Deformation. Weiter werden die nicht umkehrbaren Zustandsänderungen behandelt; als specieller Fall derselben stellt sich die Wärmeleitung dar, deren Erscheinungen damit der allgemeinen Theorie eingeordnet sind. Zum Schluss werden die allgemeinen Bedingungen des thermisch-mechanischen Gleichgewichts untersucht.

Den Inhalt des zweiten Kapitels bildet die Theorie der thermisch-chemischen Umsetzungen, d. h. die Ableitung der allgemeinen Sätze über thermisch-chemisches Gleichgewicht und Anwendung derselben auf verschiedene Fälle.

Im zweiten Bande des Werkes werden die Grundgesetze der Elektricität und des Magnetismus (Teil IV), sodann die der Optik (Teil V) frei von speciellen Vorstellungen über den Mechanismus der Vorgänge allein aus den Resultaten der Beobachtung entwickelt.

In der Elektrostatik (Teil IV, Kap. I), die, der historischen Entwickelung entsprechend, an der Spitze der Elektricitätslehre steht, geht der Verf. von dem der Erfahrung entnommenen Coulomb'schen Gesetze aus, definirt dabei den Begriff der Ladung und führt dann erst die Potentialfunction ein. Es folgt die Theorie der Influenzirung von Leitern, bei der, wie in der Mechanik, alle Probleme von vorwiegend mathematischem Interesse fortgelassen sind. Einen grösseren Raum nimmt die Theorie der Dielektrica ein, deren Grundlage wieder die Erfahrung bildet. Es wird zunächst die elektrische Verteilung auf einem System von Leitern, das sich innerhalb einer unendlichen dielektrischen Flüssigkeit befindet, erledigt, und dann werden die Erweiterungen dargelegt, die notwendig werden, wenn mehrere Dielektrica vorhanden sind. Die so gewonnenen Ergebnisse sind in voller Uebereinstimmung mit den im ersten Bande aus der molecularen Theorie abgeleiteten. Die Erörterung der elektrischen Kräfte und Polarisationen innerhalb eines Dielektricums führt auf die Betrachtung krystallinischer Dielektrica; hier werden speciell die Kräfte berechnet, die ein dielektrischer Krystall im homogenen Felde ausübt

und erfährt. Weiter wird die Arbeit der elektrischen Kräfte bei einer Deformation der Dielektrica untersucht, und daraus ergiebt sich die Zurückführung der elektrischen Fernwirkungen auf Spannungen im Dielektricum. Zuletzt werden die thermodynamischen Eigenschaften der Dielektrica erörtert und daraus die Grundgesetze der Pyro- und Piëzoelektricität, der dielektrischen Influenz und der Elektrostriction abgeleitet.

Kapitel II enthält die Lehre vom Magnetismus, die von den fundamentalen Erfahrungsthatsachen über permanente Magnete ausgeht. Die Entwickelung der Potentialfunction eines permanenten Magneten führt auf die Gauss'sche Theorie des Erdmagnetismus, und daran schliesst sich die Theorie der magnetischen Influenz und der magnetischen Spannungen, die Zurückführung der magnetischen Fernwirkungen auf Druckkräfte, die Magnetostriction.

Die Grundformeln des Elektromagnetismus (Kap. III) werden abgeleitet aus der Betrachtung von Leitersystemen, die kein elektrisches Gleichgewicht gestatten, und der Thatsache, dass von solchen Leitern magnetische Polarisationen und Kräfte ausgehen. Die Untersuchung der im Leitersystem selbst auftretenden Polarisationen zeigt, dass sich dieselben als Componenten einer stationären Strömung, der „freien elektrischen Strömung“, deuten lassen. Diese zerfällt in einen nur von den magnetischen Kräften und in einen nur von den magnetischen Momenten abhängigen Teil, die „wahre elektrische Strömung“ und die „scheinbare Strömung“. Die elektrische Strömung erscheint also in dieser neuen und eigenartigen Darstellung zunächst nur als eine für die Veranschaulichung geeignete Fiction. Weiter werden die elektrischen Kräfte in einem stromführenden System und ihre Beziehungen zu den magnetischen betrachtet, und daran schliessen sich allgemeine Erörterungen über elektrische Ströme, sowie über die Dimensionen und Einheiten ihrer Stärke und Dichte. Die Beziehungen der Strömungen zu den magnetischen Kräften führen auf die Gesetze des Elektromagnetismus und der Elektrodynamik, die Beziehungen zu den elektrischen Kräften auf die allgemeinen Gesetze der stationären elektrischen Ströme. Im Anschluss daran werden die thermischen, mechanischen und magnetischen Einwirkungen auf die Constanten der Leitungsfähigkeit erörtert, ferner werden aus der elektrischen Arbeit in einem stromdurchflossenen Körper die Joule-, Peltier- und Thomson-Wärmen abgeleitet, sowie die Gesetze der Elektrolyse. Zum Schluss werden endlich auch nichtstationäre Ströme betrachtet. Ihre Behandlung erfordert eine Erweiterung der elektromagnetischen Grundgleichungen, aus der auch die Strömung in bewegten Leitern folgt; es ergeben sich dabei auf neue Weise die Gesetze der Polarisations- und Convectionsströme.

Das IV. Kapitel ist der Lehre von den inducirten Strömen gewidmet. Ausgehend von den der Beobachtung entnommenen Integralgesetzen, bespricht der Verf. zunächst die Induction in ruhenden linearen Leitern und wendet die gewonnenen Formeln auf verschiedene Erscheinungen an. Es folgen die allgemeinen Gesetze der in körperlichen Leitern und den Dielektrica inducirten elektrischen Kräfte; aus letzteren ergeben sich die

Hertz'schen Schwingungen wie auch die Grundgleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie. Das Kapitel schliesst mit den allgemeinen Inductionsgleichungen für bewegte Körper und Anwendungen dieser Gleichungen. Die Ableitung der Formeln für die Induction in körperlichen Leitern, mögen diese ruhen oder bewegt sein, ist wesentlich neu.

Die Einheiten, die der Darstellung der Elektricitätslehre zu Grunde liegen, sind die elektrostatisch-magnetischen, die Hertz benutzt hat, und die sich bei allen allgemeinen theoretischen Darstellungen in erster Linie empfehlen. Auch die Nomenclatur ist im wesentlichen die von Hertz angewandte, und ebenso schliesst sich der Verf. in den Bezeichnungen mit wenigen Ausnahmen an Hertz an. Um das Verständnis auch eines aus dem Zusammenhange gerissenen Kapitels der Elektricitätslehre zu erleichtern, ist dem Inhaltsverzeichnis eine Zusammenstellung der wichtigsten in Teil IV eingeführten Bezeichnungen beigegeben.

Für die Darstellung der Optik (Teil V) sind nicht die elektromagnetischen Gleichungen als Grundlage benutzt, sondern es ist, um die Hinzunahme mehr oder weniger bedenklicher Hülfshypothesen zu vermeiden, über den Mechanismus des Vorgangs eine bestimmte Vorstellung nicht eingeführt. Die Vorgänge werden dargestellt mit Hülfe einer als Polarisationsvector bezeichneten Grösse, die identisch ist mit dem Neumann'schen Vector der elastischen Theorie und nahe zusammenhängt mit der magnetischen Kraft der elektromagnetischen Theorie. Der mit ihr rein geometrisch verbundene Fresnel'sche Vector wird wesentlich nur als bequeme Abkürzung geführt.

In Kapitel I werden die allgemeinen Grundlagen der Theorie entwickelt. Es wird die analytische Form der „optischen Zustandsfunction" für ebene Wellen aus den Interferenzerscheinungen abgeleitet; es werden die Eigenschaften und analytischen Darstellungen des natürlichen und des teilweise polarisirten Lichtes erörtert und die Differentialgleichungen für die Fortpflanzung der Lichtschwingungen im leeren Raume aufgestellt. Diesen wird im Hamilton'schen Princip eine Form gegeben, welche ihre Ausdehnung auf beliebige durchsichtige und absorbirende Medien gestattet.

Es folgt (Kap. II) die Fortpflanzung ebener Wellen in durchsichtigen Medien. Hier wird zunächst die Theorie der Doppelbrechung in durchsichtigen inactiven Krystallen entwickelt; isotrope Medien treten dabei nur als ein specieller Fall auf. Daran schliesst sich die Reflexion und Brechung an der ebenen Grenze zweier durchsichtigen Krystalle, und zwar werden nicht nur, wie sonst üblich, die einfallenden Wellen als homogen, d. h. ihre Amplituden als überall gleich vorausgesetzt, sondern daneben wird auch der Fall inhomogener Wellen in Betracht gezogen, d. h. solcher, bei denen die Amplituden in der Wellenebene nach einer Richtung proportional einer Exponentialfunction variiren. Speciell wird die Totalreflexion an der Grenze zweier isotropen Medien und die hierbei stattfindende Energieströmung discutirt. Auch die Interferenzerscheinungen an planparallelen Krystallplatten im polarisirten Lichte finden hier ihre Stelle. Nachdem noch die Veränderungen der optischen Eigenschaften

von Krystallen bei der Einwirkung von Temperaturänderungen, Deformationen und elektrischen Kräften behandelt sind, werden die für durchsichtige magnetisch-active und für natürlich-active Medien geltenden Formeln abgeleitet, endlich wird der Einfluss der Oberflächenschichten auf die Erscheinungen der Reflexion und Brechung erörtert.

Während bis dahin nur durchsichtige Medien in Betracht gezogen waren, wird in Kap. III die Fortpflanzung ebener Wellen in absorbirenden Medien untersucht. Dazu sind die früheren Formeln zu erweitern, was hauptsächlich durch Einführung complexer Grössen an Stelle der reellen geschieht. Die Ergebnisse werden auf die extremen Fälle schwacher Absorption, wie bei pleochroitischen Krystallen, und sehr starker Absorption, wie bei den Metallen, angewandt. Eine Vereinfachung der Entwickelungen wird hier dadurch erreicht, dass die Wellennormale mit einer Coordinatenaxe zusammengelegt wird, ein Kunstgriff, dessen durchgängige Anwendung neu ist. Am Schluss des Kapitels wird auch die anomale Dispersion und der Einfluss der Translation eines Mediums auf die Lichtbewegung besprochen; beide Erscheinungen erfordern eine Erweiterung der Theorie durch Heranziehung neuer Schwingungsvectoren.

Das letzte (IV.) Kapitel ist allgemeineren Schwingungsvorgängen, insbesondere in isotropen durchsichtigen Körpern, gewidmet. Der Inhalt im einzelnen betrifft die Theorie des leuchtenden Punktes, die Interferenz bei Anwesenheit mehrerer leuchtender Punkte, die Beugung an einer absolut reflectirenden oder absolut schwarzen Halbebene, das Huygens'sche Princip, die angenäherte Theorie der Fresnel'schen und Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen und zuletzt das Kirchhoff'sche Emissions- und Absorptionsgesetz.

Dieser Inhaltsübersicht ist noch hinzuzufügen, dass den einzelnen fünf Teilen des Werkes umfangreiche Litteraturnachweise beigefügt sind.

Wn.

O. Lehmann. Dr. Joh. Müller's Grundriss der Physik mit besonderer Berücksichtigung von Molecularphysik, Elektrotechnik und Meteorologie für die oberen Klassen von Mittelschulen, sowie für den elementaren Unterricht an Hochschulen und zum Selbstunterrichte bearbeitet. Vierzehnte völlig umgearbeitete Auflage. Mit 810 eingedruckten Abbildungen und zwei Tafeln. Braunschweig: Friedr. Vieweg und Sohn. XXIV u. 820 S. 8°.

Fünfzig Jahre nach dem Erscheinen der ersten Auflage ist die vierzehnte ausgegeben. Nach dem Tode des verdienten Verf. Joh. Müller, der selbst zwölf Auflagen bearbeitet hat, ist die dreizehnte 1881 von Reichert besorgt worden, die vorliegende vierzehnte von O. Lehmann. Wer, wie Ref., den Grundriss vor mehr als 40 Jahren auf der Schule als Lehrbuch benutzt hat, wird jetzt nur hin und wieder ein Stückchen des damaligen Textes vorfinden; eine grössere Anzahl der Figuren aber, die schon zu jener Zeit durch ihre feine Zeichnung das Auge erfreuten, ist auch in die jetzige Auflage übergegangen und dient so zur Aufrechterhaltung der Continuität. Der gegenwärtige Her-

ausgeber, der auch Frick's physikalische Technik in vorzüglicher Weise bearbeitet hat, ist zu einer vollständig neuen Einteilung des Stoffes geschritten, um die Reihenfolge in beiden Büchern gleichförmig zu machen. Die Meteorologie als selbständiges Kapitel ist gestrichen, das Wichtigste daraus unter die übrigen Abschnitte verteilt. Die Uebungsaufgaben sind in kleinerer Schrift den einzelnen Paragraphen angehängt. Die grössten Aenderungen mussten natürlich auf dem Gebiete der Elektricität und des Magnetismus getroffen werden. Alle Erscheinungen sind in eine qualitative und eine quantitative Abteilung geschieden; die wichtigsten elektrotechnischen Maschinen und Einrichtungen sind beschrieben und durch vortreffliche Abbildungen erläutert. Am Schlusse jedes Paragraphen sind die anzustellenden Versuche nach Stichworten in der gehörigen Reihenfolge aufgezählt. Ein Abriss des absoluten Masssystems und ein alphabetisches Register beschliessen den Band. In der neuen Form wird der Grundriss weit gehenden Ansprüchen genügen, insbesondere für Aerzte und Techniker, so lange dieselben nicht Specialstudien in einem Zweige der Physik treiben wollen. Die Ausstattung entspricht den Traditionen der Firma Vieweg und Sohn. Lp.

R. Heger. Die Erhaltung der Arbeit. Hannover: Helwing'sche Verlagsbuchhandlung. VI u. 305 S. gr. 8°.

Das Buch enthält eine im besten Sinne populär gehaltene Behandlung des Gegenstandes. Die vorausgesetzten mathematischen und physikalischen Kenntnisse sind gering, übersteigen nirgends das Mass der Bildung eines Untersecundaners; trotzdem werden alle Betrachtungen gründlich und in klarer Darstellung durchgeführt. Die Reichhaltigkeit des Buchs ist aus den Ueberschriften der einzelnen Kapitel ersichtlich. 1. Begriff der Arbeit. 2. Uebertragung der Arbeit durch Zwischenmittel. 3. Der Hebel. Schwerpunkt. 4. Die schiefe Ebene. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften. 5. Der freie Fall. Der senkrechte, der wagerechte und der schräge Wurf. 6. Bewegung verbundener Gewichte. Zwei Gewichte an einer festen Rolle. Zwei Gewichte am Rad an der Welle. Gewicht an Welle mit Schwungring. 7. Elastische Schwingungen. 8. Die absoluten mechanischen Masseinheiten. 9. Der Stoss. 10. Arbeitsübertragung durch Flüssigkeiten. 11. Wasserräder. 12. Arbeitsmessung an Maschinen. 13. Fortpflanzung des Druckes durch Gase. Das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz. 14. Specifische Wärme der Luft. 15. Andere Zustandsänderungen der Luft. 16. Die Heissluftmaschine. 17. Die Heissluftmaschine (Schluss). Die Gasmaschine. 18. Eigenschaften des Wasserdampfes. 19. Die Dampfmaschine. 20. Die Dampfmaschine (Fortsetzung). 21. Theoretische Schlussbetrachtung. 22. Ruhende Elektricität. 23. Der elektrische Arbeitsgrad. 24. Der elektrische Strom. 25. Messung der Stromstärke. 26. Verwandlung elektrischer Arbeit in chemische. 27. Magnetismus. 28. Bewegung eines geschlossenen Leiters im magnetischen Felde. 29. Verwandlung mechanischer Arbeit in elektrische. 30. Bogenlampen und Glühlampen.

31. Verwandlung elektrischer Arbeit in mechanische. 32. Wechselwirkung zweier elektrischen Ströme. 33. Umwandlung elektrischer Arbeit. Lp.

M. KUHN. **Unmittelbare und sinngemässe Aufstellung der „Energie“ als mechanischen Hauptbegriffes und darauf gestützte, folgerichtige Ableitung der übrigen grundlegenden Begriffe der Physik.** Jahresbericht der k. k. Staats-Realschule im VII. Bezirke. Wien, 1896. 25 S.

Als kinematische Grundgleichungen werden $v dv = \beta ds$ und $v dv = v\beta dt$ aufgestellt, in welchen v die Geschwindigkeit, β die Beschleunigung und ds ein Wegelement bedeuten. Im Anschluss daran wird die Energie definirt als das Product aus der Geschwindigkeitsänderung in die Schnelligkeit, mit welcher sie vollzogen wird, und in die „Mächtigkeit des vom Träger oder vom Mittel abhängigen Widerstandes im Elemente“, also $dE = v.dv.w$. Diese Gleichung dient als Erläuterung des Wesens der Energie, die andere Gleichung $dE = w\beta ds$ zur Messung derselben.

Die Einheit des Widerstandes w wird definirt als das Hemmnis, welches ein Kubikcentimeter reinen Wassers von 4^0 C, das 1 cm weit mit einer unveränderlichen Secundenbeschleunigung von 1 cm bewegt wird, auf diesem Wege findet. Für diese Widerstandseinheit — welche also mit der Masse von 1 Gramm identisch ist — wird der Name Mol (moles) oder Hyl (hyle) vorgeschlagen.

Durch diese formalen Aenderungen der üblichen Ableitungen der Mechanik meint der Verf. die inneren Schwierigkeiten, welche dem Begriffe der Masse und der Energie innewohnen, beseitigen zu können; er dürfte wohl schwerlich viel Zustimmung zu dieser Ansicht finden.

Hau.

LOTHAR MEYER. **Die Atome und ihre Eigenschaften. Sechste Auflage.** Breslau: Maruschke & Berendt. X u. 171 S. gr. 8°.

Der vorliegende Band bildet das „erste Buch, die Atome“ des Werkes: „Die modernen Theorien der Chemie und ihre Bedeutung für die chemische Mechanik“, das 1862 in erster Auflage erschienen und seitdem in erneuter, umgearbeiteter Gestalt immer wieder ausgegeben ist. Nach Uebersendung des druckfertigen Manuscripts für diese letzte Auflage am 11. April 1895 ist der Verf. an demselben Tage in Folge eines Schlaganfalles aus dem Leben geschieden. Die Correctur ist vom Professor Hans Jahn gelesen worden; Oskar Emil Meyer, der Bruder des Verstorbenen, hat das Vorwort geliefert. Ein Buch, das über dreissig Jahre als Handbuch für alle Chemiker gedient hat, bedarf keiner Inhaltsangabe und keiner Empfehlung. Für das Jahrbuch ist aber vielleicht der Hinweis nützlich, dass man nirgends so vollständig wie hier die Gründe für die atomistische Hypothese des Baus der Körper zusammengestellt findet. Wenn manche Naturphilosophen durch keckes Auftreten

jetzt zuweilen die Meinung erwecken wollen, die atomistische Hypothese sei überwunden, die Hypothese eines Continuums sei allein noch wissenschaftlich, so ist es gut, dass in einem handlichen kleinen Bande die Gründe für die atomistische Hypothese und ihre Unentbehrlichkeit aufgeführt sind. Lp.

L. Boltzmann. Ueber die Unentbehrlichkeit der Atomistik in der Naturwissenschaft. Wien. Ber. **105**, 907-922.

Entgegen dem Titel, der direct eine programmatische Streitschrift erwarten lässt, enthält die kleine Arbeit mehr eine gelegentliche Gedankenäusserung ohne feste Disposition über den Gegensatz der althergebrachten Naturerklärung durch die Atomistik und der neueren Naturbeschreibung, die nur die formale Seite der Probleme behandelt und diese schliesslich in Systeme von Differentialgleichungen auflöst. Die Ausführungen sind so allgemein gehalten, dass sie sich hier mit wenig Worten nicht wiedergeben lassen. Es muss deshalb genügen, an dieser Stelle auf ihre allgemeine Tendenz hinzuweisen. Diese geht dahin, nachzuweisen, dass 1) die Naturbeschreibung durch Differentialgleichungen stets nur die einfachsten Fälle darzustellen vermöge, beim Zusammenspiel mehrerer Energieformen aber sofort versage, und dass 2) die Aufstellung von Differentialgleichungen, d. h. die Behandlung der natürlichen Grössen als stetiger, trotz der scheinbar exacteren Form in Wahrheit auch nur eine Näherung bedeute, weil sie immer nur durch einen Grenzübergang von den discreten Atomen u. s. w. zu fingirten Continuis zu Stande komme und demgemäss auch nur da zu Stande kommen könne, wo eben ein derartiger Uebergang auf die Naturgesetze ohne Einfluss sei. Br.

Duport. Mémoire sur la constitution des atomes et sur l'action de la matière sur la matière. S. M. F. Bull. **24**, 102-132.

Der Verf. erörtert die Hypothese, dass die Atome flüssig seien und aus Elementarteilchen bestünden, die als Massenpunkte behandelt werden könnten. Die Anziehungen innerhalb der Atome würden sich danach als solche von Massenpunkten darstellen und nur von deren Coordinaten und Geschwindigkeiten abhängig sein. Auf Grund von formelreichen, nicht völlig durchsichtigen Ueberlegungen gelangt der Verf. zu dem Ergebnis, dass diese Annahme auf innere Widersprüche führen muss. Br.

Duport. Sur la constitution des atomes et l'action de la matière sur la matière. S. M. F. Bull. **24**, 197.

Folgende Sätze werden als Resultate der Untersuchung p. 102-132 aufgeführt. 1. Die Hauptträgheitsmomente eines Atoms sind einander gleich. 2. Die Wirkung eines Punktes M eines Atoms auf einen Punkt A desselben Atoms kann nicht allein abhängig sein von der relativen Lage und den Geschwindigkeiten beider Punkte. 3. Diese Wirkung

lässt sich darstellen durch die Strecke $\omega^2(AP)\mu\frac{dv}{V}$, wo P den Fusspunkt des Perpendikels von A auf die in M beginnende Rotationsgeschwindigkeit des Atoms, μ die Masse des Punktes A, dv das Volumen des Punktes M, V das Volumen des Atoms bezeichnet. H.

P. Beck. Der Substanzbegriff in der Naturwissenschaft. Inaug.-Diss. Leipzig. Meissen: E. E. Klinkicht & Sohn. 64 S. 8°.

Die Schrift behandelt in ansprechender Weise kritisch den Substanzbegriff nach seiner historischen Entwickelung in der Philosophie und Naturwissenschaft und ist zur ersten Einführung in die bezüglichen Betrachtungen sehr wohl geeignet. Bis zu den neuesten Veröffentlichungen von Poincaré fortschreitend, gelangt der Verf. zu den folgenden Endergebnissen:

„Die in der Einleitung gestellte Frage, worin die Berechtigung liegt, den Substanzbegriff in der Wissenschaft beizubehalten, muss nach dem Vorhergehenden dahin beantwortet werden, dass sich weder durch erkenntnistheoretische, noch durch wissenschaftliche Gründe die Notwendigkeit oder auch nur Brauchbarkeit eines naturwissenschaftlichen Substanzbegriffes beweisen lässt. Die Physik hat kein Interesse an der Annahme, dass den sinnlichen Erscheinungen ein Substrat, der sinnlichen Welt eine Welt der Substanzen zu Grunde liegt. Real ist weder ein künstlich construirtes Phantasiegebilde noch ein System abstracter Begriffe, sondern nur die sinnliche Welt, welche der Schauplatz und zugleich das Object menschlichen Wollens und Handelns ist.“

Offenbar hat der Verf. die Mach'schen Schriften über den Gegenstand vernachlässigt; wir bedauern dies um so mehr, als dieser vorsichtige Forscher die Frage zum Teil aus anderen Gesichtspunkten erörtert, in den Resultaten daher auch nicht völlig mit Beck übereinstimmt. Wir führen als Belag die folgende Stelle aus der dritten Auflage der Mach'schen Mechanik (S. 190) an:

„Ich habe anderwärts (Analyse der Empfindungen) zu zeigen versucht, wie wir durch die Beständigkeit der Verbindung verschiedener Sinnesempfindungen zur Annahme einer absoluten Beständigkeit geleitet werden, welche wir Substanz nennen, wie sich als das erste und nächstliegende Beispiel einer solchen Substanz der von seiner Umgebung unterscheidbare, bewegliche Körper darbietet. Ist der Körper in gleichartige Teile teilbar, deren jeder einen beständigen Eigenschaftscomplex darbietet, so gelangen wir zur Vorstellung eines Substanziellen, welches quantitativ veränderlich ist, das wir Materie nennen. Was wir aber von einem Körper wegnehmen, erscheint dafür anderswo. Die gesamte Quantität der Materie zeigt sich constant. Genau genommen, haben wir es aber mit so vielen substanziellen Quantitäten zu thun, als die Körper Eigenschaften haben, und für die Materie bleibt keine andere Function übrig, als die, die beständige Verbindung der einzelnen Eigenschaften darzustellen, von welchen die Masse nur eine ist.“ Um zuletzt auch

die neuesten Anschauungen Ostwald's zu Worte kommen zu lassen, der als Lehrer des Verf. jedenfalls einen bedeutenden Einfluss auf ihn ausgeübt hat, so führen wir aus dessen bekannter Lübecker Rede die Stelle an: „Die Materie ist ein Gedankending, das wir uns, ziemlich unvollkommen, construirt haben, um das Dauernde im Wechsel der Erscheinungen darzustellen. Nun wir zu begreifen anfangen, dass das Wirkliche, d. h. das, was auf uns wirkt, nur die Energie ist, haben wir zu prüfen, in welchem Verhältnis die beiden Begriffe stehen, und das Ergebnis ist unzweifelhaft, dass das Prädicat der Realität nur der Energie zugesprochen werden kann." Lp.

A. Turner. Die strahlende Materie. Leipzig: Theod. Thomas. VIII u. 29 S. 8°.

Die vorliegende Schrift verdankt wohl der Röntgen'schen Entdeckung der X-Strahlen ihre Entstehung; wie auch andere Theoretiker derselben Richtung, erblickt der Verf. in diesen Strahlen eine Bestätigung seiner Theorien und eine glänzende Widerlegung der „von den Lehrkanzeln verkündeten privilegirten Wissenschaften." Im übrigen kann man einen Geist beneiden, der mit absoluter Selbstgewissheit und Zufriedenheit die Richtigkeit der eigenen Gedanken verficht, die Ideen der Gegner verächtlich macht und z. B. auf S. 21 zu dem Ergebnisse kommt: „In dieser Art lässt sich auch eine organische Batterie bilden mit abwechselnden Geschlechtern, und der elektrische Strom, welcher entsteht, wird hinsichtlich seiner Stärke davon abhängen, welche Quantität von Elementen im gegebenen Momente frei werden." Im übrigen verweisen wir, nach dem Vorgange des Verf., auf seine Veröffentlichungen der letzten Jahre und ihre Anzeigen im Jahrbuche. Lp.

Ch. Lagrange. Sur les équations du champ physique. Troisième note. Introduction de la pression interne dans les équations du milieu. Belg. Bull. (3) **31**, 111-136.

Ch. Lagrange. Sur les équations du champ physique. Quatrième note. Équations du mouvement de deux milieux continus qui occupent un même espace. Belg. Bull. (3) **31**, 339-379.

Wenn es schon in den Berichten über die beiden ersten Noten des Verf. schwierig war, aus der Fülle von Formeln, welche in dieser Arbeit hergeleitet werden, einen kurzen Ueberblick über den Gang der Untersuchung herauszuschälen, so ist es wegen der Ausdehnung der in den gegenwärtigen Noten entwickelten Beziehungen und der Mannigfaltigkeit der Bezeichnungen geradezu unmöglich, auf die Gedankenfolge genauer einzugehen. Die Betrachtungen sind in solcher Allgemeinheit gehalten, dass sie auf die verschiedenen physikalischen Gebiete Anwendung finden können. Neben Formeln, deren Bedeutung bekannt ist, treten andere auf, deren Interpretation noch aussteht. Gewisse unter den Gleichungen der „dritten Note" bestimmen in jedem Augenblicke und in jedem

Punkte den Zustand des Mediums unter der Einwirkung des inneren Druckes. Andere behandeln die eintretenden Bewegungen und kommen auf die Grundformeln der Optik und Akustik zurück, während die Herleitung sowohl die Verteilung als auch die Gestalt der schwingenden Punkte berücksichtigt. Dabei finden die gegebenen Formeln auf ein beliebiges (festes, flüssiges, gasförmiges) Medium Anwendung. Die „vierte Note" erörtert die nämlichen Beziehungen für Gemenge aus zwei Medien. Die Ergebnisse der Forschung werden für drei Probleme benutzbar: 1) das Problem der Strömungen, welche in einer Mischung zweier flüssigen oder viscosen Körper bestehen; 2) die Schwingungsbewegungen zweier Medien in einem und demselben Raume zu erforschen. Hierzu gehört als besonderer Fall die Einwirkung eines vom Lichte durchquerten Körpers auf die Lichtschwingungen des Aethers. Ferner ergeben sich natürlich die bezüglichen Formeln der dritten Note als specielle Fälle derjenigen in der vierten. 3) Das allgemeine Problem der Translationsbewegung eines Mediums durch ein anderes. Die betreffenden Formeln passen auf den Fall des einen Leiter durchlaufenden Stromes. Das eine der wichtigsten Probleme, deren Lösung hiermit bezweckt wird, ist das des Kreislaufes eines materiellen Aethers in festen Leitern und in der Erde unter der bewegenden Einwirkung eines elektromagnetischen Feldes. — Die Gleichungen der Wärmebewegung werden einem späteren Abschnitte der Arbeit vorbehalten. Lp.

O. Foerster. Die Elasticitätscoefficienten und die Wellenbewegungserscheinungen als Functionen der Moleculargewichte und specifischen Wärmen. Schlömilch Z. **41**, 258-264.

Bezeichnet man mit E den Elasticitätscoefficienten, mit M das Moleculargewicht und mit D das specifische Gewicht, so ist, wie bereits Wertheim empirisch gefunden hatte, der Ausdruck: $E\cdot(\sqrt[3]{M/D})^7$ für alle Metalle nahezu constant. Durch zweckentsprechende Einführung der specifischen Wärme gelangt der Verf. dazu, die annähernde Richtigkeit der Formel theoretisch zu beweisen. Eine Tabelle zum Vergleich der experimentell bestimmten mit den theoretisch (auf diesem Wege) errechneten Elasticitätscoefficienten ist beigefügt. Br.

A. Korn. Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik. Zweite Auflage. I. Teil: Die Grundlagen der Hydrodynamik und die Theorie der Gravitation. Berlin: Ferd. Dümmler's Verl. 117 S. 8°.

Wie aus der ersten Auflage dieser Schrift bekannt ist, handelt es sich um den Versuch, die im Titel genannten Erscheinungen dadurch zu erklären, dass den Massenteilchen pulsirende Bewegungen beigelegt werden, wie Bjerknes dieses zuerst bei seinen pulsirenden Kugeln eingeführt hat, und dass ein Zwischenmedium in Gestalt eines Continuums im Sinne der Hydrodynamik angenommen wird. Die Neubearbeitung dieser Lehre

wird durch die Veränderungen und Vereinfachungen begründet, welche die mathematische Darstellung der Theorie seit der ersten Veröffentlichung erfahren hat. Als Schlussstein soll in systematischer Behandlungsweise die Bearbeitung der Induction und der Bewegung im Dielektricum folgen. Die einzelnen Abschnitte sind betitelt: I. Die Bewegung starrer Körper in einer gewöhnlichen Flüssigkeit. II. Ueber die Bewegung pulsirender Kugeln in einer gewöhnlichen, wirbellosen Flüssigkeit (Theorie der Gravitation). III. Oscillirende Kugeln und starre Ringe in einer gewöhnlichen Flüssigkeit. Lp.

A. Cornu. **Les forces à distance et les ondulations.** Annuaire Bur. Long. A 1-26; L'éclairage électr. **8**, 343-353. [Wiedemann Beibl. **20**, 487.]

Historische Uebersicht über die Entstehung der Lehre von den Fernkräften und die Bestrebungen der Neuzeit, die Fortpflanzung der Energie durch ein Medium an die Stelle jener Fernkräfte zu setzen. „Wenn wir die definitive Lösung (des Problems des Mechanismus der Fernkräfte) heute noch nicht besitzen, werden wir sie ohne Zweifel bald haben.“

Lp.

C. del Lungo. **Sul meccanismo delle forze a distanza.** Ven. Ist. Atti (7) **7**, 997-1003.

Von dem Cornu'schen Aufsatze „Les forces à distance et les ondulations“ angeregt, wendet sich der Verf. gegen die dort ausgesprochenen Hoffnungen auf baldige Eröffnung der Einsicht in das Wesen der Fernkräfte. Im wesentlichen stehen wir noch vor dem Rätsel derselben wie einst Newton. Wenn wir in den Principen von der Erhaltung der Masse und Energie einen festen Halt zu haben vermeinen, so fehle das Band (relazione) zwischen beiden, während doch mit der Schöpfung und Vernichtung von Masse zugleich Energie geschaffen und vernichtet werde. „Es scheint mir, dass der Weg, welcher uns der Lösung des schwierigen Problems der Wirkung in die Ferne näher bringen kann, von einer weniger verfänglichen Idee als derjenigen der Materie gegeben werden muss; nämlich von der Idee, dass die Materie weiter nichts ist als eine Modification des allgemeinen Mediums, das wir Aether nennen, einer Modification, welche sich also auf den Raum erstreckt, den wir von der Materie eingenommen erklären ... Und ich glaube, dass die Quelle, aus welcher ein neues Licht auf alle diese Fragen sich ergiesst, die noch fehlende Relation zwischen der Materie und der Energie ist. Wahrscheinlich liegt diese Relation in der Unbekannten, die wir Aether nennen.“

Lp.

H. Seeliger. **Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz.** Münch. Ber. **26**, 373-400.

Die Abhandlung zerfällt in zwei Teile. Der erste ist eine neue Bearbeitung derjenigen Gedanken, welche der Verf. 1895 in den Astron. Nachr. unter demselben Titel veröffentlicht hatte. Die Veranlassung zu dieser neuen Darstellung war zum Teil durch Missverständnisse gegeben,

die an den früheren Aufsatz angeknüpft waren, teils aber auch durch eine gewisse Uebereinstimmung in der Anzweifelung der absoluten Gültigkeit des Newton'schen Gesetzes zwischen dem Verf. und C. Neumann in dem Buche des letzteren: „Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen." Der zweite Teil behandelt ein Problem verwandter Art, nämlich die von Cheseaux und Olbers gestellte Frage, wie es komme, dass die mittlere Flächenhelligkeit des Himmels eine sehr geringe ist, während sie der Sonnenhelligkeit vergleichbar sein sollte, wenn man die Anzahl der leuchtenden Weltkörper unbegrenzt gross annimmt. Während Olbers das anscheinende Paradoxon durch die Extinction des Lichtes im Weltenraume erklärt, gelangt der Verf. durch eingehendere Erörterung zu der Einsicht, dass die Schlussfolgerungen von Olbers keineswegs einwurfsfrei sind. Die Zulässigkeit der Olbers'schen Annahme kann zwar nicht bestritten werden; ihre Notwendigkeit folgt aber keineswegs aus einer vorurteilsfreien Betrachtung der Frage. Lp.

E. Rethwisch. Die Bewegung im Weltenraum. Eine Kritik der Gravitation und Analyse der Axendrehung. Zweite ergänzte Auflage. Berlin: F. Schneider u. Co. IV + 178 S. 8°.

Weder hat der Verf. davon gehört, dass „die Massenanziehung der Körper" durch Beobachtung, Erfahrung oder Experiment bewiesen worden sei, noch hat er eine Vorstellung von dem Trägheitsgesetze; daher erklärt er (ein nicht neuer Einfall) die Gravitationserscheinungen als Folge der Axendrehung der Weltkörper. Lp.

R. Mewes. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwerkraftstrahlen und deren Wirkungsgesetze. Berlin: Fischer's Technologischer Verlag (M. Krayn). 92 S. 8°.

Aus Anlass der Entdeckung der X-Strahlen, deren Identität mit den Schwerkraftstrahlen der Verf. für höchst wahrscheinlich hält, ist die vorliegende Broschüre früher, als beabsichtigt war, veröffentlicht, da „gerade" bei den Gelehrten die Begriffe über Mein und Dein in den letzten Jahrzehnten mehr denn je ins Wanken geraten sind." Zwei Methoden meint der Verf. gefunden zu haben zur Berechnung der Geschwindigkeit der Schwerkraftstrahlen, von denen die eine auf dem Doppler'schen Princip beruht. Wenn man aber sieht, dass die erhaltene Zahl 464.10^6 m als Mittel von 8 Zahlen erscheint, die von 667.10^6 bis 275.10^6 absteigen, so genügt diese Thatsache zur Kennzeichnung der vom Verf. angewandten Berechnungen. Alle Schlussfolgerungen bewegen sich in Anschauungen und Gedankenketten, denen Ref. verständnislos gegenüber steht. Von den Berechnungen der Astronomen jüngster Zeit: v. Hepperger, Oppenheim, Lehmann-Filhès, nach denen die Geschwindigkeit der Gravitationsstrahlen zur Zurücklegung einer Strecke von der Grösse der Erdbahnhalbaxe weniger als eine Zeitsecunde brauchen

muss, weil sonst Störungen in der Bewegung unserer Planeten nachweisbar sein würden, scheint dem Verf. nichts bekannt geworden zu sein. Als Probe der Schreib- und Denkweise diene folgende Stelle (S. 64 u. 65): „Die Wellen, welche von der Sonnenkugel ausgehen, breiten sich strahlenförmig und zwar in geraden Linien aus; aber sollten dieselben wegen der Rotation der Sonne nicht gleichzeitig auch noch eine tangentiale Bewegung erhalten? Die Möglichkeit hiervon ist sicherlich nicht ausgeschlossen; im Gegenteil dürfte meiner Ansicht nach dies wahrscheinlich dem wirklichen Sachverhalte genau entsprechen. Dann müssen aber auch die von der Sonne zur Erde gelangenden Strahlen die Erde nicht nur in verticaler, sondern auch in tangentialer Richtung treffen .... Die eben gegebene Erklärung der Tangentialgeschwindigkeit zeichnet sich besonders dadurch aus, dass aus ihr ohne weiteres die Gleichwertigkeit der Tangentialkraft mit der Attractionskraft folgt.“ Lp.

Th. Schwartze. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwerkraft. Elektrotechn. Rundsch. **13**, 126-127.

In der dem Verf. eigentümlichen mechanischen Schlussweise, die mit denselben Worten und Zahlen, aber mit ganz anderen Vorstellungen operirt, als Ref. sie besitzt und benutzt, wird auf zwei Wegen die Geschwindigkeit der Schwerkraft als das $1^1/_2$-fache der Lichtgeschwindigkeit gefolgert, oder, um nicht etwas auszusagen, was der Verf. vielleicht nicht gemeint hat, „die Schwerkraft verhält sich zur Lichtkraft wie 3:2“. Auf die Berechnungen der Astronomen für eine untere Grenze der Geschwindigkeit der Gravitation ist nicht Rücksicht genommen. Lp

---

A. Sinram. Kritik der Formel der Newton'schen Gravitationstheorie. Hamburg: Lucas Gräfe & Sillem. 44 S. gr. 8°.

Der Verf. meint, die Newton'sche Idee über die Schwerewirkung sei einzig weiter entwickelt worden aus der Uebereinstimmung der bezüglichen Werte mit der Grösse der Bewegung des Erdmondes. Daher richtet er seine Angriffe auf die Formel $4\pi^2 r/T^2$, welche er fälschlich eine Newton'sche Formel nennt, und macht die Entdeckung, dass dieselbe sich im wesentlichen auf $\pi^2 = 9{,}8696$, also auf eine „geometrische Gleichung“ einfachster Art reducire. „In der letzten Zahlenreihe steht die Gravitations-Theorie in ihrer nackten Gestalt da. Entkleidet ihres äusseren Glanzes, steht ihr todtes Zahlengerippe vor uns und starrt uns mit hohlen Augen an.“ Offenbar hat der Verf. nur elementare Werke über den Gegenstand gelesen, die Newton'schen Principia philosophiae naturalis aber entweder überhaupt nie gesehen, oder aber sicherlich nicht verstanden. Die Schmähungen, welche er auf Newton häuft, zeugen dafür, dass Sinram ein astronomisches Werk über die Himmelsmechanik nicht studirt haben kann. Die Identificirung von π^2 mit g beweist die Aeusserlichkeit seines Verfahrens in Zahlenrechnungen. Lp.

P. Mallock. Experiments on fluid viscosity. Lond. Phil. Trans. **187 A,** 41-56 und Lond. R. S. Proc. **59,** 38. (Abstract).

Man denke sich zwei coaxiale Cylinder, deren Hohlraum mit Wasser gefüllt ist. Der äussere Cylinder wird gedreht, die auf den inneren durch die Viscosität übertragene Bewegung beobachtet. Das betreffende Drehmoment war nur für Geschwindigkeiten unterhalb einer gewissen Grenze der Geschwindigkeit des äusseren Cylinders direct proportional. Der Proportionalitätsfactor (Reibungscoefficient) wurde im allgemeinen grösser gefunden, als bei den Poiseuille'schen Versuchen. Oberhalb dieser Grenze gab es ein Gebiet, wo das Drehmoment gesetzlos hin und her schwankte. Bei noch grösseren Geschwindigkeiten variirte es schneller als das Quadrat der Geschwindigkeit. A. S.

H. Le Chatelier. Sur quelques particularités des courbes de solubilité. C. R. **123,** 593-595.

Ergänzung zu früheren Arbeiten desselben Verf. über die Löslichkeitscurven für Doppelsalze und Legirungen. In der Nähe der Mischungen, die den Aequivalentverhältnissen einer derartigen chemischen Verbindung entsprechen, zeigen die Löslichkeitscurven Maxima und Knicke, aber nur in der Nähe dieser Punkte, nicht genau für die richtigen Mischungen. Es wird eine Formel aufgestellt, die dieser im ersten Augenblick auffallenden Thatsache gerecht wird. Br.

A. Ponsot. Influence de la pression dans les changements d'état d'un corps. C. R. **123,** 595-598.

Allgemeine Ueberlegungen über den Fall, in dem ein nicht flüchtiger Körper in Wasser gelöst ist, während über der Lösung sich ein in Wasser unlösliches Gas und der entsprechende Wasserdampf befinden. Die Abhängigkeit eines solchen Systems vom Druck wird ohne nähere Entwickelungen kurz besprochen. Br.

Lord Rayleigh. Theoretical considerations respecting the separation of gases by diffusion and similar processes. Phil. Mag. (5) **42,** 493-498.

Zuerst wird die Betrachtung auf das Problem der einfachen Diffusion eines Gasgemenges in ein Vacuum erstreckt, unter besonderer Berücksichtigung des Residuums bei der Annahme, dass die die Mischung fördernden Kräfte stark genug sind um die Zusammensetzung als gleichmässig durch das ganze Volumen des Residuums ansehen zu können und variabel nur mit der Zeit wegen des ungleichmässigen Entweichens der gasförmigen Bestandteile. Sind x, y die Mengen der beiden Bestandteile des Residuums zu einer beliebigen Zeit, so sind $-dx$, $-dy$ die in der Zeit dt diffundirten Mengen; für den behandelten Fall genügt es, nicht dx/dt, dy/dt zu nehmen, die von dem Charakter der porösen Ver-

teilung und von dem herrschenden Drucke abhängen, sondern dy/dx, worin nur die Verhältnisse der Bestandteile und ihre Diffusionszahlen μ, ν enthalten sind. Also $dy/dx = \nu y/\mu x$; hiervon ist das Integral:

$$x = X\left(\frac{y/x}{Y/X}\right)^{\mu:(\nu-\mu)}, \quad y = Y\left(\frac{x/y}{X/Y}\right)^{\nu:(\mu-\nu)},$$

wenn X, Y zusammengehörige, als Anfangswerte angesehene Werte von x, y sind. Ist $r = \frac{y/x}{Y/X}$, so stellt r die Ausstattung des Residuums in Betreff des zweiten Bestandteils dar, und die eben hingesetzten Werte für x und y geben

$$\frac{x+y}{X+Y} = \frac{X}{X+Y} r^{\mu:(\nu-\mu)} + \frac{Y}{X+Y} r^{\nu:(\nu-\mu)}.$$

Diese Gleichung wird dann mit den Versuchsergebnissen verglichen. Der nächste hierauf vorgenommene Fall ist der, bei welchem das Vacuum durch eine Atmosphäre von fester Zusammensetzung ersetzt wird. Unter der Annahme, dass bloss zwei Gase in Betracht kommen, und dass das Volumen innerhalb gegeben ist, bedeuten x, y die Teildrucke in dem Innern des gegebenen Volumens, während die constanten Teildrucke ausserhalb α, β sind. In diesem Falle ist $dx = \mu(\alpha - x)dt$, $dy = \nu(\beta - y)dt$, woraus $x = \alpha + Ce^{-\mu t}$, $y = \beta + De^{-\nu t}$. Durch Elimination von t folgt aus diesen Gleichungen $y - \beta = E(x-\alpha)^{\nu:\mu}$. Auch dieses wird mit den Versuchsergebnissen verglichen. Zuletzt kehrt die Darstellung zu dem Falle der Trennung von Gasen durch Diffusion in ein Vacuum zurück. Gbs. (Lp.)

G. Jäger. Zur Theorie der Dissociation der Gase (II. Mitteilung). Wien. Ber. **104**, 671-679.

Die Arbeit bezweckt in der Hauptsache eine bessere Begründung der schon früher vom Verf. aufgestellten kinetischen Dissociationstheorie. (Wien. Ber. **100**, 1282-92; F. d. M. **23**, 1197, 1891.) Es werden folgende Voraussetzungen gemacht: 1) Jede Molekel zerfällt bei der Dissociation in zwei Teilmolekeln. 2) Diese Teilmolekeln sind unter einander gleichartig. 3) Die Dissociation einer Molekel erfolgt, sobald ihre Gesamtenergie einen bestimmten Wert überschreitet. 4) Die Wiedervereinigung getrennter Teilmolekeln zu einer Molekel erfolgt, sobald ihre Gesamtenergie unter einen gewissen Wert sinkt. 5) Die Energie der fortschreitenden Bewegung einer Molekel bildet einen constanten Bruchteil ihrer Gesamtenergie. Auf Grund dieser Annahmen gelingt es, die Methoden der kinetischen Gastheorie auf den Dissociationsprocess anzuwenden und zu berechnen, wie viel Molekeln sich in der Secunde dissociiren, wie viel sich neu bilden, wie hoch die Dissociationstemperatur ist u. s. w. Bei dieser Gelegenheit wird ein Rechenfehler in dem Ausdruck für die Dissociationstemperatur berichtigt. Für Untersalpetersäure ergiebt sich diese jetzt zu

4000° statt des alten Wertes von 6000°. Auch dieser Wert erscheint noch ausserordentlich hoch. Br.

Weitere Litteratur.

B. BRUNHES. L'évolutionnisme et le principe de Carnot. Rev. de métaphys. **4**, 35-43.

PAUL KÄUFFER. Energie - Arbeit. Schnelles Arbeiten ist teurer als langsames Arbeiten. — Die Kräftediagramme. Die specifische Wärme der Luft (der Gase). Der Vorgang, wenn Luft infolge von Erwärmung sich auf grösseres Volum ausdehnt. Energie im allgemeinen. Mainz: Victor von Zabern. 50 S. gr. 8° mit 19 Abb. Titelangabe Centralbl. der Bauverw. **16**, 192. F. K.

R. MEWES. Die elementare Physik des Aethers. Neue Ausgabe von „Kraft und Masse". Zwei Teile. Berlin: Krayn. XII+66 u. 160 S. 8°.

J. SPERBER. Das Parallelogramm der Kräfte als Grundlage des periodischen Systems in der Chemie. Zürich: Speidel. 37 S. 8°.

B. Elasticitätstheorie.

H. POINCARÉ. Sur l'équilibre d'un corps élastique. C. R. **122**, 154-159.

Um die Elasticitätsgleichungen für einen gegebenen Körper zu integriren, sucht der Verf. zunächst Grössen, die den Bedingungen für den ganzen Raum genügen, die an der Oberfläche des Körpers selbst stetig sind, deren Ableitungen jedoch gewisse Unstetigkeiten aufweisen. Indem der Verf. die mit diesen Unstetigkeiten verbundenen Unstetigkeiten der Druckcomponenten als gegeben voraussetzt, kann er die Verrückungen durch Oberflächen- und Körperpotentiale ausdrücken. Nun stellt er drei Bedingungen für die Unstetigkeit auf, welche einen gewissen Parameter k enthalten; für $k=1$ gehen dieselben darin auf, dass der Druck an der Oberfläche gegeben ist. Aus diesen Gleichungen werden Reihen abgeleitet, welche nach Potenzen von k fortschreiten und, wie nachgewiesen wird, für $k=1$ noch convergiren. Der Verf. giebt allerdings zu, dass sein Verfahren allzu rigorosen Ansprüchen bezüglich der Strenge nicht genügt. F. K.

E. COSSERAT et F. COSSERAT. Sur la théorie de l'élasticité. Premier Mémoire. Toulouse Ann. J. **10**, 1-116.

Das bewegliche Bezugstrieder hat sich zufolge der Bemühungen von Darboux und Koenigs auf dem Gebiete der Geometrie und der Kinematik als nützlich erwiesen. Die Verf. wollen mit seiner Hülfe die Theorie der Elasticität ergänzen. Die Arbeit zerfällt in vier Kapitel, in denen die Theorie der Elasticität unter dem gekennzeichneten Gesichtspunkte betrachtet wird, wobei allerdings zu beachten ist, dass neue Re-

sultate in dieser Arbeit nicht gegeben werden, dass dieselben vielmehr für einen zweiten zu erwartenden Teil der Arbeit vorbehalten werden.

Im ersten Kapitel, welches ausgeht von der Form des Quadrates für das deformirte Linienelement, werden die sechs Deformationscomponenten für eine beliebige Deformation entwickelt. Besonders werden die unendlich kleinen Deformationen behandelt, für welche die bekannten partiellen Differentialgleichungen von Barré de Saint-Venant abgeleitet werden. Das zweite Kapitel handelt von der inneren Beanspruchung (effort intérieur). Der Verf. stellt zunächst die Gleichungen auf, welche sich ergeben, wenn man die Coordinaten eines Massenteilchens nach der elastischen Deformation als unabhängige Veränderliche benutzt, und geht dann zu den ursprünglichen Coordinaten über. Nachdem diese allgemeinen Gleichungen abgeleitet sind, werden sie im folgenden Kapitel auf die elastischen Körper angewandt. Das Kapitel IV giebt die Darstellung der Elasticitätsgleichungen in krummlinigen Coordinaten, und hier kommt nun die Einführung des beweglichen Bezugssystems zur Geltung. F. K.

P. Jaerisch. Zur Integration der Elasticitätsgleichungen isotroper Rotationskörper. Hamb. Mitt. **3**, 249-258.

Der Verf. hatte in seiner Abhandlung: „Allgemeine Integration der Elasticitätsgleichungen für die Schwingungen und das Gleichgewicht isotroper Rotationskörper“ (J. für Math. **104**, F. d. M. **21**, 1033, 1889) eine Integration der bezüglichen Differentialgleichungen durchgeführt, welche auf dem Nachweise beruht, dass sich die Verrückung in eine longitudinale und eine transversale Componente zerlegen lasse. Hier wird gezeigt, dass man für die Differentialgleichungen die Integration auch erreichen kann, ohne sich auf jenen Nachweis zu stützen. F. K.

O. Tedone. Sulla integrazione delle equazioni della elasticità. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{5}_1$, 460-467.

Wie schon Stokes früher gethan hat, so hat der Verf. die Methode der Integration, die er für die Ableitung des analytischen Ausdrucks des Huygens'schen Princips in der Kirchhoff'schen Form benutzt hat, auf die der allgemeinen Gleichungen elastischer Körper ausgedehnt und dabei auch die äusseren Kräfte berücksichtigt. Bei der gegenwärtigen Bearbeitung sind jedoch die Voraussetzungen etwas allgemeiner als bei Stokes. Lp.

C. Somigliana. Sulle deformazioni elastiche dei solidi cristallini. Lomb. Ist. Rend. (2) **29**, 423-438.

Der Verf. giebt zunächst für die Integration der Differentialgleichungen der elastischen Verrückungen ein Verfahren an, bei welchem die Verrückungscomponenten und Druckcomponenten in unendliche Reihen entwickelt werden. Das Verfahren löst die Aufgabe für den Fall, dass an der Oberfläche entweder die Verrückungs- oder die Druckcomponenten

gegeben sind. Dann wird das Problem als Aufgabe der Variationsrechnung angesehen.

Das oben angegebene Verfahren gestattet eine unmittelbare Anwendung auf den besondern Fall einer Kugel. Der Verf. zeigt, wie man die bezüglichen Gleichungen gewinnen kann, ohne erst die Kugelfunctionen einzuführen. F. K.

C. Chree. The equilibrium of isotropic elastic solid shells of nearly spherical form. Cambr. Proc. **9,** 61-68.

Verf. geht hier in seinen mühevollen Untersuchungen über das elastische Gleichgewicht der Körper (vgl. F. d. M. **25,** 1572-1574, 1894, und **26,** 927, 1895) einen Schritt weiter. Es handelt sich um eine von zwei nahezu sphärischen Flächen begrenzte Schale, deren Abweichung von der Kugelgestalt an der inneren und äusseren Seite je durch eine mit einem kleinen Factor ε, ε' behaftete Kugelflächenfunction (oder durch eine Summe von solchen Termen) dargestellt wird. Die Oberflächendrucke werden dabei als normal und gleichförmig vorausgesetzt. Bei der Lösung wurden höhere Potenzen von ε und ε' verworfen. Daraufhin gelingt es, die radialen und transversalen Deformationen als Function des vom Mittelpunkte der sphärischen Flächen aus gerechneten Radiusvectors explicite anzugeben, auf einem Wege, den Verf. schon früher (vgl. F. d. M. **25,** 1575, 1894) eingeschlagen hat. A. S.

L. Lecornu. Sur l'équilibre d'élasticité d'un corps tournant. C. R. **123,** 96-99.

Der Verf. giebt die Lösung der Differentialgleichungen für das Gleichgewicht eines rotirenden Körpers, welche sich dem Falle anpasst, dass die Oberfläche ein Rotationsellipsoid ist. Das Merkwürdigste ist, dass die Parallelebenen (senkrecht zur Axe) keinen Druck erleiden, so dass einzelne Scheiben aus dem Körper geschnitten werden können, ohne dass eine Störung des Gleichgewichts eintritt. F. K.

R. Bredt. Kritische Bemerkungen zur Drehungselasticität. Zeitschr. deutscher Ing. **40,** 785-790, 813-817.

Zunächst werden die Gleichgewichtsbedingungen für die Drehung elastischer Stäbe allgemein entwickelt und dann auf einige besondere Fälle angewandt. Die gewonnenen Ergebnisse werden den Resultaten früherer Untersuchungen gegenüber gestellt. Bredt lässt dahin gestellt, ob die Gleichungen für jede Querschnittsform eine Lösung besitzen. Das folgt aber aus der Form der Differentialgleichungen und aus den Sätzen über die Lösungen der Differentialgleichung $\Delta(u) = 0$ sofort. F. K.

A. Föppl. Kritische Bemerkungen zur Drehungselasticität. Zeitschr. deutscher Ing. **40,** 943.

Föppl weist darauf hin, dass eine Gleichung, welche Bredt für

sich in Anspruch genommen hatte, eine unmittelbare Folge der Form ist, in welcher sich, z. B. bei Grashoff, die Componenten der Spannung darstellen. F. K.

S. S. Hough. The rotation of an elastic spheroid. Lond. Phil. Trans. **187** A, 319-344. Abstract: Lond. R. S. Proc. **59**, 185-189.

J. Larmor. On the period of the Earth's free Eulerian precession. Cambr. Proc. **9**, 183-193.

Die von Chandler berechnete Periode von 427 Tagen in der Bewegung der Erdaxe relativ zum Erdkörper, welche von der sogenannten Euler'schen Periode von 305 Tagen erheblich abweicht, hat eine beträchtliche Litteratur hervorgerufen. Verf. der ersten Arbeit hatte schon früher gezeigt (vgl. F. d. M. **26**, 889, 1895), dass die Annahme eines flüssigen Erdinnern nicht zur Erklärung herangezogen werden kann, weil sie auf eine Verkürzung der Periode der freien Nutationen hinwirkt. Jetzt untersucht er den Einfluss der elastischen Deformirbarkeit, welcher die Periode verlängert. Es ergiebt sich, dass die Erde (unter einer plausibeln Annahme über die Verteilung der Erdmasse) ungefähr die Elasticität des Stahls haben müsste, um die Chandler'sche Periode zu zeigen. Man kommt so, da dieser Wert der Elasticität nicht unwahrscheinlich ist, zu einer befriedigenden Erklärung der Beobachtungen. Uebrigens giebt es eine Reihe von Umständen, namentlich die Beweglichkeit der Oceane, welche nicht berücksichtigt sind, und welche das Resultat beeinflussen können.

Die Rechnungen des Verf. gehen von den exacten Differentialgleichungen und Oberflächenbedingungen der Elasticitätstheorie aus und führen nach einigen Vernachlässigungen, welche durch die Kleinheit der Schwingungen gerechtfertigt sind, die Aufgabe zurück auf die Bestimmung des Gleichgewichtes eines elastischen Sphäroids unter dem Einfluss gegebener Kräfte.

Verf. der zweiten Arbeit macht keine eingehenden Rechnungen, sondern verfährt angenähert. Er benutzt die Annahme, dass bei den verhältnismässig langsamen Bewegungen, um die es sich handelt, der Endzustand, dem der Erdkörper auf Grund der auftretenden Centrifugalkräfte nach Massgabe seiner Elasticität zustreben würde, jederzeit vollständig erreicht wird. Sein Resultat formulirt Verf. in dem folgenden Satz: Die freie Präcession unter dem Einfluss des elastischen Verhaltens ist dieselbe wie bei einem starren Körper von derjenigen Gestalt, die der Erdkörper annehmen würde, wenn die Centrifugalkräfte plötzlich entfernt würden. A. S.

C. Chree. Forced vibrations in isotropic elastic solid spheres and spherical shells. Cambr. Trans. **16**, 14-57.

Die mathematische Behandlung erzwungener Schwingungen führt selbst bei so einfachen Körpern wie der Vollkugel und der Kugelschale zu äusserst unübersichtlichen Rechenausdrücken. Um diese nach Möglichkeit zu vermeiden, beschränkt sich Verf. in der Hauptsache auf zwei

Grenzfälle, in denen man durch Vernachlässigungen die Formeln vereinfachen kann. Er nimmt nämlich bei der Vollkugel an, dass die Periode der erzwungenen Schwingung sehr klein sei gegen die der gleichartigen freien Schwingung. (Wie bekannt, ergeben sich, wenn beide Perioden vergleichbar werden, Complicationen, bestehend in dem unendlichen Anwachsen der erzwungenen Schwingungen.) Er nimmt ferner bei der Kugelschale an, dass diese unendlich dünn sei. Die periodischen Kräfte, welche die Schwingung verursachen, können durch das Innere und über die Oberfläche des Körpers verteilt sein. Im ersteren Fall sollen sie ein Potential haben, welches der Laplace'schen Gleichung genügt; in beiden Fällen werden sie in eine Reihe nach Kugelfunctionen entwickelt.

Die allgemeinen Ausdrücke für die Werte der Deformation werden aus Kugel- und Bessel'schen Functionen vom Index $n+\frac{1}{2}$ zusammengesetzt. Die willkürlichen Constanten dieser allgemeinen Lösung sind den Oberflächenbedingungen anzupassen, was natürlich die eigentliche Schwierigkeit der Aufgabe bildet.

Anwendung auf das elastische Verhalten der Erde (vgl. pag. 37 u. ff.).

Gelegentlich wird der folgende allgemeine Satz bewiesen: Die Verschiebungen in einer incompressibeln Kugel oder Kugelschale auf Grund periodisch wechselnder räumlicher Kräfte, welche ein der Laplace'schen Gleichung genügendes Potential V haben, können auch hervorgebracht werden durch rein radiale Oberflächenkräfte, deren Grösse gleich dem Product aus der Dichte in die Oberflächenwerte von V ist. A. S.

G. Lauricella. Sull'equazioni delle vibrazioni delle placche elastiche incastrate. Torino Mem. (2) **46**, 65-92.

G. Lauricella. Sulle vibrazioni delle plastre elastiche incastrate. Nuovo Cim. (4) **4**, 134-145.

Matthieu hat sich mit der Integration der in Frage kommenden Differentialgleichung $\Delta^2(\Delta^2(u)) = ku$ beschäftigt. Dem Verf. genügt das Verfahren dieses Autors nicht hinsichtlich der Strenge; er nimmt deshalb die Untersuchung von neuem auf unter Anwendung der Methode, welche er auch in früheren Untersuchungen erfolgreich gebraucht hat (vgl. F. d. M. **26**, 919 ff., 1895). Das Wesentliche dieser Methode ist, dass eine Function $u = u_0 + ku_1 + k^2u_2 + \dots$ bestimmt wird, deren einzelne Coefficienten in dem Zusammenhang stehen, dass $\Delta^2\Delta^2(u_0) = f(x,y)$ $\Delta^2(\Delta^2 u_i) = u_{i-1}$ ist. Als Function von k betrachtet, hat diese Reihe nur einfache Pole; diese sind die in Betracht kommenden Werte von k und die zugehörigen Residuen die Lösungen jener Differentialgleichungen.

F. K.

O. Tedone. Sulle vibrazioni dei corpi elastici. Rom. Acc. L. Rend. (5) **5**$_2$, 58-65.

Von den Elasticitätsgleichungen ausgehend, wird zunächst eine Integralgleichung über einen Raum von vier Dimensionen (x, y, z, t) aufgestellt, in welcher ausser den gesuchten Lösungen der elastischen Glei-

chungen noch eine andere Lösung auftritt, über welche in gewisser Weise verfügt wird. Nachdem dann die gesuchten Ausdrücke für die eingeführten Hülfsgrössen passend bestimmt sind, werden die Grenzwerte gewisser Integrale untersucht, welche die Componenten der gesuchten elastischen Verschiebung liefern. F. K.

E. Le Roy. Sur le problème des membranes vibrantes. C. R. **128**, 1258-1260.

Für die Differentialgleichung $\Delta z = \partial^2 z/\partial t^2$ werden die Ausführungen des Verf. über die Differentialgleichung $\Delta W = \partial W/\partial t$ (C. R. **120**; F. d. M. **26**, 1068, 1895) verwertet. Das Resultat ist eine unendliche Reihe von der Beschaffenheit, dass z und $\partial z/\partial t$ für $t=0$ mit beliebiger Annäherung an vorgeschriebene Werte herangebracht werden können. F. K.

G. Rizzi. Intorno ai sistemi nodali delle membrane vibranti. Napoli Rend. (3) **2**, 87-88.

L. Pinto. Rapporto sulla memoria del Dott. G. Rizzi. Ibid. 85-86.

Die kurzen Berichte über die Arbeit von Rizzi lassen erkennen, dass der Verf., um die Grundlage für einen experimentellen Vergleich zu haben, die Knotensysteme schwingender Membranen eingehend untersucht hat. F. K.

L. Tetmajer. Die Gesetze der Knickungsfestigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe. Mitt. der Materialienprüfungsanstalt am Schweizerischen Polytechnicum. Heft VIII, Selbstverlag der Anstalt 1896; Zeitschr. deutscher Ing. **40**, 1404.

Nennt man den Trägheitsradius eines Querschnitts $K=\sqrt{J/F}$, so nimmt die Euler'sche Knickfestigkeitsformel die Gestalt $P/F=\pi^2 E(K/l)^2$ an, welche also die zulässige Belastung, bezogen auf die Flächeneinheit, liefert. Die Formel gilt bekanntlich nur, wenn l/K einen gewissen Grenzwert übersteigt. Aus Tetmajer's Versuchen ergeben sich folgende Grenzwerte für l/K: bei Holz 100, bei Gusseisen 80, bei Schweisseisen 112, und bei Flusseisen 105, sofern für E bei den Substanzen gesetzt wird: 1000 (Holz), 10000 (Gusseisen), 20000 (Schweisseisen), 21500 (weiches) — 22400 (härteres) Flusseisen Klg/qmm.

Bleibt das Verhältnis l/K unter den angegebenen Grenzwerten, so kann $P/F=a-b(l/K)$ gesetzt werden. Die Constanten sind $a=2{,}93$, $b=0{,}0194$ (Holz); $a=30{,}3$, $b=0{,}129$ (Schweisseisen); $a=31{,}0$, $b=0{,}114$ (weiches Flusseisen); $a=32{,}1$, $b=0{,}016$ (hartes Flusseisen). Bei Gusseisen gilt die Formel:

$$P/F = 77{,}6 - 1{,}20(l/K) + 0{,}0053(l/K)^2.$$

(Referirt nach dem Bericht in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure; p. 1404, 1896.) F. K.

R. LAND. Einfache Ableitung der Euler'schen Knickformel. Zeitschr. deutscher Ing. **40**, 99-101.

Nach einer kurzen Erörterung der Eigenschaften einer Sinuslinie bestimmt der Verf. diejenige Belastung eines Stabes, bei welcher seine Gestalt der Wellenberg einer Sinuslinie sein kann. Warum diese Belastung die Knickfestigkeit sei, das kommt nicht zur Sprache. F. K.

Z. Die Bezeichnung Widerstandsmoment. Centralbl. der Bauverw. **16**, 231.

Bisher galt die Bezeichnung Widerstandsmoment allgemein zur Bezeichnung des Quotienten aus dem Trägheitsmoment und der Entfernung des äussersten Punktes von der neutralen Axe. Johnson schlägt vor, als Widerstandsmoment das Product aus dieser Grösse und der Spannung zu bezeichnen. Der Verf. führt aus, was diese Neuerung gegen sich hat. Mit Recht wird hervorgehoben, dass man gar keine Veranlassung hat, dem Professor Johnson, wie es eine amerikanische Zeitschrift gethan, zu dieser Errungenschaft einen besondern Glückwunsch auszusprechen. F. K.

A. FÖPPL. Prüfung von Metallen auf ihre Härte. Centralbl. der Bauverw. **16**, 199.

Föppl hat die Härte von Metallen bestimmt, indem er zwei aus dem Material gefertigte cylindrische Flächen mit einem Radius von 20 mm gegen einander presste und den Grenzwert P der Kraft bestimmte, bei welchem sich noch grade ein Eindruck zeigte. Während Hertz das Mass der Härte aus der Formel $\sigma = 0{,}244\sqrt[3]{PE^2}$ ableitete, schlägt Föppl P selbst als Mass der Härte vor. F. K.

A. FÖPPL. Prüfung eines Satzes der Fachwerklehre durch den Versuch. Centralbl. der Bauverw. **16**, 287.

Ein Sechseck, dessen Ecken durch die drei Hauptdiagonalen verbunden sind, ist im allgemeinen geometrisch und statisch bestimmt. Das gilt nicht mehr, wenn das Sechseck ein Pascal'sches wird. Lässt man auf zwei Ecken eines regelmässigen Sechsecks, welche nicht durch eine Diagonale verknüpft sind, gleiche und entgegengesetzte Kräfte wirken, deren Wirkungslinie in die Verbindungsgerade der Knotenpunkte fällt, so muss eine verhältnismässig grosse Deformation eintreten. Das findet der Verf. durch den Versuch bestätigt. F. K.

M. DUPLAIX. Sur les abaques des efforts tranchants et des moments de flexion développés dans les poutres à une travée par les surcharges du règlement du 29 août 1891 sur les ponts métalliques. C. R. **122**, 128-131.

Die Beziehung zwischen der Spannweite des Trägers, dem Biegungs-

moment für eine bestimmte Stelle und der Entfernung dieser Stelle von einer Stütze wird als Oberflächengleichung gedeutet. Hieraus werden einige Folgerungen gezogen. F. K.

P. Toulon. Résistance des poutres droites à travées solidaires sur appuis élastiques. C. R. **121**, 304-306.

In einer früheren Note (C. R. **122**, F. d. M. **26**, 929, 1895) hatte der Verf. für den Fall elastischer Stützen eine lineare Relation zwischen fünf auf einander folgenden Momenten aufgestellt, welche der bekannten Beziehung zwischen drei Momenten für den Fall starrer Stützen entspricht. Hier wird aus dieser Gleichung für den Fall, dass die Stützen nur zusammendrückbar sind, aber zu keinem Momente Anlass geben, eine Beziehung zwischen vier Momenten entwickelt. F. K.

Ad. Francke. Träger auf elastischer Unterlage. Zs. f. Arch. u. Ingw. **42**, Neue Folge **1**, 287-338.

Der Verf. behandelt den auf elastischer Unterlage ruhenden Träger, indem er voraussetzt, dass die Unterlage einen Widerstand leistet, welcher an jeder Stelle proportional der Einsenkung ist. Die betreffende lineare Differentialgleichung ist leicht aufzustellen und wird für verschiedene Fälle der Belastung und der Beanspruchung der Enden integrirt. F. K.

A. Roth. Herleitung von Spannungen neu zu berechnender Träger aus alten berechneten. Centralbl. der Bauverw. **16**, 478-480.

Zeigt, wie man von einem Träger zu einem andern, ihm geometrisch ähnlichen übergehen kann. F. K.

C. Guidi. Sul calcolo delle travi a parete piena. Torino Atti **32**, 137-144.

Sowohl für die Berechnung der statisch unbestimmten Grössen, als auch für die Berechnung der Deformationscomponenten darf der ebene Balkenträger durch ein gewisses ideales Fachwerk ersetzt werden. Das wird zunächst abgeleitet und auf die Bestimmung des Horizontalschubes bei einem Fachwerkbogen angewandt. F. K.

Zimmermann. Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last. Centralbl. der Bauverw. **16**, 249-251, 257-260, 264-266, 288; auch sep. Berlin: Ernst. VII + 46 S.

Der Verf. entwickelt zunächst folgende Differentialgleichung für die Bahn einer Last, welche mit constanter Geschwindigkeit über einen Träger rollt: $d^2\eta/d\xi^2+\alpha(1-\xi^2)^{-2}\eta-\beta=0$. Hierin bedeuten ξ, η die in gewissen (von einander verschiedenen) Einheiten gemessenen Coordinaten eines Bahnpunktes, α und β Constanten. Hierin setze man

$\eta = ze^{\int u d\xi}$, und man erhält dann folgende Gleichung:

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} + 2\frac{dUz}{d\xi} + \left(-\frac{dU}{d\xi} + U^2 + \frac{\alpha}{(1-\xi^2)^2}\right) z = \beta e^{-\int U d\xi}.$$

Kann man nun U so bestimmen, dass

$$-\frac{dU}{d\xi} + U^2 + \frac{\alpha}{(1-\xi^2)^2} = 0$$

wird, so kann man auch die vorstehende Gleichung für z unmittelbar auf eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung reduciren. Der Verf. setzt nun $U = (q+\xi)/(1-\xi^2)$ und erhält so die Gleichung $dq/d\xi = (\alpha - 1 + q^2)/(1-\xi^2)$, welche unmittelbar zu integriren ist. So gelangt man zu einer vollständigen Lösung der obigen Differentialgleichung, deren Bedeutung dann auf geometrischem Wege untersucht wird. F. K.

Fr. Kreuter. Zur Bestimmung der Tragkraft von Pfählen. Centralbl. der Bauverw. **16,** 145-146 u. 190-191.

Es giebt verschiedene Formeln, vermittels deren man aus Rammversuchen die Tragfähigkeit von Pfählen bestimmen kann. Der Verf. wählt als Grundlage die Formel von Rankine. Die Formeln von Ritter und Brix werden zurückgewiesen. Der Verf. entwickelt dann sein eigenes Verfahren. Ist R die Energie des Rammklotzes, W der Widerstand des Pfahles, e die Strecke, um welche der Pfahl bei einem Schlage tiefer sinkt, und V die verlorene Energie, so wird $R = We + V$. Nimmt man an, dass bei zwei verschiedenen Versuchen V annähernd denselben Wert habe, so kann man natürlich W bestimmen: $W = (R_1 - R_2)/(e_1 - e_2)$. Die übrigen Bemerkungen sind technischer Natur. In der zweiten Notiz werden die Bedingungen für die Constanz von V besprochen. F. K.

Bubendey. Die Tragfähigkeit gerammter Pfähle. Centralbl. der Bauverw. **16,** 533-534, 545-547.

Der Verf. hebt hervor, dass man aus dem Resultat von Rammversuchen allein nicht das Tragvermögen der Pfähle bestimmen kann, dass vielmehr bei verschiedenen Bodenarten trotz gleicher Ergebnisse der Rammversuche Pfähle ein ganz verschiedenes Tragvermögen besitzen können. Der Verf. giebt von diesem Standpunkte aus eine Kritik der Formeln zur Berechnung der Tragfähigkeit gerammter Pfähle und spricht es geradezu aus, dass er niemals die Gleichsetzung des Rammwiderstandes und des Tragvermögens begriffen habe. Zur Begründung seiner Meinung teilt er in der zweiten Notiz Beobachtungsresultate mit, die bei Wasserbauten in Hamburg gewonnen sind. F. K.

A. Zschetzsche. Zur Berechnung der Stabkräfte in Bogenbrücken. Civiling. **42,** 93-96.

Die Gesamtheit aller Kräfte, welche auf der linken Seite des durch

den Träger gelegten Verticalschnitts liegen, wird zusammengefasst in eine Kraft, welche durch den linken Kämpfer geht, und in eine verticale Kraft, welche in dem rechten Kämpfer angreift. Hat man nun die Einflusswerte für eine horizontale und verticale Kraft in dem linken Kämpfer ermittelt, so kann man natürlich die aus der Kraft am linken Kämpfer herstammende Beeinflussung der Stäbe ermitteln. Die Einflusswerte einer rechts angreifenden Kraft 1 stehen in gewissen, geometrisch wohl bestimmten Verhältnissen zu denen vom linken Kämpfer, so dass auch die vom rechten Kämpfer herstammende Beeinflussung leicht zu ermitteln ist.

F. K.

L. Gensen. Zur Berechnung der Stabkräfte in Bogenbrücken. Civiling. **42,** 477-478.

Der Verf. giebt eine analytische Bestimmung der Einflusswerte, welche Zschetzsche in der vorher besprochenen Abhandlung graphisch bestimmt hatte.

F. K.

H. Zur Berechnung der Beanspruchung statisch unbestimmter Tonnengewölbe. Deutsche Bauztg. **30,** 430-431.

Normalkraft, Querkraft und Moment für einen beliebigen Querschnitt werden zuerst statisch ausgedrückt durch die entsprechenden, zunächst unbekannten Grössen für den Scheitelquerschnitt. Ferner werden die Verschiebungen und Verdrehungen des Fusses des als ein Ganzes aufgefassten Körpers aus Widerlager und Gewölbe durch die dort herrschenden Druckcomponenten und den Wert des Momentes dargestellt. Ist das geschehen, so kann man die drei nach den bisher unbekannt gebliebenen Grössen genommenen Ableitungen der Deformationsarbeit bilden; setzt man dieselben gleich Null, so erhält man drei Gleichungen zur Bestimmung der fraglichen Grössen.

F. K.

M. Duplaix. Sur la résistance des ponts sous le passage de convois périodiques, notamment de ceux qui ont été prévus par le règlement du 29 août 1891. C. R. **123,** 740-743.

Durch die Voraussetzung der Periodicität der Belastung in der Längsrichtung der Brücken wird die Berechnung der grössten Momente und Durchbiegungen wesentlich erleichtert. Der Verf. giebt die bezüglichen Resultate ohne nähere Begründung an.

F. K.

R. Heyn. Ueber die Wechselbeziehungen zwischen Gewölben und Widerlagsmauern. Civiling. **42,** 253-282.

In der Einleitung hebt der Verf. hervor, dass die gewöhnliche Art der Gewölbeuntersuchung, bei welcher die Widerlager als unnachgiebig angesehen werden, namentlich im Hochbau, zu unrichtigen Resultaten führen könne, und rechtfertigt also auf diese Weise die Wahl des Gegenstandes seiner Abhandlung. Da die Durchführung mehr technisches als

mathematisches Interesse besitzt, so verzichten wir auf einen Bericht und verweisen auf das Original. F. K.

A. Föppl. Die Berechnung von Röhren und anderen ringförmigen Körpern auf Druck in einer Durchmesserebene. Centralbl. der Bauverw. **16**, 490-491.

Es handelt sich um die Aufgabe: Ein Ring wird in zwei entgegengesetzten Punkten des Durchmessers belastet; es soll der Deformationszustand und die Spannung bestimmt werden. Abweichend von den meisten neueren Forschern, welche nach meiner Meinung mit Recht voraussetzen, dass hier wie beim geraden Stabe die Querschnitte eben bleiben, folgt der Verf. der alten Theorie, dass die Spannungen ganze lineare Functionen des Abstandes sind. Die Resultate werden mit Versuchen verglichen. F. K.

Kirsch. Die kritische Geschwindigkeit von Wellen mit grosser Umlaufszahl. Zeitschr. deutscher Ing. **40**, 702-703, 772.

A. Föppl. Die kritische Geschwindigkeit von Wellen mit grosser Umlaufszahl. Zeitschr. deutscher Ing. **40**, 772.

Kirsch bestimmt die Ausbiegung, welche eine Welle erfährt, mit welcher ein Körper derart fest verbunden ist, dass sein Schwerpunkt ausserhalb der Axe liegt. Dann wird diejenige Geschwindigkeit bestimmt, bei welcher die Durchbiegung unendlich gross wird, und der Nachweis versucht, dass auch in dem Falle, dass die Geschwindigkeit grösser als die hier bestimmte kritische Geschwindigkeit ist, eine stabile Gleichgewichtslage vorhanden ist. Föppl meint, dass die weiteren Schlüsse von Kirsch nicht geeignet sind, ein erschöpfendes Bild von dem Verhalten der Welle zu geben, und verweist auf seine bezügliche Abhandlung im Civilingenieur (**41**, 249). F. K.

A. Zschetzsche. Berechnung von Maueranken. Centralbl. der Bauverw. **16**, 18-19.

Der Verf. drückt mathematisch die Forderungen für die Construction von Maueranken aus, nämlich:

1) dass bei der grössten Angriffskraft des Ankers und der äussersten oberen Wärmeabweichung ein Abheben der Construction vom Mauerwerk nicht stattfinden darf, und

2) dass die Anker bei der grössten Angriffskraft und der äussersten unteren Wärmeausweichung nicht überansprucht sein sollen. F. K.

L. Tsoucalas. Note sur de nouvelles tables pour le calcul de la résistance des canons frettés. Rev. d'Art. **48**, 567-584.

Der französische General Virgile hat die Theorie des Widerstandes von Metallrohren gegeben, die aus n über einander geschobenen Cylindern bestehen. Die hierbei entwickelten Formeln sind recurrent von

Cylinder zu Cylinder und verlangen langwierige Eliminationen. Der Verf. zeigt, wie man diese Berechnungen in eleganterer Weise durchführen kann, und giebt am Schlusse eine zur Erleichterung der Zahlenrechnungen von ihm construirte und durchgerechnete Tabelle. Lp.

Weitere Litteratur.

J. BARTL. Zur Berechnung der Federregulatoren. Civiling. **42**, 769-776. F. K.

G. J. BELL. A practical treatise on segmental and elliptical oblique or skew arches; setting forth the principles and details of construction in clear and simple terms. London and New York: Spon & Chamberlain. 125 S. 4°.

F. BOHNY. Der continuirliche Zweigelenkbogen. Zeitschr. deutscher Ing. **40**, 1249-1254. F. K.

G. CHARPY. Sur la répartition des déformations dans les métaux soumis à des efforts. C. R. **123**, 488-489. F. K.

J. DUBOSQUE. Études théoriques et pratiques sur les murs de soutènement et les ponts et viaducs en maçonnerie. 5e édition, revue, corrigée et augmentée. Paris: Baudry. IV + 380 S.

A. FLAMANT. Stabilité des constructions; résistance des matériaux. 2e édition, revue et augmentée. (Encyclopédie des travaux publics.) Paris: Baudry. 482 S. 8°.

C. GUIDI. Lezioni sulla scienza delle costruzioni. I, II, III: Nozioni di statica grafica; teoria dell'elasticità e resistenza dei materiali; elementi delle costruzioni; statica delle costruzioni civili. 2a edizione. Torino: Bertolero. 3 vol. 120, 281, 98 S. 8° (1894-1896).

H. Die Verticalkraft eines symmetrischen, einseitig überlasteten gelenklosen Bogens. Deutsche Bauztg. **30**, 419, F. K.

H. Spannungen im Mauerwerk. Deutsche Bauztg. **30**, 627. F. K.

HÄSELER. Berechnung der auf Verdrehung beanspruchten Brückenquerträger. Zeitschr. deutscher Ing. **40**, 761-765. F. K.

RICHTER u. HAVEMANN. Diagramme über die Tragfähigkeit sämtlicher Normal-Profile der I und [-Eisen, sowie der gebräuchlichsten Holzbalken für verschiedene Belastungsarten mit Berücksichtigung des Trägergewichtes. Essen: G. D. Bädeker. 65 Tafeln in Mappe im Format 29 × 44 cm.

Besprochen von Keck in Zeitschr f. Arch. u. Ingw. Neue Folge **1**, 269. F. K.

L. M. HOSKINS. Maximum stresses in bridge members. Wisconsin Acad. **10**, 24-40.

O. JOSEPHSON. Studier öfver elastiska rotationskroppars deformation. Upsala Univ. Arsskr. 68 S.

W. Keck. Vorträge über Mechanik als Grundlage für das Bau- und Maschinenwesen. 1. Teil: Mechanik starrer Körper. Hannover: Helwing'sche Verlagsbuchhandlung. VII+319 S. 8° mit 389 Holzschnitten.

Bespr. Centralbl. der Bauverw. **16**, 356 (von Land); vergl. S. 569 dieses Bandes. F. K.

Rich. Krüger. Graphische Pläne zur Ermittelung der Höhen schmiedeeiserner Träger und Holzbalken, der Durchmesser gusseiserner Voll- und Hohlsäulen, und der Stärke hölzerner Stützen. Bremen: M. Heinsius Nachfolger. 22 S. Text in gr. 8° u. 5 Tafeln in Fol. in Mappe.

Bespr. Centralbl. der Bauverw. **16**, 360 von Zillich; von Keck, Zs. f. Arch. u. Ingw. Neue Folge **1**, 269-270. F. K.

H. F. B. Müller-Breslau. Die graphische Statik der Bauconstructionen. 2te Aufl. Vol. II, Abt. 2, Lieferung 1. Leipzig: Baumgärtner. 96 S. 8°.

O. C. Reymann. Festigkeit und Reibung der Dampfkolben. Zeitschr. deutscher Ing. **40**, 85-91 u. 120-125. F. K.

G. B. Scioletto. Equilibrio interno dei sistemi elastici lineari nel piano e nello spazio; esposizione dei metodi delle derivate e degli spostamenti. Roma: Cuggiani. 89 S. 8°.

J. Vonderlinn. Statik der Bauhandwerker. Stuttgart: Julius Maier. VIII + 211 S. in 8° mit 141 Uebungsaufgaben und 324 Abb. im Text.

Bespr. von Keck in der Zs. f. Arch. u. Ingw. **42**, Heft 1-8, Neue Folge **1**, 140; von Gruner in Civiling. **42**, 481-483. F. K.

C. Capillarität.

J. Macé de Lépinay. Influence de la capillarité sur les pesées hydrostatiques. Journ. de phys. (3) **5**, 266-272.

Durch die Annahme, dass bei hydrostatischen Wägungen der Meniskus der Flüssigkeit durch den eintauchenden Draht geändert wird, und zwar bei auf- und abwärts gehenden Bewegungen des Drahtes in verschiedener Weise, gelingt es dem Verf. eine Theorie zu entwickeln, welche die bei Beobachtungen gefundenen Abweichungen einzelner Wägungen unter einander genügend erklärt. Lp.

Brömel. Der Gleichgewichtszustand einer Flüssigkeit in einer verticalen capillaren konischen Röhre. Pr. (Nr. 587) Städt. Realschule und Progymnasium Pirna, 1896, 22 S.

Von dem Potential der wirkenden Kräfte ausgehend, leitet der Verf. zunächst die Differentialgleichung für die Flüssigkeitsoberfläche mit den erforderlichen Randbedingungen ab. Dann wird jene partielle Differentialgleichung unter der Voraussetzung, dass die Oberfläche eine Rotationsfläche ist, in eine gewöhnliche Differentialgleichung verwandelt. Bekanntlich hat sich diese bisher streng nicht integriren lassen. Der Verf. be-

stimmt zunächst die übliche erste Näherung und geht dann zu einer zweiten und dritten Näherung über, indem er zunächst die zugehörigen Näherungswerte der Steighöhen als Functionen des obersten Halbmessers berechnet. Die beiden Fälle einer nach oben divergirenden und einer nach oben convergirenden Röhre werden gesondert behandelt. F. K.

G. VAN DER MENSBRUGGHE. Note sur les nombreux effets de l'élasticité des fluides. Belg. Bull. (3) **32**, 418-423. Mn.

Kapitel 2.

Akustik und Optik.

A. Akustik.

H. HELMHOLTZ. Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden (1859). Herausgegeben von A. WANGERIN. Leipzig: Wilhelm Engelmann. 132 S. 8° (Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. Nr. 80).

Die beiden Abhandlungen, durch welche Helmholtz als Mathematiker in dem Journal für reine und angewandte Mathematik gegen das Ende der fünfziger Jahre schwierige Fragen der mathematischen Physik in völlig neuer und schöpferischer Methode angriff und bewältigte, gehören naturgemäss in eine Sammlung der Klassiker der exacten Wissenschaften. Die neue Ausgabe der ersten Arbeit über Wirbelbewegungen ist auf S. 643 dieses Bandes angezeigt worden. In Betreff der zweiten, vorliegenden Schrift wiederholen wir hier eine Stelle aus Königsberger's Prorectorats-Rede über Helmholtz (1896): „Sehr bald greift er aber noch tiefer in die Theorie der Akustik ein und stellt mit den feinsten Hülfsmitteln der Analysis in seiner „Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden“ Untersuchungen über die Bewegung der Luft an, die seinen vorher besprochenen hydrodynamischen analog sind, indem er die Frage aufwirft, in welcher Weise sich ebene Schallwellen, die im Innern einer cylindrischen Röhre erregt werden und einem einfachen Tone entsprechen, bei ihrem Uebergange in den freien Raum verhalten, um vor allem die Schwingungsform zu ermitteln, welche sich schliesslich herstellt, wenn die die Schwingungen erregende Ursache dauernd und gleichmässig fortwirkt.“ Wie aber Königsberger in derselben Rede hervorhebt, gaben dem berühmten Forscher im Gegensatz zu ähnlichen oder ganz gleich gerichteten Arbeiten anderer ausgezeichneter Mathematiker stets die Beobachtung und Erfahrung den festen Boden und eine sichere Richtschnur für seine Wege, auf denen er zu den abstractesten mathematischen Wahrheiten gelangt. In ähnlicher Weise sprach sich Kronecker bei Gelegenheit der Helmholtz'schen Abhandlung „Principien der Statik monocyklischer Systeme“ aus (J. für Math. **97**,

111-140). Es sei wunderbar, mit welcher Sicherheit Helmholtz zufolge seiner klaren physikalischen Anschauungen die Natur schwieriger mathematischer Gleichungssysteme erkenne. Die Bemerkungen über ein System von Differentialgleichungen, welches in jener Helmholtz'schen Arbeit behandelt ist, hat Kronecker aus diesem Beweggrunde der Arbeit folgen lassen. Gerade wie hier der Mathematiker Kronecker den mathematischen Untersuchungen des Physikers Helmholtz einen Commentar hinzuzufügen für nötig hielt, so dürfte mancher Leser der Helmholtz'schen mathematischen Untersuchungen zur besseren Einsicht sich nach näheren Erläuterungen umsehen. Für die vorliegende Abhandlung ist diese Unterstützung des Lesers in ausgezeichneter Weise durch den Herausgeber geleistet. Die Anmerkungen, welche von S. 87 bis 131 sich erstrecken, zeigen durchweg, dass derselbe auf diesem Gebiete mit allen Einzelheiten völlig vertraut ist, ferner dass er als erfahrener Lehrer die Stellen herausfindet, wo die Helmholtz'sche Schlussweise durch Einschiebung von Mittelgliedern dem Verständnisse näher zu bringen ist.

Lp.

D. Thomson. **Vibraciones y ondas sonoras.** Archivo de Mat. **1,** 51-59. Uebersetzt aus Encyclopaedia Britannica **1,** 100.

J. McMahon. **Notes on the expression for a velocity-potential in terms of functions of Laplace and Bessel.** American M. S. Bull. (2) **2,** 173-177.

Die von einem Geschwindigkeitspotentiale ψ in einer elastischen Flüssigkeit zu befriedigende partielle Differentialgleichung lautet nach Rayleigh, Theory of sound, **2,** 15:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},$$

wo a^2 = Druck ist, dividirt durch Dichtigkeit, $\psi(x, y, z, t)$ eine Function bedeutet, deren nach x, y, z genommene Ableitungen die Geschwindigkeitscomponenten des Flüssigkeitsteilchens liefern, welches zur Zeit t sich im Punkte (x, y, z) befindet. Wenn (1) in Polarcoordinaten (r, θ, φ) umgerechnet wird, so kann der Gleichung genügt werden durch

$$(2) \qquad \psi_n = r^{-\frac{1}{2}} J_{\pm(n+\frac{1}{2})}(kr)\,.\,S_n(\theta,\varphi)\,.\,{}^{\sin}_{\cos}\,kat.$$

Der Hauptzweck der Arbeit besteht in dem Nachweise, wie die Beziehungen zwischen den S_n zu wählen sind, damit die Gleichung (2) oder eine andere daraus hergeleitete (3) auf einige der typischen Probleme bei der Flüssigkeitsbewegung passt, auf welche Laplace'sche und Bessel'sche Functionen anwendbar sind. In allen Fällen ist der vollständige Wert von ψ dadurch herzustellen, dass man $n = 0, 1, 2, \ldots$ setzt und die willkürlichen Grössen durch die anfängliche Verteilung der Verdichtung und der Geschwindigkeit bestimmt. Lp.

G. JÄGER. Ueber die Fortpflanzung des Schalles in bewegter Luft. Wien. Ber. **105**, 1040-1046.

Bildet eine Ebene die Trennungsfläche zwischen ruhender und gleichförmig bewegter Luft, so findet an dieser Ebene, da in der bewegten Luft die Schallgeschwindigkeit eine andere als in der ruhenden ist, eine Brechung statt. Für dieselbe gilt, wie der Verf. mittelst elementarer Betrachtungen ableitet, dasselbe Brechungsgesetz wie für Lichtwellen, falls der Einfallswinkel nahe 90° ist. Nach des Referenten Ansicht ist diese Beschränkung unrichtig; vielmehr gilt jenes Brechungsgesetz für jeden Einfallswinkel. Falls die Windgeschwindigkeit am Boden Null ist und der Höhe z proportional zunimmt, ändert sich die Schallgeschwindigkeit nach dem Gesetze $c = v \pm az$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Schallwellen sich in der Windrichtung oder dieser entgegengesetzt bewegen. Das Snellius'sche Brechungsgesetz liefert dann für die Schallstrahlen eine einfache Differentialgleichung, durch deren Integration sich ergiebt, dass jene Strahlen Bogen von Kreisen sind, deren Mittelpunkte im ersten Falle um v/a unterhalb, im zweiten um ebensoviel oberhalb des Bodens liegen. Es erklärt sich so, weshalb wir den Schall nur schwer oder gar nicht wahrnehmen, wenn der Wind in der Richtung vom Ohr zur Schallquelle weht; ferner, weshalb man den Schall gelegentlich sehr deutlich hören kann, obwohl zwischen Schallquelle und Ohr eine beträchtliche Erhöhung liegt. Wn.

MAX WIEN. Ueber die Periode, für welche die Amplitude einer erzwungenen Schwingung ein Maximum wird. Wiedemann Ann. **58**, 725-728.

Aus den bekannten Formeln für erzwungene Schwingungen (vgl. Rayleigh, die Theorie des Schalles, übersetzt von Neesen, I. S. 54, 1879) folgt, dass das Maximum der Amplitude der erzwungenen Schwingung nicht gleichzeitig mit dem Maximum der Energie des resonirenden Systems eintritt. Während das Maximum der Energie und damit der Resonanz stattfindet, wenn $p = n$ (p die Schwingungszahl der primären Tonquelle, n die des ungedämpften Resonators in der Zeit 2π), hat die Amplitude für $p = \sqrt{n^2 - \frac{1}{2}k^2}$ ihren grössten Wert (k die Constante der inneren Reibung). Die Periode der maximalen Amplitude fällt also nicht mit der natürlichen Periode zusammen, sondern liegt noch etwas tiefer als die Periode der freien Schwingung des Systems mit Berücksichtigung der Dämpfung $\sqrt{n^2 - \frac{1}{4}k^2}$. Wn.

P. JOHANNESSON. Eine Bemerkung zur Lehre von der Resonanz. Wiedemann Ann. **59**, 180-183.

Zur Erklärung einer Beobachtung von Stumpf, wonach ein Resonator nur durch eine Tonquelle von gleicher Höhe, nicht aber durch einen seiner Untertöne in Mitschwingung versetzt wird, modificirt der Verf. die Differentialgleichung für erzwungene Schwingungen dahin,

dass er annimmt, ausser der inneren Reibung des Resonators wirke noch eine äussere, und zwar proportional der relativen Geschwindigkeit zwischen Flüssigkeit und Resonator. Die Geschwindigkeiten der verschiedenen den Resonator umgebenden Flüssigkeitsteilchen werden dabei als merklich gleich angesehen. Demnach ist die Bewegungsgleichung des Resonators:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+(k+\varrho)\frac{du}{dt}+n^2u=-\varrho Ep\sin(pt).$$

Darin bezeichnet ϱ die Constante der äusseren Reibung, E die Amplitude der dem Resonator benachbarten Flüssigkeitsteilchen, während die Bedeutung der Buchstaben k, n, p dieselbe ist wie im vorhergehenden Referate.

Die Lösung der vorstehenden Differentialgleichung besteht aus zwei Gliedern, einem rein periodischen von der Schwingungsdauer p und einem zweiten, mit einem Exponentialfactor multiplicirten, dessen Schwingungszahl $\sqrt{n^2-\frac{1}{4}(k+\varrho)^2}$ ist. Für grosse t wird das letzte Glied sehr klein, der Resonator schwingt also in der Periode des primären Tones. Entfernt sich p von n, so werden bei kleiner innerer und äusserer Dämpfung die Amplituden beider Glieder unmerklich. Wn.

E. Bouty. Les flammes sensibles et les lentilles acoustiques. Toulouse Ann. **10** H, 1-18.

Das mehr oder weniger leichte Ansprechen einer tönenden Flamme wird von Bouty folgendermassen erklärt. Die Flamme bildet einen leuchtenden Hohlcylinder, der einen dunklen, relativ kalten Gascylinder umhüllt. Das System bildet eine akustische Cylinderlinse. Ist dieselbe convergent, und liegt der Brennpunkt im Innern der Flamme, so wird die von einer entfernten Schallquelle ausgehende Vibrationsbewegung auf einer inneren Focallinie concentrirt und dadurch die Bewegung der Flamme erheblich verstärkt. Es wird die Bedingung für die Convergenz derartiger Linsen untersucht und ihre Focaldistanz bestimmt. Zu dem Zwecke wird angenommen, dass sowohl das äussere Medium, als der leuchtende Hohlcylinder, wie auch der innere dunkle Cylinder je durchweg gleiche Temperatur und gleiche Dichtigkeit, somit je constante Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Schalles besitzen, die resp. v, v', v'' seien. Dann werden die einfachen Linsenformeln für die Brechung an beiden Cylinderflächen angewandt, wobei die Schallquelle als unendlich fern angenommen wird; endlich wird die Formel für die Lage der Focallinie discutirt. Weiter wird untersucht, welcher Teil der Intensität angenähert durch die Linsenflächen hindurchgeht, endlich der Effect der Diffraction besprochen. Es handelt sich also nicht um neue theoretische Entwickelungen, sondern um die Anwendung bekannter Formeln auf eine neue Erscheinung. Wn.

E. Bouty. Sur les flammes sensibles. Journ. de phys. (3) **5**, 404-407.

Der Verf. hebt hervor, dass bei den schallempfindlichen Flammen

die cylindrische Gestalt das Zustandekommen des Mittönens begünstigt, und dass dabei an der Basis der Flamme ein Cylinder von blauer Färbung einen inneren vollständig dunklen Cylinder von verhältnismässig kaltem Gase umgiebt. Dieses System bilde eine Art akustischer Cylinderlinse, deren Eigenschaften er kurz theoretisch ermittelt. Die Bedingung, dass der Brennpunkt in den dunklen Raum der Flamme fällt, stimmt bei einem Gemische aus 1/3 Stickstoff und 2/3 Wasserstoff mit dem durch den Versuch festgestellten Zustande der höchsten Empfindlichkeit gut überein. Lp.

P. Lebedew. Ueber die ponderomotorische Wirkung der Wellen auf ruhende Resonatoren. II. Hydrodynamische Oscillationsresonatoren. Wiedemann Ann. **59**, 116-133.

Nachdem der Verf. seinen Apparat und die mit ihm erzielten Resultate beschrieben hat, kommt er zu dem für uns wichtigen Teil: zur Theorie. Vom Geschwindigkeitspotential für den Fall einer in einer Flüssigkeit bewegten Kugel ausgehend, berechnet er die Geschwindigkeit der Resonatorkugel. Indem er die von Bjerknes gegebenen Ausdrücke für die Kraft, welche zwei Kugeln in einer Flüssigkeit auf einander ausüben, mit seinen Beobachtungsresultaten vergleicht, gelangt er zu dem Resultat, dass die Gesetze von Bjerknes auch in dem Falle erzwungener Bewegungen gelten. F. K.

Weitere Litteratur.

E. Catchpool. A textbook of sound. Second edition. London: Clive 212 S. 8°.

H. von Helmholtz. Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. 5. Ausg. Braunschweig: F. Vieweg u. Sohn. XXII + 675 S. 8°. Mit Bildnis des Verf.

W. Lees. Acoustics. Sound (advanced). Enlarged edition. London. 96 S.

Lord Rayleigh. The theory of sound. Second edition, revised and enlarged. Volume II. London: Macmillan. 520 S. 8°.

A. W. Rücker. Notes on the objective existence of combination tones. Brit. Ass. Rep. 1896, 626-628.

J. Nieuwenhuyzen Krusemann. La propagation du son d'après la théorie cinétique des fluides élastiques. Arch. Teyler (2) **5**, 207-216.

A. Husmann. Ueber das Doppler'sche Princip. Poske Z. **9**, 237-238.

B. Theoretische Optik.

W. T. A. Emtage. Light. With 231 illustrations. London: Longmans, Green, and Co. 352 S. [Nature **55**, 77.]

P. Duhem. Fragments d'un cours d'optique. Troisième fragment. L'optique de Fresnel. Brux. S. sc. **20** B, 27-105.

Fortsetzung der in F. d. M. **26**, 938, 1895 besprochenen Arbeit. In einem Eingangskapitel zeigt der Verf., wie wenig die Young'sche Optik dazu ausreicht, die Spiegelungs- und Brechungserscheinungen an der Trennungsfläche zweier durchsichtigen homogenen, isotropen Mittel zu erklären. Er greift also nach einem vollkommeneren Systeme, dem Fresnel'schen, um jene Erscheinungen und die der Polarisation zu erklären; nebenbei bemerkt er, dass man hierzu auch das System von Mac-Cullagh und Fr. Neumann nehmen könnte. Wenn es sich endlich um isotrope, unvollkommen durchsichtige Mittel handelte, müsste man noch andere Systeme ersinnen. — Die Schlussfolgerung der drei Bruchstücke ist die folgende: Man kann eine theoretische Optik aufbauen, ohne irgend eine Hypothese über den feineren Bau der durchsichtigen Mittel oder die Natur des Lichtes zu machen. Mn. (Lp.)

O. Tedone. Sulla dimostrazione della formola che rappresenta analiticamente il principio di Huyghens. Rom. Acc. L. Rend. (5) $\mathbf{5}_1$, 357-360.

Der Verf. betrachtet x, y, z, t als die Coordinaten eines variabeln Punktes in einem linearen vierdimensionalen Raume und bezeichnet mit S'_4 einen Teil dieses Raumes, der begrenzt ist 1) von der konischen Mannigfaltigkeit

$$a(t_1-t) = \sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2} = r,$$

2) von der cylindrischen Mannigfaltigkeit $r^2 = \varepsilon^2$, wo ε eine kleine Grösse ist, 3) von einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit Σ, die von allen Parallelen zur Axe t nur in einem Punkte geschnitten wird, im übrigen aber beliebig ist. Er formt dann das über S'_4 erstreckte Integral

$$\int_{S'_4} \left\{ u_1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - X\right) - u\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \Delta u_1\right)\right\} dS'_4,$$

in dem
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

X eine willkürliche Function von x, y, z, t ist, durch teilweise Integration um und setzt in dem Resultate

$$u_1 = a\frac{t_1-t}{r} - 1,$$

während für u eine beliebige Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + X$$

genommen wird. Weiter wird zur Grenze $\varepsilon = 0$ übergegangen und zweimal nach dem Parameter t_1 differentiirt, so ergiebt sich eine Formel, die allgemeiner ist als die Kirchhoff'sche Formel für das Huygens'sche

Princip. Die letztere erhält man, wenn man speciell für die Mannigfaltigkeit Σ die lineare dreidimensionale Mannigfaltigkeit $t = t_0 =$ const. nimmt. Wn.

G. Morera. Sull'espressione analitica del principio di Huygens. Nuovo Cimento (4) **2,** (1895) 17-25.

Der Verf. bezeichnet als Zweck dieser Note die Aufhebung einer Einschränkung in einem von Beltrami (Sull'espressione analitica del principio di Huygens, Rom. Acc. L. Rend. (5) I, 93-108; F. d. M. **24,** 983, 1892) gegebenen Beweise einer Kirchhoff'schen Formel. Vi.

B. Brunhes. Sur le principe d'Huygens et sur quelques conséquences du théorème de Kirchhoff. Lille Mém. **4,** No. 16. 44 S. (1895).

Vgl. F. d. M. **26,** 943, 1895.

B. W. Stankiewitsch. Zur Theorie der Lichtstrahlen. Warsch. Univ. Abh. III, IV, 1896; Sep. 54p.

Der Verf. findet, dass einige Betrachtungen Kirchhoff's in den „Vorlesungen über mathematische Optik" und besonders die Ableitung des Gesetzes der geometrischen Schatten teils unbegründet, teils nicht streng genug seien (pp. 37-38 der Vorlesungen). Dem entsprechend ist das erste Kapitel der Arbeit einer Kritik gewidmet, in dem Kapitel II giebt der Verf. „eine vollkommen strenge Ableitung" des genannten Gesetzes; in dem dritten Kapitel ist dieselbe Lösung sehr vereinfacht worden (geometrisch durchgeführt).

Kirchhoff behauptet, man könne immer eine solche „transformirte" Fläche S finden, die auf einem endlichen Flächenstück mit keinem der Ellipsoide $\zeta =$ const. zusammenfällt, und auf welcher die Grösse $\frac{\partial F}{\partial \zeta} = \frac{1}{d\zeta}\int_{\zeta}^{\zeta+d\zeta} H dS$ überall stetig ist. Der Verf. beweist, dass es unendlich viele solcher Flächen S giebt. Die Stetigkeit des Symbols $\partial F/\partial \zeta$ wird dabei besonders untersucht und bewiesen. Bei der vereinfachten Ableitung in dem Kapitel II sind zwei solcher transformirten Flächen angegeben. Ghr.

S. Lie. Die infinitesimalen Berührungstransformationen der Optik. Leipz. Ber. **48,** 1896, 131-133.

Der Verf. macht aufmerksam auf die von ihm längst erkannte und auch in Vorlesungen betonte Versinnlichung des Begriffes „infinitesimale Berührungstransformation", die sich aus der Wellentheorie der Optik entnehmen lässt. Z. B. stellt jede Wellenbewegung geradezu eine eingliederige Gruppe von Berührungstransformationen dar; auch Reflexion und Brechung lassen sich als Berührungstransformationen auffassen.

Auch auf eine schon 1872 von ihm aufgestellte Verallgemeinerung des Malus'schen Satzes weist der Verf. hin. El.

G. Vert. Sur une représentation graphique des ondes lumineuses. C. R. **123**, 99-100.

Nach des Verf. Ansicht setzt sich jede Lichtbewegung aus einer Anzahl neben einander bestehender einfacher Schwingungen zusammen, deren Wellenlänge und Frequenz in einfachen Beziehungen stehen, während ihre Phasen einen schraubenförmigen Cyklus bilden. Zur graphischen Darstellung dieser Verhältnisse werden die Wellenlängen der einzelnen Teilschwingungen auf einer Schraubenlinie aufgetragen. Genaueres ist der kurzen Notiz nicht zu entnehmen. Wn.

F. E. Neumann. Theorie der doppelten Strahlenbrechung, abgeleitet aus den Gleichungen der Mechanik (1832). Herausgegeben von A. Wangerin. Leipzig: Wilhelm Engelmann. 52 S. 8° (Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften Nr. 76).

„Die hier abgedruckte Arbeit ist die erste, welche F. E. Neumann auf dem Gebiete der theoretischen Physik veröffentlicht hat; sie war neben den gleichzeitigen Arbeiten Cauchy's von der grössten Bedeutung für die Entwickelung der Optik.“ (Erschienen in Poggendorff's Annalen **25**, 418-454, 1832.) „Der vorliegende Abdruck hält sich streng an das Original; nur sind in der Schreibweise der Formeln geringe Aenderungen vorgenommen, so insbesondere in der Bezeichnung der partiellen Ableitungen. Ferner ist die veraltete Schreibweise einiger Wörter geändert. Endlich sind Druckfehler in verschiedenen Formeln verbessert.“ Mit diesen Angaben des Herausgebers ist die neue Ausgabe der klassischen Arbeit Neumann's gekennzeichnet; wir fügen nur noch hinzu, dass mehrere ausführliche Noten das Verständnis der Abhandlung bedeutend erleichtern, andere kleinere durch Anführung neuerer Litteratur den Leser über die Hauptschriften orientiren. Lp.

P. Glan. Theoretische Untersuchungen über elastische Körper. Wiedemann Ann. **57**, 112-134.

P. Glan. Theoretische Untersuchungen über elastische Körper und Licht. Wiedemann Ann. **57**, 604-634; **59**, 155-179, 401-416.

P. Glan. Theoretische Untersuchungen über Licht. Wiedemann Ann. **58**, 131-153.

Der Verf. wendet die in einer früheren Arbeit (cf. F. d. M. **26**, 948, 1895) entwickelte Theorie elastischer Körper an zur Untersuchung von ebenen Wellen, die, senkrecht zu einem Vector ω_1, in einem unendlich ausgedehnten elastischen Körper fortschreiten. Durch längere, sehr wenig durchsichtige Rechnungen findet er für den die Bewegung der einzelnen Teilchen des elastischen Körpers

bestimmenden Vector

$$\varrho = \omega + \omega_1 g e^{-\frac{jx}{4l}} \cos \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{l} - ht\right)$$
$$+ \omega_2 g' g e^{-\frac{j'x}{4l}} \sin \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{l} - ht - u'\right)^2.$$

Darin bezeichnet x den Scalar $S(\omega/\omega_1)$, $4l$ die Wellenlänge, $\frac{1}{4}h$ die Schwingungszahl in der Zeiteinheit. Die so gefundene Wellenbewegung stellt „ebene Wellen mit elliptischen Längsschwingungen" dar; die Intensität in einem Punkte des Körpers ist proportional der Summe der Quadrate der Amplituden der beiden geradlinigen Schwingungen, aus denen sich die elliptische Schwingung zusammensetzt, d. h. proportional

$$g^2 e^{-\frac{jx}{2l}} + g'^2 g^2 e^{-\frac{j'x}{2l}}.$$

Die Constante g' wird als sehr klein angenommen; damit werden die Bahnen sehr gestreckte Ellipsen, und in dem Ausdruck für die Intensität kann dann das zweite Glied vernachlässigt werden.

Weiter wird der Vernichtungsindex $j/4l$ für schwach absorbirende Körper untersucht. Für diese ist j sehr klein; die Gleichung, der nach den früheren Entwickelungen j genügen muss, wird daher eine lineare, und es ergiebt sich die Näherungsformel:

$$\frac{j}{4l} = \frac{\pi^2}{8}\,\frac{k}{s.c_p}\,\frac{n^2}{V_0 l_0^2}.$$

Darin ist V_0 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, $4l_0$ die Wellenlänge der betrachteten Wellen im Weltenraum, n der absolute Brechungsindex, s das specifische Gewicht, c_p die specifische Wärme bei constantem Druck, k das thermische Leitungsvermögen. Die letzte Formel wird benutzt, um für eine grössere Anzahl von festen Substanzen und Flüssigkeiten den numerischen Wert des „Vernichtungsindex" $j/4l$ zu berechnen, und zwar teils für grosse, teils für sehr kleine Wellenlängen, für einige Substanzen auch die Abhängigkeit dieses Index von der Temperatur. Der Verf. findet die Resultate dieser Rechnung in Uebereinstimmung mit den Beobachtungen.

Für stark absorbirende Körper, wie die Metalle, gilt statt der vorhergehenden Gleichung die folgende, die ebenfalls in befriedigender Weise mit der Erfahrung übereinstimmt:

$$\frac{j}{4l} = \frac{2\pi n}{4l_0}.$$

Zum Schluss wird die Dispersion sowohl der schwach als der stark absorbirenden Wellen untersucht. Wn.

W. Voigt. Ueber die Aenderung der Schwingungsform des Lichtes beim Fortschreiten in einem dispergirenden oder absorbirenden Mittel. Gött. Nachr. 1896, 186-190.

Pflanzt sich eine Schwingung in einem dispergirenden oder absorbirenden Medium fort, so ändert sie dabei notwendig ihre Form. Ein einfaches Beispiel dafür bietet die Fortpflanzung ebener Wellen in einem absorbirenden, aber dispersionsfreien Medium. Für die Bewegung in einem solchen Medium gilt die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2b\frac{\partial u}{\partial t},$$

und diese stimmt überein mit der neuerdings (cf. F. d. M. **25**, 1695, 1893-1894) von Poincaré und Picard behandelten Gleichung für die Fortpflanzung der Elektricität in einem Leitungsdraht. Indem der Verf. das von Picard angegebene Verfahren auf die Fortpflanzung einer in einer Ebene erregten Schwingung anwendet, stellt er u als die Summe zweier Glieder dar, deren erstes eine regelmässig fortgepflanzte Verrückung ausdrückt, während das zweite, in Form eines Integrals, eine Nachwirkung aller vor der Zeit $t-z/a$ in der Erregungsebene $z=0$ stattgefundenen Bewegungen ergiebt.

Der Anfang einer Bewegung in der Ebene $z=0$ pflanzt sich mit einer Geschwindigkeit

$$\omega = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{b^2 T^2}{4\pi^2}}}$$

fort (T die Schwingungsdauer), welche von der Geschwindigkeit a verschieden ist, die man bei rein periodischen Bewegungen als Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnet. Wn.

Fabry. **Sur le passage de la lumière à travers une lame mince dans le cas de la réflexion totale.** Journ. de phys. (3) **5**, 224-227.

Abdruck einer Arbeit, über die F. d. M. **26**, 948, 1895 berichtet ist. Wn.

J. Macé de Lépinay. **Sur les changements de phase par diffraction.** Journ. de phys. (3) **5**, 303-306.

Wird in den Gang des einen von zwei interferirenden Lichtbündeln ein Schirm geschaltet, so findet entweder eine seitliche Verschiebung der Interferenzstreifen ohne Aenderung ihrer Gestalt statt, oder eine Deformation derselben ohne Aenderung ihres gegenseitigen Abstandes. Der erstere Fall tritt ein, wenn die geradlinigen Ränder des Diffractionsschirms den Interferenzstreifen parallel sind, der zweite, wenn die Ränder auf den Streifen senkrecht stehen. Der letztere Fall wird auf Grund bekannter Formeln der Diffractionstheorie näher erörtert. Wn.

A. Sommerfeld. **Mathematische Theorie der Diffraction.** Math. Ann. **47**, 317-374.

Die allgemeine Problemstellung der Theorie hat der Verf. bereits

in einer früheren Arbeit erörtert (cf. F. d. M. **25**, 1621, 1893-1894). Hier wird die Aufgabe zunächst dadurch specialisirt, dass die Zustände von der z-Coordinate unabhängig angenommen werden. An Stelle des leuchtenden Punktes tritt dann eine der z-Axe parallele Gerade, und auch der Schirm wird durch Parallelen zur z-Axe begrenzt, der Riemann'sche Doppelraum aber reducirt sich auf eine Riemann'sche Fläche. Die exacte Lösung des specialisirten Beugungsproblems führt daher auf die Aufgabe, die Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0$$

auf einer Riemann'schen Fläche zu integriren. Der Lösung dieser Aufgabe wird die Betrachtung derjenigen Reihen vorangeschickt, welche der Gleichung (1) genügen und den Potenzreihen der Potentialtheorie entsprechen. Es sind das Reihen der Form:

$$(2) \qquad \sum_m J_{\frac{m}{n}}(kr)\left\{\alpha_m \cos\left(\frac{m}{n}\varphi\right) + \beta_m \sin\left(\frac{m}{n}\varphi\right)\right\},$$

wo $J_{\frac{m}{n}}$ die Bessel'sche Function erster Art ist und die gegebene Zahl n eventuell den Wert 1 haben kann. Von diesen Reihen wird gezeigt, dass sie gerade soweit convergent sind wie die entsprechenden Potenzreihen

$$(2') \qquad \sum_m r^{\frac{m}{n}}\left\{\alpha_m \cos\left(\frac{m}{n}\varphi\right) + \beta_m \sin\left(\frac{m}{n}\varphi\right)\right\},$$

die der Gleichung (1) für den Fall $k = 0$ genügen. Dasselbe gilt von der Reihe, die aus (2) entsteht, wenn die Function

$$(3) \qquad U_{\frac{m}{n}}(x) = K_{\frac{m}{n}}(x) - \frac{i\pi}{2} J_{\frac{m}{n}}(x)$$

an Stelle von $J_{\frac{m}{n}}(x)$ tritt [K die Bessel'sche Function zweiter Art], und die nicht nur formal, sondern auch hinsichtlich der Convergenz einer Reihe entspricht, die nach Potenzen von $1/r$ fortschreitet. Trotzdem ist die Analogie zwischen den letztgenannten Reihen keine vollständige mehr, da die Aufgabe, eine Function u, welche auf einem Kreise gegeben ist, ausserhalb dieses Kreises gemäss (1) fortzusetzen, unbestimmt ist. Man muss hier das Unendliche durch einen zweiten Kreis ausschliessen und für den so entstehenden Kreisring eine Entwickelung suchen, die sich aus einer nach den Functionen J und einer nach den Functionen U fortschreitenden Reihe zusammensetzt.

Während sich hiernach die Methode der Potenzreihen aus der Functionentheorie bei der Gleichung (1) mit geeigneten Modificationen aufrecht erhalten lässt, versagt die Methode der algebraischen Berechnung verzweigter Lösungen. Doch lässt sich ein Verfahren angeben, durch welches man aus einer Lösung der Gleichung $\Delta u = 0$ mit gewissen Eigenschaften eine Lösung von (1) mit entsprechenden Eigenschaften

herleiten kann. Dazu gehe man von einer beliebigen complexen Function $f(Z)$ aus und beziehe die Z-Ebene stereographisch auf die Kugel $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$, so erhält man die Function $f\left(\frac{\xi+i\eta}{\zeta+1}\right)$, die ein zweidimensionales Potential auf der Einheitskugel darstellt. Von diesem gehe man zu dem entsprechenden räumlichen Potential über, indem man an Stelle von 1 setzt $\varrho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$. Dadurch hat man eine räumliche Kugelfunction vom Grade 0 erhalten, und man leitet daraus räumliche Kugelfunctionen anderer Grade ab, indem man mit $1/\varrho$ multiplicirt und m-mal nach ζ differentiirt. Das Resultat wird in Form eines geschlossenen complexen Integrals dargestellt und zu diesem, um den Verzweigungspunkt $\varrho=0$ fortzuschaffen, ein analoges hinzugefügt, das $-\varrho$ an Stelle von ϱ enthält. Auf die so gewonnene Function wird folgender Grenzübergang angewandt. Man setze

$$\xi=kx/m,\quad \eta=ky/m,\quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$$

und lasse m ins Unendliche wachsen, während x, y endlich bleiben. Dann geht die Differentialgleichung der Kugelfunction in die Gleichung (1) über, und falls man noch Polarcoordinaten r, φ an Stelle von x, y einführt, geht die Summe der vorher erwähnten Integrale über in:

$$(4)\qquad \frac{1}{2\pi}\int\left\{f\left[e^{i(\varphi-\alpha-\frac{\pi}{2})}\right]-f\left[e^{i(\varphi+\alpha-\frac{\pi}{2})}\right]\right\}e^{ikr\cos\alpha}\,d\alpha;$$

Anfangs- und Endpunkt der Integration können sich darin um 2π unterscheiden. Das Verfahren liefert zunächst nur solche Functionen, welche Verzweigungen und Unstetigkeitsstellen im Endlichen allein an der Stelle $x=0$, $y=0$ besitzen.

Durch das beschriebene Verfahren lassen sich zunächst die Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art herleiten, indem man $f(Z)=Z^\nu$ setzt; je nach dem Integrationswege, den man in der Ebene der Variabeln α benutzt, entstehen die Functionen $e^{i\nu\varphi}J_\nu(kr)$, resp. $e^{i\nu\varphi}U_\nu(kr)$. Setzt man aber $f(Z)=\frac{1/n}{1-(Z/Z')^{\frac{1}{n}}}$, wo Z' einen festen Punkt des Einheitskreises bezeichnet, so ergiebt sich die Function

$$(5)\qquad u=\frac{1}{2\pi in}\int\frac{\sin(\alpha/n)\,e^{ikr\cos\alpha}\,d\alpha}{\cos(\alpha/n)-\cos((\varphi-\varphi')/n)},$$

ein Resultat, das der Verf. schon in einer früheren Arbeit mitgeteilt hatte (cf. F. d. M. **26**, 396, 1895). Betreffs des Integrationsweges von (5) ist Folgendes zu bemerken. In der Ebene α betrachte man die beiden Streifen, in denen der reelle Teil von α zwischen $-\pi$ und 0, resp. zwischen π und 2π liegt, während der imaginäre Bestandteil von 0 bis $+\infty$ variirt. Dann beginnt die Integration im Unendlichen des ersten Streifens und endet im Unendlichen des zweiten. Die Punkte $\alpha=\pm(\varphi-\varphi')$ liegen ausserhalb des von dem Integrationswege eingeschlossenen Gebietes. Die vorstehende Function u hat folgende Eigenschaften: a) sie genügt der Gleichung (1); b) sie ist auf der n-blättrigen

Riemann'schen Fläche eindeutig; c) sie ist für alle endlichen Werte von r endlich; d) im Unendlichen des ersten Blattes wird:

$$(5^a) \qquad u = u_0 = e^{ikr\cos(\varphi-\varphi')},$$

im Unendlichen aller übrigen Blätter verschwindet u. Die Function u stellt die Bewegung einer in der Richtung $\varphi = \varphi'$ auf der Riemann'schen Fläche einfallenden Lichtwelle dar. Sie hat an die Stelle von u_0 (cf. 5^a) bei allen denjenigen zweidimensionalen optischen Problemen zu treten, welche ihrer Natur nach nicht zu einer in der schlichten Ebene, sondern zu einer auf der n-blättrigen Riemann'schen Fläche eindeutigen Function Anlass geben. Für eine Windungsfläche von unendlich hoher Ordnungszahl erhält man die entsprechende Function u', wenn man in (5) zur Grenze $n = \infty$ übergeht. Uebrigens lässt sich u auch leicht in eine Reihe der Form (2) entwickeln.

Weiter werden solche Lösungen von (2) aufgesucht, welche in einem vorgeschriebenen Punkte r', φ' unendlich werden wie $\log(1/R)$ für $R = 0$. Diese Lösungen U haben dieselbe Form wie u in (5), nur dass an Stelle von $e^{ikr\cos\alpha}$ der Ausdruck $U_0(kR')$ tritt, in dem $R'^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\alpha$ ist, während U_0 die durch (3) definirte Bessel'sche Function zweiter Art ist. Mit Ausnahme des Poles r', φ', dessen Rolle man mit der des variabeln Punktes vertauschen kann, hat U analoge Eigenschaften wie vorher u, nur dass U im Unendlichen verschwindet. Die Function U stellt eine Lichtbewegung auf der Riemann'schen Fläche dar, welche ein im Punkte r', φ' vorhandener leuchtender Punkt hervorruft. Sie tritt an die Stelle von U_0 in solchen optischen Problemen, die mit ihren Fortsetzungen erst auf der n-blättrigen Riemann'schen Fläche eindeutig sind. Auch für U lässt sich eine nach den Cosinus der Vielfachen von $(\varphi - \varphi')/n$ fortschreitende Reihe aufstellen, deren Coefficienten $\frac{2}{n} J_{\frac{m}{n}}(kr')\, U_{\frac{m}{n}}(Rr)$ sind.

Nach diesen allgemeinen Vorbereitungen geht der Verf. zu dem für die Optik wichtigsten Falle $n = 2$ über. Um hier ein klares Bild von dem Verlauf der mehrdeutigen Lösungen zu erhalten und die für die numerische Rechnung geeigneten Formeln bereit zu stellen, wird das Integral (5) in ein Integral mit reellem Integrationswege umgeformt, wobei noch zur Abkürzung $\varphi - \varphi' = \psi$ gesetzt wird; letzteres Integral lässt sich dann in eine semiconvergente Reihe entwickeln, deren erstes Glied zur angenäherten Berechnung genügt. Für die beiden Blätter findet man, wenn $\lambda = 2\pi/k$ die Wellenlänge bedeutet, die angenäherten Werte:

$$(6) \qquad u_2 = -\sqrt{\frac{\lambda}{r}}\,\frac{e^{-\frac{2\pi ir}{\lambda}-\frac{i\pi}{4}}}{4\pi\cos\frac{\psi}{2}}, \qquad u_1 = u_0 - u_2 = e^{\frac{2\pi ir}{\lambda}\cos\psi} - u_2.$$

Doch gelten diese Näherungsformeln nur, wenn das zweite Glied der Entwickelung $< \frac{1}{2}\varepsilon$ ist (ε ist der vorgeschriebene Grad der Genauigkeit); und das ist nur für die Punkte ausserhalb einer gewissen Parabel der Fall. Für die Punkte innerhalb der Parabel ist die Bedingung nicht

erfüllt; das Gebiet dieser Punkte bildet den „Uebergangsstreifen". Es werden ferner noch die Nulllinien der Function untersucht und graphisch dargestellt.

Endlich werden im letzten Paragraphen alle gewonnenen Ergebnisse auf das einfachste Beugungsproblem angewandt, bei dem ein unendlich dünner, vollkommen undurchsichtiger, geradlinig begrenzter ebener Schirm S vorhanden ist, dessen Kante die z-Axe bildet. Mit Poincaré wird der Zustand Z in zwei einfachere zerlegt, nämlich a) die elektrische, b) die magnetische Schwingung. Beide Z genügen der Gleichung (1), während längs des Schirmes S im Falle a) $Z=0$, im Falle b) $\partial Z/\partial n = 0$ ist. Eine überall endliche Lösung des Problems ist, wenn u die Function (5) darstellt:

$$Z = u(\varphi') - u(-\varphi') \text{ im Falle a)},$$
$$Z = u(\varphi') + u(-\varphi') \text{ im Falle b)}.$$

Die von dem Schirm hervorgerufenen Beugungserscheinungen sind also weiter nichts als „Interferenzerscheinungen" zwischen den Wellenbewegungen $u(\varphi')$ und $u(-\varphi')$, von denen die eine in der Richtung $\varphi = \varphi'$ des physikalischen, die andere in der Richtung $\varphi = -\varphi'$ des Hülfsblattes der Riemann'schen Fläche einfällt.

Den früheren Untersuchungen der einzelnen Wellen ist jetzt eine weitere hinzuzufügen betreffs des Effectes der Superposition von zwei solchen Wellen. Zu dem Zwecke werden die Halbstrahlen $\varphi' + \pi$ und $-\varphi' + \pi$, deren erster die Grenze des geometrischen Schattens darstellt, markirt und die Uebergangsstreifen S_1 und S_2 abgesondert, welche die genannten Halbstrahlen zu Axen haben. Nach Absonderung dieser Streifen zerfällt die xy-Ebene in drei Gebiete, auf deren jedes die für die Function u gefundenen Näherungsformeln angewandt werden; es ergeben sich so Formeln, die im wesentlichen mit den von Poincaré aus einer ganz anderen Problemstellung abgeleiteten (Acta Math. **16**, cf. F. d. M. **24**, 999, 1892) übereinstimmen. Doch fehlt bei Poincaré ein Kriterium für den Gültigkeitsbereich; auch wird die Schwierigkeit, dass sich bei Poincaré in den vorher erwähnten Halbstrahlen Unendlichkeitsstellen ergeben, hier durch Einführung der Uebergangsstreifen erledigt. Von den Folgerungen, die sich aus den Formeln ergeben, sei hier nur folgende erwähnt. Von dem Windungspunkte $r=0$ aus pflanzen sich nach allen Seiten innerhalb des Gebietes des geometrischen Schattens Strahlen in der Richtung des Radiusvectors fort, gerade so, als ob der Windungspunkt ein leuchtender Punkt wäre.

Zum Schluss wird auch das Innere der Uebergangsstreifen betrachtet. Hier gelten nicht mehr die Näherungsformeln, man muss vielmehr auf die exacte Formel (5) recurriren. Das dort auftretende Integral lässt sich durch die von Kirchhoff in der Diffractionstheorie benutzten Functionen darstellen, und damit lässt sich auch die Intensität durch jene Functionen ausdrücken. Vergleicht man die Intensitätsformel mit der Kirchhoff'schen, so zeigt sich, dass letztere den wahren Wert der Intensität in allen denjenigen Punkten mit genügender Genauigkeit wieder-

giebt, welche 1) genügend nahe an der Schattengrenze liegen und 2) genügend weit von dem Windungspunkte entfernt sind. Das Gültigkeitsgebiet der Kirchhoff'schen Formeln ist hiernach nur ein sehr kleines; ausserhalb desselben werden sie merklich falsch. Wn.

A. SOMMERFELD. **Diffractionsprobleme in exacter Behandlung.** Verh. Naturf. Vers. Lübeck (1895) **2**$_1$, 34-35.

W. VOIGT. **Fluorescenz und kinetische Gastheorie.** Gött. Nachr. 1896, 184-185.

Fällt eine ebene Welle normal auf einen undurchsichtigen Schirm, der eine gegen die Wellenlänge grosse und durch eine fluorescirende Platte geschlossene Oeffnung hat, so werden auch die im geometrischen Schatten liegenden Stellen beleuchtet; ferner empfangen die vor dem Schirm liegenden Stellen ebenfalls Fluorescenzlicht. Diese Beobachtung beweist, dass die von verschiedenen Stellen der Oeffnung ausgehenden Wellen nicht mehr interferiren, d. h. in ihrem Schwingungszustand von einander unabhängig geworden sind. Das führt mit Notwendigkeit zu der Vorstellung einer incohärenten Bewegung in den benachbarten Teilen der fluorescirenden Körper, die nicht wohl erst durch die Welle erregt sein kann, sondern schon vorher bestanden haben muss.

Das Gesagte dient zur Ergänzung der Vorstellungen, zu denen L. Sohncke bei seinen experimentellen Untersuchungen über das polarisirte Fluorescenzlicht gelangt ist (Wiedemann Ann. **58**, 417, 1896). Wn.

Tabelle für die Wellenlänge der Spectren der Elemente und ihrer Verbindungen. Brit. Ass. Rep. 1896, 273-340.

Rotes Spectrum von Argon; blaues Spectrum von Argon; Titan (Bogenspectrum); Kupfer (Funkenspectrum); Silber (Funkenspectrum); Gold (Funkenspectrum). Gbs. (Lp.)

G. JAUMANN. **Longitudinales Licht.** Wiedemann Ann. **57**, 146-184.

Abdruck der Arbeit, über die F. d. M. **26**, 960, 1896 berichtet ist. Wn.

E. M. LÉMERAY. **Interprétation géométrique des formules de Fresnel sur la réflexion et la réfraction vitreuses de la lumière polarisée.** Journ. de phys. (3) **5**, 272-275.

Es handelt sich um die Beziehungen, welche die Fresnel'sche Reflexionstheorie zwischen den Azimuten der Polarisation des einfallenden, des reflectirten und des gebrochenen Lichtes ergiebt. Die Form dieser Gleichungen ist dieselbe wie die der Gleichungen zwischen einer Kathete, der Hypotenuse und dem eingeschlossenen Winkel eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks; und daraus folgt eine Construction zweier dieser Azimute aus dem dritten. Wn.

A. Hurion. **Sur la polarisation de la lumière diffusée par les milieux troubles. Application à la polarisation atmosphérique.** Ann. de chim. et phys. (7) **7**, 456-495.

Die Theorie der atmosphärischen Polarisation, welche Soret in Ann. de chim. et phys. (6) **14**, 512 (1888) gegeben hat, wird vom Verf. angenommen und für seine Beobachtungen weiter ausgebildet. Die von ihm gefundenen Formeln werden durch den Versuch geprüft und finden sich in guter Uebereinstimmung mit den Beobachtungsergebnissen. Der Umfang der entwickelten Formeln ist jedoch zu gross, um hier eine Wiedergabe zu gestatten. Die Beobachtungen sollen weiter fortgesetzt werden. Lp.

R. Brunhes. **Sur la condition de biréfringence d'un milieu et sur l'absorption cristalline.** Journ. de phys. (3) **5**, 12-22.

Der Verf. zeigt, dass die Hertz'schen Gleichungen, angewandt auf ein unvollständig isolirendes Medium, das sowohl hinsichtlich seiner dielektrischen Eigenschaften, als hinsichtlich der elektrischen Leitungsfähigkeit anisotrop, hinsichtlich seiner magnetischen Eigenschaften aber isotrop ist, vollkommen ausreichen, um die Doppelbrechung in absorbirenden Krystallen zu erklären. — Die hauptsächlichsten Resultate, zu denen seine Rechnungen führen, hat der Verf. bereits in einer früheren Abhandlung mitgeteilt, auf deren Referat wir verweisen (cf. F. d. M. **26**, 1021, 1895). Wn.

E. Carvallo. **Sur l'absorption de la lumière par les milieux doués du pouvoir rotatoire.** C. R. **122**, 985-988.

Der Verf. modificirt die Gleichungen, aus denen er früher (C. R. **113**, 846, cf. F. d. M. **23**, 1088, 1891) die Lichtbewegung in einem die Polarisationsebene drehenden Medium abgeleitet hatte, dadurch, dass er in der Gleichung für die Schwingung der materiellen Teilchen nach dem Vorgange von Helmholtz (Theorie der anomalen Dispersion, cf. F. d. M. **6**, 654, 1874) einen der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand und damit ein Glied einführt, das die Absorption ergiebt. Sucht man diesen Gleichungen durch Particularlösungen von der üblichen Form zu genügen, so folgt, dass das betreffende Medium zwei circulare Schwingungen von entgegengesetztem Drehungssinn fortzupflanzen vermag; und zwar sind nicht nur die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten beider Schwingungen verschieden, sondern auch ihre Absorptionscoefficienten. Ist die Dispersion anomal, so ist auch das Absorptionsvermögen anomal. Damit sind gewisse Beobachtungen von Cotton erklärt.

Zum Schluss sucht der Verf. noch eine weitere Beobachtung von Cotton zu erklären, wonach die Färbung eines activen, nicht absorbirenden Körpers keine Ungleichheit der Absorption veranlasst, ebenso wenig eine Aenderung der Gesetze der Rotationsdispersion. Wn.

E. Carvallo. **Absorption de la lumière par les cristaux.** Ann. de chim. et phys. (7) **7**, 58-94.

In der Vorrede giebt der Verf. an, dass er durch die der Société de Physique 1895 vorgelegte These von Camichel veranlasst sei, die in den Jahren 1892 und 1893 erhaltenen Ergebnisse einer Untersuchung bezüglich der Wärmestrahlen zu veröffentlichen, die er durch Versuche über das sichtbare Spectrum habe ergänzen wollen; jetzt sei diese Experimentaluntersuchung durch die von Camichel überflüssig geworden. Der Aufsatz zerfällt in zwei Kapitel, von denen das erste sich mit der Theorie beschäftigt (S. 58-82), das zweite die Experimente mit dem Turmalin und dem Epidot behandelt. Die theoretischen Entwickelungen gehen von den Formeln aus, die Carvallo in C. R **112**, 522 (F.d. M. **23**, 1081, 1891) aufgestellt hat. Die einzelnen Paragraphen des ersten Kapitels sind überschrieben: I. Erinnerung an Ergebnisse bezüglich der Doppelbrechung. II. Untersuchung der Absorption in den Krystallen mit drei Symmetrieebenen. III. Besondere Gesetze bei den einaxigen Krystallen. IV. Pleochroismus bei den orthorhombischen Krystallen. V. Gesetze in Bezug auf die klinorhombischen und triklinischen Krystalle. VI. Unabhängigkeit der rotatorischen Polarisation und der Absorption. Wie schon aus dieser äusseren Einteilung hervorgeht, zerfallen die Resultate in eine grosse Anzahl einzelner Formeln, die alle die gemeinsame Grundlage des auch früher vom Verf. bevorzugten Sarrau'schen Gleichungssystemes besitzen. Um die Ergebnisse an einem Falle zu zeigen, geben wir aus § III die Gesetze der einaxigen Krystalle: I. Für den gewöhnlichen Strahl sind der Brechungsindex und der Absorptionscoefficient constant für jedweden Winkel des Lichtstrahls mit der Axe. II. Das Brechungsgesetz des aussergewöhnlichen Strahls wird durch die Absorption nicht merklich geändert. III. Das Absorptionsgesetz des aussergewöhnlichen Strahles wird durch die Formel dargestellt: $k/n^2 = (k_0/n_0^2)\cos^2\theta + (k_e/n_e^2)\sin^2\theta$. Auf das zweite Kapitel der Arbeit brauchen wir hier nicht einzugehen. Lp.

W. Voigt. **Ueber die Lage der Absorptionsbüschel in zweiaxigen pleochroitischen Krystallen.** Gött. Nachr. 1896, 252-254.

Die merkwürdigen Absorptionsbüschel, welche man wahrnimmt, wenn man durch eine senkrecht zu einer optischen Axe aus einem zweiaxigen pleochroitischen Krystall geschnittene Platte nach einer hellen Fläche blickt, liegen nicht immer normal zur Ebene der optischen Axen. Ihre Lage ist nämlich nicht durch das Fresnel'sche Polarisationsovaloid, sondern durch ein zweites Ovaloid, das Absorptionsovaloid, bestimmt und hängt speciell von der Richtung der Normalen zu den Kreisschnitten dieser zweiten Fläche ab. Voigt giebt hier eine einfache Regel zur Bestimmung der in Rede stehenden Büschel an, indem er sich hinsichtlich der Entwickelungen, aus denen diese Regel folgt, auf sein Compendium der theoretischen Physik, II 725 (vgl. S. 666 ff.) beruft. Er teilt ferner mit, dass er das theoretische Resultat durch Beobachtungen am

Axinit bestätigt habe; bei diesem Krystall waren Abweichungen der Büschel von der zur optischen Axe normalen Lage sehr merklich. Wn.

A. Cotton. Recherches sur l'absorption et la dispersion de la lumière par les milieux doués du pouvoir rotatoire. Ann. de chim. et phys. (7) 8, 347-432; Journ. de phys. (3) 5, 237-244, 290-302; auch sep. Thèse 99 S. 8°. Paris: Gauthier Villars et Fils.

Die Arbeit ist zwar vorzugsweise experimenteller Natur, enthält aber doch auch manche theoretischen Betrachtungen und kommt zu Ergebnissen, die an sich interessant und bedeutsam sind. Wie bei doppeltbrechenden Medien die ungleiche Absorption des gewöhnlichen und aussergewöhnlichen Strahles die Erscheinung des Dichroismus hervorruft, so kann man bei einem mit Drehungsvermögen ausgestatteten Medium die Frage erheben, ob es nicht active Körper giebt, die einen rechts und einen links drehenden Strahl ungleich absorbiren. Solche Körper hat der Verf. besonders in einigen farbigen Lösungen weinsaurer Verbindungen gefunden. Am Schlusse der Abhandlung äussert sich Cotton über alle seine Resultate wie folgt: Das sind also verwickeltere Eigenschaften der activen Körper als bei den gewöhnlich betrachteten durchsichtigen Medien, Eigenschaften, die sehr einfach mit der Betrachtung der beiden entgegengesetzten circularen Vibrationen zusammenhängen. Das Phänomen der circularen Doppelbrechung spielt bei der Untersuchung der activen Körper dieselbe Rolle wie die Doppelbrechung bei der Untersuchung der Eigenschaften der Krystalle. Man hat in beiden Fällen genau dieselben Gründe, um alle Erscheinungen, die uns der Versuch zeigt, um dieses Phänomen zu gruppiren. — Im übrigen vergleiche man das Referat F. d. M. **26**, 973, 1895 über die bezügliche Note in C. R. **120**, 989—991. Lp.

A. Cotton. Note sur l'emploi de la lame de Bravais. Ann. de phys. et chim. (7) 8, 433-437.

Bei der Anordnung zum Behufe des Nachweises von elliptischem Lichte war die Bravais'sche oder die analoge Platte so orientirt, dass ihre Axen 45° gegen die Schnitte der beiden Nicols geneigt waren, und der Verf. beobachtete die Verschiebung der Fizeau'schen und Foucault'schen Fransen; dabei war das einfallende elliptische Licht derartig, dass die eine der Axen der Ellipse mit dem Schnitte eines der Nicols zusammenfiel. Gegenwärtig wird angenommen, dass man auf eine Bravais'sche Platte einen beliebigen elliptischen Strahl fallen lässt, und es wird untersucht, ob irgend eine andere Orientirung eine grössere Empfindlichkeit giebt. Lp.

B. Hecht. Beitrag zur theoretischen Erklärung der Interferenzerscheinungen, welche Platten aus Zwillingskrystallen in convergentem polarisirten Lichte zeigen. Pr. (No. 19) Realgymn. Königsberg i. Pr. 21 S. (mit Figurentafel).

Die Theorie der im Titel genannten Erscheinungen, die bisher nur für einaxige Krystalle und für Zwillinge aus zwei Individuen durchgeführt war (cf. F. d. M. **22**, 1063, 1890), wird hier auf zweiaxige Krystalle ausgedehnt, sowie auf den Fall von Zwillingen aus mehr Individuen. Nach bekannter Methode wird der Durchgang des Lichtes zunächst durch zwei Krystallindividuen derselben Substanz untersucht, woraus sich unmittelbar, da jedes folgende Individuum durch eine Drehung von 180° um die Zwillingsaxe mit dem vorhergehenden in parallele Stellung gebracht werden kann, die Formeln für den Durchgang durch beliebig viele auf einander folgende Krystallindividuen ergeben. Dabei werden ausser den bei der Behandlung von Interferenzerscheinungen in Krystallplatten auch sonst üblichen beschränkenden Annahmen noch die beiden gemacht, dass sich die Richtung der Lichtwellen beim Uebergang aus einem Krystallindividuum in das folgende nicht ändert, und dass bei diesem Uebergang keine Schwächung des Lichts durch Reflexion eintritt. Das Hauptinteresse der Arbeit besteht in der genaueren Discussion der sich für die Intensität des austretenden Lichtes ergebenden Formeln. Diese Discussion wird nur für den Fall genauer durchgeführt, dass der Zwilling aus zwei Individuen besteht. Es treten hier im allgemeinen zwischen gekreuzten Nicols keine dunklen Curvensysteme auf, sondern nur die Durchschnitte von zwei Curvensystemen erscheinen bei einfarbigem Lichte als dunkle Flecke; ihre Lage wird berechnet. Für den Fall dreier Individuen werden die Formeln schon sehr complicirt. Sie werden daher nur angewandt zur Erklärung der Erscheinungen, welche eine senkrecht zur optischen Axe geschnittene Kalkspatplatte zeigt, die von einer Zwillingslamelle durchsetzt ist. Wn.

SMOLUCHOWSKI DE SMOLAN. Recherches sur une loi de Clausius au point de vue d'une théorie générale de la radiation. Journ. de phys. (3) **5**, 488-499.

SMOLUCHOWSKI DE SMOLAN. Recherches sur la dépendance entre le rayonnement d'un corps et la nature du milieu environnant. C. R. **123**, 230-233.

Vgl. Abschnitt XI, Kapitel 4C.

C. Geometrische Optik.

H. v. HELMHOLTZ. Handbuch der physiologischen Optik. 2. umgearbeitete Aufl. Lfg. 11-17 (Schluss). Hamburg u. Leipzig: L. Voss. S. 801-1334 + XIX S. 8°. (Mit 7 Tafeln.)

Mit den vorliegenden Lieferungen ist die zweite, 1886 begonnene Auflage des Handbuchs der physiologischen Optik vollendet. Ueber die Bedeutung des Werkes braucht Referent kein Wort zu verlieren, hat sich doch schon die erste Auflage einen Weltruf erworben. — Hinsichtlich des Inhalts der ersten 10 Lieferungen verweisen wir auf die Besprechung

in früheren Bänden des Jahrbuchs (F. d. M. **18, 19, 21, 24, 25, 26**). Die Lieferungen 11 und 12, die, ebenso wie die beiden vorhergehenden Lieferungen, mit unwesentlichen Aenderungen die betreffenden Abschnitte der ersten Auflage reproduciren, bringen den Text zum Abschluss. Besprochen werden darin die Wahrnehmung der Tiefendimensionen, das binoculare Doppelsehen, der Wettstreit der Sehfelder; der letzte Paragraph endlich giebt eine Kritik der verschiedenen Theorien. Von mathematischen Entwickelungen heben wir aus dem ersten der oben genannten Paragraphen die Construction stereoskopischer Bilder, aus dem zweiten die geometrische Darstellung der correspondirenden Punkte beider Sehfelder und des Horopters hervor. — Die Schlusslieferungen (13-17) enthalten ausser Titel, Vorrede und Inhaltsverzeichnis ein ausführliches Namen- und Sachregister, endlich eine vom Professor Arthur König zusammengestellte, etwa 20 Bogen umfassende Uebersicht über die gesamte physiologisch-optische Litteratur bis zum Schluss des Jahres 1894 mit Autorenregister. Wn.

F. Hausdorff. Infinitesimale Abbildungen der Optik. Leipz. Ber. **48**, 1896, 79-130.

Im engsten Anschluss an die im Vorjahr angezeigte Abhandlung von Bruns (F. d. M. **26**, 977, 1895) entwickelt die vorliegende Arbeit diejenigen besonderen Abbildungen, welche auftreten, wenn jeder Strahl des Objectraumes in einen ihm unendlich benachbarten Strahl des Bildraumes übergeführt wird. Der mathematische Vorteil dieser Beschränkung auf infinitesimale Berührungstransformationen liegt auf der Hand; man benutzt gewissermassen nur das erste Glied einer Reihenentwickelung, und die Zusammensetzung zweier Eikonale vereinfacht sich zur blossen Addition. Dagegen ist hervorzuheben, dass die blosse Annahme der Möglichkeit solcher infinitesimalen Transformation gewisse Specialisirungen des optischen Systems notwendig macht, derart dass entweder alle Brechungsindices bis auf kleine Grössen erster Ordnung einander gleich sein müssen, oder dass die brechenden Flächen unendlich nahe rücken, wobei noch das erste Medium gleich dem letzten sein muss. Es ist also selbstverständlich, dass die Resultate des speciellen Falles sich im allgemeinen nicht auf endliche Brechungen übertragen lassen. Verf. stellt die charakteristische Function für jede der beiden Eventualitäten her, betrachtet aber als optisch erzeugbar nur die erste, und findet dabei als erstes Resultat, dass durchaus nicht jede Abbildung, die dem Malus'schen Satze entspricht, optisch realisirbar ist (cf. Bruns). Zweitens aber zeigt er, dass das ideale rein dioptrische Fernrohrobjectiv unmöglich ist, d. h. es giebt kein System, welches jeden endlichen, parallel einfallenden Büschel in einen centralen Büschel überführt. In einem Anhange tritt Verf. auch dem Falle der Doppelbrechung in ein- und zweiaxigen Krystallen näher, um auch hier aus den Abbildungsgleichungen die Unmöglichkeit teleskopischer Aplanasie zu erkennen. R. M.

A. Cornu. **Sur la caustique d'un arc de courbe réfléchissant les rayons émis par un point lumineux.** C. R. **122,** 1455-1461.

Die von einem Punkte P ausgehenden und an einem unendlich kleinen Bogenstück reflectirten Strahlen haben zur Kaustik G einen Kegelschnitt, der durch P geht und in einer zum Bogenelement normalen Ebene liegt; diese Kaustik entspricht aber auch einem beliebigen endlichen Bogenstück eines zweiten, zum ersten normal liegenden Kegelschnitts. Diese beiden sind geometrisch und optisch derart conjugirt reciprok, dass die Brennpunkte des einen die Scheitel des andern sind, und dass, wenn der eine den Punkt P enthält, er die Kaustik des andern ist, und umgekehrt. Die zugehörige Wellenfläche ist ein Teil der Dupin'schen Cyklide, von welcher also auf diese Weise eine neue Erzeugungsart gewonnen ist. Nach den geometrischen Beweisen dieser Resultate teilt der Verf. auch die von ihm vorgenommenen experimentellen Bestätigungen mit. R. M.

G. Chrystal. **A summary of the theory of the refraction of thin approximate axial pencils through a series of media bounded by coaxial spherical surfaces, with application to a photographic triplet etc.** Edinb. M. S. Proc. **14,** 2-25.

Der Titel der Abhandlung giebt eine hinreichende Bezeichnung ihres Inhaltes; doch ist auch noch eine Uebersicht von Entwickelungen zugefügt, die in Lehrbüchern nur selten beigegeben werden. Von besonderem Interesse sind die Anwendungen auf photographische Linsen.

Gbs. (Lp.)

W. T. A. Emtage. **On the relation between the brightness of an object and that of its image.** Phil. Mag. (5) **41,** 504-505.

Wenn ein Object in einem Medium vom Brechungsindex μ liegt und ein Bild durch Strahlen erzeugt, die durch eine beliebige Anzahl von Oberflächen und schliesslich in ein Medium vom Index μ' gebrochen werden, so befriedigen die Helligkeiten (luminosities) des Objectes I und des Bildes I' die Proportion $I:I' = \mu^2:\mu'^2$, falls kein Licht durch Spiegelung an den Oberflächen oder durch Absorption in den Medien verloren gegangen ist. Statt des üblichen indirecten Beweises wird die Proportion in diesem Artikel durch einen directen Beweis dargethan. Es sei s eine kleine Oberfläche eines Objectes in einem Medium vom Brechungsindex μ_1, die einen Strahlenbündel durch die Grenzfläche RT in ein Medium vom Brechungsindex μ_2 aussendet. Sind i, r der Einfalls- und der Brechungswinkel bei R, so sind die Winkelöffnungen der körperlichen Winkel in der Brechungsebene di, dr, und ihre Winkelöffnungen senkrecht zu dieser Ebene sind proportional zu $\sin i$, $\sin r$. Wenn die körperlichen Winkel ω_1, ω_2 sind, so folgt aus $\mu_1 \sin i = \mu_2 \sin r$ und also $\mu_1 \cos i di = \mu_2 \cos r dr$, dass $\omega_1/\omega_2 = di.\sin i/dr.\sin r = \mu_2^2 \cos r/\mu_1^2 \cos i$. Ist nun I_1 die Helligkeit von s und I_2 die der Oberfläche RT, gesehen in dem Medium μ_2 vermöge des ursprünglich

von s kommenden Lichtes, dann sind die Lichtmengen, welche durch die Oberfläche RT vom Inhalte s_1 empfangen und ausgesandt werden: $I_1 s_1 \omega_1 \cos i$ und $I_2 s_1 \omega_2 \cos r$; aber diese Mengen sind einander gleich, mithin $I_1 : I_2 = \mu_1^2 : \mu_2^2$. Dieses Ergebnis führt sofort zu dem verlangten Schlusse. Gbs. (Lp.)

J. Larmor. On the absolute minimum of optical deviation by a prism. Cambr. Proc. **9**, 108-110.

A. Anderson. On the maximum deviation of a ray of light by a prism. Ibid. 195-197.

Unter allen Lichtstrahlen, welche auf ein Prisma senkrecht zur brechenden Kante einfallen, erleidet bekanntlich derjenige das Minimum der Ablenkung, welcher das Prisma symmetrisch durchsetzt. Verf. der ersten Note zeigt, dass dasselbe auch für die unter gleichem Winkel schief einfallenden Strahlen gilt, und dass das Minimum der Ablenkung bei senkrechtem Einfall kleiner ist als das Minimum der Ablenkung bei irgendwie schiefem Einfall. Jenes wird daher ein absolutes Minimum genannt. Verf. der zweiten Note untersucht ebenso das Maximum der Ablenkung und fragt nach dem absoluten Maximum, indem er die Werte des Maximums bei verschiedenen Einfallsschiefen vergleicht. A. S.

P. Silow. Vereinfachung der Huygens'schen Construction für die Reflexion und Brechung der Lichtstrahlen. Poske Z. **9**, 280-281.

E. H. Barton. Graphical methods for finding the focal lengths of mirrors and lenses. Phil. Mag. (5) **41**, 59-62.

O. J. Lodge. Note on elementary teaching concerning focal lengths. Phil. Mag. (5) **41**, 152.

E. H. Barton. Note on elementary teaching concerning focal lengths. Phil. Mag. (5) **41**, 383-384.

Man setze die Brennweite einer (dünnen) Linse oder eines Spiegels gleich f, die Gegenstandweite gleich u, die Bildweite gleich v, wobei alle Entfernungen von der Linse (oder dem Spiegel) aus gerechnet werden, und zwar positiv in der Richtung entgegengesetzt derjenigen des einfallenden Strahles, negativ in derselben Richtung wie jener; dann gilt die Formel $1/v \pm 1/u = 1/f$ mit dem Zeichen $+$ für den Spiegel, $-$ für Linsen. Wenn zwei rechtwinklige Axen angenommen werden und eine beliebige Gerade durch den Punkt (f, f) gezogen wird, so stellen die von der Geraden auf den Axen abgeschnittenen Strecken zugehörige Werte von u und v dar für einen Hohlspiegel von der Brennweite f. (Dieser Fall ist nach einer Anmerkung des Verf. schon bei Aldis „Geometrical optics" gegeben.) Nimmt man statt des Punktes (f, f) die Punkte $(-f, -f)$, $(-f, f)$, $(f, -f)$, so können alle übrigen Fälle für Spiegel und Linsen ähnlich dargestellt werden. Der Wert

dieser Methode zur Darstellung der Strecken u, v wird als besonders nützlich bei ihrer Anwendung zur Bestimmung von f für einen gegebenen Spiegel oder eine gegebene Linse nachgewiesen, wenn die optische Bank benutzbar ist, um mit ihr zugehörige Werte von u und v zu ermitteln. Die beiden Noten beziehen sich auf den Gebrauch der Zeichen + und — für die Strecken u und v. Gbs. (Lp.)

E. H. Barton. Distancias focales de espejos y lentes. Archivo de Mat. **1**, 35-37.

Uebersetzt aus Philos. Mag., Januarheft 1896, 59.

R. S. Cole. Graphical methods for lenses. Phil. Mag. (5) **41**, 216-217.

Sind AB und CD zwei parallele Strecken, die an BD endigen, so ziehe man durch E, den Schnittpunkt von AD und BC, die Gerade EF parallel zu AB, dann ist $1/EF = 1/AB + 1/CD$. Gbs. (Lp.)

R. S. Cole. Métodos gráficos relativos á las lentes. Archivo de Mat. **1**, 72-74.

Uebersetzt aus Philos. Mag., Märzheft 1896, 216.

Lord Rayleigh. On the theory of optical images, with special reference to the microscope. Phil. Mag. (5) **42**, 167-195.

G. Johnstone Stoney. Microscopic vision. Phil. Mag. (5) **42**, 332-349, 423-442, 499-528.

In der ersten Abhandlung wird der Gegenstand aus dem Gesichtspunkte erörtert, dass das typische Object ein Punkt ist und nicht, wie in Abbe's Theorie, ein Gitter. Die Beziehungen der beiden Behandlungswege werden ziemlich ausführlich in dem einleitenden Abschnitte der Arbeit besprochen; als Vorbereitung zu der Berechnung der Bilder nach Fresnel's Principien wird ein einfacher Beweis des Lagrange'schen Satzes über die Beziehung zwischen Gegenstand und Bild gegeben. Der Fall einer rechtwinkligen Oeffnung wird zuerst betrachtet, dann der einer kreisförmigen Oeffnung, und die gezogenen Folgerungen werden mit den Ergebnissen der Abbe'schen Theorie verglichen.

Die Folge der Stoney'schen Artikel bildet eine grössere Abhandlung und enthält viel interessanten Stoff in kritisirender Form. Besonders giebt die Arbeit einen recht vollständigen Abriss der Abbe'schen Methode und zieht mannigfache Folgerungen. Der Eröffnungssatz ist ein Analogon zu dem Fourier'schen Theorem: Wie sehr auch der Inhalt des Objectfeldes zusammengesetzt ist (d. h. die Gesamtheit des Objects und seiner Umgebungen, deren Bild durch das Teleskop oder das Mikroskop oder im Auge des Beobachters erzeugt wird), und mag es auch, oder einzelne seiner Teile, selbstleuchtend oder in irgend welcher ganz besonderen Art beleuchtet sein, das von ihm ausgesandte Licht kann in

Undulationen aufgelöst werden, deren jede aus gleichmässigen ebenen Wellen besteht, unter der Voraussetzung, dass jeder Punkt des Objectes stetig dasselbe Licht ausschickt, eine Hypothese, von der später erwiesen wird, dass sie hinreicht. Dieses führt zu dem zweiten Satze, dass das Normalbild angesehen werden kann als das Ergebnis der Ueberlagerung und der gegenseitigen Interferenz gleichmässiger Lichtliniensysteme aus Parallelen in gleichen Abständen, die sich über das ganze Gesichtsfeld erstrecken; jedes System wird nach der Umkehrung durch die Convergenz zweier oder mehrerer Undulationen gleichmässiger ebener Wellen erzeugt, in welche das von dem Objecte ausgesandte Licht aufgelöst werden kann. Der dritte Satz stellt die am Bilde hervorgebrachte Wirkung fest, wenn nur ein Teil des von dem Objecte ausgeschickten Lichtes zur Erzeugung des Bildes verwendet wird. Der fünfte Satz sagt aus, dass das Normalbild das Erzeugnis ist einerseits der Züge am Objecte, andererseits des Zustandes des Lichtes, durch welches das Object beleuchtet ist. Es kann verbessert werden durch Erhöhung des Grades, in welchem der erste dieser Factoren, durch Abschwächung des Grades, in welchem der zweite zur Erzeugung, Abwandelung oder Verwischung von Einzelheiten im Bilde beiträgt. Ausser diesen allgemeinen Sätzen ist es nicht leicht, Auszüge aus der Abhandlung zu machen, doch ist dieselbe angefüllt von gedankenreichen Betrachtungen und hebt die Vorteile der Abbe'schen Methode warm hervor. Gbs. (Lp.)

P. Lugol. Étude géométrique des aberrations dans les miroirs sphériques. Journ. de phys. (3) **5**, 163-165.

Die Ermittelung der Abweichungen für die Bilder in sphärischen Hohlspiegeln wird auf eine elementare geometrische Betrachtung zurückgeführt. Lp.

---

v. Knebel. Ueber Kriegsdistanzmesser. Mitt. üb. Art. u. Gen. **27**, 340-352.

Der Verf. erörtert die an die Kriegsdistanzmesser zu stellenden Forderungen und entscheidet sich für solche mit constanter Basis. Durch Berücksichtigung der für Infanterie und Artillerie zulässigen Fehlergrenzen kommt er ferner zu dem Ergebnisse, dass jede der beiden Waffen einen besonderen Distanzmesser braucht. Die mitgeteilten Rechnungen beziehen sich auf eine verticale Standlinie, an deren Enden zwei auf festem Stativ ruhende Winkelspiegel angebracht sind. Lp.

M. Brillouin. Viseur stroboscopique. — Horloge à période variable. Journ. de phys. (3) **5**, 394-398.

Beschreibung und Theorie einer stroboskopischen Einrichtung an den Chronometern, die bei Messungen der Schwere benutzt werden. Lp.

C. LADD FRANKLIN. The positions of the retinal images. Nature **53**, 341.

Nicht die Lage der Bilder auf der Retina, sondern die relative Helligkeit der Bilder in den beiden Augen befähigen uns nach der Verfasserin, die Objecte zu localisiren. Lp.

E. T. DIXON. The position of retinal images. Nature **54**, 54.

Der Verf. hat die von Frau Ladd Franklin angezogenen Schön'schen Versuche wiederholt, jedoch mit negativem Erfolge, und bezeichnet einige Punkte der Angaben seiner Vorgängerin für aufklärungsbedürftig. Lp.

CH. HENRY. Lois d'établissement et de persistance de la sensation lumineuse, déduites de recherches nouvelles sur les disques rotatifs. C. R. **123**, 604-607.

Lässt man eine aus gleich grossen schwarzen und weissen Sectoren bestehende Farbenscheibe rotiren, so sieht man eine graue Mischfarbe, die aber mit der Geschwindigkeit der Rotation und der Helligkeit der Beleuchtung ihre Färbung ändert. Für diese Färbung stellt der Verf. auf Grund von Ueberlegungen sehr hypothetischer Natur eine Formel auf, die discutirt wird. Wn.

E. GÖTTING. Ueber den scheinbaren Ort eines unter Wasser befindlichen leuchtenden Punktes. Poske Z. **9**, 235-237. Lp.

Kapitel 3.

Elektricität und Magnetismus.

E. NEUMANN. Beiträge zur Elektrostatik, insbesondere über einen, von drei Kugelflächen begrenzten Conductor. Leipz. Ber. **48**, 1896 634-648.

Der Verf. giebt die Resultate einer Arbeit, die er an anderer Stelle zu veröffentlichen gedenkt. Es wird zunächst angedeutet, dass das zweite elektrostatische Fundamentalproblem für zwei Kugeln (bei dem die Kugeln zur Erde abgeleitet sind und ein äusserer Massenpunkt inducirend wirkt) sich nach der Methode der reciproken Radien unter gleichzeitiger Anwendung der dipolaren Coordinaten leicht auf das erste (das Poisson'sche) zurückführen lässt, für das schon C. Neumann eine besonders einfache Lösung mit Hülfe der dipolaren Coordinaten gegeben hat. In entsprechender Weise werden dann die Lösungen der beiden Fundamentalprobleme für einen Conductor K gefunden, dessen Oberfläche aus drei Kugelflächen gebildet wird, von denen eine die beiden anderen orthogonal schneidet. Mit Hülfe der Methode der reciproken Radien wird sodann der Satz gewonnen: „Es sei gegeben irgend ein System von

Conductoren, deren Oberflächen die Eigenschaft haben mögen, durch Abbildung an einer beliebigen Kugelfläche in sich selbst transformirt zu werden. Auf dieses System wirke ein elektrischer Massenpunkt m, der sich im Centrum jener Abbildungskugel befinde. Alsdann wird bei gewissen Ladungen der Conductoren auf dieser Kugelfläche der nämliche constante Potentialwert herrschen, wie auf den sämtlichen Conductoren." Hiervon wird eine Anwendung auf den Kugelsector gemacht. Gt.

H. Pellat. Électrostatique non fondée sur les lois de Coulomb. Forces agissant sur les diélectriques non électrisées. Journ. de phys. (3) **5**, 244-256, 525-540.

Auszug aus der Abhandlung in Ann. de chim. et phys. (7) **5**, über welche in F. d. M. **26**, 997, 1895 kurz berichtet ist. Lp.

Gouy. Sur le rôle des milieux diélectriques en électrostatique. Journ. de phys. (3) **5**, 154-159.

In dem Ausdrucke $f=\varepsilon m m'/r^2$ für die Wirkung zweier elektrischen Teilchen m und m' auf einander hängt die Constante ε von dem Mittel ab, in dem die elektrostatische Kraft sich ausbreitet, ist also in Wahrheit keine Constante. Hierbei treten aber noch andere Kräfte auf; trägt man denselben Rechnung, so ist das Experiment in Uebereinstimmung mit der Hypothese, dass f von dem umgebenden Mittel unabhängig ist, wie die Gründer der Elektrostatik annahmen. Dies wird näher durchgeführt, bis das Endziel erreicht ist: „Die klassische Theorie stimmt mit dem Experimente überein. Die elektrostatische Kraft ist überall dieselbe; bei den flüssigen dielektrischen Körpern gesellt sich zu ihr ein hydrostatischer Druck, der eine indirecte Wirkung ist und seinerseits bei den scheinbaren Kräften hervortritt." Lp.

H. M. Macdonald. The electrical distribution induced on an infinite plane disk with a circular hole in it. Lond. M. S. Proc. **27**, 68.

Das Potential der inducirten Ladung ist gegeben durch:

$$V=-\Sigma\Sigma A_{n\mu} W_n \cos(n\varphi+a_\mu), \text{ wo}$$

$$W_n=\mu^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty e^{-xz} x^{\frac{1}{2}} J_n(xr)\,dx\int_a^\infty J_{n+\frac{1}{2}}(xr')\,J_{n+\frac{1}{2}}(\mu r')\,r'dr',$$

welche Function für $z=0$, $r>a$ gleich $J_n(\mu r)$ ist, während $\partial W_n/\partial z=0$ ist für $r<a$. Hae.

W. Nernst. Ueber Berührungselektricität. Wiedemann Ann. **58**, Beilage, I-XXVI.

Referat für einen auf der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Frankfurt a. M. 1896 gehaltenen Vortrag, der einen littera-

rischen Ueberblick über das ganze Gebiet enthält. Die Erforschung der Potentialdifferenz wird nach drei verschiedenen Gesichtspunkten dargestellt, und zwar A. die Messung der Berührungselektricität; B. ihre theoretische Erklärung und die Berechnung von Contactpotentialen, insbesondere eine Klarlegung der Natur der Kräfte, welche die Scheidung der Elektricitäten bedingen, endlich C. Anwendung der osmotischen Theorie auf die Elektrocapillarität. Die Anmerkungen enthalten unter 27 Nummern eine reiche Litteraturübersicht. Hae.

Ch. Maurain. Les courants polyphasés et les champs tournants. Journ. de phys. (3) **5**, 204-216.

Der Zweck dieses Aufsatzes besteht in einer möglichst kurzen Darlegung der Erzeugungsarten, der Haupteigenschaften und der praktischen Anwendungen der mehrphasigen Ströme. Lp.

R. Malagoli. Sugli spostamenti di fase che produce un voltametro percorso da correnti alternanti. Nuovo Cimento (4) **4**, 296-310.

Der Verf. knüpft an eine experimentelle Arbeit von Peukert über die Elektrolyse durch Wechselstrom an und setzt die Discussion, die sich an dieselbe anschloss, zuerst auseinander. Sie hat ihn dazu angeregt, auf theoretischem Wege zu erforschen, welches die geeignetsten Bedingungen sind, unter denen eine experimentell nachweisbare Phasenverschiebung eintritt, sowohl für den Fall, dass keine sichtbare Abscheidung der Producte der Elektrolyse stattfindet, als auch für den entgegengesetzten Fall. Für schwache polarisirende Kräfte leitet er aus seinen Formeln die allgemein geltenden Gesetze ab: I. Die Polarisation des Voltameters, die orthogonal zur Intensität ist, eilt der ursprünglichen elektromotorischen Kraft voraus und nimmt um einen Betrag zu, der mit dem Sinken der Capacität des Voltameters, mit sinkender Wechselzahl und sinkendem Widerstande wächst. II. Mit wachsender Phasenverschiebung wachsen auch die Maxima der Polarisation, während diejenigen der Intensität abnehmen. III. Die thatsächliche Potentialdifferenz an den Elektroden bleibt zurück in Bezug auf die ursprüngliche elektromotorische Kraft, und zwar in demselben Masse wie die Intensität des Stromes; das Zurückbleiben in Bezug auf die letztere verringert sich aber mit dem Wachsen des Widerstandes des Voltameters.

Aber auch im Falle einer sichtbaren Abscheidung der Ionen muss eine Phasenverschiebung zwischen Intensität und Potentialdifferenz eintreten, wie es die Theorie verlangt. Wenn Peukert zu gegenteiligen Resultaten gelangt ist, so liegt dies ohne Zweifel daran, dass derselbe mit zu hohen Intensitäten und zu grossem Widerstande am Voltameter arbeitete, wodurch die Einwirkung der galvanischen Polarisation auf die Potentialdifferenz an den Elektroden unmerklich wurde. Hae.

N. D. PILTSCHIKOW. Einige Anwendungen des thermodynamischen Potentials auf die elektrochemische Mechanik. Odessa, 1896, Sep. 158 S. (Russisch.)

Bei jedem physikalisch-chemischen Vorgange begegnen wir sechs Kraftgruppen zwischen: I. ponderabler Materie — ponderabler Materie; II. Elektricität — Elektricität; III. Aether — Aether; IV. Aether — ponderabler Materie; V. Elektricität — ponderabler Materie (Kräfte von Helmholtz); VI. Elektricität — Aether. Solche Vorgänge sind auf vier Principien begründet: 1) Erhaltung der Energie, 2) Erhaltung der Materie, 3) Erhaltung der Elektricität, 4) Erhaltung des Aethers; dabei kommt die Arbeit der Kräfte III, IV, VI nicht in Betracht, während die Kräfte der anderen Gruppen bekanntlich in der Form $m_1 m_2 f(r)$ darstellbar sind, d. h. es sind solche Systeme conservativ.

Für ein elektrochemisches System, dessen Teile in Ruhe, auf constanter Temperatur und unter constantem normalen Druck sind, setzt der Verf. das thermodynamische Potential φ aus drei Teilen zusammen: $\varphi = W_{II} + W_V + F$, worin F das gewöhnliche thermodynamische Potential, W_{II} das elektrostatische Potential der Ladungen und W_V das Potential der Helmholtz'schen Kräfte bedeutet. Dann gilt für reversible Modificationen $d\varphi = 0$, für irreversible $d\varphi < 0$. Die weitere Untersuchung der Werte dieser Potentiale führt den Verf. zu folgenden Schlüssen: 1) Auf der Berührungsfläche zweier metallisch leitenden Körper giebt es keine Elektricität; auf den beiden Seiten der Berührungsfläche sind gleiche und entgegengesetzte elektrische Schichten, d. h. eine elektrische Doppelschicht vorhanden. 2) Auf der Berührungsfläche eines metallisch leitenden Körpers und eines Isolators giebt es eine „natürliche" elektrische Schicht. 3) Ebenso giebt es eine elektrische Grenzschicht bei der Berührung eines Elektrolyten mit einem Isolator, resp. 4) mit einem metallisch leitenden Körper.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen geht der Verf. in dem Kapitel II zur Untersuchung eines Elektrolyten (A_2) über, welcher teils mit einem Metall (A_1), teils mit einem Isolator (A_3) in Berührung steht, und kommt auf S. 55 zu folgendem Grundgesetz: „Die Potentialdifferenz bei der Berührung Metall — Elektrolyt ist gleich dem arithmetischen Mittel der Aenderungen des thermodynamischen Potentials, die bei der Entladung der elektrochemischen Anioneinheit, resp. der Ladung einer Kationeinheit vorkommen. Dabei ist eine gewisse Auswahl der Einheiten vorausgesetzt, und unter einer elektrochemischen Anion- resp. Kationeinheit ist diejenige Menge dieser Stoffe zu verstehen, welche mit der Elektricitätseinheit im Elektrolyten verbunden ist."

Dieses Theorem sieht der Verf. als dem Theorem von Gibbs-Helmholtz vollkommen aequivalent an. Als weiteres Ergebnis dieses Kapitels ist noch Folgendes zu bemerken: Die Potentialdifferenz zwischen Metall — Elektrolyt kann nie verschwinden, also auch nicht in dem Falle, wo man ein Metall in Berührung mit seinem Salz hat: d. h. das Gesetz von Pellat (Ann. de Chimie et de Physique (6), **19**, 556) ist un-

richtig. Die Unpolarisirbarkeit der Metalle bei der Berührung mit ihren Salzen (das Gesetz von Lippmann) ist als ein Grenzgesetz zu betrachten.

In dem dritten Kapitel werden Vorgänge in den galvanischen Elementen untersucht; das vierte Kapitel ist der Frage über den Anfang der sichtbaren Elektrolyse gewidmet.

Wegen der näheren Berechnungen, die ziemlich complicirt sind, müssen wir auf das Original verweisen. Ghr.

F. Kohlrausch. Ueber elektrolytische Verschiebungen in Lösungen und Lösungsgemischen. Berl. Ber. 1896, 1233-1241.

Es werden die Differentialgleichungen für die Aenderungen der Concentrationen $\alpha, \beta, \ldots, \varrho, \ldots$ nach der Zeit t (vgl. Planck, Wied. Ann. 1890) aufgestellt und unter gewissen Annahmen weiter untersucht. Im Falle eines einzigen Elektrolyts von cylindrischer Gestalt, dessen Concentrationen sich nur in der Richtung der Axe x ändern, die zugleich die des Stroms ist, wird das Integral abgeleitet und gedeutet. Bei verdünnten Lösungen sind die Beweglichkeiten $a, b, \ldots, r, \ldots$ als Constanten anzusehen. Für zwei Elektrolyte mit einem gemeinschaftlichen Ion in verdünnter cylinderförmiger Lösung bei constanter Stromdichte i gelten daher die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{\mathfrak{p}}{(\mathfrak{a}\alpha+\mathfrak{b}\beta)^2}\left(\alpha\frac{\partial\beta}{\partial x} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} = \frac{\mathfrak{q}}{(\mathfrak{a}\alpha+\mathfrak{b}\beta)^2}\left(\beta\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \alpha\frac{\partial\beta}{\partial x}\right),$$

wo $a+r = \mathfrak{a}$, $b+r = \mathfrak{b}$, $ia(b+r) = \mathfrak{p}$, $ib(a+r) = \mathfrak{q}$ gesetzt ist. Diese Differentialgleichungen werden integrirt; die dabei auftretenden willkürlichen Functionen werden durch den zur Zeit $t = 0$ geltenden Zustand bestimmt. Der Fall $a = b$ wird besonders behandelt. Gt.

J. G. MacGregor. On the calculation of the conductivity of mixtures of electrolytes. Nova Scotian Inst. of Science Trans. **9**, 101-119; Phil. Magaz. (5) **41**, 276-287.

Sollen zwei Elektrolyte mit gemeinsamem Ion, die bei der Mischung keine Volumenänderung erleiden, „isohydrisch“ sein, so müssen, wie Arrhenius (in der Zeitschr. f. phys. Chem. 1888) durch Aufstellung der Gleichungen für das Gleichgewicht der Elektrolyte vor und nach der Mischung gezeigt hat, die Ionen für beide Elektrolyte gleiche Concentrationen besitzen. Arrhenius' Methode wird von dem Verf. angewandt und verallgemeinert, um das Leitvermögen einer Mischung von Elektrolyten jener Art auch dann zu berechnen, wenn bei der Mischung eine Aenderung des Volumens eintritt. Die Behandlung der erhaltenen Gleichungen in dem besonderen Falle geschieht durch eine graphische Methode. Die berechneten Werte für das Leitvermögen von Mischungen



aus Chlorcalcium und Chlornatrium zeigen für verdünnte Lösungen gute Uebereinstimmung mit den experimentellen Daten von Bender (Wied. Ann. 1884). Gt.

P. Joubin. **Sur les dimensions des grandeurs électriques et magnétiques.** Journ. de phys. (3) **5**, 398-401.

Wie schon Lodge in seinen „Modern views on electricity" ausgeführt hat, werden die Dimensionen der elektrischen und magnetischen Grössen, ähnlich wie die der mechanischen, durch die Grundeinheiten mit ganzzahligen Exponenten ausgedrückt, wenn man das Inductionsvermögen einer rein elektrischen oder rein magnetischen Grösse bezw. $K = M^{-1}LT^2$ und $K' = ML^{-3}$ setzt. Dies wird, jedoch ohne Bezugnahme auf Lodge, des weiteren auseinandergesetzt unter gleichzeitiger Hervorhebung der hiermit verbundenen Vorteile. Lp.

C. Limb. **Mesure directe des forces électromotrices en unités absolues électromagnétiques.** Ann. de chim. et phys. (7) **8**, 145-240; Journ. de phys. (3) **5**, 61-70.

Die vom Verf. benutzte Messmethode, welche darin besteht, die unbekannte elektromotorische Kraft mit einer elektromotorischen Inductionskraft in dem Falle zu vergleichen, dass diese letztere sich berechnen lässt, macht an mehreren Stellen längere mathematische Entwickelungen nötig, so unter anderem bei der Theorie des benutzten Magnetometers. „Es ist unerlässlich für das Verständnis der gebrauchten Handhabung, die Gauss'sche Theorie wieder aufzunehmen, indem man sie nicht mehr auf einen geradlinigen Magneten anwendet, sondern auf einen Magneten, dessen transversale Abmessungen von derselben Ordnung sind, wie seine Länge." An einer anderen Stelle verbessert der Verf. die Schwingungsmethode, welche zur Messung der Torsionsconstante eines Drahtes führt; er zeigt, dass es genügt, als schwingenden Cylinder einen solchen zu wählen, dessen Höhe H zum Basisdurchmesser D der Proportion genügt: $H : D = \sqrt{3} : 2$, um den Fehler zu eliminiren, der aus dem Mangel an Centrirung des Drahtes entsteht, weil in diesem Falle der Cylinder hinsichtlich seines Trägheitsmomentes die Symmetrie einer Kugel besitzt. Lp.

Böklen. **Graphische Darstellung des Ohm'schen Gesetzes.** Hoffmann Z. **27**, 172-178.

Bezeichnet man die Stromstärke eines Elementes mit x, den inneren Widerstand mit y, den äusseren mit k, die elektromotorische Kraft mit z, so drückt die Gleichung $x(y+k) = z$ das Ohm'sche Gesetz aus, das also durch ein hyperbolisches Paraboloid in den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z graphisch dargestellt werden kann, wie des näheren durchgeführt wird. Lp.

A. Wassmuth. Ueber lineare Stromverzweigungen. Monatsh. f. Math. 7, 49-68.

Es wird zunächst an die von Kirchhoff gegebenen Regeln erinnert, welche den Gebrauch der von ihm aufgestellten Sätze über die Knotenpunkte und Continua erleichtern. Im zweiten Teil werden die Maxwell'schen Normalgleichungen dadurch abgeleitet, dass die Summe der Stromarbeiten in allen von einem Punkte ausgehenden Zweigen zu einem Minimum gemacht wird. Unter Zugrundelegung desselben Gedankens wird ein Näherungsverfahren, ähnlich der Methode der kleinsten Quadrate, erläutert, das die Potentialdifferenzen numerisch zu berechnen gestattet. Hieran knüpfen sich Fragen allgemeiner Natur: in dem „Normalfall", wo die Widerstände sämtlicher Zweige einander gleich sind und nur in einem Zweige eine einzige elektromotorische Kraft auftritt, finden sich in den Leitern drei verschiedene Stromstärken, nämlich der Hauptstrom, die Parallelströme und die verschwindend kleinen Querströme; dies gilt auch, wenn das Netz ein „mittleres" ist, allgemein.

Gt.

Q. Majorana. Azione di un raggio luminoso, periodicamente interrotto, sul selenio. Rom. Acc. L. Rend. (5) 5_1, 45-52.

Die elektrische Leitungsfähigkeit des Selens ändert sich mit der Stärke der Beleuchtung. Lässt man daher einen periodisch unterbrochenen Lichtstrahl auf Selen fallen, so wächst der elektrische Widerstand r mit der Zeit t der Unterbrechung. Der Verf. hat die empirisch gewonnenen Beziehungen zwischen r und t graphisch dargestellt und discutirt die sich ergebende Curve, sowie andere daraus abgeleitete Curven.

Wn.

A. Heydweiler. Ueber die Verwendung des Telephons zur Bestimmung von Dielektricitätsconstanten leitender Körper. Wiedemann Ann. 57, 694-699.

Es wird gezeigt, dass bei der Verwendung des Telephons und Inductoriums in der Wheatstone'schen Brücke das Leitvermögen des Dielektricums für eine vorgeschriebene Genauigkeit eine gewisse Grösse nicht überschreiten darf.

Gt.

P. Drude. Ueber den Begriff des dielektrischen Widerstandes. Wiedemann Ann. 57, 223-231.

Dem Begriff des magnetischen Widerstandes entsprechend, wird für elektrische Felder der des dielektrischen Widerstandes einer Kraft nebst dem Analogon zum Ohm'schen Gesetz aufgestellt. Für ein System von Conductoren werden die Capacitäten und die Inductionscoefficienten auf einfache Weise durch ihn ausgedrückt und eine Reihe von Gesetzen aus den erhaltenen Formeln abgelesen. Eine kurze Energiebetrachtung führt auf die Darstellung der ponderomotorischen Kräfte. Zur Erleichterung der Berechnung elektrischer Felder ist der eingeführte Begriff nicht

geeignet. Ein Teil des Inhalts ist von dem Verf. schon in seiner „Physik des Aethers" gegeben. Gt.

F. Pockels. Ueber die nach der elektromagnetischen Lichttheorie durch eine Abhängigkeit der Dielektricitätsconstante von der Feldstärke bedingte optische Wirkung eines elektrischen Feldes. Gött. Nachr. 1896, 102-113.

Dass die Magnetisirungsconstante eine Function der magnetischen Feldstärke ist, ist lange bekannt; analoge Untersuchungen über die Dielektricitätsconstante haben bisher, soweit sie überhaupt vorliegen, zu keinem sicheren Resultate geführt. Verf. entwickelt diese Abhängigkeit mathematisch sowohl für krystallinische Medien ohne Centrum der Symmetrie, wo dieselbe hypothetisch als lineare Function der Feldstärke angenommen wird, als auch für Krystalle, die ein Symmetriecentrum besitzen. Leider weichen die theoretischen Ergebnisse ganz erheblich von den experimentellen ab, wie solche z. B. vom Quarz, bez. vom Schwefelkohlenstoff bekannt sind; immerhin werden wichtige Fingerzeige für fernere Experimentaluntersuchungen gegeben. Hae.

E. Wiechert. Ueber die Grundlagen der Elektrodynamik. Wiedemann Ann. **59**, 283-323.

E. Wiechert. Maxwell's Theorie der Elektrodynamik, erweitert durch Berücksichtigung der molecularen Constitution der Materie. Naturwiss. Rundschau **11**, 597-600.

Die erste Abhandlung giebt die Grundgleichungen der Elektrodynamik in symbolischer Form. Es handelt § 1 über Vorgänge im freien Aether; er sucht im besondern die Hypothese, dass die elektrische Kraft ein „Richtungsvector", hingegen die magnetische Kraft ein „Drehungsvector" oder „Rotor" sei, glaubhaft zu machen. § 2 giebt die Gleichungen für die elektromagnetische Erregung des Aethers in der Umgebung der Materie, § 3 die für die Erregung des Feldes durch die Materie; § 4 behandelt die Einwirkung des elektromagnetischen Feldes auf die Materie, § 5 die elektromagnetische Induction; § 6 giebt erläuternde Schlussbemerkungen und schliesst sich in gewissem Sinne an die zweite Abhandlung an, die in populärer Darstellung die Ideen des Verf. wiedergiebt, für welche die Röntgen'schen Strahlen als beweisender Factor der Richtigkeit herangezogen werden. Hae.

C. Neumann. Ueber die elektrodynamischen Elementarwirkungen. Leipz. Ber. **48**, 1896, 221-290.

Auf Grund des elektromotorischen und des ponderomotorischen Integralgesetzes von F. Neumann, des Helmholtz'schen Princips des vollständigen Differentials und der von ihm selbst eingeführten Hypothesen „Delta" und „Epsilon" gelangt der Verf. (unter teilweiser Wiederholung seiner früheren Publicationen) für zwei starre bewegliche Körper

zum Ampère'schen ponderomotorischen Elementargesetz und zu dem von ihm im Jahre 1872 veröffentlichten elektromotorischen Elementargesetz. Die Dilatationshypothese, die von Helmholtz für extensible lineare Ringe aufgestellt wurde, aber seinen experimentellen Untersuchungen widersprach, legt nun der Verf. in einer hierdurch gebotenen weniger allgemeinen Fassung zu Grunde und findet auf dem von Helmholtz eingeschlagenen Wege jene beiden Gesetze auch für zwei in beliebigen Dilatationen und Contractionen begriffene Körper bestätigt. Eine allgemeinere Betrachtung über die beiden F. Neumann'schen Integralgesetze giebt einen Ausblick auf eine andere Gestalt der Elementargesetze. Ferner liefert ein neuer Satz über das Selbstpotential einen einfachen Beweis für einen von Helmholtz 1870 aufgestellten Satz. Wenn man in den anfangs angeführten Grundlagen für die Elementargesetze auf die „Hypothese Epsilon" verzichten will, so treten in den Ausdrücken für diese Gesetze zwei unbekannte Constanten auf, von denen für einen starren Conductor die eine verschwindet, während die andere auf die in der Helmholtz'schen Formel vorkommende Constante k zurückgeführt werden kann. Damit ergiebt sich auch die Bedingung für das stabile Gleichgewicht. Gt.

P. Duhem. Sur la propagation des actions électrodynamiques. Toulouse Ann. 10 B, 1-87.

Der Verf. stellt sich zur Aufgabe, die neueren Entdeckungen auf dem Gebiete der Elektrodynamik, insbesondere die von Maxwell und Helmholtz, mit einander in Einklang zu bringen. Es erscheint ihm bedenklich, so wie es Heaviside, Hertz und Cohn gethan haben, für die Elektrodynamik die Maxwell'schen Gleichungen als Hypothese zu Grunde zu legen, da sie nur für „Maxwell'sche Ströme" gültig sind und gewisse Erscheinungen unter dieser Einschränkung nicht erklärt werden können. Weitere Ausstellungen werden an Maxwell's Ausdrücken für die innere Energie, sowie an Poynting's Theorem gemacht. Nach einer Verallgemeinerung von Helmholtz's Theorem der Stabilität stellt der Verf. die Gleichungen für die Verbreitung einer elektrischen Störung in einer allgemeineren Form auf, als die von Maxwell gegebenen Gleichungen haben, die, wie er nachweist, nur gültig sind für ein nicht leitendes Dielektricum oder für einen nicht dielektrischen Leiter. Hierauf werden die Bedingungen an der Grenze zweier Mittel entwickelt und mit den Ergebnissen anderer Autoren (Potier, Hertz und Cohn) verglichen. Im letzten Teil findet der Verf. auf Grund seiner neuen Grenzbedingungen, dass zwar, wenn eine ebene elektromagnetische Welle, die eine transversale, zur Einfallsebene senkrechte elektromotorische Kraft verbreitet, auf die Trennungsebene zweier Dielektrica fällt, eine einzige reflectirte ebene Welle und eine einzige gebrochene ebene Welle entsteht, von denen jede eine transversale, zur Einfallsebene senkrechte elektromotorische Kraft verbreitet, in Uebereinstimmung mit dem entsprechenden Fall in Fresnel's Theorie des polarisirten Lichts; wenn aber die von der einfallenden Welle verbreitete transversale elektromotorische Kraft

in der Einfallsebene liegt, erscheint es ihm nicht mehr möglich, die Grenzbedingungen mit dem Vorhandensein einer einzigen reflectirten und einer einzigen gebrochenen Welle, die jede eine transversale elektromotorische Kraft verbreitet, in Einklang zu bringen. Deshalb glaubt er die elektromagnetische Theorie des Lichts verwerfen zu müssen. — Im Anhang nimmt er an einer seiner früheren Abhandlungen eine Aenderung vor, aus Rücksicht auf die Ergebnisse der Experimente von Blondlot, sowie von Cohn und Zeemann. Gt.

Lord Kelvin. Velocity of propagation of electrostatic force. Nature **53**, 316.

J. W. Gibbs. Velocity of propagation of electrostatic force. Ebenda, 509.

Für ein von Lord Kelvin an der ersten Stelle formulirtes Problem in Bezug auf vier abwechselnd positiv und negativ elektrisch geladene Kugeln, deren Mittelpunkte in einer Geraden liegen, giebt Gibbs an der zweiten Stelle eine Lösung nach der Maxwell'schen Theorie mit Hülfe der Quaternionenrechnung. Lp.

G. F. Searle. On problems in electric convection. Lond. Phil. Trans. **187** A, 675-713; Lond. R. S. Proc. **59**, 343-344 (Abstract).

Die Frage nach dem elektromagnetischen Felde, welches durch bewegte, mit Elektricität geladene Conductoren erzeugt wird, ist von besonderem Interesse, weil man neuerdings die Leitungsströme überhaupt auf solche bewegte Ladungen (Convectionsströme) zurückzuführen neigt. Es zeigt sich auch in der vorliegenden Arbeit, dass Convectionsströme dieselben Eigenschaften haben wie Leitungsströme.

Um die Gleichungen des Feldes zu gewinnen, nimmt Verf. an, dass die Maxwell'schen Gleichungen für ruhende Körper auch in jedem Momente der Bewegung gelten, welche übrigens durchweg als gleichförmige Translation angenommen wird. Daraufhin lässt sich der elektrische und magnetische Kraftvector aus je einem Potential, dem „Convections-Potential", durch geeignete Differentiationen ableiten. Die Differentialgleichung, der z. B. das magnetische Convectionspotential genügt, ist der Laplace'schen analog; es tritt nur, wenn die Translation in Richtung der x-Axe mit der Geschwindigkeit u erfolgt, $(1-u^2/v^2)\,\partial^2 V/\partial x^2$ an die Stelle von $\partial^2 V/\partial x^2$, wo v die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Die Lösungen dieser Gleichung können füglich aus denen der gewöhnlichen Potentialgleichung durch eine Massstabsverkürzung in der Bewegungsrichtung erhalten werden. Dabei bedeutet der Vector $(\partial V/\partial x,\ \partial V/\partial y,\ \partial V/\partial z)$, welchen man durch directe Differentiation aus V erhält, nicht die elektrische oder magnetische Kraft, sondern diejenige mechanische Kraft, welche ein mit dem System sich fortbewegender Einheitspol erfährt. — Eingehende Discussion specieller Fälle. — Verf. macht einen weisen Gebrauch von der Vectoranalysis nach dem Vorbilde Heaviside's,

welche im Gebiet der Maxwell'schen Gleichungen bekanntlich sehr zweckentsprechend ist. A. S.

H. A. Lorentz. Over het theorema van Poynting over de energie in het electromagnetische veld en een paar algemeene stellingen over de voortplanting van het licht. Amsterdam Sitz.-Ber. Akad. **4**, 176-187.

Das Theorem von Poynting über die Energie im elektromagnetischen Felde ergiebt sich als besonderer Fall eines von Volterra (Acta Math. **16**, 189, 1892) herrührenden Satzes. Aus ihnen werden das Gesetz der Wärmeentwicklung in Folge von Hysteresis und ein paar Sätze über die Fortpflanzung des Lichts abgeleitet. Mo.

P. van Mourik. Bijdrage tot de theorie van de vector-potentiaal. Utrecht, 1896, 92 S. (Dissertation).

Es handelt sich um das von Maxwell eingeführte Vectorpotential. Ausdehnung des Begriffs. Beziehungen zum elektromagnetischen Moment. Mo.

E. G. Gallop. The electric and magnetic images of a multiple point in a sphere. Messenger (2) **26**, 39-52.

Clerk Maxwell hat gezeigt, dass ein harmonisches Potential negativen Grades angesehen werden kann als von einem vielfachen Punkte herrührend, der aus der Vereinigung einer Anzahl von unendlich nahen Polen gebildet wird. Wenn eine Kugel vom Potential Null in ein gegebenes Kraftfeld gebracht wird, so kann das Potential der inducirten Elektricität in irgend einem äusseren Punkte angesehen werden als herrührend von einer Anzahl vielfacher Punkte in dem Kugelmittelpunkte. Wenn zwei oder mehr Kugeln in dem Felde sind, so ist es notwendig, die auf einander folgenden Bilder dieser vielfachen Punkte zu finden, um die Verteilung des Potentials vollständig zu bestimmen. Der Verf. bestimmt die elektrischen und magnetischen Bilder solcher vielfachen Punkte in einer Kugel, die er als „zonal, sectorial oder tesseral" klassificirt, je nachdem die von ihnen herrührenden Potentiale zonale, sectoriale oder tesserale Kugelfunctionen enthalten. Glr. (Lp.)

F. Hasenoehrl. Ein mechanisches Polycykel als Analogon der Inductionswirkungen beliebig vieler Kreisströme. Wien. Ber. **105**, 900-906.

An einem im Raume fest gegebenen Punkte O sei eine massenlose, absolut starre Stange OM so befestigt, dass sich letztere um O reibungslos in der Ebene der Zeichnung drehen kann. Am Ende M der Stange befinde sich eine kreisförmige Scheibe s, die sich um M ebenfalls in der Ebene der Zeichnung drehen kann; diese Scheibe besitze eine Masse m, die aber bloss an ihrer Peripherie, und zwar gleichmässig mit

der linearen Dichte σ verteilt ist, so dass $m = 2\pi r\sigma$ ist; das Innere der Scheibe ist masselos. Sei $OM = R$; $PM = r$, wo P ein Punkt auf dem Rande der Scheibe ist; $\angle MOX = \alpha$, wenn OX die X-Axe bezeichnet; endlich $\angle OMP = l$, so sind die rechtwinkligen Coordinaten von P gegeben durch: $x = R\cos\alpha - r\cos(\alpha + l)$, $y = R\sin\alpha - r\sin(\alpha + l)$. Es ergiebt sich für die lebendige Kraft T der ganzen Scheibe:

$$T = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} v^2 r\sigma dl = \tfrac{1}{2} r\sigma \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right\} dl, \text{ d. h.}$$

$$T = \frac{m}{2}\left[R^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{dl}{dt}\right)^2\right], \text{ oder}$$

$$T = \frac{m}{2}\left[R^2\dot{\alpha}^2 + r^2(\dot{\alpha} + \dot{l})^2\right].$$

Entsprechend bezeichne $\ddot{\alpha} = d^2\alpha / dt^2$, ..., so ist $d(\partial T / \partial\dot{\alpha}) / dt = mR^2\ddot{\alpha} + mr^2(\ddot{\alpha} + \ddot{l})$. Wirken einer Veränderung von α weder äussere Kräfte, noch Bewegungshindernisse entgegen, und haben dieselben niemals existirt, so ist $d(\partial T/\partial\dot{\alpha})/dt = 0$, d. h. es ist $\ddot{\alpha} = -r^2\ddot{l}/(R^2 + r^2) = -c\cdot\ddot{l}$. Demnach durch Integration $\dot{\alpha} = -c\dot{l}$. Setzt man $mR^2r^2/(R^2 + r^2) = mR^2c = A$, so folgt durch Einsetzen von $\dot{\alpha}$ in T: $T = \frac{1}{2}A\dot{l}^2$. Diese Vorbetrachtungen wendet der Verf. jetzt auf ein System von $(n+1)$ Stangen an, die so mit einander verbunden sind, dass $\dot{\alpha} = d\alpha/dt$ für alle denselben Wert hat. Am Ende einer jeden Stange ist eine Scheibe drehbar befestigt. Alle Scheiben und Stangen sollen in der Ebene der Zeichnung liegen. Die Grössen R_i, r_i, m_i, l_i sollen für jede einzelne Scheibe s_i dieselbe Bedeutung haben, wie oben angegeben ist. Dann wird auf demselben Wege die lebendige Kraft

$$T = \tfrac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i\left[R_i^2\dot{\alpha}^2 + r_i^2(\dot{\alpha} + \dot{l}_i)^2\right]$$

ermittelt. Bezeichnet man als „Aufscheibe" die Scheibe mit dem Index „Null", und lässt man gerade diesen Index fort, so findet Verf. schliesslich

$$T = \tfrac{1}{2}\dot{l}^2(mr^2 - m^2r^4/S) - \dot{l}(1/S)\,m r^2 \sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \dot{l}_i + N,$$

wo N eine Grösse ist, in der l ohne Index nicht mehr vorkommt.

Setzt man $S = \sum_{i=0}^{n} m_i(R_i^2 + r_i^2)$, weiter $-(mr^2/S)\sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \dot{l}_i = J(s)$, so erhält man genau den Boltzmann'schen Ausdruck (Vorl. I, S. 52, Gleich. 25): $T = \frac{1}{2}A\dot{l}^2 + \dot{l}J(s) + N$. Es werde $J(s)$ als das Moment der „Aufscheibe" bezeichnet; dann ist diese Grösse 1) von der Lage, der Gestalt und der Drehungsgeschwindigkeit sämtlicher anderen Scheiben, 2) von der Lage und Gestalt der Aufscheibe abhängig, aber nicht von der Drehungsgeschwindigkeit der letzteren.

Stellt man sich in dem letzten Ausdruck für T unter $\dot{l}$ eine Strom-

stärke vor, so erhält man eine Grundgleichung des elektromagnetischen Feldes, doch hat man sich als Analogon der Scheiben lauter geschlossene Stromkreise zu denken. Hae.

W. B. Morton. Notes on the electromagnetic theory of moving charges. Phil. Mag. (5) **41**, 488-494.

Eine elektrisch geladene Kugel bewege sich mit der Geschwindigkeit u, die kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit, parallel zur z-Axe. Dann lässt sich zeigen, dass die Verteilung der Ladung auf dieser bewegten Kugel trotz der Bewegung unverändert dieselbe bleibt, d. h. dass die Zahl der jedes Oberflächenelement verlassenden Kraftröhren ungeändert bleibt, dass aber die Röhren die Oberfläche nicht mehr unter rechtem Winkel verlassen. Gleiches gilt von einem dreiaxigen Ellipsoide. Hae.

Max Wien. Einheitsrollen der Selbstinduction. Wiedemann Ann. **58**, 553-563.

Beschreibung von drei construirten Normaleinheiten der Selbstinduction mit den Selbstpotentialen 10^6, 10^7 und 10^8 cm. Für die beiden letzteren wurde der genaue Wert der Selbstinduction durch absolute Messung bestimmt nach einer Methode, die der Verf. in Wied. Ann. **44**, 701 (vergl. F. d. M. **23**, 1140-41, 1891) beschrieben hat. Mit Hülfe eines von W. inzwischen construirten Apparates zum Variiren der Selbstinduction konnte die Methode noch wesentlich vereinfacht werden, was ausführlich dargelegt wird. Verf. glaubt, den absoluten Wert des Selbstpotentials seiner Einheitsrollen auf mindestens $1\,^0/_{00}$ garantiren zu können. Hae.

O. Singer. Ueber die wechselseitige Induction zweier auf eine Kugelschale gleichmässig gewickelter Windungslagen. Wien. Ber. **105**, 165-169.

Maxwell hat in seiner Abhandlung: „Ueber Faraday's Kraftlinien“ die Induction betrachtet, die ein auf eine Kugelfläche gleichmässig aufgewundener Draht auf einen zweiten, auf dieselbe Fläche gewundenen ausübt. Er macht die Annahme, dass die elektromotorische Kraft des primären Stromes momentan von der Intensität Null bis zu einer endlichen Intensität ansteigt; er zeigt, dass dasselbe dann auch von der Intensität des Inductionsstromes gilt. Da aber hierdurch auf den primären Stromkreis eine unendliche Inductionswirkung ausgeübt würde, so könnte man die Richtigkeit der Maxwell'schen Lösung anzweifeln. Verf. nimmt das Problem noch einmal vor; er lässt die elektromotorische Kraft F des primären Stromes in einer endlichen, wenn auch sehr kurzen Zeit τ von $t=0$ an continuirlich bis zu einer constanten Intensität c ansteigen. Als Resultat ergiebt sich, dass der inducirte Integralstrom $J'\cdot T=\int_0^\infty I'dt$ weder von der Zeit τ noch von der Func-

tion F abhängt, dass aber seine gesamte Arbeitsleistung $R'J'^2T$ so von F und τ abhängt, dass für unendlich klein werdendes τ eine von F unabhängige Grenze entsteht. Für die Intensität des Weber'schen Aequivalentstromes erhält Verf. für eine unendlich kleine Zeit τ den Wert: $J' = nn'c/2(n^2R'+n'^2R)$; dagegen fand Maxwell: $J' = n'c/2Rn$. Hae.

F. Koláček. Ueber elektrische Oscillationen in einer leitenden und polarisationsfähigen Kugel. Ein Beitrag zur Theorie der Spectra einfacher Beschaffenheit. Wiedemann Ann. **58**, 271-310.

Rydberg, Kayser und Runge ist es gelungen, zwischen den Schwingungszahlen der Spectrallinien eines leichten Metalls einige gesetzmässige Beziehungen festzustellen, falls diese Zahlen nach gewissen Serien geordnet werden. Zu einer und derselben Serie gehören Linien, deren Schwingungszahlen N sich darstellen lassen durch die Formel: $N = A - Bn^{-2} - Cn^{-4}$, wo A, B, C sich von Serie zu Serie ändernde, für dieselbe Serie aber constante Grössen, n die Stellenzahl der Linie in der Serie bedeuten.

Der Verf. geht nun daran, unter Zugrundelegung der Vorstellungen, die er in seiner Dispersionstheorie gegeben hat, den Charakter des theoretischen Spectrums zu erforschen, welches den elektromagnetischen Schwingungen einer leitenden, polarisationsfähigen Kugel entspricht, die in einem gleichfalls dielektrisch polarisirbaren Aether enthalten ist.

Es lässt sich nachweisen — und dies wird ausführlich für $n = 2$ und $n = 3$ gethan; soweit es möglich ist, wird aber auch ein allgemeiner Wert von n berücksichtigt —, dass es wenigstens zwei Serien von Doppellinien giebt, deren Schwingungscurven in einem bestimmten Gebiete genau den oben besprochenen Charakter besitzen. Diese Doppellinien haben ihren Ursprung in dem Umstande, dass die Dielektricitätsconstante der Atommaterie bedeutend grösser ist als jene des umgebenden Aethers. Die Doublettencomponenten selbst sind verschiedenen Ursprungs, wenn man die physikalische Seite des Schwingungsvorgangs ins Auge fasst. Die eine Componente entspricht Schwingungen, welche mit variablen elektrischen und invariablen magnetischen Oberflächenladungen verbunden sind; bei der anderen Doublettencomponente ist es umgekehrt.

Weiter lässt sich nachweisen, dass die Curven der Schwingungszahlen einen Gang besitzen, welcher der fast bei allen Spectren brauchbaren Kayser-Runge'schen Formel vollkommen entspricht. Hae.

M. Planck. Ueber elektrische Schwingungen, welche durch Resonanz erregt und durch Strahlung gedämpft werden. Berl. Ber. 1896, 151-170.

Hatte der Verf. früher (F. d. M. **26**, 1013-1015, 1895) die Bedingungen der stationären Resonanz untersucht, so geht er jetzt dazu über, Schwingungen mit veränderlicher Amplitude und Wellenlänge zu betrachten, wobei auch die erregende Welle als veränderlich anzunehmen

ist. Die Joule'sche Wärme wird nicht in Betracht gezogen; ist im besonderen die erregende Welle gleich Null, so kommt der Einfluss der Dämpfung durch Strahlung ganz charakteristisch zum Vorschein; diese Dämpfung wird zuerst besprochen. Alsdann werden die Schwingungen eines im Luftraum oder Vacuum befindlichen geradlinigen elektrischen Resonators untersucht, auf den irgend eine gegebene elektromagnetische Welle trifft, unter der Annahme, dass die Dämpfung lediglich durch Strahlung erfolgt. Ist $F = (1/r) f(t - r/c)$, so werden die Ausdrücke der Componenten der elektrischen und der magnetischen Kraft als Functionen von f aufgestellt, daraus die Ausdrücke für die ausströmende Energie entwickelt, und deren Summe gleich der Energieabnahme gesetzt. f erscheint als Integral einer linearen, nicht homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung, die unter Berücksichtigung der physikalischen Bedingungen in eine solche der zweiten Ordnung übergeführt wird, welche der Form nach mit derjenigen für eine durch eine gegebene äussere Kraft angeregte und durch innere Reibung gedämpfte Schwingung übereinstimmt. Daraus wird der Schluss gezogen, dass bei schwach gedämpften Schwingungen die Dämpfung durch Strahlung sich von der Dämpfung durch Reibung nur dadurch unterscheidet, dass der Dämpfungscoefficient nicht eine von der Substanz des Resonators abhängige Constante, sondern eine Grösse ist, die umgekehrt proportional dem Quadrate der Periode der maximalen Resonanz und dem Kubus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im umgebenden Medium ist.

Dieses Gesetz wird zum Schluss benutzt, um das Problem der vorjährigen Abhandlung, das der stationären Resonanz, noch vollständiger zu erledigen, endlich zur Untersuchung des Falles, wo die primäre Welle verschwindet, in dem also im Resonator eine Schwingung vorhanden ist, die mit constanter Dämpfung abklingt. Hae.

Ad. Blümcke. **Bemerkung zu der Abhandlung des Hrn. A. Oberbeck: „Ueber den Verlauf der elektrischen Schwingungen bei den Tesla'schen Versuchen".** Wiedemann Ann. **58**, 405-407.

Bei der Integration der beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung für V_1 und V_2 war Oberbeck (F. d. M. **26**, 1019-1020, 1895) auf eine Gleichung vierten Grades für λ, wenn das Potential $V_1 = e^{\lambda t}$ ist, gestossen, deren Wurzeln er unter der vereinfachenden Annahme $w_1 = w_2 = 0$ ermittelt hatte. Blümcke zeigt, dass man die Wurzeln in einfacher Weise auch für den Fall $w_1 c_1 = w_2 c_2$ ableiten kann, und dass seine Werte als Sonderfälle die Oberbeck'schen in sich schliessen. Bemerkenswert ist, dass, wenn $w_1 c_1$ und $w_2 c_2$ nicht einander gleich sind, man im Falle der Resonanz $(p_1 c_1 = p_2 c_2)$ angenähert richtige Werte für die Dämpfungsfactoren erhält unter der Annahme, dass in beiden Wickelungen des Transformators die Producte aus Capacität und Widerstand gleich gross, und zwar gleich dem arithmetischen Mittel aus $w_1 c_1$ und $w_2 c_2$ sind. Hae.

A. Ekström. Om stående elektriska vågor i metalltrådar. Stockh. Öfv. **53**, 377-384.

Der Verf. verallgemeinert eine Untersuchung von V. Bjerknes „Ueber den zeitlichen Verlauf der Schwingungen im primären Hertz'schen Leiter" (Wiedemann Ann. **44**, 513; F. d. M. **23**, 1146, 1891). Bjerknes hatte einen sehr langen leitenden Draht vorausgesetzt. Vom Verf. wird nachgewiesen, dass man auch ohne diese Annahme zu einer ziemlich einfachen Schlussformel gelangt. Bdn.

K. Domalip und F. Kolaček. Studien über elektrische Resonanz. Wiedemann Ann. **57**, 731-750.

Es handelt sich um eine experimentelle und theoretische Untersuchung über den Verlauf der elektrischen Spannung an den Enden einer secundären Spirale, wenn die primäre Windung im Entladungsbogen einer Leydener Batterie gelegen ist; es sind also im Princip die von Tesla zuerst ausgeführten Versuche. Theoretisch hat sich Oberbeck (F. d. M. **26**, 1019-1020, 1895) mit demselben Thema beschäftigt, und so kommen denn die Verf. unter vereinfachenden Annahmen und Vernachlässigungen zu den gleichen Resultaten, indem sie zuerst den Ohm'schen Widerstand beider Kreise, wie Oberbeck, gleich Null setzen, alsdann aber auch diesen Widerstand unter besonderen Annahmen berücksichtigen. Indem nun die Funkenlänge zwischen den Polkugeln des Mikrometers, also des secundären Kreises, gemessen wurde, ergab sich für diese ein Maximum beim Variiren des Selbstinductionscoefficienten L des primären Kreises, wenn die Bedingung $LC = lc$ erfüllt ist, wo c, C die Capacitäten und l, L den Selbstinductionscoefficienten des zweiten, bezw. ersten Kreises darstellen. Die Rechnung lehrt weiter, dass man, um möglichst grosse Funkeneffecte am secundären Kreise zu erzielen, gemäss der Formel: $LC = lc$, grosse Capacitäten und kleine Selbstinductionscoefficienten im primären Kreise mit kleinen Capacitäten und grossen Inductionscoefficienten im secundären Kreise combiniren muss, und zwar ergiebt sich dies aus den folgenden Formeln, nach denen die Versuche berechnet wurden:

$$x = \frac{2MC}{\sqrt{(LC-lc)^2+4M^2Cc}};$$

$$-\varepsilon t_0 =$$

$$\frac{\pi}{8}\frac{W}{M}x\sqrt{cl}\left(1+\sqrt{\frac{cl}{CL}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{M^2}{Ll}}}\left[1-\frac{x}{2}\frac{L}{M}\left(1-\frac{lc}{LC}\right)+\frac{wL}{Wl}\right];$$

$$-\eta t_0 =$$

$$\frac{\pi}{8}\frac{W}{M}x\sqrt{cl}\left(1+\sqrt{\frac{cl}{CL}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{M^2}{Ll}}}\left[1+\frac{x}{2}\frac{L}{M}\left(1-\frac{lc}{LC}\right)+\frac{wL}{Wl}\right];$$

$$\frac{p_1-p_2}{P_1-P_2}=\frac{MC(e^{st_0}+e^{rt_0})}{\sqrt{(LC-lc)^2+4CcM^2}},\qquad t_0=\frac{\pi}{n_1-n_2};$$

t_0 = Zeitpunkt der maximalen Potentialdifferenz. Hae.

A. Busch. Ueber oscillatorische Condensatorentladungen. Wiedemann Ann. **59**, 595-636.

Die Hauptfragen: „Wie kann man nachweisen, dass bei bestehenden Verhältnissen eine oscillatorische Entladung stattfindet?“ und „Unter welchen Verhältnissen findet sie statt?“ beschäftigen den Verf., wobei er ganz besonders auf die Untersuchungen Feddersen's und v. Oettingen's Rücksicht nimmt, dabei die Anordnung der Versuche nach eigenen Ideen vereinfachend. Als theoretische Grundlage dient ihm die Differentialgleichung für einen Strom, der einen Condensator enthält, und bei dem die Selbstinduction berücksichtigt ist:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+w\frac{di}{dt}+\frac{i}{C}=\frac{dE}{dt}$$

in dem besonderen Falle, dass $\frac{dE}{dt}=0$ ist. Das Integral $i=Ae^{k_1t}+Be^{k_2t}$, wo $Lk^2+wk+1/C=0$ ist, wird discutirt in der Annahme, dass w^2 so klein ist, dass man es gegen $4L/C$ vernachlässigen kann. Die Wurzeln k sind dann complex, d. h. es treten Schwingungen auf, welche, damit sie zu Stande kommen, eine bestimmte Combination von Widerstand (w), Selbstinduction (L) und Capacität (C) verlangen.

Hae.

J. Larmor. A dynamical theory of the electric and luminiferous medium. Part II. Theory of electrons. Lond. Phil. Trans. **186** A, 695-743.

Verf. geht von der (unter anderen vom Ref. vorgeschlagenen) concreten Vorstellung aus, dass sich der Aether bei wirbellosen Bewegungen wie eine vollkommene Flüssigkeit, bei Verdrehungen ähnlich wie ein elastischer Körper verhalte, wobei diese elastischen Kräfte mit den elektrischen Kräften, die Strömungsgeschwindigkeit mit der magnetischen Induction identificirt werden. Es handelt sich darum, dieses Bild durch Berücksichtigung von Elektronen = Ionen = Centren elektrischer (durch Aetherrotation verursachter) Erregung zu vervollständigen.

Die Elektronen werden als Träger des Leitungsstromes in materiellen Medien angesehen; diese Vorstellung liefert die richtigen Formeln für das elektromagnetische Feld in der Umgebung des Stromes und giebt auch von der Entstehung des Stromes in den galvanischen Elementen Rechenschaft. Dagegen führt die Vorstellung der Stromelemente, in ihren mechanischen Consequenzen entwickelt, auf Widersprüche mit der Erfahrung. In ihrer Anwendung auf Schwingungsvorgänge führen die Annahmen des Verf. bei durchsichtigen Medien auf die Helmholtz'-

schen Dispersionsformeln, bei undurchsichtigen Medien ergiebt sich ein Widerspruch mit diesen.

Vom abstract mechanischen Standpunkte sind die Bemerkungen des Verf. über die Unterscheidung von Geschwindigkeitscoordinaten und Momenten hervorzuheben. Bei der Anwendung der Lagrange'schen Gleichungen auf eine unbekannte Bewegung kann man im Zweifel sein, ob man eine Grösse als Geschwindigkeit oder als Moment behandeln soll. Jedenfalls muss eine Geschwindigkeit ein exacter Differentialquotient nach der Zeit sein; was beim Fehlen äusserer Kräfte constant bleibt, muss als Moment behandelt werden. Immerhin bleibt die Entscheidung bis zu einem gewissen Grade willkürlich.

Gelegentlich kommt die Bemerkung vor, dass diejenige Form der Maxwell'schen Gleichungen, welche in Deutschland nach Hertz benannt wird, und welche etwas früher von Heaviside aufgestellt ist, schon bei Maxwell selbst vorkommt. (Lond. Phil. Trans. 1868.) A. S.

G. F. Fitzgerald. On the longitudinal component in light. Phil. Mag. (5) **42**, 260-271.

Betrachtung der longitudinalen Componente der Lichtwelle mit Hülfe der elektromagnetischen Lichttheorie. Gbs. (Lp.)

O. Wiedeburg. Der Interferentialrefractor für elektrische Wellen. Wiedemann Ann. **59**, 497-522.

Boltzmann hat eine Methode zur Bestimmung des elektrischen Brechungsexponenten angegeben, die das Analogon darstellt zu dem Verfahren, das auf optischem Gebiet den Jamin'schen Interferentialrefractor benutzt. Righi hat alsdann diese Methode modificirt; nach ihm ergiebt sich für den Brechungsexponenten n der Wert $n = (d+\delta)/d$, wenn d die Dicke der eingeschalteten Platte, δ die Verschiebung des beweglichen Spiegels bezeichnet. W. bemerkt nun, dass Righi den Einfluss der Reflexion an der vorderen, d. h. dem Oscillator zugekehrten Grenze der geneigten Platte vernachlässigt habe. Er zeigt, dass dies nicht zulässig ist, und entwickelt unter Berücksichtigung der Reflexion die allgemeinere Formel: $\operatorname{tg}\left(2\pi\frac{d+\delta}{\lambda}\right) = \frac{1}{n}\operatorname{tg}\left(2\pi\frac{d}{\lambda}n\right)$, in der λ die Wellenlänge der Strahlen in Luft bedeutet, so dass wir eine transcendente Beziehung zwischen d, δ, λ und n vor uns haben, aus der nur durch ein Verfahren allmählicher Annäherung n berechnet werden kann. Es zeigt dies aber, dass in Wahrheit die Verhältnisse recht complicirt sind, indem man eigentlich noch auf die Dämpfung im Oscillator und Resonator Rücksicht nehmen müsste, nicht aber den ersteren als ungedämpft annehmen darf. Indem Verf. seine mit zwei verschiedenen Resonatoren erhaltenen Resultate graphisch darstellt und mit dem idealen Falle ungedämpfter Schwingungen vergleicht, gelingt es ihm, aus seinen Versuchen den Brechungsexponenten des Spiegelglases zu $n = 2,63$ mit einer Unsicherheit von kaum mehr als 1 Procent abzuleiten. Hae.

R. Reiff. **Neue Deutung der magnetischen Drehung der Polarisationsebene.** Wiedemann Ann. **57**, 281-289.

Geht man von der Helmholtz'schen Hypothese vom Mitschwingen der Atome bei den Lichtbewegungen aus, indem man annimmt, dass die Atome des Molecüls um den Schwerpunkt desselben Schwingungen ausführen, und dabei der Einfachheit halber voraussetzt, dass die Geschwindigkeiten der Atome eines bipolaren Molecüls einander entgegengesetzt seien, so führt ein folgerichtiger mathematischer Ansatz dieser Helmholtz'schen Gedanken zu Relationen zwischen den magnetischen Kräften, die, in die Hertz'schen Gleichungen für bewegte Körper eingesetzt, direct zu den Rowland'schen Gleichungen hinüberführen und so zu einer Stütze der Rowland'schen Annahme einer rotatorischen elektromotorischen Kraft werden, die damit als mathematische Consequenz Helmholtz'scher Ideen erscheint. Hae.

C. H. Wind. **Eene studie over de theorie der magneto-optische verschijnselen in verband met het Hall-effect.** Amsterdam, Verhandelingen **5**, No. 3. 91 S.

Der Verf. entwickelt die Theorie des Kerr'schen Effectes und der magnetischen Drehung der Polarisationsebene, indem er in dem bekannten vollständigen Gleichungssystem der Maxwell'schen Theorie einer gewissen Constante complexe Werte erteilt. Hierdurch ist die theoretische Betrachtung im Einklang mit den Experimenten, namentlich mit dem Hall'schen Effect und der Sissingh'schen Phasendifferenz.

Die Grundgleichung seiner Theorie leitet der Verf. her, in Uebereinstimmung mit den Lorentz'schen Ansichten über die Elektricitätsbewegung durch Ionen, aus der Voraussetzung, dass die positiv und negativ geladenen Ionen verschiedene Translationsgeschwindigkeiten besitzen. Mo.

H. Bagard. **Phénomène de Hall dans les liquides.** Journ. de phys. (3) **5**, 499-508.

In dieser von manchen theoretischen Ueberlegungen durchsetzten Arbeit kommt der Verf. zu dem Schlusse: Der Hall'sche Effect wird in den Flüssigkeiten dem Sinne nach ebenso erzeugt wie für Wismut, d. h. die elektrische Kraft wird in einem Sinne abgelenkt, welcher der umgekehrte von dem des Stromes des Elektromagneten ist. Lp.

J. Lemoine. **Vérification de la loi de Kerr. — Mesures absolues.** C. R. **122**, 835-837.

Der Verf. zeigt für elektrisirten Schwefelkohlenstoff die Gültigkeit des Kerr'schen Gesetzes, dass also der Quotient aus der Gangdifferenz der Lichtstrahlen zum Quadrate des Potentials constant und, in elektrostatischen Einheiten ausgedrückt, zwischen 7000 und 21 000 Volt gleich $5,46 \, . \, 10^{-5}$ ist. Hieran schliesst sich die Berechnung der Kerr'schen

Constante aus der Formel für die optische Verzögerung $K \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F^2 dx$, wo F die elektrische Kraft bedeutet. Er findet, indem er die Dichte $\pm\sigma = F/4\pi$ einführt, für dieses Integral $8\pi \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\sigma^2 dx$ und schliesslich K dem absoluten Werte nach $= 3{,}70 \,.\, 10^{-7}$. Rn.

A. Garbasso. Sopra un punto della teoria dei raggi catodici. Rom. Acc. L. Rend. (5) 5_2, 250-253; Nuovo Cimento (4) 4, 227-230.

Die Notiz will die Resultate der Corpusculartheorie und die der transversalen Wellen in Betreff der Kathodenstrahlen einander gegenüberstellen. In der Theorie der strahlenden Materie handelt es sich analytisch um die Bewegung eines Körpers, der die Wirkungssphäre eines anziehenden Centrums durcheilt. Ist die Geschwindigkeit gross genug, so wird die Bahn geradlinig sein; wenn nicht, so ist sie gekrümmt. In der Theorie transversaler Lichtwellen muss vor allem das Gesetz gegeben sein, nach welchem das Licht sich fortpflanzt; so wird z. B. ein Lichtstrahl nicht geradlinig sein, wenn man annimmt, dass der Brechungsindex von einem Punkte des Mediums zum andern variirt. Ein solches Gesetz lässt sich aber nicht ermitteln, wenn man den in der Theorie der strahlenden Materie wohl denkbaren Fall annimmt, dass die Bahn des Kathodenstrahls eine Spirale ist. Indem der Verf. dies rechnerisch für ein magnetisches Feld durchführt, glaubt er damit gezeigt zu haben, dass die magnetische Ablenkbarkeit der Kathodenstrahlen unvereinbar ist mit der Annahme, dass diese Strahlen in einer Wellenbewegung bestehen. Hae.

J. J. Thomson. Longitudinal electric waves, and Röntgen's X-rays. Cambr. Proc. 9, 49-61.

Durch die Röntgen'sche Entdeckung angeregt, revidirt Verf. die Maxwell'sche Theorie auf die Möglichkeit von longitudinalen Wellen, für welche er die Röntgen-Strahlen ansprechen möchte. In der gewöhnlichen Maxwell'schen Theorie, wo man nur zwei Arten von Strömen, Verschiebungs- und Leitungsströme, betrachtet, sind longitudinale Wellen unmöglich. Verf. setzt neben jenen Convectionsströme voraus und findet in ihnen die Möglichkeit longitudinaler Wellen gegeben. Convectionsströme können entweder dadurch entstehen, dass sich geladene Teilchen durch den ruhenden Aether bewegen, oder dadurch, dass der Aether durch die mit positiven und negativen Ladungen versehenen Molecüle hindurchströmt. Letzteres ist nach Ansicht des Verf. immer der Fall, wenn nicht gerade der Vector der Energieströmung wirbelfrei verteilt ist. A. S.

Stokes. On the nature of the Röntgen rays. Cambr. Proc. 9, 215-216.

Stokes spricht sich dahin aus, dass die Kathodenstrahlen fortgeschleuderte geladene Teilchen, die Röntgen-Strahlen dagegen transver-

sale Aetherwellen entweder von sehr kleiner Wellenlänge oder von unregelmässigem, stossartigem Charakter sein dürften. A. S.

R. SWYNGEDAUW. Différence d'action de la lumière ultra-violette sur les potentiels explosifs statique et dynamique. C. R. **122**, 131-134.

R. SWYNGEDAUW. Sur l'abaissement des potentiels explosifs dynamiques par la lumière ultra-violette et l'interprétation de certaines expériences de M. Jaumann. C. R. **122**, 1052-1054.

Die beiden Abhandlungen enthalten die Resultate der von dem Verf. angestellten Beobachtungen über den Einfluss des ultra-violetten Lichtes auf das Entladungs-Potential ohne weitere mathematische Entwickelungen. Rn.

G. JAUMANN. Réponse aux observations de M. H. Poincaré sur la théorie des rayons cathodiques. C. R. **122**, 517-520.

H. POINCARÉ. Observations au sujet de la communication précédente. C. R. **122**, 520.

G. JAUMANN. Déviation électrostatique des rayons cathodiques. Réponse à M. H. Poincaré. C. R. **122**, 988-990.

H. POINCARÉ. Observations au sujet de la communication de M. Jaumann. C. R. **122**, 990.

Poincaré hatte aus dem Integral $\theta = F(\varphi_2, \varphi_3) \cos \lambda (t - \varphi_1)$ der Gleichung $k\,\partial\theta/\partial t + X_0\,\partial\theta/\partial x + Y_0\,\partial\theta/\partial y + Z_0\,\partial\theta/\partial z = 0$, wo $\varphi_1(x,y,z)$ der Gleichung $k = X_0\partial\varphi_1/\partial x + Y_0\partial\varphi_1/\partial y + Z_0\partial\varphi_1/\partial z$ genügt, und wo $\varphi_2 = \beta$, $\varphi_3 = \gamma$ Kraftlinien sind, den Schluss gezogen, dass die Strahlen immer den Kraftlinien folgen, weil die Amplitude $F(\varphi_2, \varphi_3)$ nur Function von φ_2 und φ_3 ist.

Diesem Schluss kann J. nicht beitreten, weil die Function F nicht willkürlich, sondern notwendiger Weise constant ist. Den Beweis führt er in folgender Weise. Ein Integral stellt einen Lichtstrahl dar, 1) wenn alle Variabeln dieselben Wellenoberflächen φ_1 haben, 2) wenn zwischen ihren Amplituden und Phasen einfache Relationen bestehen, 3) wenn man das Integral nicht in zwei oder mehrere Componenten zerlegen kann, welche einfache Strahlen sind (F. d. M. **26**, 963, 1895).

Es seien ψ die aequipotentiellen Oberflächen, φ die der conjugirten Kraftfunctionen; es sei ferner ψ_0 die statische elektrische Kraft, M_0 proportional der statischen magnetischen Kraft. Es genügt, die oscillirenden Kräfte Ψ, Φ, M zu betrachten. Man hat demnach die Gleichungen

$$k\theta = (1/m^2)\partial(m\Psi)/\partial\psi + (1/m^2)\partial(m\Phi)/\partial\varphi,$$
$$\varepsilon_0\,\partial(m\Phi)/\partial t = \partial M/\partial\psi,$$
$$\varepsilon_0\,\partial(m\Psi)/\partial t + k_1\theta = -\partial M/\partial\varphi,$$
$$\mu_0\partial M/\partial t + M_0\theta = (1/m^2)\,\partial(m\Phi)/\partial\psi - (1/m^2)\partial(m\Psi)/\partial\varphi,$$

wo $m = k_1/\psi_0$ der Transformationscoefficient ist. Die notwendige Form der Gleichung eines Strahls ist:

$$\begin{aligned} \theta &= F(\varphi)\cos\lambda\,(t-\varphi_1), \\ m\Phi &= \varrho_1 F_1(\varphi)\cos\lambda\,(t-\varphi_1+a_1), \\ m\Psi &= \varrho_2 F_2(\varphi)\cos\lambda\,(t-\varphi_1+a_2)+k_1, \\ M &= \varrho_3 F_3(\varphi)\cos\lambda\,(t-\varphi_1+a_3)+M_0, \end{aligned}$$

wo a_1, a_2, a_3 constant und $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ Functionen von m sind.

Indem man diese Formeln in die Differentialgleichung einsetzt, sieht man, dass die Amplituden F nur in Ausnahmefällen willkürlich sind. Ferner ist es unmöglich, diesen Gleichungen zu genügen, welches auch die unbekannten Functionen sein mögen, d. h. die Strahlen folgen niemals den Kraftlinien. Hier setzt Poincaré ein, indem er Grundlagen und Folgerungen der Jaumann'schen Theorie bestreitet. Die von beiden Seiten herangezogenen Resultate aus Experimenten führen zu keiner Einigung über diese Frage. Die Entscheidung muss daher zukünftigen Versuchen vorbehalten bleiben. (Cf. Wiedemann Beibl. **21**, 55, 1897.) Rn.

A. A. Michelson. The theory of the X-rays. Nature **54**, 66-67.

Der dem American Journal of Science entnommene Artikel fügt zu den über die X-Strahlen aufgestellten beiden Theorien der longitudinalen Wellen und der geschleuderten Partikelchen eine dritte hinzu, nämlich die der Aetherwirbel, und sucht dadurch alle Beobachtungen zu erklären. Lp.

G. Sagnac. Illusions qui accompagnent la formation des pénombres. Applications aux rayons X. C. R. **123**, 880-884.

Einige Halbschatten-Phänomene sind den Schattenbildungen, die bei der Anwendung der X-Strahlen auftreten, äusserst ähnlich. Der Verf. warnt also davor, letzteren eine allgemeine Deutung zu geben, bevor erstere nicht genau untersucht sind. Rn.

C. Maltézos. Sur quelques propriétés des rayons X traversant des milieux pondérables. C. R. **122**, 1115-1117.

C. Maltézos. Sur les rayons X. C. R. **122**, 1474-1476.

C. Maltézos. Sur les rayons limites ($X = 0$). C. R. **122**, 1533-1534.

Nach der Refractionstheorie von Helmholtz ist

$$n^2 = 1-(A-k'^2)/p^2+B/(p_0^2-p^2);$$

n = Brechungsindex, $p = 2\pi/\lambda$, k' = Absorptionscoefficient. Der Verf. zeigt, dass, wenn p' ein Proportionalitätsfactor, unabhängig von der Dichte des Körpers, $A+B=p'$ und bei sehr kleinem λ für Dielektrica $k' = \sqrt{4\pi^2(n^2-1)/\lambda^2+p'}$, für Metalle $k' = 2\pi\sqrt{(n^2-1)/\lambda^2}$ ist. Vermehrt sich die Dichte des Körpers, so wächst der Brechungsindex, folglich bei unverändertem λ auch die Absorption. Daraus er-

klärt sich, dass für X-Strahlen, die als hyper-ultraviolette anzusehen sind, die Absorption mit der Dichte zunimmt.

In der zweiten Abhandlung wird der Fall $\lambda = 0$ behandelt. Nach der Helmholtz'schen Theorie findet man die Gleichung $d^2\xi/dz^2 = P_1(\xi-\xi_1)$; $P_1(\xi-\xi_1) - H_1\xi_1 = 0$, deren allgemeines Integral, wenn $A = P_1(1-P_1/(P_1+H_1))$, $\xi = ae^{z\sqrt{A}} + be^{-z\sqrt{A}}$ ist.

Nun muss $\xi = \xi_0$ für $z = 0$ und $\xi = 0$ für $z = \infty$ sein, also ist $\xi = \xi_0 e^{-z\sqrt{A}}$.

Man schliesst daraus: 1) Diese Strahlen ($\lambda = 0$) haben einen äusserst kleinen Absorptionscoefficienten; 2) die Absorption wächst mit der Dichte.

Wenn durch das Experiment nachgewiesen wird, dass die Brechung der X-Strahlen nicht genau Null ist, so sind die Strahlen transversale von unendlich kleiner Wellenlänge; sie sind hyper-ultraviolett, und die in der ersten der obigen Abhandlungen gezogenen Schlüsse bleiben bestehen.

In der dritten Abhandlung behandelt der Verf. die in der zweiten angeregte Frage auf Grund der Maxwell'schen Theorie. Die Grenzstrahlung $\lambda = 0$ sieht er als einen elektromagnetischen Fluss nach Analogie der Wärmeausbreitung in einem unendlich langen dünnen Körper an. Es ergiebt sich $\xi = \xi_0 e^{-z\sqrt{P_1\omega}}$, was, mit dem obigen Wert verglichen, $\omega = H_1/(P_1+H_1)$ liefert. Rn.

P. Beck. Theorie des remanenten Magnetismus von Föppl. Wiedemann Ann. 57, 464-467.

Föppl hat (Wiedemann Ann. 48, 252, 1893) aus seiner Theorie des remanenten Magnetismus geschlossen, dass ein Hohlcylinder aus einem magnetisch harten Körper, der einen stromdurchflossenen geradlinigen Leiter umgiebt, eine mehr oder weniger vollkommene Schirmwirkung ausübt, während eine Röhre aus weichem Eisen die äussere Luft nicht vor dem Kraftfluss zu schützen vermag. Verf. hat diese Theorie einer experimentellen Prüfung unterzogen, indem er die Stärke des Inductionsstroms in einem ausserhalb der Röhre befindlichen Leiterkreis an einem Galvanometer nach der ballistischen Methode mass. Von einer Schirmwirkung des Stahls war dabei nichts zu bemerken. Gt.

Alfons Kohn. Versuche über magnetisch weiche und harte Körper. Wiedemann Ann. 58, 527-552.

Im Gegensatz zum vorstehenden Referat sucht K. in einer unter Sohncke's Leitung entstandenen Experimentaluntersuchung nachzuweisen, dass Theorie und Erfahrung völlig mit Föppl's Erklärung des Magnetismus übereinstimmen, zugleich den Grund aufdeckend, warum Beck's Resultate negativer Art sein mussten. Hae.

P. Beck. **Bemerkungen zu der Abhandlung des Hrn. Kohn über magnetisch weiche und harte Körper.** Wiedemann Ann. **59**, 84-90.

Rechtfertigung gegen die von Kohn erhobenen Einwände und Besprechung der Versuchsanordnung von Kohn. Hae.

L. H. Siertsema. **Over de onbestaanbaarheid van diamagnetische stoffe volgens Duhem, en eenige minimum-eigenschappen in het magnetisch veld.** Amst. Verh. **5**, No. 4, 29 S.

Es wird gezeigt, dass die Existenz eines negativen Magnetisirungscoefficienten durch die Maxwell'sche Theorie erklärt wird. Grössen, welche bei elektrischem und magnetischem Gleichgewicht Minimumwerte erhalten. Mo.

B. Rosing. **On the possibility of explaining the phenomena of magnetism by the hypothesis of participation of matter in the motion of the magnetic field.** Phil. Mag. (5) **42**, 314-332.

Drei Typen von Theorien des Magnetismus sind möglich, je nachdem in dem Ausdruck für die Energie des Systems die Bestimmungsstücke, d. h. die physikalischen Coordinaten, also Intensität und Verteilung der magnetischen Induction, beide selbst explicite auftreten, wie in Weber's Theorie der Molecularmagnete, oder die eine explicite, von der andern aber der Differentialquotient, wie in Ampère's Theorie elektrischer Molecularströme, oder endlich drittens beide nur durch ihre Differentialquotienten vertreten sind, wozu man gelangt, wenn man annimmt, dass die magnetisirte Materie in dieselbe Bewegung gerät wie das umgebende magnetische Feld. Der Ausarbeitung dieser dritten Möglichkeit gilt die Untersuchung des Verf.; der Aufbau der Theorie geschieht unter Zuhülfenahme mehrerer Hypothesen, doch muss im einzelnen auf die Arbeit selbst verwiesen werden. Hae.

A. Kurz. **Kraftwirkung eines Magnets auf einen anderen.** Schlömilch Z. **41**, 167-169.

A. Kurz. **Potentielle Energie eines Magnets.** Ebenda, 169-171.

A. Kurz. **Potential einer magnetischen Kugel.** Ebenda, 172-175.

A. Kurz. **Die magnetische Induction.** Ebenda, 175-176.

A. Kurz. **Solenoid, Ring- und Kugelspirale.** Ebenda, 226-227.

Diese fünf kleineren Mitteilungen sind recht bemerkenswerte kritische Untersuchungen und Zusätze über die denselben Gegenstand behandelnden Paragraphen in Christiansen's theoretischer Physik (§ 69 bis § 79); aber auch G. Kirchhoff's Vorlesungen über Elektricität und Magnetismus werden zum Vergleich herangezogen. Hae.

H. Nagaoka. **Zur Aussenwirkung gleichförmig magnetisirter Rotationsellipsoide.** Wiedemann Ann. **57**, 275-280.

Zu magnetometrischen Messungen wird bei der unipolaren Methode ein magnetisirter cylindrischer Stab lotrecht so aufgestellt, dass die Ablenkung eines Magnetometers, das sich in der Nähe eines seiner Pole befindet, ein Maximum wird. Dies geschieht durch Ausprobiren, da für die gewählte Form des Magnets die theoretischen Daten nicht bekannt sind. Verf. ersetzt nun den cylindrischen Stab durch ein Rotationsellipsoid mit verticaler Rotationsaxe, das in der Richtung dieser, der z-Axe, gleichförmig magnetisirt ist, und berechnet mit Hülfe des bekannten Ausdrucks für das magnetische Potential eines Ovoids und eines Sphäroids in der xz-Ebene die Gleichungen der Curven der maximalen Ablenkung. Sie sind in z vom sechsten, in x vom vierten Grade. Für die Vollkugel ist sie eine Gerade von der Neigung $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2}$ gegen die x-Axe; die Curven für die Rotationsellipsoide von derselben z-Axe haben diese Gerade zur Asymptote. Es folgt eine experimentelle Bestätigung. Gt.

H. Veillon. Ueber die Magnetisirung des Stahles durch die oscillatorische Entladung der Leydener Flasche. Wiedemann Ann. **58**, 311-329.

Abgesehen von dem reichen experimentellen Material, welches der Verf. in seiner Abhandlung darlegt, findet sich auch eine kleine mathematische Untersuchung in ihr, veranlasst durch die beobachtete Thatsache, dass eine eiserne Nadel, die in das Kraftfeld eines von einem Strome durchflossenen geradlinigen Drahtes gebracht wird, die stärkste Magnetisirung nicht in unmittelbarer Nähe des Leiters erhält, sondern dass diese erst in einer gewissen Entfernung auftritt. Sei a die Distanz, bei der das Maximum der Sättigung auftritt, μ die Sättigung für die Längeneinheit, p die halbe Länge der Nadel, so findet man für eine Nadel, die in einer Ebene senkrecht zur Richtung des Drahtes liegt, so dass a die kürzeste Entfernung von Nadel und Draht ist, deren Richtungen sich kreuzende sind, die Gleichung fünften Grades für a, indem der Ausgangspunkt der Untersuchung das Biot-Savart'sche Gesetz ist: $\mu(1-a\mu)/a = p^2/(a^2+p^2)^2$, welche für $2\mu p > 1$ sicher eine positive reelle Wurzel besitzt.

Hieraus kann man schliessen, dass für die Nadel ein Maximum der Sättigung eintreten kann, wenn sie länger ist als die Distanz, bei welcher für ihr mittleres Element die Sättigung eintritt. Ist die Nadel kürzer, so wird sie vollständig gesättigt, sobald sie innerhalb eines Kreises liegt, der $1/2\mu$ zum Radius hat und durch den Stichpunkt des Drahtes mit der vorher genannten senkrechten Ebene, in der die Nadel liegt, geht. Hae.

J. Klemencic. Ueber den Energieverbrauch bei der Magnetisirung durch oscillatorische Condensatorentladungen. Wiedemann Ann. **58**, 249-270; Wien. Ber. **104**, 724-746.

Verf. bediente sich bei seinen Untersuchungen des Hiecke'schen „Fallapparates", der sich vortrefflich zur Untersuchung von oscillatori-

schen Condensatorentladungen eignet. Zur Zeit der Ladungsmaxima sitzt die ganze Energie im Condensator, da die Leitung stromlos ist. Bezeichnen wir die den Maximis entsprechenden Potentiale mit $V_1, V_2, V_3 \ldots$, so sind die entsprechenden Energiequanta $\frac{1}{2}V_1^2 C$, $\frac{1}{2}V_2^2 C$, $\frac{1}{2}V_3^2 C$, ... Der Verbrauch an Energie W vom ersten Maximum bis zum dritten ist also $W = \frac{1}{2}C(V_1^2 - V_3^2)$, und zwar direct in Erg ausgedrückt, wenn Potential und Capacität C in absoluten Einheiten gemessen sind. Sei k das Dämpfungsverhältnis, so ist $k = V_1/V_3$, also $W = \frac{1}{2}CV_1^2(k^2-1)/k$. Ist in der Spirale kein Eisendraht, so wird diese Energie lediglich durch die Widerstände der Leitung absorbirt, wenn wir von der sehr kleinen elektromagnetischen Ausstrahlung absehen.

Legen wir in die Spirale einen Eisendraht, so wird ein Teil der elektrischen Energie bei der Magnetisirung verbraucht. Bezeichnen wir denselben mit W_m, während der durch die Widerstände bedingte W_w heissen soll, so ist $W = W_w + W_m$. Sind die entsprechenden Potentiale im Falle des eingelegten Eisendrahtes V_1', bez. V_3', so ist $W_w + W_m = \frac{1}{2}C(V_1'^2 - V_3'^2)$. Aus dieser Summe lässt sich aber W_m nur angenähert berechnen; unter vereinfachenden Annahmen folgt aus der letzten Gleichung $W_m = \frac{1}{2}C(V_1'^2/k^2 - V_3'^2)$. Hae.

Willy Wien. Die Wirkung eines rechteckig gespannten Strombandes auf eine Spule mit kreisförmigem Querschnitt. Wiedemann Ann. **59**, 523-531.

H. Diesselhorst. Ueber das Potential von Kreisströmen mit einer Anwendung auf das Helmholtz'sche Elektrodynamometer. Diss. Berlin. 31 S. 8⁰.

Beide Untersuchungen sind angeregt worden durch die von Kahle in der Phys. Techn. Reichsanstalt unternommene Bestimmung der Constanten des Helmholtz'schen Elektrodynamometers; sie nehmen ihren Ausgangspunkt von der Berechnung des magnetischen Potentials eines Kreisstromes, die schon Maxwell in den Artikeln 694—695 (Bd. II, S. 408 ff.) seines Treatise gegeben hat. Während Maxwell in dem Ausdruck für das Potential den reciproken Wert der Entfernung nach Kugelfunctionen entwickelte und den Ausdruck vollständig aufstellte, konnte man denselben praktisch doch nicht verwerten, weil diejenigen Glieder, die zur weiteren Behandlung notwendig sind, in den verschiedenen Kugelfunctionen des Resultates enthalten sind. Diesselhorst entwickelt deshalb den reciproken Wert in eine Taylor'sche Reihe und berechnet im ersten Teile seiner Dissertation das Potential eines Kreisstroms und einer Spule. Statt nun den letzteren Ausdruck für den Helmholtz'schen Apparat zu benutzen und das Potential der Spule auf den viereckigen Rahmen zu untersuchen, wird umgekehrt im zweiten Teile das Potential des letzteren auf die erstere ermittelt, das für den Apparat wichtige Drehmoment daraus hergeleitet und durch Anwendung des Taylor'schen Lehrsatzes auf $1/r$ der Ausdruck bis zur Fertig-

stellung behandelt, so dass man sämtliche Glieder desselben sofort hinschreiben kann; auch die Untersuchung der Convergenz wird geleistet.

Genau in derselben Weise geht anfänglich Wien vor. In dem Ausdruck für den Differentialquotienten des Potentials des viereckigen Strombandes auf einen Punkt der Spule, welcher in dem anderen für das zu berechnende Drehmoment auftritt, berücksichtigt W. aber nur das erste Glied, wodurch bedeutende Vereinfachungen eintreten, die dahin führen, dass das Drehmoment sich aus vollständigen elliptischen Integralen aller drei Gattungen zusammensetzt. Hae.

J. V. Jones. On the magnetic field due to an elliptical current at a point in its plane within it. Phil. Mag. (5) **42**, 107-111.

Seien ξ, η die Coordinaten des gegebenen Punktes und sei $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ die Gleichung der Ellipse. Man mache ξ, η zum Anfangspunkte der Coordinaten und beziehe die Ellipse auf diesen, indem man ϱ und θ als Polarcoordinaten von Punkten der Ellipse einführt. Die Intensität des magnetischen Feldes der Ellipse im Punkte ξ, η ist dann

$$H=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{\varrho}, \text{ bez.}$$

$$H=\frac{ab}{a^2b^2-b^2\xi^2-a^2\eta^2}\int_0^{2\pi}d\theta\sqrt{f^2\cos^2\theta+2h^2\cos\theta\sin\theta+g^2\sin^2\theta},$$

wo $f^2=b^2-\eta^2,\quad g^2=a^2-\xi^2,\quad h^2=\xi\eta.$

Sei
$$\Phi^2+X^2=f^2+g^2$$
$$\Phi^2X^2=f^2g^2-h^4, \text{ so erhält man}$$

$$H=\frac{ab}{\Phi^2X^2}\int_0^{2\pi}d\theta\sqrt{\Phi^2\cos^2\theta+X^2\sin^2\theta}=\frac{4ab}{\Phi^2X^2}E(\Phi, X),$$

wo
$$E(\Phi, X)=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}d\theta\sqrt{\Phi^2\cos^2\theta+X^2\sin^2\theta}$$

ein elliptisches Integral zweiter Gattung ist, das der Verf. nach Cayley, Elliptische Integrale, Cap. 13, für $a=10{,}5419$ und $b=10{,}5340$ Zoll engl., $\omega=55^0$, $r=0{,}1$ bis 7 ausgewertet und zur Berechnung von H benutzt hat. Hae.

A. H. Bucherer. Nachtrag zu: Die Wirkung des Magnetismus auf die elektromotorische Kraft. Wiedemann Ann. **59**, 735-741.

Ueber die Einwirkung des Magnetismus auf die Kraft eines Elementes, dessen eine oder beide Elektroden aus paramagnetischem Material bestehen, hatte Verf. experimentell festgestellt, dass die von der Magnetisirung herrührenden, beobachtbaren Kräfte nicht von einer Aenderung des elektrochemischen Potentials des magnetisirten Eisens herrühren

können, sondern von Concentrationsänderungen, welche die Lösung an der magnetisirten Elektrode durch die Auflösung der letzteren erfährt.

Die von **Duhem** berechnete Potentialdifferenz der Kette Fe magn. | $FeSO_4$ | Fe nicht magn., nämlich $E = \lambda M^2/2\delta F$, wo M die Intensität der Magnetisirung, F die Susceptibilität des weichen Eisens bedeutet, kann deshalb direct nicht in Frage kommen; dennoch kann man aus ihr einige wichtige Consequenzen ziehen. Der Vorgang in der Kette besteht darin, dass beim Stromdurchgang das nicht magnetisirte Eisen sich löst, um sich auf der magnetisirten Elektrode niederzuschlagen. Sieht man von der Concentrationsänderung ab, so ist der Vorgang eine isotherme Destillation des Eisendampfes von der ausserhalb des Feldes befindlichen Elektrode zu der magnetisirten. Nach **Descoudres** ist ein solcher Process auf verschiedene Dampfspannung der Elektroden zurückzuführen. Diejenige des nicht magnetisirten Eisens $p_n = f(T)$ ist nämlich grösser als die des magnetisirten $p_m = \varphi(T)$, beide sind Functionen der Temperatur T, und es ist die Potentialdifferenz $E = \frac{R \cdot T}{2 \cdot 23040} \log_e \frac{p_n}{p_m}$ anzunehmen. Combinirt man dies mit der **Duhem**'schen Formel, und setzt in derselben $M = F \cdot H$, wo H die Feldstärke bedeutet, so ist

$$(1) \quad \frac{F \cdot H^2 \lambda}{2\delta \cdot 10^7} = \frac{R \cdot T}{2 \cdot 23040} \log_e \frac{p_n}{p_m} = \frac{R \cdot T}{2 \cdot 23040} \log_e \frac{f(T)}{\varphi(T)}.$$

Jetzt geht der Verf. dazu über, eine Gleichung für thermoelektrische Kräfte abzuleiten, welche eine Beziehung zwischen elektromotorischer Kraft und Aenderung der Dampfspannung der Metalle mit der Temperatur darstellt. Unter Hinweis auf bekannte Thatsachen der Elektrochemie kommt der Verf. nach längeren Deductionen zu dem Schlusse, dass die Grösse der thermoelektrischen Ströme proportional ist der Anzahl von thermoelektrischen Aequivalenten, welche an der Umwandlung teilnehmen. Sei n_1 das thermoelektrische Aequivalent des Eisens, so ist für die oben erwähnte Kette die elektromotorische Kraft des Thermopaares:

$$(2) \quad E = \frac{R \cdot 4 \cdot 2}{n_1} \int_{T_1}^{T_2} \left(1 - T \frac{d \log_e \varphi(T)}{dT}\right) dT - \frac{R \cdot 4 \cdot 2}{n_1} \int_{T_1}^{T_2} \left(1 - T \frac{d \log_e f(T)}{dT}\right) dT.$$

Setzt man noch $a = \frac{23040 \lambda}{\delta \cdot 10^7 \cdot R}$, und combinirt man (1) mit (2), indem man noch (3) $F = f'(T)$ gemäss der Erfahrung als Function der Temperatur, besonders bei constanter Feldstärke H, annehmen darf, so findet man, nach Differentiation von (1) und (3) und Einsetzen in (2), als Wert für die elektromotorische Kraft des Thermopaares:

$$(4) \quad E = \frac{4 \cdot 2 \cdot R \cdot a \cdot H^2}{n_1} \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{df'(T)}{dT} - \frac{f'(T)}{T}\right) dT.$$

Hae.

L. Houllevigue. De l'influence de l'aimantation sur les phénomènes thermo-électriques. Ann. de chim. et phys. (7) **7**, 495-567.

L. Houllevigue. De l'influence de l'aimantation sur les propriétés thermoélectriques. Journ. de phys. (3) **5**, 53-60.

Im ganzen genommen, ist die Arbeit experimenteller Natur; doch finden sich an einzelnen Stellen theoretische Betrachtungen, die durch mathematische Ueberlegungen gestützt werden. In der zweiten Abhandlung zählt der Verf. am Schlusse die folgenden Sätze als Ergebnisse auf: 1. Ein weicher Eisendraht bilde einen Teil eines in ein nicht gleichförmiges Feld gebrachten geschlossenen Leiters und werde darin longitudinal magnetisirt. Erhitzt man einen seiner Punkte in einer Gegend, wo das Feld über 70 CGS ist, so entsteht ein Strom, der durch den heissen Teil in der Richtung fliesst, wo das Feld abnimmt. 2. Ist das Feld im erhitzten Punkte unter 70 CGS, so geht der Strom durch den erhitzten Teil in der Richtung, wo das Feld zunimmt. 3. Wenn das Eisen transversal magnetisirt wird, so geht der Strom durch den erwärmten Teil in der Richtung, wo das Feld abnimmt. 4. Handelt es sich um einen weichen, longitudinal magnetisirten Stahldraht, so geht der Strom durch den warmen Teil in dem Sinne, wo das Feld abnimmt.

Lp.

A. Campetti. Sul moto di un dielettrico in un campo magnetico. Torino Atti **32**, 52-65.

Verf. untersucht im Anschluss an die experimentellen Resultate von W. Duane: Ueber die dämpfende Wirkung des magnetischen Feldes auf rotirende Isolatoren (Wiedemann Ann. 1896, Heft 7) mathematisch die Wirkung, welche die Rotation einer Kugel in einem magnetischen Felde, hervorgerufen durch ein Solenoid, hervorbringt, einmal, wenn die Rotationsaxe mit der Axe des Feldes zusammenfällt, und andererseits, wenn dieselbe normal zu den Kraftlinien steht; zweitens die Bewegung eines Cylinders im magnetischen Felde, wenn die Cylinderaxe zugleich Rotationsaxe und Axe des das Feld erzeugenden Solenoids ist. Die Theorie zeigt, dass die Dämpfung von der ganzen Masse des Körpers abhängig und dem Quadrate der Intensität des Feldes proportional ist.

Hae.

Vaschy. Sur quelques erreurs admises comme vérités en électromagnétisme. C. R. **123**, 1059-1061.

Vaschy. Méthodes de calcul en électromagnétisme. C. R. **123**, 1261-1263.

Bei der Anwendung des Princips der Erhaltung der Energie bleiben bei manchen Autoren wesentliche Aenderungen der Energie unbeachtet. So darf bei der Berechnung der Energie eines von Strömen erzeugten Magnetfeldes der Zuwachs der Wärmeenergie im Stromkreise nicht unberücksichtigt bleiben. Eine Reihe von Fehlern dieser Art wird besprochen.

Die zweite Note enthält die richtige Ableitung der Formeln für die Energie auf Grund der Maxwell'schen Theorie. Gt.

A. Schuster. On electric currents induced by rotating magnets and their application to some phenomena of terrestrial magnetism. Terrestrial Magnetism **1**, 1-17.

Eine Theorie über die Ursache des Erdmagnetismus ist erst aufzustellen möglich nach Untersuchung der Frage, ob der Weltraum als leitend oder nicht leitend anzusehen ist. Zur Lösung dieser Frage lässt der Verf. eine magnetische Kugel im leitenden Medium rotiren, stellt das Potential der in letzterem inducirten Ströme durch Kugelfunctionen dar und gewinnt so die Möglichkeit, die Wirkungen derselben auf die Kugel zu erörtern. Diese Wirkung besteht 1) in einer Verminderung der kinetischen Energie des rotirenden Körpers, 2) in einer Verschiebung der magnetischen Axe gegen die Rotationsaxe. Ausserdem ist diese Wirkung eine Function der Leitfähigkeit des umgebenden Mediums. Sie ist ein Maximum, wenn die Leitfähigkeit $2,4 \times 10^{-9}$ derjenigen des Quecksilbers ist. Wird die Leitfähigkeit grösser als 10^{-10} CGS-Einheiten, so ist der Effect derselbe, als ob erstere unendlich gross wäre, d. h. der Effect nähert sich der Null. Rn.

Adolf Schmidt. Mitteilungen über eine neue Berechnung des erdmagnetischen Potentials. Münch. Abh. **19**, 1-66.

Der Verf. knüpft an seine im 12. Jahrg. des Archivs der deutschen Seewarte veröffentlichten mathematischen Entwickelungen zur allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus an. Die bisherigen, durch die Arbeiten von Gauss eingeleiteten Versuche, die Aeusserungen der erdmagnetischen Kraft durch einen analytischen Ausdruck darzustellen, weisen keine in entsprechendem Masse wachsende Annäherung an die Wirklichkeit auf. Eine Verbesserung der Theorie ist daher erforderlich, und diese ist in zwei Richtungen möglich. Einerseits ist die Abplattung der Erde von der Kugelgestalt zu berücksichtigen; andererseits müssen die bisher festgehaltenen Voraussetzungen aufgegeben werden, dass die erdmagnetische Kraft ein Potential besitzt, und dass dieses seinen Ursprung ausschliesslich im Erdinnern hat. Hiernach ergiebt sich als wichtigste Aufgabe die, eine von jeder physikalischen Hypothese freie, analytische Darstellung von der Verteilung der erdmagnetischen Kraft auf der Erdoberfläche zu geben. Von ihr aus kann dann die Frage entschieden werden, ob die ganze an der Erdoberfläche wirkende Kraft ein Potential besitzt, und es kann weiter, wenn ein Potential aufgefunden wird, derjenige Teil, der seinen Ursprung ausserhalb der Erde hat, von dem gesondert werden, dessen Ursachen im Innern derselben zu suchen sind.

Dem von Gauss gegebenen Vorbilde folgend, hat man die Reihen gewöhnlich nach den Functionen $P_m^n(\cos v)\cos m\lambda$ und $P_m^n(\cos v)\sin m\lambda$ entwickelt. Der Umstand indessen, dass diese Functionen von verschie-

dener Grössenordnung sind, führt bei numerischen Rechnungen zu störenden Uebelständen. Hierdurch veranlasst, hat der Verf. an Stelle der P_m^n gewisse Vielfache derselben $R_m^n = r_m^n P_m^n$ eingeführt, die so gewählt sind, dass bei allen der quadratische Mittelwert von $R_m^n \cos m\lambda$ und $R_m^n \sin m\lambda$ auf der ganzen Kugelfläche den Wert Eins erreicht.

$$R_m^n(\cos v) = r_m^n P_m^n(\cos v) = \sqrt{(2n+1)a_m^n}\, P_m^n(\cos v).$$

Der Gang der Untersuchung ist nun folgender: Die beobachteten Werte der erdmagnetischen Elemente bilden die empirische Grundlage der ganzen Rechnung.

Aus ihnen werden unter Berücksichtigung der sphäroidischen Gestalt der Erde die Kraftcomponenten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ berechnet, indem man $\bar{x}\sin v$, $\bar{y}\sin v$ und $\bar{z}$ durch Reihen, die nach Kugelfunctionen der Argumente v und λ fortschreiten, darstellt.

$$\bar{x}\sin v = \sum R_m^n (B_m^n \cos m\lambda + C_m^n \sin m\lambda),$$
$$\bar{y}\sin v = \sum R_m^n (D_m^n \cos m\lambda + E_m^n \sin m\lambda),$$
$$\bar{z} = \sum R_m^n (j_m^n \cos m\lambda + k_m^n \sin m\lambda).$$

Die Bedingungen, denen diese Gleichungen unterliegen, sind anzugeben.

Aus der für $\bar{y}\sin v$ gefundenen Entwickelung ergiebt sich

$$W = \psi(v) - (D_0^0 + D_0^1 R_0^1 + \ldots)\lambda + \sum R_m^n (1/m)(E_m^n \cos m\lambda - D_m^n \sin m\lambda)$$
$$= \psi(v) - \sin^2 v \cdot \varphi(v)\lambda + W_1. \qquad (m > 0)$$

Aus $\bar{x}\sin v$ folgt, wenn $\int_0^v \sin^{m-1} v\, dv = \Pi_m$ und durch gewisse Gleichungssysteme eine Reihe neuer Coefficienten Π_m, G_m^n, H_m^n eingeführt wird:

$$U = (\pi_1 \Pi_1 + \pi_2 \Pi_2 + \ldots) + \sum R_m^n (G_m^n \cos m\lambda + H_m^n \sin m\lambda)$$
$$= f(v,\lambda) + U_0.$$

Ergeben sich U und W als identisch, so stellen sie bis auf einen constanten Factor das Potential V des Erdmagnetismus an der Erdoberfläche dar; fallen U und W verschieden aus, so ist damit der Beweis geliefert, dass die magnetische Kraft an der Erdoberfläche kein Potential besitzt, woraus auf die Existenz von elektrischen Strömen, die senkrecht durch diese Fläche hindurchgehen, geschlossen werden kann. Die auf die Flächeneinheit bezogene Intensität dieser Ströme ergiebt sich eindeutig aus der Differenz $(W - U)$.

Nachdem U und W berechnet sind, findet man das Potential, wenn b der Polarradius der Erde ist:

$$V = \tfrac{1}{2} b (U_0 + W_0) = b \sum R_m^n (g_m^n \cos m\lambda + h_m^n \sin m\lambda),$$

die Stromdichte der die Erdoberfläche vertical durchdringenden Strömung:

$$i = \frac{1}{4\pi\alpha\beta b \sin v} \cdot \frac{\partial^2 (W - U)}{\partial v\, \partial\lambda}.$$

Schliesslich ergeben sich die Coefficienten des Potentials innerer Kräfte $V_i = b\Sigma R_m^n(c_m^n \cos m\lambda + s_m^n \sin m\lambda)$ und diejenigen des aus äusseren Kräften entspringenden $V_a = b\Sigma R_m^n(\gamma_m^n \cos m\lambda + \sigma_m^n \sin m\lambda)$ durch die Gleichungen:

$$c_m^n = \varepsilon_m^n g_m^n - \delta_m^n j_m^n, \quad s_m^n = \varepsilon_m^n h_m^n - \delta_m^n k_m^n,$$

$$\gamma_m^n = g_m^n - c_m^n, \qquad \sigma_m^n = h_m^n - s_m^n,$$

in denen

$$\delta_m^n = 1 : \left(n \frac{\pi_m^n}{p_m^n} + (n+1) \frac{\varkappa_m^n}{q_m^n} \right) \quad \text{und} \quad \varepsilon_m^n = n \frac{\pi_m^n}{p_m^n} \delta_m^n$$

von der Abplattung der Erde abhängige Constanten sind.

Dieser Formelzusammenstellung wird noch eine Entwickelung angefügt, die aus folgender Ueberlegung entspringt.

Es ist möglich, auf einer der Erdoberfläche unendlich benachbarten, inneren Fläche eine eindeutig bestimmte Verteilung von freiem Magnetismus anzunehmen, der in der Erdoberfläche selbst und im ganzen äusseren Raume dieselben magnetischen Wirkungen entsprechen, wie sie die thatsächlich vorhandenen, als Ursache von V_i erkannten Agentien ausüben; ebenso ist es möglich, die äusseren Kräfte, die in der Erdoberfläche das Potential V_a haben, durch eine bestimmte Magnetisirung einer ihr unendlich nahen äusseren Fläche zu ersetzen, soweit allein ihre Wirkungen im inneren Raume und in der Oberfläche in Betracht kommen. Derselbe Erfolg lässt sich aber auch durch eine Anordnung von elektrischen Strömen erreichen, die parallel der Erdoberfläche eine unendlich benachbarte Fläche erfüllen.

Die vollständige Lösung dieser Aufgaben ist enthalten in den Gleichungen

$$\varrho_i = \frac{1}{4\pi\gamma} \Sigma \frac{1}{\delta_m^n} R_m^n (c_m^n \cos m\lambda + s_m^n \sin m\lambda),$$

$$\varrho_a = \frac{1}{4\pi\gamma} \Sigma \frac{1}{\delta_m^n} R_m^n (\gamma_m^n \cos m\lambda + \sigma_m^n \sin m\lambda),$$

$$S_i = \frac{b}{4\pi} \Sigma \frac{1}{\varepsilon_m^n} R_m^n (c_m^n \cos m\lambda + s_m^n \sin m\lambda),$$

$$S_a = -\frac{b}{4\pi} \Sigma \frac{1}{1-\varepsilon_m^n} R_m^n (\gamma_m^n \cos m\lambda + \sigma_m^n \sin m\lambda).$$

Im zweiten Teile der Abhandlung werden die gewonnenen theoretischen Entwickelungen auf den thatsächlichen Zustand der erdmagnetischen Kraft angewandt. Aus den hierdurch gewonnenen Resultaten wird zum Schluss noch eine Reihe von Folgerungen, namentlich in Bezug auf die Coefficienten der Reihenentwickelung gezogen und der künftigen Forschung die Aufgabe vorgezeichnet. Rn.



A. Schmidt, Gotha. **Die Verteilung des erdmagnetischen Potentials in Bezug auf beliebige Durchmesser der Erde.** Terrestrial Magnetism 1, 18-27.

W. v. Bezold hatte darauf aufmerksam gemacht, dass die Mittelwerte, die das magnetische Potential auf den einzelnen Parallelkreisen annimmt, mit sehr grosser Annäherung dem Cosinus des Nordpolabstandes ω proportional verlaufen. Der Verf. findet die Ursache dieser kleinen Differenzen in dem zufälligen Umstande begründet, dass v. B. die von Quintus Icilius nach seiner Rechnung gezeichnete Karte benutzte, und dass aus der geographischen Verteilung der Werte des erdmagnetischen Potentials kein Argument zu Gunsten der Annahme hergeleitet werden kann, dass der Hauptteil der erdmagnetischen Kraft in irgend einer Beziehung zur Rotation der Erde stehe. Dieser Satz darf jedoch nicht umgekehrt werden. Es sei

$$V = V_n + V_a = R\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{m=0}^{m=n} P_m^n(\cos u)[G_m^n \cos m\lambda + H_m^n \sin m\lambda].$$

V_n enthält die Glieder, die von der geographischen Länge λ unabhängig sind, V_a alle übrigen. Setzt man $V:R = K\cos u + f(u) + \varphi(u,\lambda)$, so ist $V_n = R(K\cos u + f(u))$, $V_a = R\cdot\varphi(u,\lambda)$. Treten an Stelle der gewöhnlichen geographischen Coordinaten (β,λ) andere (β',λ'), so wird $V = K_1\cos u' + f_1(u') + \varphi_1(u',\lambda')$. Die zu erörternde Frage lässt sich nun kurz so stellen: Für welchen Durchmesser der Erde ist $f_1(u')$ in der Gesamtheit seiner Werte auf der ganzen Erde ein Minimum? Als „Gesamtheit seiner Werte" gilt das über die ganze Erdoberfläche genommene Integral $\int f_1(u')f_1(u')d\omega = 4\pi F$, wenn F der quadratische Mittelwert von $f_1(u')$ auf der Kugelfläche ist.

Zur Lösung dieser Frage lässt Verf. an Stelle der Kugelfunctionen P_m^n durch Hinzufügung passender constanter Factoren andere Functionen R_m^n treten, die so gewählt sind, dass für jeden Wert von n und m der Ausdruck $R_m^n \cos m\lambda$ und, ausser für $m = 0$, auch $R_m^n \sin m\lambda$ auf der Kugelfläche den Mittelwert 1 besitzt. Es wird dann

$$(1)\quad V = R\Sigma_n\Sigma_m(g_m^n c_m^n + h_m^n s_m^n),$$

wo zur Abkürzung $R_m^n(\cos u)\cos m\lambda = c_m^n$, $R_m^n(\cos u)\sin m\lambda = s_m^n$ gesetzt wird.

Die Lösung der Aufgabe ist jetzt auf eine Coordinatentransformation zurückgeführt, durch welche der für V angegebene Ausdruck (1) in die Form (2) $V = R\Sigma_n\Sigma_m(j_m^n \gamma_m^n + k_m^n \sigma_m^n)$ übergeht, worin (γ_m^n, σ_m^n) den (c_m^n, s_m^n) entsprechende Abkürzungen mit gestrichenem u und λ sind. Nach dieser Transformation ist der Mittelwert von $f_1(u')$, d. h. von $(j_0^2\gamma_0^2 + j_0^3\gamma_0^3 + \cdots)$, zu bilden, dessen Quadrat $FF = j_0^2 j_0^2 + j_0^3 j_0^3 + \cdots$ ist, so dass nur die Berechnung der

Coefficienten j_0^n erforderlich ist. Es ergiebt sich die Formel $j_0^n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \Sigma m(g_m^n C_m^n + h_m^n S_m^n)$. Mit Hülfe derselben hat Verf. den Wert von F für 216 Punkte berechnet; er teilt diese Werte für 108 Punkte in einer Tabelle mit, die fünf Minima erkennen lässt, und aus welcher der Verf. das im Anfang mitgeteilte Resultat schliessen zu müssen glaubt.

Rn.

A. V. Bäcklund. **En undersökning inom theorien för de elektriska strömmarne.** Stockh. Öfv. **58,** 3-23.

Der Verf. setzt hier die Untersuchungen fort, welche er früher unter demselben Titel veröffentlicht hat (s. F. d. M. **25,** 1716, 1893-94; **26,** 1001, 1895). Der gegenwärtige Aufsatz enthält Betrachtungen über den Zusammenhang zwischen Sonnenwärme und Sonnenmagnetismus. sowie auch fortgesetzte Untersuchungen über die erdmagnetischen Erscheinungen, namentlich über die Erklärung der aussergewöhnlichen Störungen durch Veränderungen in den elektrischen Strömen der Sonne.

Bdn.

Chree. **Comparison and reduction of magnetic observations. — Report of Committee.** Brit. Ass. Rep. 1896, 231-241.

Wenn H_0 und H_{24} mittlere Werte der Horizontalkraft zur ersten und zur zweiten Mitternachtszeit aus einer ausgewählten Reihe von Tagen bedeuten, so wird H_{24}—H_0 als die nicht cyklische Wirkung oder Variation der Horizontalkraft bezeichnet, und eine ähnliche Definition ist in dem Falle irgend eines anderen Elementes anwendbar. Der gegenwärtige Bericht handelt von den nicht cyklischen Wirkungen auf der Warte in Kew während der ausgewählten „ruhigen“ Tage der sechs Jahre 1890 bis 1895; er ist von Chree verfasst.

Gbs. (Lp.)

F. H. Bigelow, A. Schmidt (Gotha). **On the best form for the components of systems of deflecting forces.** Terrestrial Magnetism. **1,** 32-39.

Eine Aufforderung an die Observatorien, ihre Beobachtungen in einer Form zu veröffentlichen, die eine möglichst directe und bequeme Verwendung bei theoretischen Untersuchungen gestattet. Ueber diese Form sind die Ansichten der Verf. geteilt.

B. will 1) das Coordinatensystem nach dem magnetischen Meridiane orientirt wissen, 2) den polaren Coordinaten des Kraftvectors den Vorzug vor seinen rechtwinkligen Componenten geben.

S. dagegen verlangt 1) die Registrirung der Erscheinungen in einem festen, nach mathematischen Rücksichten gewählten Coordinatensystem, also nach dem astronomischen; 2) hält er es für sehr nützlich, sowohl polare als rechtwinklige Coordinaten anzugeben; wenn man sich aber

nur auf eine Darstellung beschränken will, den rechtwinkligen den Vorzug zu geben. Rn.

Weitere Litteratur.

G. Benischke. Magnetismus und Elektricität mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der Praxis. Berlin: Springer; München: Oldenbourg. XIII + 272 S. 8°.

de Colnet d'Huart. Les équations de la théorie de l'électricité et de la lumière de Maxwell et celles de la théorie des courants de M. Boltzmann déduites de six équations qui régissent l'équilibre contraint d'une molécule. Luxembourg Inst. **24,** 28-70.

A. E. Dolbear. Mechanical conceptions of electrical phenomena. Nature **55,** 65-69.

P. Drude. Zur Theorie stehender elektrischer Drahtwellen. Leipz. Abh. **23,** 63-168.

H. Ebert. Magnetische Kraftfelder. Die Erscheinungen des Magnetismus, Elektromagnetismus und der Induction, dargestellt auf Grund des Kraftlinien-Begriffes. 1. Teil. Leipzig: J. A. Barth. XVIII + 223 S. Mit 2 Tafeln. 8°.

M. Faraday. Experimentaluntersuchungen über Elektricität. I. und II. Reihe (1832). Herausgegeben von A. J. von Oettingen. Leipzig: W. Engelmann. 96 S. 8°. (Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. Nr. 81.)

R. Ferrini. Elettricità e magnetismo. Nozioni fondamentali dell'elettrotecnica. 2ª ed. Milano: Hoepli. 530 S. 8°.

R. Ferrini. Fisica tecnologica. Elettricità e magnetismo. Milano: Hoepli. 544 S. 8°.

A. Föppl. Die Geometrie der Wirbelfelder. Ergänzung zu dem Buche des Verfassers über die Maxwell'sche Theorie der Elektricität. Leipzig: B. G. Teubner.

G. C. Foster. Elementary treatise on electricity and magnetism, founded on Joubert's „Traité élémentaire d'électricité". London: Longmans, Green, and Co. XIX + 552 S. [Nature **54,** 97-98.]

J. von Geitler. Schwingungsvorgang in complicirten Erregern Hertz'scher Wellen. (II. Mitteilung.) Wiedemann Ann. **57,** 412-429.

Abdruck aus Wien. Ber. **104;** Bericht in F. d. M. **26,** 1017, 1895.

E. Gérard. Mesures électriques. Leçons professées, à l'Institut électrotechnique Montefiore annexé à l'Université de Liége. Paris: Gauthier-Villars et Fils. VII + 457 S. 8°.

F. Kerntler. Die elektrodynamischen Grundgesetze und das eigentliche Elementargesetz. Budapest. Selbstverlag. VII + 68 S. 8°.

Fr. Kolacek. Ueber Berechnung der Inductionscoefficienten langer Spulen. Prag. Ber. 1896, No. 14. 35 S.

O. J. Lodge. Neueste Anschauungen über Elektricität. Uebersetzt von Anna von Helmholtz und Estelle du Bois-Reymond. Hrsg. durch R. Wachsmuth. Leipzig: J. A. Barth. XV + 539 S. 8°.

H. J. Oosting. Einige graphische Darstellungen aus der Elektricitätslehre. Poske Z. **9**, 232-235.

M. Planck. Absorption und Emission elektrischer Wellen durch Resonanz. Wiedemann Ann. **57**, 1-14.

Abdruck aus Berl. Ber. 1895; vergl. F. d. M. **26**, 1013, 1895.

Lord Rayleigh. The electrical resistance of alloys. Nature **54**, 154-155.

W. G. MacMillan, R. H. Housman. The electrical resistance of alloys. Nature **54**, 172-173.

J. J. Thomson. Elements of the mathematical theory of electricity and magnetism. Cambridge: University Press. VI + 510 S. (1895). [Nature **54**, 97-98.]

E. Wiechert. Die Theorie der Elektrodynamik und die Röntgen'sche Entdeckung. Königsberg: W. Koch. 48 S. gr. 4°. (Aus „Abhandlungen der physik.-ökonom. Gesellsch. zu Königsberg".)

Kapitel 4.

Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

E. Mach. Die Principien der Wärmelehre. Historisch-kritisch entwickelt. Leipzig: J. A. Barth. VIII + 472 S. 8°.

L. Boltzmann. Ein Wort der Mathematik an die Energetik. Wiedemann Ann. **57**, 39-71.

Der Verf. übt Kritik an den Bestrebungen der neueren Energetiker, um zu zeigen, dass deren Anschauungen keineswegs geeignet wären, an Stelle der bisher beobachteten Methoden der theoretischen Physik zu treten.

Er wendet sich zunächst gegen die Art, wie Helm (Schlömilch Z. **35**, 307; F. d. M. **22**, 895, 1890) die Bewegungsgleichungen aus dem Energieprincip ableitet: die Deduction ist nur dadurch möglich geworden, dass der Unterschied zwischen Differentialen und Variationen fallen gelassen ist. An einigen speciellen Beispielen wird dann gezeigt, wie die Ostwald'sche Behandlungsweise der Gleichungen der Mechanik (Lehrbuch der allgemeinen Chemie, **2**, 1-39, und viele Abhandlungen in den Ber. d. K. sächsischen Ges. d. W. 1891-1895) die Bedenken des Mathematikers herausfordern muss. Alle solche Begründungen der Mechanik, auch wenn sie einwurfsfrei gegeben werden, können nicht leisten, was die Energetik verspricht; denn sie können erstens der Hypo-

these nicht entraten, dass die Körper aus materiellen Punkten bestehen, und sie fördern zweitens unsern Einblick in die Principien der Mechanik gar nicht. Die neueste Anschauung von Ostwald aber, dass die Energie das eigentlich Seiende sei und keines Trägers bedürfe, führt nach dem Verf. zu Widersprüchen, wenn man sie auf die kinetische Energie anwendet.

Weiter würdigt der Verf. die Bedeutung der Resultate, die durch die energetische Betrachtungsweise auf dem Gebiete der Thermodynamik hervorgebracht sind. Die Zerlegung der Energie in zwei Factoren ist am ausführlichsten dargestellt in Ostwald's „Lehrbuch der allgemeinen Chemie“, **2**, 490 ff. Auf unbestimmter Grundlage werden dort Untersuchungen angestellt, die unklar sind und, wie der Verf. an mehreren Beispielen zeigt, zu unrichtigen Ergebnissen führen. Die Verallgemeinerung und Variirung der Gibbs'schen Theoreme durch die Energetiker ist in Wahrheit eine „Verschlechterung“, die schon zu zahlreichen Missverständnissen geführt hat. Es ist auch nicht zutreffend, wenn Ostwald den zweiten Hauptsatz mit dem Satze identificirt, dass, wenn zwei Intensitäten einer dritten gleich sind, sie unter einander gleich sein müssen, und wenn er die Dissipation der Energie ganz auf Rechnung der strahlenden Energie setzt.

Nachdem noch der Vortrag kritisch beleuchtet worden ist, den Ostwald 1895 auf der Lübecker Naturforscherversammlung über den wissenschaftlichen Materialismus gehalten hat, kommt der Verf. zu dem Schluss: Es ist in erster Linie eine möglichst hypothesenfreie Naturbeschreibung anzustreben; dies geschieht am klarsten in der von Kirchhoff, Clausius, v. Helmholtz, Gibbs, Hertz etc. ausgebildeten Form. Die Ausdrucksweise der Energetik hat sich hierzu wenig geeignet erwiesen; auch ist deren pädagogischer Wert zu bestreiten, und ihre Weiterentwicklung in der gegenwärtigen Form wäre für die präcise Naturauffassung geradezu verhängnisvoll. Neben der allgemeinen theoretischen Physik sind die Bilder der mechanischen Physik auch ferner aufrecht zu erhalten; denn sie sind nützlich für die Forschung wie für die Ordnung, übersichtliche Darstellung und das gedächtnismässige Festhalten der Ideen. Sbt.

M. Planck. Gegen die neuere Energetik. Wiedemann Ann. **57**, 72-78.

Der neueren Energetik, die in anspruchsvoller Weise den Kampf mit der mechanischen Naturanschauung aufnimmt, fehlt nach dem Verf. jede feste Grundlage, und ihre Beweise sind Scheinbeweise. An dem Beispiel der Volumenenergie $\int p\,dv$ wird gezeigt, dass dieser Begriff, der zu den Hauptbegriffen der Energetik gehört, mathematisch unhaltbar ist: denn wenn man ein Gas durch eine Reihe von Zustandsänderungen, z. B. durch einen Carnot'schen Kreisprocess, zum anfänglichen Zustande zurückführt, so müsste die Volumenenergie wieder die alte sein, während doch jenes Integral nicht unverändert ist, da das Gas je nach den Umständen positive oder negative Arbeit leistet.

Eine „von ihren augenblicklichen Auswüchsen befreite“, correcte

Energetik könnte nur auf ein sehr beschränktes Gebiet der Naturerscheinungen Anwendung finden, nämlich auf alle diejenigen in endlichen Zeiten sich abspielenden Vorgänge, die so beschaffen sind, dass sie auch in umgekehrter Richtung genau ebenso verlaufen können. Sbt.

G. Helm. Zur Energetik. Wiedemann Ann. **57**, 646-659.

Der Verf. giebt zu, dass er in seiner von Boltzmann beanstandeten Ableitung der mechanischen Gleichungen einen formalen Fehler begangen hat, hält aber die Behauptung aufrecht, dass die dynamischen Differentialgleichungen aus dem Energieprincip gefolgert werden können. Er verteidigt sich ferner gegen den Vorwurf, dass er (in seiner „Mathem. Chemie", Leipzig 1894, und in der Beilage zu Wiedemann Ann. **55**, 1895) die Gibbs'schen Theorien nicht genau wiedergegeben habe, und kommt zu dem Schluss: „Boltzmann hat also Recht, wenn er sagt, dass meine von ihm angeführten Formeln bei irreversiblen Processen nicht mit gewissen Gibbs'schen Sätzen identisch sind; aber sie leisten dasselbe wie letztere".

Dem Einwurf von Planck hält er entgegen, dass pdv zwar Energie sei, aber nicht „Eigenenergie", sondern „ein analytischer Bestandteil des Differentials der Eigenenergie, der sich während eines Kreisprocesses zu Gunsten anderer Bestandteile verändern kann". Sbt.

W. Ostwald. Zur Energetik. Wiedemann Ann. **58**, 154-167.

In dieser Erwiderung auf die vorerwähnten Schriften von Boltzmann und Planck erklärt der Verf. ausdrücklich, dass er zur Zeit aus besonderen Gründen nicht auf alle, namentlich nicht die rechnerischen Einwände Boltzmann's eingehen könne. In der That beschränkt er sich im wesentlichen darauf, allgemeine Gesichtspunkte hervorzuheben. Er legt die geschichtliche Entwickelung der „bewussten" aus der „unbewussten" Energetik dar, betont nochmals die Unzulänglichkeit der Mechanistik und den erkenntnistheoretischen Wert der Energetik. Wenn es ihm nicht gelungen ist, andere von deren Bedeutung zu überzeugen, so liegt seiner Ansicht nach der Grund darin, dass seine Ausdrucks- und Vorstellungsweise unvollkommen und in manchen Punkten fehlerhaft gewesen sei. Die Thatsache aber, dass seine Anschauungen zur Auffindung einer Anzahl neuer wissenschaftlicher Ergebnisse geführt haben, lässt ihm die Ueberlegenheit der energetischen gegenüber den kinetischen Theorien unzweifelhaft erscheinen.

Um den Einwand von Planck zu entkräften, wendet Verf. dessen Deduction Wort für Wort auf die Wärmeenergie an statt auf die Volumenenergie und hebt hervor, dass die Berechtigung, ein häufig auftretendes Glied der energetischen Gleichungen mit einem besonderen Namen zu belegen, nicht an die Frage geknüpft sei, ob das Integral dieser Grösse nur von den äussersten Werten oder auch vom Wege abhängt. Sbt.

W. Ostwald. Die Ueberwindung des wissenschaftlichen Materialismus. Verh. Naturf. Ges. Lübeck 1, 155-168 (1895).

Rede zu Gunsten der energetischen Weltauffassung gegenüber der mechanistischen oder materialistischen. Lp.

L. Boltzmann. Zur Energetik. Wiedemann Ann. 58, 595-598.

Was die Beziehungen der Energetik zur Mechanik anbetrifft, so scheint durch die Erwiderung von Helm die Lage geklärt zu sein. Wie Planck und Helm gezeigt haben, lassen sich die Bewegungsgleichungen für ein System materieller Punkte aus dem Energieprincip unter der Annahme gewinnen, dass dieses für jeden der Punkte in jeder Coordinatenrichtung gilt. Wenn aber Helm die Lagrange'schen Gleichungen und die ganze übrige Mechanik durch Transformation der rechtwinkligen Coordinaten materieller Punkte und der auf diese wirkenden Kräfte ableitet, so schliesst dies die Voraussetzung ein, dass die Körper Systeme materieller Punkte seien, und dies versetzt offenbar auf den Boden der alten Atomistik. Will die Energetik solche Hypothesen nicht anerkennen, so muss sie ganz andere Wege einschlagen. Sie scheint aber noch weit davon entfernt zu sein, alle sich dann aufdrängenden Fragen in befriedigender Weise zu lösen.

Auch hinsichtlich der thermodynamischen Beziehungen ist Verf. mit der Erklärung von Helm zufrieden. „Es wäre aber erst möglich, festzustellen, was die Energetik den Gibbs'schen Lehrsätzen wesentlich Neues hinzugefügt hat, wenn eine klare und einwurfsfreie Darstellung der Wärmetheorie, Chemie und Elektricitätslehre vom energetischen Standpunkte wenigstens in den ersten Grundzügen gelungen wäre."

Aus der Erwiderung Ostwald's glaubt der Verf. herauszulesen, dass jener in der Mechanik nicht die Energie als das ursprünglich Gegebene betrachtet, sondern von der Masse ausgeht. — Zum Schluss wird die Atomistik gegen den Vorwurf der Unfruchtbarkeit verteidigt. Sbt.

E. Zermelo. Ueber einen Satz der Dynamik und die mechanische Wärmetheorie. Wiedemann Ann. 57, 485-494.

In seiner Preisschrift über das Dreikörperproblem (Acta Math. **13**, 1-270) hat Poincaré folgenden Satz bewiesen: In einem System von materiellen Punkten muss unter Einwirkung von Kräften, die allein von der Lage im Raume abhängen, im allgemeinen ein einmal angenommener, durch Configuration und Geschwindigkeiten charakterisirter Bewegungszustand im Laufe der Zeit, wenn auch nicht genau, so doch mit beliebiger Annäherung noch einmal, ja beliebig oft wiederkehren, vorausgesetzt, dass die Coordinaten sowie die Geschwindigkeiten nicht ins Unendliche wachsen.

Aus diesem Satze zieht der Verf. die Folgerung: „In einem System beliebig vieler materieller Punkte, deren Beschleunigungen nur von ihrer Lage im Raume abhängen, giebt es keine irreversiblen Vorgänge für alle

Anfangszustände, die ein noch so kleines Gebiet von endlicher Ausdehnung erfüllen, falls sowohl die Coordinaten als die Geschwindigkeiten der Punkte endliche Grenzen niemals überschreiten." Dieser Satz gilt allgemein für beliebige conservative Systeme, insbesondere auch für solche Systeme, wie sie in der kinetischen Gastheorie angenommen werden. Danach scheint an der Allgemeingültigkeit des zweiten Hauptsatzes nicht festgehalten werden zu können, es sei denn, dass man die unwahrscheinliche und der natürlichen Auffassung widerstrebende Annahme macht, „dass trotz ihrer geringeren Anzahl gerade jene zu irreversiblen Vorgängen führenden Anfangszustände in der Natur einmal verwirklicht seien, während die anderen, mathematisch betrachtet, wahrscheinlicheren thatsächlich nicht vorkämen." Für den Verf. ergiebt sich hieraus die Notwendigkeit, entweder dem Carnot-Clausius'schen Princip oder aber der mechanischen Grundansicht eine principiell andere Fassung zu geben. Unmöglich erscheint es ihm, auf Grund der bisherigen Theorie ohne Specialisirung der Anfangszustände eine mechanische Ableitung des zweiten Hauptsatzes durchzuführen, und ebenso unmöglich, unter den gleichen Voraussetzungen das Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung als den nach einiger Zeit sich regelmässig einstellenden stationären Endzustand zu erweisen. Sbt.

L. Boltzmann. Entgegnung auf die wärmetheoretischen Betrachtungen des Hrn. E. Zermelo. Wiedemann Ann. **57**, 773-784.

E. Zermelo. Ueber mechanische Erklärungen irreversibler Vorgänge. Eine Antwort auf Hrn. Boltzmann's „Entgegnung". Wiedemann Ann. **59**, 793-801.

Boltzmann erkennt den Poincaré'schen Satz als richtig an, giebt aber nicht zu, dass die Anwendung von Zermelo auf die Wärmetheorie richtig sei. Das Maxwell'sche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung unter Gasmolecülen besagt nur, dass bei einer grossen Zahl von Molecülen alle übrigen Zustände im Vergleich zu der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung so unwahrscheinlich sind, dass sie praktisch nicht in Betracht kommen. Während Zermelo sagt, die Anzahl derjenigen Zustände, welche schliesslich zum Maxwell'schen führen, sei verschwindend gegenüber der aller möglichen Zustände, behauptet der Verf., dass überhaupt die weitaus meisten der gleich möglichen Zustände „Maxwell'sche" seien und dagegen die Zahl der wesentlich von der Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung abweichenden nur verschwindend klein sei. Analoga bieten die Methode der kleinsten Quadrate und das Würfelspiel. — Der Schluss, dass an den mechanischen Grundanschauungen irgend etwas zu ändern sei, oder dass diese gar aufgegeben werden müssten, darf nicht gezogen werden. Er wäre nur berechtigt, wenn sich aus jenen Anschauungen ein Widerspruch mit der Erfahrung ergäbe, und dies wäre der Fall, wenn die Zeitdauer der Periode, innerhalb welcher der alte Zustand des Gases nach dem Poincaré'schen Satze eintreten muss, eine beobachtbare Länge hat. Eine im Anhange

beigefügte Rechnung zeigt, dass die Länge dieser Periode „jeder Beobachtbarkeit spottet“.

Auch der zweite Hauptsatz ist nach den moleculartheoretischen Anschauungen lediglich ein Wahrscheinlichkeitssatz. „Wenn man die Wärme als eine Bewegung von Molecülen auffasst, welche gemäss den allgemeinen Gleichungen der Mechanik stattfindet, und annimmt, dass sich der Complex von Körpern, den wir wahrnehmen, jetzt gerade in einem sehr unwahrscheinlichen Zustande befindet, so ergiebt sich ein Satz, welcher für alle bisher betrachteten Erscheinungen mit dem zweiten Hauptsatze übereinstimmt.“ Eine Antwort auf die Frage, warum die Körper sich gerade in einem sehr unwahrscheinlichen Zustande befinden sollen, darf von der Naturwissenschaft nicht erwartet werden.

Die Gastheorie ist nicht zu verwechseln mit der Kraftcentratheorie, d. h. mit der Hypothese, dass sich alle Naturerscheinungen durch Centralkräfte zwischen materiellen Punkten erklären lassen.

Zermelo ist von den Ausführungen Boltzmann's nicht überzeugt; er sieht vielmehr darin mehr eine Bestätigung als eine Widerlegung seiner Ansichten. Sbt.

G. K. Suslow. Die Helmholtz'schen Monocykeln. Moskau 1896. Abh. Phys. Abt. Ges. d. Freunde d. Naturw., Anthropologie u. Ethnographie, 8. Sep. 34 S.

Es werden die Helmholtz'schen Resultate von etwas anderem Standpunkte dargestellt. In dem ersten Kapitel werden die Grundgleichungen der Thermodynamik angegeben und die polycyklischen Bewegungen charakterisirt; das zweite Kapitel ist den Monocykeln gewidmet, die für die Thermodynamik als Analogie dienen können, und die der Verf. „thermische Monocykeln“ nennt. In dem dritten Kapitel ist die Lösung der Frage gegeben über die Verwandlung eines gegebenen Polycykels in ein thermisches Monocykel. Diese Verwandlung kann in zweifacher Weise geschehen. Zum Schluss betrachtet der Verf. zwei Beispiele, und zwar zuerst zwei symmetrische Gyroskope in Cardani'schen Aufhängungen und dann zwei materielle Punkte, die mittelst eines unausdehnbaren Fadens verbunden sind. Sind φ, ψ, θ resp. $\varphi_1, \psi_1, \theta_1$ die Euler'schen Winkel für die beiden Gyroskope, so ist die Entropie des Systems gleich $\log T + F(\varphi, \varphi_1)$, worin T die lebendige Kraft bedeutet. Ghr.

G. Darzens. Sur l'entropie moléculaire. C. R. 123, 940-943.

Versteht man unter Molecularentropie das Product aus dem Moleculargewicht π mit der Entropie $\int \frac{dq}{T}$, so ergiebt sich unter Benutzung bekannter, für die kritischen Daten geltender Gesetze, dass der Unterschied der Entropien bei zwei bestimmten Zuständen für alle Körper ähnlicher chemischer Constitution gleich ist. Br.

E. Ariès. Chaleur et énergie. Paris: Masson & Cie. 168 S. 16mo.

P. Duhem. Sur les déformations permanentes et l'hystérésis. Belg. Mém. c. et sav. étr. **54.** (Trois Mém. de 62, 86, 56 p. in 8°.)

I. Ist $F(x, T)$ das innere thermodynamische Potential eines Systems, das durch die absolute Temperatur T und eine Variable x definirt ist und einer äusseren Wirkung X unterliegt, so wird die innere Energie $U(x, T)$ des Systems durch die Gleichheit gegeben:

$$(1)\quad EU(x, T) = F(x, T) - T\frac{\partial F(x, T)}{\partial T},$$

während die Gleichgewichtsgleichung des Systems lautet:

$$(2)\quad X = \frac{\partial F(x, T)}{\partial x}.$$ Diese Gleichung (2) beruht auf gewissen Hypothesen, welche die Möglichkeit der permanenten Modificationen ausschliessen. Um diesen Modificationen Rechnung zu tragen, schlägt der Verf. die Beibehaltung der Gleichung (1) vor, aber den Ersatz von (2) durch die folgende Relation zwischen den Werten von dX, dx, dT, die einer elementaren Modification entsprechen:

$$(3)\quad dX = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial T}dT + f(x, T, X)\,|\,dx\,|\,,$$

wo $|\,dx\,|$ den absoluten Wert von dx bezeichnet. Die Gleichung $f(x, T, X) = 0$ definirt die „Oberfläche der natürlichen Zustände"; in der Nähe eines natürlichen Zustandes führt eine unendlich kleine Variation, die X, T auf ihren ursprünglichen Wert zurückführt, der Grösse x nur eine unendlich kleine permanente Modification von der zweiten Ordnung zu. Betreffs der sehr kleinen Variationen um einen natürlichen Zustand ist die klassische Thermodynamik anwendbar. Die Systeme zerfallen in zwei Kategorien. Die einen, falls sie einer äusseren Wirkung unterworfen werden, die kleinen Schwankungen um einen mittleren Wert unterliegt, und falls sie auf eine nahezu constante Temperatur gebracht werden, erleiden eine fortschreitende Modification, welche sie dem natürlichen Zustande in Bezug auf die betrachteten Werte von X, T nahe bringt. Was die anderen betrifft, falls sie denselben Bedingungen unterworfen werden, so variirt x derartig, dass es sich unaufhörlich von dem natürlichen Werte entfernt. Der Verf. erforscht besonders die bei constanter Temperatur erzeugten Modificationen und die Folgerungen, zu denen man durch Ausdehnung gewisser Sätze der Thermodynamik, besonders der Clausius'schen Ungleichheit, auf sie gelangt. Sodann zeigt er, wie die gewonnenen Ergebnisse einerseits auf die permanenten elastischen Modificationen (Spannung, Torsion, Beugung) sich anwenden lassen, andererseits auf die magnetische Hysteresis.

II. Aehnliche Betrachtungen, wie die in der ersten Abhandlung für die isothermen Modificationen entwickelten, stellt der Verf. nun für die bei variabler Temperatur sich vollziehenden Modificationen an. Er ver-



gleicht hierauf die Ergebnisse seiner Theorie mit den über die permanenten Modificationen des Schwefels gemachten Beobachtungen, indem er alle von L. Gernez gesammelten experimentellen Daten dabei in die Rechnung einstellt.

III. Der Verf. dehnt seine Theorie der permanenten Modificationen auf ein von einer beliebigen Anzahl von Variabeln abhängiges System aus. Besonders verallgemeinert er den Begriff des „natürlichen Zustandes“ und erforscht die Eigenschaften desselben. Dadurch kommt er zur Definition einer „scheinbaren Entropie“ Σ und eines „scheinbaren thermodynamischen Potentials“ F, derart dass alle Sätze der klassischen Thermodynamik bezüglich der Systeme ohne permanente Modificationen auf die Systeme mit solchen Modificationen ausgedehnt werden können, falls man für die Entropie, das thermodynamische Potential und die Gleichgewichtszustände die scheinbare Entropie, das scheinbare thermodynamische Potential und die natürlichen Zustände setzt. Mn. (Lp.)

R. Pauli. Der erste und zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie und der Vorgang der Lösung. Eine energetische Theorie des chemischen Molecüls. Berlin: Fischer's Verl. (M. Krayn). 115 S.

E. H. Amagat. Sur la loi des états correspondants de Van der Waals et la détermination des constantes critiques. C. R. **123**, 83-86.

Das Zusammenfallen der Netze der Isothermen, wodurch der Verf. früher das Gesetz von van der Waals als richtig erwiesen hat, ermöglicht es, die kritischen Daten einer Substanz zu bestimmen, wenn diejenigen einer anderen bekannt sind. So berechnet der Verf. aus den kritischen Constanten der Kohlensäure diejenigen für Aethylen, Aether und Luft. Er beweist und verallgemeinert dann nach derselben Methode den Satz von Young, wonach bei entsprechenden Temperaturen der Ausdruck pv/T (p der Druck des gesättigten Dampfes, v sein specifisches Volumen, T die absolute Temperatur) für verschiedene Körper gleichen Wert hat. Sbt.

C. Raveau. Sur la vérification du théorème des états correspondants. C. R. **123**, 100-101.

Um von dem Isothermennetze eines Körpers zu dem eines anderen überzugehen, muss man nach Amagat die Coordinaten jedes Punktes mit constanten Factoren multipliciren. Benutzt man also als Coordinaten statt p und pv die Logarithmen dieser Grössen, so unterscheiden sich die Coordinaten entsprechender Punkte nur durch additive Grössen, und man kann also durch eine einfache Verschiebung des Coordinatensystems von einer Curve zur entsprechenden übergehen. Demnach muss, wenn das Gesetz von van der Waals sich bestätigt, eine Superposition der den verschiedenen Körpern zugehörigen Curvennetze möglich sein. Sbt.

G. Jäger. **Zur Theorie der Zustandsgleichung der Gase.** Wien. Ber. **105,** 791-802.

Unter der Voraussetzung, dass nie mehr als höchstens drei Molecüle gleichzeitig auf einander wirken, leitet der Verf. eine Gleichung ab, die mit der van der Waals'schen Zustandsgleichung übereinstimmt, und sucht dann weiter eine Temperaturfunction zu bestimmen, die im Einklang mit der Erfahrung ist. Er findet zum Schluss für die Temperaturerniedrigung, die bei adiabatischer Ausdehnung auftritt, den Ausdruck: $\Delta = \text{const.}(p-p')/T^2$, d. h. die Temperaturerniedrigung ist proportional der Druckdifferenz und umgekehrt proportional dem Quadrate der absoluten Temperatur, wie Joule und Thomson an Luft und Kohlensäure beobachtet haben. Sbt.

A. Kurz. **Adiabatische Ausdehnung realer Gase.** Schlömilch Z. **41,** 117-120.

Wenn Christiansen in seinem Buche „Elemente der theoretischen Physik", § 118, aus der Clausius'schen Zustandsgleichung für reale Gase $\left(p+\frac{a}{(v+\beta)^2\vartheta}\right)(v-b) = R\cdot\vartheta$ die Gleichung $\Delta U = J\cdot c_v\cdot\Delta\vartheta+(2a/\vartheta)(1/v_1-1/v_2)$ ableitet und dann am Schluss des Paragraphen $\Delta U=0$ setzt, so dass entsteht $\Delta\vartheta=-(2a/J\cdot c_v\cdot\vartheta)(1/v_1-1/v_2)$, so ist das nach dem Verf. falsch. dU ist nicht Null, sondern negativ wegen der Gleichung $c = dU+pdv$, und statt der vorstehenden Christiansen'schen Gleichung erhält man nach dem Verf.: $d\vartheta = -(1/J\cdot c_v)(2a/(v+\beta)^2\cdot\vartheta+p)dv$. Benutzt man statt der Clausius'schen Zustandsgleichung die von van der Waals: $(p+a/v^2)\cdot(v-b) = R\cdot\vartheta$, so erhält man: $d\vartheta = -(1/Jc_v)(a/v^2+p)dv$. Sbt.

Th. Preston. **On the continuity of isothermal transformation from the liquid to the gaseous state.** Phil. Mag. (5) **42,** 231-240.

Im Verfolg der Andrews'schen Versuche über die stetige Umwandelung der Materie aus dem gasigen in den flüssigen Zustand hat der verstorbene James Thomson eine isothermale Curve vorgeschlagen, die in dem einen Teile ihres Laufes die Bedingungen der Substanz darstellt, bei denen das Volumen und der Druck gleichzeitig wachsen. Solche Bedingungen sind scheinbar nicht zu verwirklichen; allein es ist der Zweck des gegenwärtigen Aufsatzes, einen denkbaren Zustand der Substanz nachzuweisen, bei welchem das Volumen und der Druck zugleich wachsen würden, und dass während der ganzen Umwandlung die Substanz im Gleichgewicht sein würde, allerdings mit Notwendigkeit im instabilen Gleichgewichte. Zu diesem Behufe wird darauf hingewiesen, dass, wenn die Blasen, welche sich im Inneren einer Flüssigkeit bilden, sich nicht an die Oberfläche erhöben, sondern an Ort und Stelle blieben, dann ein Zustand der Materie entstehen würde, in welchem das Volumen und der Druck nicht nach den gewöhnlichen Gesetzen sich wandeln würden; danach werden einige Rechnungen angestellt zum Zwecke

des Nachweises, dass die ganze Folge von Zuständen, die durch eine Isothermale, wie die von Thomson ersonnene, dargestellt werden, vorstellbar wird. Gbs. (Lp.)

J. P. Kuenen. Invloed van de zwaartekracht op de kritische verschijnselen van enkelvoudige stoffen en van mengsels. Amst. Sitz.-Ber. **4**, 41-53.

Die Aenderungen der kritischen Erscheinungen von einfachen Körpern und Gemischen werden untersucht unter Benutzung der van der Waals'schen ψ-Fläche. Mo.

Experiments for improving the construction of practical standards for electrical measurements. — Report of Committee. Brit. Ass. Rep. 1896, 150-165.

Die Frage nach einer Normal-Wärmeeinheit ist von diesem Ausschusse erwogen worden. Ein Brief nebst einem Abzuge einer Abhandlung von E. H. Griffiths (Phil. Mag. (5) **40**, 431-454; F. d. M. **26**, 1043, 1895) wurde an eine Anzahl von Physikern in verschiedenen Ländern versandt, und Auszüge aus solchen Antworten, die gewisse bestimmte Fingerweise zu der Frage nach der Wärmeeinheit enthalten, werden in einem Anhange abgedruckt. Der Ausschuss ist der Ansicht, dass die Abhandlung von Griffiths und die an ihn gerichteten Erwiderungen deutlich zeigen, es sei wünschenswert, zu einer Uebereinkunft bezüglich der Definition der Wärmeeinheit zu gelangen, und er hat vorläufig in der Absicht, eine internationale Erörterung der Sache hervorzurufen, seine Billigung der folgenden Sätze ausgesprochen. I. Zu vielen Zwecken wird die Wärme passender Weise in Energieeinheiten gemessen, und die theoretische *CGS*-Einheit der Wärme ist ein Erg. Der Name Joule ist von dem Ausschuss für elektrische Normalmasse für 10^7 Erge festgesetzt worden. Für viele praktische Zwecke wird die Wärme auch fernerhin durch die Wärmemenge gemessen werden, die zur Erhöhung der Temperatur einer abgemessenen Wassermenge um eine bestimmte Stufe erforderlich ist. Wenn die Wassermenge ein Gramm beträgt und die Temperaturstufe ein Grad des Wasserstoffthermometers zwischen 9,5° bis 10,5° C der Scala dieses Thermometers ist, dann ist nach den besten Bestimmungen der erforderliche Wärmebetrag 4,2 Joules. Diese Anzahl von Joules soll nach dem Vorschlage als eine secundäre Wärmeeinheit gelten und Calorie heissen. II. Die Wärmemenge, welche zur Erhöhung der Temperatur von einem Gramm Wasser um einen Grad Celsius der Scala des Wasserstoffthermometers bei einer mittleren Temperatur erforderlich ist, die bei 10° jenes Thermometers genommen werden kann, ist 4,2 Joules. In Nachträgen werden gegeben: 1) eine Tabelle der Wärmecapacität des Wassers zwischen 10° und 20° C; 2) die Werte der gesamten Wasserwärme, berechnet von W. N. Shaw aus den Versuchen von Regnault und Rowland. Gbs. (Lp.)

C. Dieterici. **Notiz über die Abhängigkeit der specifischen Wärme des Wassers von der Temperatur.** Wiedemann Ann. **57,** 333-338.

Bestimmt man die specifische Wärme des Wassers durch Mischung zweier Wassermengen von verschiedener Temperatur, so gilt die Gleichung $C_{hm} = a \cdot C_{nm}$, wo C_{hm} die mittlere specifische Wärme zwischen der höheren und der Mischungstemperatur, ebenso C_{nm} die zwischen der niedrigeren und der Mischungstemperatur und a eine Constante bedeutet. Da C sich zusammensetzt aus der specifischen Wärme bei constantem Volumen c und der Ausdehnungsarbeit δ, so kann man schreiben: $c_{hm} + \delta_{hm} = a \cdot (c_{nm} + \delta_{nm})$. δ kann theoretisch für je einen Grad bei jeder Temperatur berechnet werden, nämlich

$$\delta = c_p - c_v = -\frac{\vartheta}{J} \cdot \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial \vartheta}\right)^2}{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)},$$

wo ϑ die absolute Temperatur und J das mechanische Wärmeäquivalent bedeutet. Nach der Berechnung von δ ergiebt sich aus den Mischungsversuchen die specifische Wärme bei constantem Volumen.

Der Verf. hat eine grosse Zahl der Mischungsversuche von Baumgarten-Pfaundler, Münchhausen-Wüllner, Velten und Lüdin berechnet. Aus diesen Berechnungen ergiebt sich, dass δ_{hm} stets wesentlich grösser ist als $a\delta_{nm}$, d. h. dass ein Teil der Energie, die in dem heissen Wasser als Ausdehnungsarbeit enthalten war, sich in Wärme umsetzt, und ferner, dass stets das Volumen der Mischung kleiner ist als die Summe der Volumina des heissen und des kalten Wassers.

Die Abhängigkeit der specifischen Wärme bei constantem Volumen von der Temperatur wird dargestellt durch die Gleichung $c_t = c_0(1 - \alpha t - \beta t^2)$, wo $\alpha = 0{,}00062$, $\beta = 0{,}0000042$, $c_0 = 0{,}9996$ ist. Der Wert von c nimmt also mit zunehmender Temperatur stetig ab. Durch Superposition der Curven von c und von δ entsteht diejenige für C, die specifische Wärme bei constantem Druck. Diese weist bei etwa 30° ein Minimum auf; möglich ist, dass sie noch unter 100° ein Maximum erreicht.

Nach den Betrachtungen des Verf. würde es einfacher sein, c statt, wie es üblich ist, C als Function der Temperatur aus den Versuchen zu berechnen. Vermutlich genügt dann eine Gleichung mit nur zwei Gliedern (wie oben) zur analytischen Darstellung, während C als Function von t sich nur schwer durch eine mässige Zahl von Gliedern ausdrücken lässt. Sbt.

E. H. Amagat. **Sur les variations du rapport des deux chaleurs spécifiques des gaz.** C. R. **122,** 66-70.

E. H. Amagat. **Sur les chaleurs spécifiques des gaz et les propriétés des isothermes.** C. R. **122,** 120-121.

E. H. Amagat. **Sur les variations du rapport des deux chaleurs spécifiques des gaz avec la température et la pression.** Journ. de Phys. (3) **5,** 114-123.

Ein Vergleich der Resultate, die Joly und andrerseits Lussana bei ihren Untersuchungen über die specifische Wärme der Gase bei constantem Druck gewonnen haben, zeigt, dass die Werte von Joly viel besser mit den Thatsachen der Erfahrung übereinstimmen als die von Lussana, indem sie für das Verhältnis c_p/c_v Werte liefern, die mit wachsendem Druck zunehmen, während die aus den Lussana'schen Zahlen berechneten Werte abnehmen. — Auf Grund verschiedener Bemerkungen hält es der Verf. für wahrscheinlich, dass das Verhältnis c_p/c_v einem constanten Werte zustrebt, wenn man sich dem Gebiete nähert, wo die Isothermen eine kaum merkliche Krümmung haben und nahezu parallel sind.

Nach einigen weiteren Bemerkungen wird folgende allgemeine Gleichung für die adiabatische Ausdehnung gegeben: $(c_p/c_v)\, dv/(v-\varepsilon)+dp/p = 0$. Diese Gleichung unterscheidet sich von der Laplace'schen Formel nur durch das Glied $\varepsilon = d(p \cdot v)/dp$. Für nahezu vollkommene Gase kann ε vernachlässigt werden, für comprimirte Flüssigkeiten hat es eine um so grössere Bedeutung, je grösser die Dichtigkeit ist. Die Integration der Gleichung ist im allgemeinen nicht möglich, da ε und $\gamma = c_p/c_v$ unbekannte Functionen der Veränderlichen sind; werden sie durch constant anzunehmende Mittelwerte ersetzt, so erhält man: $p(v-\varepsilon)^\gamma = \text{const}$.

In der zweiten Mitteilung vergleicht der Verf. seine Folgerungen mit den Resultaten einer Arbeit von Witkowski, in der die specifische Wärme c_p der Luft für Temperaturen von 0 bis -140^0 und für Druckkräfte bis zu 140 Atmosphären untersucht ist. Sbt.

O. Tumlirz. Die Erstarrungswärme in Lösungen. Wien. Ber. **104**, 245-267.

Werden von zwei Flüssigkeiten A und B, deren Erstarrungspunkte t_1 und t_2 sind ($t_2 > t_1$), 1 g und m g bei der Temperatur t, die höher ist als t_2, mit einander gemischt, so lässt sich die bei der Mischung auftretende Wärme, die positiv oder negativ sein kann, darstellen durch $\Phi(m, t) = \int_0^m F(m, t) dm$, wo F die „Bindungswärme pro Masseneinheit“ bedeutet. Nach Kirchhoff ist

$$\partial \Phi(m, t)/\partial t = m \cdot c' + c - (1+m) C,$$

wo c und c' die specifischen Wärmen der Flüssigkeiten A und B bedeuten, C aber diejenige der Mischung. Danach folgt

$$\int_0^m \frac{\partial F(m, t)}{\partial t} \cdot dt = mc' + c - (1+m) \cdot C.$$

Für den Fall, dass 1 g der Flüssigkeit B mit n g von A gemischt werden, ergiebt sich analog:

$$\int_0^n \frac{\partial G(n, t)}{\partial t} \cdot dt = c' + nc - (1+n) C'.$$

Wird nun die erste Mischung abgekühlt bis zu einer Temperatur, die unter t_2 liegt, so wird das Verhalten verschieden sein, je nachdem m grösser oder kleiner ist als ein gewisser Wert m_1. Wenn $m > m_1$ ist, so werden bei der Temperatur $t_2 - \varDelta$ Teile der Substanz B fest, und wenn dieser Process fortdauert, bis bei einer Temperatur $t_2 - \tau$ von der Flüssigkeit S g ausgeschieden sind, so ergiebt sich: Wenn C_{m-S} die specifische Wärme der Flüssigkeit bedeutet, die nun noch 1 g von A und $m-S$ g von B enthält, $\mathfrak{C}$ aber die specifische Wärme der festen Teile von B und λ_0 die Erstarrungswärme dieser Substanz bei ihrem Schmelzpunkte t_2 bezeichnet, so ist ihre Erstarrungswärme unter den angenommenen Verhältnissen:

$$\lambda_S = \lambda_0 - \int_{t_2-\tau}^{t_2} (C_{m-S} - \mathfrak{C})\, dt - F(m-S, t_2).$$

In dem anderen Falle, wo $m < m_1$ ist, ist bei der Temperatur $t_1 - \tau$ von der Substanz A die Menge Σ g fest geworden. Bedeuten nun C'_Σ die specifische Wärme der übrig gebliebenen Flüssigkeit, $\mathfrak{c}$ diejenige der festen Substanz A, $\varLambda_0$ die Erstarrungswärme von A bei dem Schmelzpunkte t_1, so ist ihre Erstarrungswärme unter den gegenwärtigen Verhältnissen, wo also die Lösung noch $1-\Sigma$ g von A und m g von B bei der Temperatur $t_1 - \tau$ enthält:

$$\varLambda_\Sigma = \varLambda_0 + \int_{t_1}^{t_2} c \cdot dt + \int_{t_1-\tau}^{t_1} \mathfrak{c}\, dt - \int_{t_1-\tau}^{t_2} C'_\Sigma dt - G\left(\frac{1-\Sigma}{m}, t_2\right).$$

Die erhaltenen Formeln werden angewandt auf verschiedene Mischungen von Schwefelsäure und Wasser und auf solche von Wasser und Aethylalkohol. Die Resultate werden in kleinen Tabellen zusammengestellt.

Sbt.

O. Tumlirz. Ueber die Verdampfungswärme von Lösungen. Wien. Ber. **104**, 827-833.

Wie die Erstarrungswärme einer Substanz, die aus einer Lösung ausscheidet, verschieden ist von der normalen Erstarrungswärme, so ist auch die Verdampfungswärme einer Substanz, die beim Sieden einer Lösung aus dieser verdampft wird, von jener Wärme verschieden, die verbraucht wird, wenn derselbe Dampf bei gleichem Druck aus seiner Flüssigkeit entsteht.

Die Untersuchung wird beschränkt auf solche Fälle, wo nur der eine Bestandteil der Lösung in Dampf verwandelt wird, wie bei Salzlösungen und bei verdünnter Schwefelsäure. Es soll 1 g der beim Sieden der Lösung nicht verdampfenden Flüssigkeit mit n g der verdampfenden gemischt sein; die Flüssigkeit soll stets unter dem Drucke einer Atmosphäre stehen und beim Beginn des Versuchs die Temperatur T haben, d. h. die normale Siedetemperatur der verdampfenden Flüssigkeit. Infolge von Wärmezufuhr beginnt die Flüssigkeit bei $T + \varDelta$ zu sieden, und wenn M g Dampf entwickelt sind, so ist ihr Siedepunkt bis

$T+\Delta+\tau$ gestiegen. Bedeutet λ_M die Verdampfungswärme der unter diesen Verhältnissen verdampfenden Flüssigkeit, λ_T ihre normale Verdampfungswärme, bedeutet ferner C_{n-M} die specifische Wärme der Flüssigkeit in ihrem augenblicklichen Zustande, $\mathfrak{C}$ die specifische Wärme des Dampfes und endlich die Function G die in der vorerwähnten Abhandlung eingeführte Grösse, nämlich die Bindungswärme pro Masseneinheit, so ist

$$\lambda_M = \lambda_T - \int_T^{T+\Delta+\tau} (C_{n-M} - \mathfrak{C})dt + G(n-M, T).$$

Die Formel wird angewandt auf das Sieden von Mischungen aus Schwefelsäure und Wasser. Sbt.

J. P. van der Waals. Over kenmerken ter beslissing over den loop van de plooipuntslijn voor een mengsel van twee stoffen. Amst. Sitz.-Ber. Akad. **4**, 20-30 u. 82-93.

Wenn bei einer Mischung zweier Stoffe Temperatur τ und Druck p derartig gewählt sind, dass die beiden coexistirenden Phasen gleiche Zusammensetzung und gleiche Dichte besitzen, so wird der Punkt, welcher den fraglichen Werten von τ und p entspricht, die sogenannte „Curve der Faltenpunkte“ beschreiben. Es wird in dieser Arbeit die Differentialgleichung der genannten Curve hergeleitet und gezeigt, dass sie die Curven berührt, die dem Maximum und dem Minimum des Druckes entsprechen. Mo.

M. Margules. Ueber die Zusammensetzung der gesättigten Dämpfe von Mischungen. Wien. Ber. **104**, 1243-1278.

Der Titel giebt den Inhalt der Arbeit nur unvollständig wieder. Es handelt sich überhaupt um die thermodynamischen Eigenschaften eines Systems, das aus der Mischung zweier Flüssigkeiten und ihrer Dämpfe besteht. In einer Reihe kleiner Einzeluntersuchungen werden die einschlägigen Eigenschaften erörtert und teilweise auf das Beispiel der Gemische von Wasser mit Methylalkohol und Aethylalkohol angewandt. Die Methoden sind die gebräuchlichen der Thermodynamik. Br.

L. Houllevigue. Sur la chaleur de vaporisation et les dimensions moléculaires. Journ. de phys. (3) **5**, 159-163.

Den von Sir W. Thomson stammenden Satz, dass der maximale Dampfdruck einer Flüssigkeit von der Krümmung ihrer Oberfläche abhängt, erweitert der Verf. durch theoretische Betrachtungen dahin, dass die Verdampfungswärme einer Flüssigkeit bei gegebener Temperatur ebenfalls von der Gestalt ihrer Oberfläche abhängt. Aus den bei der Ableitung dieses Satzes aufgestellten Formeln wird dann weiter der Schluss gezogen, dass der Durchmesser des kleinstmöglichen Flüssigkeitstropfens ein Zehnmilliontel Millimeter übersteigt, eine Angabe, die mit

Berechnungen von Lord Rayleigh gut stimmt. Ferner ergiebt sich die Capillarconstante genau gleich Null bei der kritischen Temperatur.

Lp.

A. PONSOT. Tension de vapeur d'un corps comprimé par un gaz qu'il dissout. Tension de vapeur d'une solution en général. C. R. 128, 648-650.

Es wird der Einfluss untersucht, den ein Gas auf die Dampfspannung einer Flüssigkeit ausübt, wenn es in einem mit der Flüssigkeit und ihrem Dampfe erfüllten Raume comprimirt wird und dabei sich in der Flüssigkeit lösen kann. Es zeigt sich: Das gelöste Gas erniedrigt, das in dem Gasgemisch enthaltene Gas erhöht die Dampfspannung des Lösungsmittels. Die Dampfspannung wird vergrössert, wenn das Gas in dem Dampfgemisch dichter ist als in dem Flüssigkeitsgemisch; im entgegengesetzten Falle wird sie vermindert. Die Grösse der Aenderung hängt von dem Verhältnis der specifischen Massen des Gases in der Flüssigkeit und in dem Dampfe ab. Sbt.

A. KURZ. Erwärmung flüssiger und fester Körper durch Druck. Schlömilch Z. 41, 113-117.

Abänderungsvorschläge für die Entwickelung der Formeln in dem Buche von Christiansen „Elemente der theoretischen Physik", §§ 114-117. Sbt.

W. SUTHERLAND. Thermal transpiration and radiometer motion. Phil. Mag. (5) 42, 373-391, 476-492.

Der Verf. erhebt gegen die mathematische Methode der Reynolds'schen Abhandlung in Phil. Trans. 170 (F. d. M. 11, 779, 1879) „On certain dimensional properties of matter in the gaseous state" den Vorwurf, dass dieselbe die Vorstellung abdrängt von bestimmten physikalischen Vorstellungen über die wirkliche Thätigkeit der Ursachen der thermalen Transpiration und der Radiometerbewegung. Sein Ziel in der gegenwärtigen Abhandlung ist die Errichtung einer Theorie für dieselben, welche mit der üblichen Gastheorie auf gleicher Linie steht und die physikalischen Vorgänge vor Augen behält. Gbs. (Lp.)

A. FONTANA. Regolo calcolatore delle correzioni del peso dei corpi nell'aria. Nuovo Cimento (4) 8, 324-336.

Bedeutet P_V das Gewicht eines Körpers im leeren Raume, P_A dasjenige in der Luft, p das Gewicht eines Liters Luft unter normalen Verhältnissen, t die Temperatur, H den Druck der Luft während der Gewichtsbestimmung, α den Ausdehnungscoefficienten der Luft, d die Dichtigkeit des gewogenen Körpers und d' diejenige der Gewichtsstücke,

so ist
$$P_V = P_A \cdot \left(1 + \frac{\frac{p}{1+\alpha t} \cdot \frac{H}{760}}{d} - \frac{\frac{p}{1+\alpha t} \cdot \frac{H}{760}}{d'}\right).$$

Dem Correctionsgliede $(P_V - P_A)/P_A$ kann man die Form geben:
$$c = \left[p \cdot \frac{273}{760} \cdot \frac{d'-d}{dd'}\right] \cdot [H] \cdot \left[\frac{1}{T}\right] = \varphi(d) \cdot H \cdot \frac{1}{T},$$
so dass $$\log c = \log \varphi(d) + \log H - \log T.$$

Auf diese Formel hat der Verf. die Construction eines Rechenschiebers gegründet, der die Correction des Gewichtes für Temperaturen von -5 bis $+30^0$ und für Barometerstände von 700 bis 800 mm finden lässt. Sbt.

Rateau. Sur une loi relative à la vapeur d'eau. C. R. **128**, 808-810.

Für den theoretischen Wasserverbrauch einer vollkommenen Dampfmaschine, bei welcher der Dampf sich adiabatisch vom Drucke P bis p ausdehnt, wird folgende Formel gegeben, wobei k in Kilogrammen für die Pferdekraft und Stunde zu rechnen ist:
$$k = 0{,}85 + \frac{6{,}95 - 0{,}92 \log P}{\log P - \log p}.$$
Sbt.

N. R. v. Wuich. Beitrag zur Theorie der sogenannten Gasspannungsmesser. Mitt. üb. Art. u. Genie **27**, 1-27.

Für geschlossene Gefässe hat der Verf. (vergl. F. d. M. **20**, 1211, 1888) die durch die Verbrennung von Pulver erzeugte Gasspannung p mit Hülfe der Formel $p = p_0 e^{aPt}$ dargestellt, wo t die Zeit, P die maximale Spannung, a eine von der Pulversorte abhängige Constante bezeichnet. Indem jetzt für Geschützrohre die Arbeit des Gasdruckes und die des Widerstandes einander gleich gesetzt werden, erhält man für den Weg x des Geschosses im Rohre die Differentialgleichung (w = Widerstand):
$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f(p - w), \quad w = k_0 + kx, \quad k_0 = p_0,$$
oder in geänderter Form:
$$\frac{d^2x}{dt^2} + b^2 x = h(p - k_0) = hk_0 (e^{aPt} - 1),$$
aus deren leicht auffindbarem, zwischen 0 und t genommenem Integrale sich die nötigen Relationen sofort ergeben. Wenn das Pulver vollständig verbrannt ist, so tritt eine noch einfachere Gleichung an die Stelle der vorigen. Die beiden so getrennten Phasen des Vorgangs werden zuletzt zusammengefasst. Der Aufsatz wendet sich in seiner ganzen Tendenz gegen die Bezeichnung der gebräuchlichen Spannungsmesser als statisch. Die Bewegung des Meissels, bezw. Stempels beim Schusse ist ein dynamischer Process, und es kann demnach nur durch Behandlung einer Bewegungsgleichung die Beziehung zwischen der Angabe des Gasspan-

nungsmessers und der maximalen Spannung, also die Beziehung zwischen ε und P, gefunden werden" (ε = Wert von x, wenn $p = P$). Lp.

Weitere Litteratur.

J. H. COTTERILL. The steam engine considered as a thermodynamic machine. A treatise on the thermodynamic efficiency of steam engines. Third edition, revised. London: Spon. 444 S. 8°.

R. T. GLAZEBROOK. Grundriss der Wärme, für Studirende und Schüler. Deutsch von O. Schönrock. Berlin: S. Calvary u. Co. VI u. 280 S. 8°.

G. GRASSI. Termodinamica. Introduzione al corso di fisica applicata. Seconda edizione ampliata. Napoli. 8°.

J. LÜDERS. Ueber den Kreisprocess der Gasmaschine. Kritik des Buches: Calorimetrische Untersuchungen über den Kreisprocess der Gasmaschine, von Dr. A. Slaby, und theoretisch Neues, mit einem Anhange: Die Wissenschaft und die Gasmaschinen-Patentprocesse von 1882-86. Aachen: Mayer. VI + 80 S. 4°.

G. MOURET. L'entropie, sa mesure et ses variations. Exposé synthétique des principes fondamentaux de la science de la chaleur. Paris: Carré. 93 S. 8°.

H. PARENTY. Sur le débit des gaz parfaits et de la vapeur d'eau sous pression à travers les orifices. Ann. de chim. et de phys. (7) **8**, 1-79.

J. PETERSEN. Varmelaere. Kjöbenhavn: Lehmann u. Stages. 82 S. 8°.

B. Gastheorie.

J. BERTRAND. Sur la théorie des gaz. C. R. **122**, 963-967.

J. BERTRAND. Seconde note sur la théorie des gaz. C. R. **122**, 1083-1084.

J. BERTRAND. Sur la théorie des gaz. Journ. de phys. (3) **5**, 285-290.

L. BOLTZMANN. Sur la théorie des gaz. (Lettres à M. Bertrand.) C. R. **122**, 1173, 1314.

J. BERTRAND. Réponses aux lettres de M. Boltzmann. C. R. **122**, 1174, 1314-1315.

Bertrand übt scharfe Kritik an dem Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilungsgesetze: er hält nicht nur die Lösung des Problems, so wie sie Maxwell gegeben, für falsch, sondern er bestreitet überhaupt die Möglichkeit der Lösung. Der Ausdruck für die Zahl der Molecüle, deren Geschwindigkeit in einem gegebenen Augenblicke zwischen v und $v+dv$ liegt, kann nicht $\frac{4\pi N v^2 dv}{\alpha^3\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}$ sein, sondern er müsste eine willkürliche, unbekannte Function enthalten. Nicht nur der erste Beweis

ist falsch — was übrigens, wie Boltzmann hervorhebt, schon Maxwell selbst erkannt hat —, sondern auch der zweite Beweis muss angefochten werden, da er die ungerechtfertigte Annahme enthält, dass die von einer Gruppe A ausgehenden Molecüle nach den Zusammenstössen mit denen einer anderen Gruppe B alle zur ersten Gruppe zurückkehren sollen.

Boltzmann macht darauf aufmerksam, dass die erwähnte Function nicht willkürlich bleibt bei der von Maxwell gestellten Bedingung, dass die Verteilung der Geschwindigkeiten durch die Zusammenstösse nicht geändert werde. Es gelingt ihm aber nicht, Bertrand's Zweifel an der Richtigkeit des Gesetzes zu zerstreuen. Dieser ist vielmehr von der Unhaltbarkeit des Theorems so überzeugt, dass er die Prüfung der von anderen Autoren gegebenen Beweise unbedenklich glaubt aufschieben zu können. Sbt.

C. DEL LUNGO. **Sopra la teoria cinetica dei gas.** Rom. Acc. L. Rend. (5) **5**$_1$, 467-473.

Der Verf. ist der Ueberzeugung, dass Bertrand in seiner Kritik des Maxwell'schen Gesetzes (s. das vorstehende Referat) zu weit geht. Allerdings kann die von Maxwell angenommene Voraussetzung, dass in einem System von bewegten Molecülen die Componenten der Geschwindigkeit nach drei zu einander senkrechten Richtungen von einander unabhängig seien, im allgemeinen nicht aufrecht erhalten werden. Bertrand hat auch Recht mit der Behauptung, dass der Ausdruck für die Zahl der Molecüle, deren Geschwindigkeiten in einem gegebenen Augenblicke zwischen v und $v+dv$ liegen, eine willkürliche Function $f(v)$ enthalten müsse. Indessen ist in einem isolirten System von gasförmigen Molecülen, die eine homogene, ruhende Gasmasse bilden, die Function $f(v)$ nicht willkürlich, sondern sie ist bestimmt durch die allgemeinen mechanischen Principien von der Erhaltung der lebendigen Kraft und der Bewegungsgrösse. Für ein solches System ist auch die Maxwell'sche Voraussetzung zutreffend, dass die Componenten der Geschwindigkeit von einander unabhängig sind. Sbt.

S. H. BURBURY. **On Boltzmann's law of the equality of mean kinetic energy for each degree of freedom.** Lond. M. S. Proc. **27**, 214-224.

Nach dem Boltzmann'schen Gesetze ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in irgend einem Augenblicke die Translationsgeschwindigkeiten einer grossen Zahl von Molecülen innerhalb bestimmter Grenzen liegen, proportional mit $e^{-h \cdot Q} \cdot du_1 \ldots du_n \cdot dv_1 \ldots dv_n \cdot dw_1 \ldots dw_n \ldots$ Die Function Q enthält die Quadrate der Geschwindigkeiten, multiplicirt mit gewissen Coefficienten, und ferner die Producte $u_1 \cdot u_2, \ldots,$ $v_1 \cdot v_2, \ldots, w_1 \cdot w_2, \ldots,$ etc. Damit die Geschwindigkeitsverteilung durch Zusammenstösse der Molecüle nicht gestört werde, müssen die in Q enthaltenen Coefficienten gewissen Bedingungen genügen. Der Verf. stellt sich die Aufgabe, diese Relationen zu finden, und beschränkt sich dabei auf den Fall, wo die Molecüle als starre elastische Körper zu be-

trachten sind. Die Untersuchung wird geführt 1) für gleiche elastische Kugeln, 2) für zwei Arten von ungleichen elastischen Kugeln, 3) für n Arten von ungleichen Kugeln, 4) für zwei Arten starrer elastischer Körper von beliebiger Form. Sbt.

S. H. Burbury. On the stationary motion of a system of equal elastic spheres in a field of no forces when their aggregate volume is not infinitely small compared with the space in which they move. Brit. Ass. Rep. 1896, 716-720.

Der Zweck dieses Aufsatzes besteht in dem Nachweise, dass die Geschwindigkeiten von Kugeln, die einander nahe sind, in Correlation stehen. Gbs. (Lp.)

S. H. Burbury. On the application of the kinetic theory to dense gases. Lond. Phil. Trans. **187** A, 1-14.

H. A. Lorentz. Over de entropie eener gasmassa. Amst. Sitz.-Ber. **5**, 252-261.

Es handelt sich um eine Gasmasse, welche nicht in stationärem Zustande ist, aber eine so langsam verlaufende Zustandsänderung durchmacht, dass in jedem Augenblick die Verteilung der Geschwindigkeit nur wenig abweicht von der Maxwell'schen Verteilung, welche dem stationären Zustand entsprechen würde. Bewiesen wird, dass nun $\delta Q/D$ das Differential von $-\frac{2}{3}\mu H$ ist; hiernach darf das Boltzmann'sche H, bis auf einen constanten Factor, als Entropie der Gasmasse gedeutet werden. Mo.

L. Boltzmann. Ueber die Berechnung der Abweichungen der Gase vom Boyle-Charles'schen Gesetz und die Dissociation derselben. Wien. Ber. **105**, 695-706.

Der Verf. geht von folgendem Satze aus: Eine beliebige Anzahl materieller Punkte soll sich im Wärmegleichgewichte befinden. Die Wahrscheinlichkeit, dass n derselben sich in einer solchen Lage befinden, dass sich das erste im Raumelemente do_1, das zweite in do_2 etc. befindet, verhält sich zur Wahrscheinlichkeit, dass sich das erste in do'_1, das zweite in do'_2 etc. befindet, wie $e^{-2h\cdot\chi}\cdot do_1\cdot do_2\cdot do_3\ldots$ zu $e^{-2h\cdot\chi'}\,do'_1\cdot do'_2\cdot do'_3\ldots.$ Dabei ist χ der Wert der Kraftfunction in der ersten, χ' der in der zweiten Lage, d. h. die Arbeit, welche erforderlich ist, um die materiellen Punkte aus einer Lage, wo sie keine Wirkung mehr auf einander ausüben, in die betreffende Lage zu bringen. h ist eine die Temperatur bestimmende Constante, und zwar ist $3/4h = \frac{1}{2}m\cdot\bar{c}^2$, gleich der mittleren lebendigen Kraft irgend eines der materiellen Punkte.

Indem er sich die Gasmolecüle als materielle Punkte denkt, die in der Entfernung r die abstossende Kraft $f(r)$ auf einander ausüben, sucht er dann die Abweichungen vom Boyle-Charles'schen Gesetze zu

bestimmen, die dadurch bedingt sind, dass die Entfernung r, in der jede bemerkbare Wechselwirkung aufhört, nicht völlig verschwindet gegen die mittlere Weglänge. Ausgehend von der Virialgleichung, findet er:

$$3pv = n \cdot m \cdot \bar{c}^2 + \frac{2\pi n^2}{v} \cdot \int_0^\infty r^3 f(r)\, dr \cdot e^{-2h\int_r^\infty f(r)\,dr}.$$

Verhalten sich die Molecüle wie elastische Kugeln, so beginnt die Abstossung erst in einer Entfernung σ, die gleich dem doppelten Radius ist, und wird schon in einer wenig kleineren Entfernung $\sigma-\delta$ unendlich. Für diesen Fall findet der Verf. (in Uebereinstimmung mit Lorentz): $p/\varrho = R \cdot T \cdot (1+b/v)$, wo $b = \frac{2}{3}\pi n \sigma^3$ die Hälfte des von den Wirkungssphären erfüllten Raumes ist, oder, indem er die Annäherung noch weiter treibt: $p/\varrho = R \cdot T \cdot (1+b/v+5b^2/8v^2)$. Für den Fall, dass $f(r) = K/r^5$, erhält man:

$$\frac{p}{\varrho} = R \cdot T \cdot \left(1+\frac{4\pi n \sigma^3}{v} \sqrt[4]{2/_3} \cdot \int_0^\infty e^{-x^4} dx\right).$$

Bei der Behandlung der Dissociation nimmt der Verf. an, dass von n Gasatomen, die im Volumen v enthalten sind, n_1 frei seien, und nennt n_1/n den Dissociationsgrad. Für diese Grösse ergiebt sich die Formel:

$$\frac{n_1}{n} = q = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{2\mu p K}{RT}}}.$$

p ist der Druck, $\mu = m/M$ und m die Masse eines Atoms des betrachteten Gases, während M diejenige des Normalgases, des einatomigen Wasserstoffgases, ist. K ist eine Function der Temperatur, und zwar $K = \frac{1}{4\pi m} \iint d\omega \cdot d\lambda \cdot e^{\frac{\chi}{M \cdot R \cdot T}}$; dabei ist $d\omega$ ein Volumenelement des „kritischen Bezirks" eines Atoms, $d\chi$ das Element des zu $d\omega$ gehörigen „kritischen Flächenstücks", wo noch gegenseitige chemische Einwirkungen zweier Atome möglich sind, λ ist die Arbeit, die notwendig ist, um ein Atom aus seiner Lage in eine solche zu bringen, wo keine Einwirkung mehr stattfindet. Sbt.

G. Jäger. Die Gasdruckformel mit Berücksichtigung des Molecularvolumens. Wien. Ber. **105**, 15-21.

Wenn Z die Stosszahl ohne Berücksichtigung des Molecularvolumens bedeutet, so hat die wirkliche Stosszahl die Form:

$$Z(1+a_1 \cdot b/v + a_2 \cdot b^2/v^2 + a_3 \cdot b^3/v^3 + \ldots).$$

Die wahre Formel für den Druck muss sich demnach, wie schon Lorentz nachgewiesen hat, in der Form:

$$pv = RT(1+a_1 \cdot b/v + a_2 \cdot b^2/v^2 + a_3 \cdot b^3/v^3 + \ldots)$$

darstellen lassen. Indem der Verf. die „Förderung der Bewegungsgrösse“ berechnet, die sich aus den Zusammenstössen der Molecüle ergiebt, gewinnt er die Formel $pv = R\cdot T\cdot(1+4b/v+10b^2/v^2)$, oder falls b gegen v so klein ist, dass in der Reihenentwicklung für $(1-b/v)^{-4}$ die Glieder von $20b^3/v^3$ ab vernachlässigt werden können: $p\cdot v(1-b/v)^4 = R\cdot T$. v ist das von n Molecülen eingenommene Volumen, b derjenige Teil dieses Volumens, den die Molecüle wirklich mit Materie erfüllen. Sbt.

G. Jäger. Ueber den Einfluss des Molecularvolumens auf die mittlere Weglänge der Gasmolekeln. Wien. Ber. 105, 97-111.

Aus einer Ebene, die senkrecht zur Bewegungsrichtung eines Gasmolecüls durch dieses (punktförmig gedachte) Molecül gelegt wird, schneiden die Wirkungssphären der anderen Molecüle ein bestimmtes Stück heraus, auf dem der Punkt nicht liegen kann. Ist dessen Grösse für die Flächeneinheit α, so bleibt für den Punkt frei die Fläche $1-\alpha$. Während der Zeit dt wird, da alles in Bewegung ist, aus der Flächeneinheit ein neues Stück β herausgeschnitten. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt auf diesem Stück liegt, und somit auch die Wahrscheinlichkeit, dass er in der Zeit dt einen Zusammenstoss erfährt, ist $\beta/(1-\alpha)$. Zur Berechnung von α und β werden die folgenden beiden Sätze entwickelt:

1. Ist in einem gegebenen Raum eine sehr grosse Anzahl von Körpern in gleichmässiger Verteilung angeordnet, legen wir durch diesen Raum eine Gerade und eine Ebene in beliebiger Richtung, so verhält sich die Summe der in die Körper fallenden Stücke der Geraden zur Gesamtlänge derselben wie die Summe der in die Körper fallenden Stücke der Ebene zur Gesamtfläche derselben, wie das Volumen der Körper zum Volumen des in Betracht kommenden Raumes.

2. Ist ein Raum gleichmässig mit gleichartigen Körpern erfüllt, die keine Höhlungen besitzen, und bewegt sich nun eine Ebene parallel zu sich selbst mit der Geschwindigkeit u, so ändert sich die Gestalt des aus der Flächeneinheit der Ebene von den Körpern herausgeschnittenen Stückes beständig, und es ist das in der Zeit dt in Folge der Bewegung neu herausgeschnittene Stück gleich dem Product $qN\cdot udt$, wenn wir unter q den Mittelwert der orthogonalen Projectionen unserer Körper auf eine senkrecht zur Bewegungsrichtung liegende Ebene verstehen und N die in der Volumeneinheit enthaltene Zahl von Körpern ist.

Diese Sätze werden angewandt unter Berücksichtigung des Falls, dass sich zwei, aber nicht mehr als zwei Wirkungssphären durchschneiden. Nach Berechnung von α und β ergiebt sich die Zahl der in der Zeiteinheit erfolgenden Zusammenstösse und dann die mittlere Weglänge:

$$l = \frac{1-\frac{5}{2}b}{N\pi\cdot\sigma^2}\cdot\frac{\bar{u}}{r}.$$

b ist das Volumen, N die Anzahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Molecüle, σ der Radius der Wirkungssphären, $\bar{u}/r$ das Verhältnis der mittleren absoluten zur mittleren relativen Geschwindigkeit der Molecüle.
Sbt.

H. Benndorf. **Weiterführung der Annäherungsrechnung in der Maxwell'schen Gastheorie.** Wien. Ber. **105**, 646-666.

Die der Rechnung zu Grunde gelegten Voraussetzungen sind folgende: Das Gas ist einatomig, die Molecüle sind Massenpunkte und stossen sich gegenseitig mit einer Kraft ab, die der fünften Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist. Auf dieses Gas wirken äussere Kräfte X, Y, Z, die weder Functionen der Geschwindigkeiten der Molecüle sind, noch die Zeit explicite enthalten.

Nach Boltzmann's Bezeichnung ist $\Sigma_{\omega, do}\varphi = do\int \varphi \cdot f \cdot d\omega$, wo do ein Volumenelement des Gases, $f(\xi,\eta,\zeta)$ die Anzahl der Molecüle, welche die Geschwindigkeitscomponenten ξ, η, ζ besitzen, $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ eine Function, die für jedes Molecül einen eindeutig bestimmten Wert hat, wo endlich $d\omega = d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta$ und die dreifache Integration von 0 bis ∞ zu erstrecken ist. Für die Veränderung der Grösse $\Sigma_{\omega, do}\varphi$ mit der Zeit ergiebt sich eine Differentialgleichung, aus der Maxwell durch Specialisirung der Function φ die hydrodynamischen Gleichungen abgeleitet hat. Durch Berücksichtigung von Gliedern der nächsten Ordnung müssen sich die Reibungs- und Wärmeleitungsgleichungen ergeben. Der Verf. unternimmt es, die von Maxwell angedeutete Näherungsrechnung weiter auszudehnen.

Die Grösse von $\Sigma_{\omega, do}\varphi$ erfährt Aenderungen aus drei Ursachen: durch das Wandern der Molecüle, durch die von den äusseren Kräften veranlassten Geschwindigkeitsänderungen und durch die Stösse der Molecüle unter einander. Die durch die Zusammenstösse hervorgerufenen Aenderungen werden durch ein achtfaches Integral $B_s(\varphi)$ dargestellt, dessen Auswertung für Functionen vierten Grades den Gegenstand der weitläufigen Rechnungen des Verf. bildet.
Sbt.

W. Voigt. **Einige kinetische Betrachtungen, die mit der Theorie der Verdampfung und verwandter Vorgänge im Zusammenhang zu stehen scheinen.** Gött. Nachr. 1896, 341-364.

Wenn für ideale Gase die Annahme gemacht wird, dass der mittlere Abstand der Molecüle sehr gross ist im Vergleich zum Radius der Wirkungssphäre, und wenn man somit die Wechselwirkungen zwischen den Molecülen als im Mittel verschwindend klein vernachlässigt, so erhält diese Annahme Stützen durch zahlreiche Uebereinstimmungen zwischen den Resultaten der Erfahrung und der Theorie. Nicht mit gleicher Wahrscheinlichkeit kann man für tropfbare Flüssigkeiten die Voraussetzung machen, dass der mittlere Abstand der Molecüle im Vergleich

zum Radius der Wirkungssphäre sehr klein ist, so dass die Wechselwirkungen sich zu Null compensiren; ja man weiss nicht einmal Sicheres über die Stabilität eines solchen Systems. Gleichwohl erscheint es dem Verf. von Interesse, das Verhalten solcher „idealen Flüssigkeiten" theoretisch zu verfolgen. Seine Resultate unterscheiden sich in mehrfacher Beziehung von denen G. Jäger's (Wien. Ber. **99**; F. d. M. **22**, 1160 ff., 1890), die nach Ansicht des Verf. auf ungenügend begründeten Voraussetzungen beruhen.

Es wird ein cylindrischer Raum betrachtet, der durch eine den Grundflächen parallele Ebene in zwei Teile geschieden ist; der eine Teil soll mit der idealen Flüssigkeit, der andere mit ihrem Dampfe im idealen Zustande erfüllt sein. Durch Integration der Bewegungsgleichung $m\frac{d^2z}{dt^2} = Z$ entsteht ein Ausdruck für die beim Austreten von Massenteilchen gewonnene Arbeit, und diese steht im Zusammenhang mit dem Capillardruck K. Bezeichnet c das Minimum der Geschwindigkeit, welche die Teilchen innerhalb der Flüssigkeit senkrecht zur Trennungsebene haben müssen, wenn sie überhaupt austreten sollen, so wird $c^2 (=) 4K/(\varrho_i+\varrho_a)$. Hier bedeuten ϱ_i und ϱ_a die Dichte der Flüssigkeit und des Dampfes, und das Zeichen $(=)$ soll gleiche Grössenordnung ausdrücken.

Bei der Untersuchung der lebendigen Kräfte, die durch die Trennungsfläche geführt werden, ergiebt sich der Satz, dass das Verhältnis ϱ_i/ϱ_a für das im Gleichgewicht stehende Paar von Flüssigkeit und Dampf eine Function der Temperatur allein ist. — Auf zwei verschiedenen Wegen wird ein Ausdruck für die specifische Verdampfungswärme abgeleitet: die gewonnenen Ausdrücke sind nicht gleich, ihr Unterschied ist theoretisch begründet.

Es wird dann das Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilungsgesetz eingeführt und seine gleichzeitige Annahme für Dampf und Flüssigkeit als zulässig erwiesen. Danach zeigt sich: Die wahrscheinlichste Moleculargeschwindigkeit G ist in einer idealen Flüssigkeit und in dem mit ihr im Gleichgewicht stehenden idealen Dampfe gleich gross; dasselbe gilt dann von den Mittelwerten der Geschwindigkeiten und denen ihrer Potenzen, somit auch von der mittleren lebendigen Kraft der im Dampf und in der Flüssigkeit gleich angenommenen Molecüle. Für das Temperaturgleichgewicht zwischen einer idealen Flüssigkeit und ihrem im idealen Zustande befindlichen Dampfe gilt somit dieselbe Bedingung wie für dasjenige zwischen zwei idealen Gasen. Den Zusammenhang von c mit G und den Dichten ϱ_i und ϱ_a drückt die Gleichung aus: $\varrho_i \cdot e^{-\left(\frac{c}{G}\right)^2} = \varrho_a$.

Für die Grössenordnung der Verdampfungswärme D ergiebt sich noch die Beziehung: $D (=) 2K/\mathfrak{A}(\varrho_i+\varrho_a)$, wo $\mathfrak{A}$ das mechanische Wärmeäquivalent bedeutet. Die vollständige Verdampfungswärme $Q = D+p_a\mathfrak{A}/\varrho_a$ ist bestimmt durch die Gleichung: $\mathfrak{A}\cdot Q = \frac{1}{2}(c^2+G^2)$. Für Wasser liefert diese Formel einen Wert, der etwa $^2/_3$, für Kohlensäure einen solchen, der $^3/_4$ des beobachteten Wertes beträgt.

Während es nicht gelingt, die auf die Verdampfung bezüglichen thermodynamischen Sätze kinetisch zu begründen, können andrerseits diese Sätze, z.B. die Clausius'sche Gleichung $\mathfrak{A}\cdot Q = T\cdot(1/\varrho_a - 1/\varrho_i)dP/dT$, zur Erweiterung der Theorie benutzt werden.

Die Entwicklungen werden auch noch angewandt auf die Verteilung eines oder mehrerer gelöster und nicht dissociirter Körper zwischen zwei nicht mischbare Lösungsmittel und auf den Fall, wo zwei sich gegenseitig in begrenztem Masse lösende ideale Flüssigkeiten nach demselben Raume hin verdampfen. Sbt.

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

W. Voigt. Eine neue Methode zur Untersuchung der Wärmeleitung in Krystallen. I. Abhandlung. Gött. Nachr. 1896, 236-251.

Die von de Sénarmont herrührende Methode zur Bestimmung der relativen Grössen der Hauptleitfähigkeiten und der Lage der Leitfähigkeitsaxen für die Wärme in Krystallen ist ausgezeichnet durch ihre Einfachheit; sie ist aber nicht ausreichend, wenn genaue Resultate verlangt werden. Ihrer Anwendung stellen sich dann ebenso theoretische wie praktische Schwierigkeiten entgegen. Der Verf. hat deswegen eine neue Methode ersonnen, die gegenüber der älteren bedeutende Vorteile aufweist, da die Voraussetzungen der Theorie mit voller Strenge durch das Experiment zu verificiren sind, und da die gemessenen Grössen zu den eigentlich zu bestimmenden Grössen in einem sehr günstigen Verhältnisse stehen.

Auf eine Darstellung der Methode muss hier verzichtet werden, da sie sich nicht mit wenigen Worten auf verständliche Weise auseinandersetzen lässt. Sbt.

C. Somigliana. Sul problema della temperatura nell'ellissoide. Annali di Mat. (2) **24**, 59-91.

Eine früher (Lomb. Ist. Rend. (2) **24**; F. d. M. **23**, 396, 1891) vom Verf. auseinandergesetzte Integrationsmethode wird auf das Lamé'sche Problem der stationären Temperatur in einem Ellipsoid angewandt. Es werden „ellipsoidische harmonische Functionen" definirt, die sich später als gleichbedeutend mit den Lamé'schen Polynomen erweisen, und es werden ihre Eigenschaften untersucht. Dabei zeigt sich: Die Bestimmung der harmonischen Functionen kann auf die Reduction zweier bilinearen Formen auf kanonische Form zurückgeführt werden; und ferner: Alle Lamé'schen Polynome von derselben Gattung (die durch den Grad der algebraischen Gleichung bestimmt wird, von der sie abhängen) sind einer gleichförmigen Darstellung fähig. Sbt.

H. A. Lorentz. Over het evenwicht der warmtestraling bij dubbelbrekende lichamen. Amst. Sitz.-Ber. **4**, 305-311.

Aus der Lichttheorie ergiebt sich, dass in einem luftleeren Raum, welcher von schwarzen Körpern vollständig eingeschlossen ist und anisotrope diathermane Körper enthält, Strahlungsgleichgewicht existirt, wenn für Strahlen innerhalb einer unendlich kleinen Kugelfläche $d\omega$ die Dichte der Strahlungsenergie durch $A\frac{V_0^2}{V^2}\frac{d\omega}{8\pi}$ dargestellt wird; A bedeutet die Dichte im freien Aether, V_0 und V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Aether und in der in Rede stehenden Richtung. Dieses Resultat ist mit den Folgerungen der Thermodynamik im Einklang.

Mo.

W. Wien. Ueber die Energieverteilung im Emissionsspectrum eines schwarzen Körpers. Wiedemann Ann. **58**, 662-669.

Der Verf. benutzt wie Michelson (Journ. de phys. (2) **6**, 1887) das Maxwell'sche Gesetz der Verteilung der Geschwindigkeiten als Grundlage des Strahlungsgesetzes; er sucht aber die Zahl der übrigen Hypothesen zu verringern durch Heranziehung der von Boltzmann (Wiedemann Ann. **22**, 291) und ihm (Berl. Ber., 9. Febr. 1893) auf thermodynamischem Wege gewonnenen Resultate. Als strahlender Körper wird ein Gemisch von Gasen angenommen, und es wird vorausgesetzt, dass die betrachtete homogene Strahlung vorzugsweise von einem Bestandteil des Gemisches ausgehe. Ferner wird die Hypothese gemacht, dass jedes Molecül Schwingungen einer Wellenlänge aussendet, die nur von der Geschwindigkeit des bewegten Molecüls abhängt, und deren Intensität eine Function dieser Geschwindigkeit ist. Die Intensität φ_λ der Strahlung, deren Wellenlänge zwischen λ und $\lambda+d\lambda$ liegt, ist dann $\varphi(\lambda)=F(\lambda).e^{-\frac{f(\lambda)}{\vartheta}}$, wo ϑ die absolute Temperatur und F und f unbekannte Functionen von λ bedeuten. Aus den Resultaten der erwähnten Arbeiten von Boltzmann und dem Verf. wird nun gefolgert, dass $\varphi_\lambda=\frac{C}{\lambda^5}e^{-\frac{c}{\lambda\vartheta}}$ ist, wo C und c Constanten bedeuten. Sbt.

Smoluchowski de Smolan. Recherches sur une loi de Clausius au point de vue d'une théorie générale de la radiation. Journ. de phys. (3) **5**, 488-499.

Smoluchowski de Smolan. Recherches sur la dépendance entre le rayonnement d'un corps et la nature du milieu environnant. C. R. **123**, 230-233.

Der Verf. giebt einen neuen Beweis des Clausius'schen Satzes, wonach die Ausstrahlung vollkommen schwarzer Körper bei gleicher Temperatur in verschiedenen Mitteln verschieden, nämlich dem Quadrat ihrer Brechungscoefficienten proportional ist (s. Clausius, Mechan. Wärmetheorie, 1. Aufl. Tl. 1 S. 344). Zu dem Zwecke betrachtet er mit

Lommel (cf. F. d. M. **12**, 772, 1880) die von den einzelnen Volumenelementen des strahlenden Körpers ausgestrahlte Energie und deren Absorption. Eine einfache Rechnung ergiebt für die Energie, die ein Element dF der Oberfläche des strahlenden Körpers von allen Volumenelementen innerhalb eines Kegels von der unendlich kleinen Oeffnung $d\omega$ empfängt, falls die Axe des Kegels gegen die Flächennormale unter dem Winkel φ geneigt ist, den Werth $\varepsilon . dF . d\omega . \cos\varphi$, wobei ε das Emissionsvermögen darstellt. Weiter wird angenommen, dass alle in dem betrachteten Kegel enthaltenen Strahlen an dF nach dem Snellius'schen Gesetze gebrochen werden. Durch die Brechung geht jener Kegel in einen andern mit der Oeffnung $d\omega'$ über, dessen Axe unter dem Winkel ψ gegen die Normale geneigt ist, wobei $n_2 \sin\psi = n_1 \sin\varphi$ ist. Die durch dF austretende Energie wird ferner im Verhältnis $1:M$ geschwächt, wo M sich aus den Fresnel'schen Formeln für die Intensität des gebrochenen Lichtes ergiebt. Innerhalb des Kegels $d\omega'$ tritt dann durch dF die Energie $\varepsilon d\omega' \cdot dF \cos\psi . (n_2/n_1)^2 M$ aus. Hierin liegt die von Clausius als notwendig nachgewiesene Modification des Lambert'schen Gesetzes; neu ist hier das Hinzutreten des Factors M. Für den Fall ferner, dass das zweite Medium ebenfalls strahlend ist, folgt aus dem Carnot'schen Princip, dass bei gleicher Temperatur beider Medien zwischen ihren Emissionsvermögen ε_1 und ε_2 die Beziehung besteht: $\varepsilon_1 : n_1^2 = \varepsilon_2 : n_2^2$. Diese Gleichung hat genau die Form des Clausius'schen Gesetzes; doch hat ε hier eine andere Bedeutung als bei Clausius; es bezeichnet das Emissionsvermögen für das Innere des betreffenden Körpers. Ist η das Emissionsvermögen eines Volumenelements, so ist $\varepsilon = \eta : 4\pi\alpha$, wo α den Absorptionscoefficienten bezeichnet.

Zum Schluss werden die Versuche von Quintus Icilius zum Nachweis des Clausius'schen Gesetzes besprochen; nach des Verf. Ansicht beruhen die Schlüsse des genannten Autors auf incorrecten Principien.

In der zweiten Arbeit werden neue Versuche beschrieben, die der Verf. zur Prüfung des Clausius'schen Gesetzes angestellt hat. Bei denselben wird die Temperatur einer Platte beobachtet, die in der Mitte zwischen zwei parallelen, auf den Temperaturen 0^0 und 35^0 gehaltenen Platten aufgestellt ist. Die mittlere Platte ist einmal polirt, das andere Mal mit schwarzem Firnis bedeckt. Ferner wird einmal in Luft, das andre Mal in einer Flüssigkeit beobachtet. Die zur Berechnung der Temperatur der mittleren Platte dienenden Formeln werden ohne Ableitung mitgeteilt. Wn.

A. Indra. Ueber die Bestimmung der Temperatur einer veränderlichen Wärmequelle in einer bestimmt gegebenen Zeit. Wien. Ber. **105**, 823-838.

Durch Studien über die Wärmeleitung in Kanonenrohren wurde der Verf. zur Untersuchung folgender Frage veranlasst. Es soll bei der momentanen Bestimmung der Temperatur einer veränderlichen Wärme-

quelle jene Temperatur u gemessen werden, welche die Wärmequelle im Anfangszustande (oder zu einer bestimmten Zeit t) hatte, wenn innerhalb der Zeit t_0 die Wärmequelle nahezu als constant angesehen werden konnte. Durch Anwendung der Formel für die Wärmeleitung in einem cylindrischen Stabe wird für die wahre Temperatur der Wärmequelle gefunden:

$$u = u_0 + \frac{u_t - u_0}{\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{m\sqrt{t_0}} e^{-\eta^2} d\eta},$$

wo u_0 die Umgebungstemperatur, u_t die dem Zeitintervall t_0 entsprechende Temperatur und m eine Constante bedeutet, für die sich aus vier Versuchsreihen der Mittelwert 0,32 ergab. Sbt.

Zwölfter Abschnitt.

Geodäsie, Astronomie, Meteorologie.

Kapitel 1.

G e o d ä s i e.

W. JORDAN. Handbuch der Vermessungskunde. III. Band. Landes-Vermessung und Grundaufgaben der Erdmessung. 4. Aufl. Stuttgart: J. B. Metzler. XX + 593 + [64] S. 8°.

Der 4. Auflage des III. Bandes seines Handbuches der Vermessungskunde hat Jordan als eine Art Vorwort zu den drei Bänden des Werkes einen Vortrag: „Ueber die Entwicklung des deutschen Vermessungswesens im 19. Jahrhundert“ vorausgeschickt, den er auf der 25jährigen Jubiläums-Versammlung des deutschen Geometer-Vereins 1896 in Dresden gehalten hat.

Auch in dieser Neuauflage des III. Bandes sind wieder in anerkennenswerter Weise alle Fortschritte auf dem Gebiete der Landesvermessung, die seit dem Erscheinen der 3. Auflage gemacht sind, berücksichtigt worden; so ist z. B. ein Abschnitt über unsere jetzige Kenntnis von der Veränderlichkeit der Polhöhe (Schwankung der Erdaxe) eingefügt worden. Besonders vollständig sind die in den verschiedenen Landesvermessungen üblichen conformen und congruenten, sowie auch die queraxigen rechtwinkligen geodätischen Coordinaten behandelt und ihrer Brauchbarkeit nach verglichen worden (vergl. das Referat auf S. 785ff.). Der Teil des Buches, der von den Grundaufgaben der Erdmessung handelt, scheint dem Referenten nicht so uneingeschränktes Lob zu verdienen, da in ihm der Stoff zu unvollständig, einseitig und mit zu wenig Rücksicht auf die modernen Anschauungen auf dem Gebiete der Erdmessung bearbeitet ist. Bö.

E. HEGEMANN. Uebungsbuch für die Anwendung der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate auf die praktische Geometrie. Berlin: P. Parey. 156 S. 8°.

Das Buch enthält eine Sammlung von Aufgaben, die meistens der Praxis entlehnt sind, mit ihrer zum Teil bis ins Kleinste gehenden rechnerischen Durchführung. Bei der einseitig schematischen Behandlungsweise der Aufgaben, in der sie für die Zuhörer des Verf. an der Landwirtschaftlichen Hochschule in Berlin zugeschnitten sind, hat das Werk auf wissenschaftlichen Wert geringen Anspruch. Bö.

P. Uhlich. **Die Berechnung des mittleren Fehlers von Richtungsbeobachtungen bei vollen Sätzen.** Jordan Z. f. V. **25,** 686-689.

Die angegebene Art der Berechnung des mittleren Richtungsfehlers ist nur ein ganz specieller Fall der schon 1867 von Andrae in dem ersten Band von „Den Danske Gradmooling“ entwickelten und angewandten Methode. Im preussischen Geodätischen Institut ist diese Berechnungsart ebenfalls seit Mitte der siebziger Jahre schon ganz allgemein auch für Richtungsbeobachtungen mit unvollständigen Sätzen angewandt worden. Bö.

A. Nagel. **Mitteilungen aus dem Gebiete der Geodäsie. 21) Die Grundlehren der Methode der kleinsten Quadrate ohne Wahrscheinlichkeitsrechnung.** Civiling. **42,** 703-746.

Konnten die in den früheren Bänden des Civiling. enthaltenen geodätischen Mitteilungen unerwähnt bleiben, weil in ihnen wesentlich concrete Messungsresultate und ihre Verwertung zu Ortsbestimmungen enthalten waren, so muss doch auf die vorliegende Publication hingewiesen werden, weil sie allgemeineren Inhaltes ist. Die hier gegebene Darstellung der Ausgleichungsrechnung muss ich als eine klare und anschauliche bezeichnen, trotzdem ich der Begründung des Hauptansatzes den Rang eines zwingenden Beweises, welchen der Verf. (S. 714, Z. 25-28 v. o.) für dieselbe in Anspruch zu nehmen scheint, nicht zuzuerkennen vermag. F. K.

R. von Kövesligethy. **Ueber eine neue Methode der Morphometrie der Erdoberfläche.** Ungar. Ber. **18,** 365-379.

Die rein geometrische Definition der Orometrie, wie sie durch v. Sonklar gegeben wurde, ist für die Morphometrie der Erdoberfläche bis jetzt fast allein massgebend gewesen. Es ist „wunderbar“, dass die mechanischen Principien und die physikalischen Methoden, die in der Geodäsie z. B. durch die Einführung des Geoids so grosse Vorteile darboten, und die in der die physische Geographie so nahe angehenden Theorie des Erdmagnetismus wieder vorkommen, in der Morphometrie nicht angewandt werden, obwohl die Beobachtungsmethoden auf dieses Verfahren hinweisen. Der Verf. versucht nun, den Begriff der Niveaufläche auch in die Orometrie einzuführen, und giebt der Niveaufläche einer Oberflächengestalt den Namen Oroid. Eine speciellere Definition lautet sodann: Das Oroid ist durch die Summe jener ersten Glieder der Potentialentwickelung einer Oberflächenform charakterisirt, die, für sich ge-

nommen, aus in irgend einem Oberflächenpunkte der Form angestellten Beobachtungen einen annehmbaren Wert der Erddichte geben. Der abgeleitete mathematische Ausdruck des Oroids ist indessen nichts anderes als das schon öfter (z. B. von Helmert) behandelte Potential von Massen an der Erdoberfläche. Ueber die Art und Weise, wie sich der Verf. die Bestimmung der Constanten des Oroids vermittelst des Siemens'schen Bathometers, des Aneroid- und Quecksilberbarometers, der Pendelbeobachtungen, des Horizontalpendels u. s. w. vorstellt, möchte sich Referent kein Urteil erlauben. Bö.

P. Pizzetti. Osservazioni intorno alla Nota del prof. Nobile: „Abbreviazione del calcolo di una linea geodetica etc.“ Napoli Rend. (3) **2**, 75-79.

A. Nobile e F. Siacci. Relazione sulla Nota del prof. P. Pizzetti. Ibid. 75.

Nobile hatte in den Napoli Rend. (3) **1**, 139-145 ein angenähertes Verfahren angegeben, um die Länge einer nicht zu langen geodätischen Linie auf dem Erdellipsoid aus den Breiten und der Längendifferenz ihrer Endpunkte abzuleiten (vergl. F. d. M. **26**, 1083, 1895). Pizzetti zeigt nun, dass die Methode von Nobile zur Berechnung von Δl (dem sogenannten sphärischen Längenunterschied) und daher auch die zur Berechnung der Constante k der geodätischen Linie nicht bis auf Glieder von der Ordnung e^4 genau ist, und dass bei Berechnung des Bogens s nicht einmal den Gliedern mit e^2 Rechnung getragen wird, dass für s aber gleichwohl eine gute Annäherung erreicht wird. Pizzetti modificirt und vereinfacht schliesslich die Lösung von Nobile derart, dass auch noch die Glieder mit e^2 berücksichtigt werden. Bö.

N. Jadanza. Influenza dell'errore di verticalità della stadia sulla misura delle distanze e sulle altezze. Torino Atti **31**, 376-380.

Die Fehler δD und δH in der Entfernung und in der Höhe, die bei tachymetrischen Messungen begangen werden, wenn die Latte um den Winkel ψ (in Teilen des Radius ausgedrückt) gegen die Verticale geneigt ist, sind:

$$\delta D = (\psi/\omega)\, S' \sin\alpha\cos\alpha + \tfrac{1}{2}\psi S' + \psi h + (\psi^2/\omega) . \tfrac{1}{2} S' \cos^2\alpha + \cdots,$$

$$\delta H = (\psi/\omega) S' \sin^2\alpha + \tfrac{1}{2}\psi S' \operatorname{tg}\alpha + \psi h \operatorname{tg}\alpha + (\psi^2/\omega)\tfrac{1}{2} S' \sin\alpha\cos\alpha + \cdots.$$

Hierin bedeutet ω den diastimometrischen Winkel, S' den vermittelst der Distanzfäden abgelesenen Lattenabschnitt, α den Höhenwinkel der optischen Axe des Instruments und h die Höhe des am unteren Faden abgelesenen Lattenteiles über dem Boden. Bö.

Fr. W. Schulze. Queraxige rechtwinklige sphärische Coordinaten für die Zwecke der Kleintriangulirung und Specialvermessung. Jordan Z. f. V. **25**, 65-83.

W. Jordan. Queraxige Coordinaten. Ebenda, 83-84.

W. Jordan. Conforme Abbildung. Ebenda, 101-102.

W. JORDAN. Conforme Kegelprojection. Ebenda, 129-143.

O. KOLL. Soldner'sche oder Gauss'sche Coordinaten. Ebenda, 193-198, 199-200.

FR. W. SCHULZE. Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn Professor Dr. Jordan über queraxige Coordinaten. Ebenda, 206-214.

W. Jordan. Congruente oder conforme Coordinaten. Ebenda, 193, 198-199, 200-205, 214-215.

R. VOGELER. Berechnung einer geodätischen Linie aus geographischen Coordinaten und conformen, ebenen Coordinaten. Ebenda, 240-248.

W. JORDAN. Der mittlere Verzerrungsfehler. Ebenda, 249-252.

R. VOGELER. Vergleichung der mecklenburgischen conformen Kegelprojection mit der congruenten Soldner'schen Projection. Ebenda, 257-263.

O. KOLL. Soldner'sche oder Gauss'sche Coordinaten. Ebenda, 321-327.

J. H. FRANKE. Die Conformität in Bayern. Ebenda, 327-333.

STEIFF. Zur Wahl der Art und Lage des Coordinatensystems einer Landesvermessung. Ebenda, 333-339.

O. KOLL. Soldner'sche oder Gauss'sche Coordinaten. Ebenda, 473-478.

W. JORDAN. Bemerkungen zu vorstehendem Aufsatz. Ebenda, 478-479.

F. R. HELMERT. Berichtigung zu S. 473/474. Ebenda, 544.

E. HAMMER und W. JORDAN. Gesamtverzerrung von Coordinaten. Ebenda, 684-686.

R. VOGELER. Vergleichung der mecklenburgischen conformen Kegelprojection mit der Soldner'schen Projection. Daran anschliessend Bemerkungen von STEPPES und JORDAN. Ebenda, 691-699.

In der ersten der vorstehend aufgeführten Abhandlungen entwickelt Schulze infolge einer speciellen Veranlassung, die durch die Landesvermessung des Herzogtums Anhalt gegeben wurde, Formeln für queraxige, rechtwinklige, congruente, sphärische Coordinaten bis zu den Gliedern vierter Ordnung und knüpft daran die Bemerkung, dass unter Berücksichtigung der auftretenden Verzerrungen in dem vorliegenden Falle die congruenten (Soldner'schen) den conformen (Gauss'schen) Coordinaten vorzuziehen seien. In der zweiten Abhandlung verweist Jordan darauf, dass er schon früher ähnliche, wenn auch nicht so weit gehende, Entwickelungen veröffentlicht habe (vergl. F. d. M. **25**, 1839, 1893/94; **26**, 1084, 1895), und leitet darauf ebenfalls Formeln für queraxige, congruente und conforme, sphäroidische Coordinaten bis zu den Gliedern vierter Ordnung ab. Aus der Vergleichung beider Formelsysteme und ihrer Consequenzen zieht er den Schluss, dass conforme Coordinaten vor

den congruenten stets Vorzüge besitzen. Hieran schliesst sich eine ausgedehnte Controverse, die durch die übrigen, oben angeführten Abhandlungen und Notizen charakterisirt wird. Es wird hierbei auf lineare, Richtungs-, Flächen- und Gesamtverzerrungen und ihre Mittelwerte eingegangen, ohne dass die Sache hierdurch definitiv entschieden würde. Hervorzuheben sind die günstigen Erfahrungen, die in Mecklenburg mit den Coordinaten der conformen Kegelprojection im Gegensatz zu den congruenten Coordinaten in Preussen, Bayern u. s. w. gemacht sind. Aber erst die Betrachtung der Richtungsreductionen der gemessenen Richtungen auf solche des in Frage kommenden Systems, die in der Praxis vernachlässigt werden, führte die Entscheidung mit aller Schärfe zu Gunsten der conformen Coordinaten herbei. Bei den congruenten Coordinaten erreichen diese Richtungsreductionen Beträge, die an den Grenzen der einzelnen Coordinatensysteme die bei Katastervermessungen der Neuzeit zu befürchtenden Messungsfehler weit übersteigen, während sie bei den conformen Coordinaten niemals den Messungsfehlern gegenüber von Bedeutung sein können. Dieser Umstand wird ausserdem ganz besonders bei der Einschaltung neuer Punkte in ein congruentes Coordinatensystem schädlich wirken. Die conformen Coordinaten, Gauss'sche oder mecklenburgische (die übrigens auch auf Gauss zurückzuführen sind), werden also die Coordinaten der Zukunft bei den Vermessungen sein. Bö.

L. Krüger. Ueber den Anschluss eines secundären Dreiecksnetzes an ein Hauptnetz. Jordan Z. f. V. **25**, 289-307, 339-347, 368-375.

Die Verbindung des secundären Netzes mit dem Hauptnetz wird dadurch hergestellt, dass das erste auf das zweite derart conform abgebildet wird, dass die gleichnamigen Punkte zusammenfallen.

Ist $\zeta = f(z)$ die durch die Abbildung hervorgerufene Verschiebung in der Lage eines Punktes des Secundärnetzes, so muss für die n Anschlusspunkte ζ die vorgeschriebenen Werte $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ haben. Wählt man für ζ eine ganze rationale Function $(n-1)$sten Grades, so führt die Elimination der Constanten vermittelst der Grenzbedingungen auf die Lagrange'sche Interpolationsformel. In der Praxis ist die Anzahl der beiden Netzen angehörigen Punkte meistens beschränkt. Es werden daher im besonderen die Formeln für die Coordinatenverschiebungen abgeleitet, die sich beim Anschluss des secundären Netzes an 2, 3 und 4 feste Punkte ergeben. Jedoch sind auch kurz die Formeln entwickelt, die den Anschluss an n feste Punkte bewirken.

Durch den Anschluss des zweiten Netzes an das Hauptnetz erfährt irgend eine dem Secundärnetz angehörige Seite, sie sei beobachtet oder berechnet, eine Aenderung ihrer linearen Länge und eine Verdrehung gegen ihre Anfangslage. Um diese Grössen zu bestimmen, werden allgemeine Formeln abgeleitet und im speciellen wieder auf den Anschluss bei 2, 3 und 4 Anschlusspunkten angewandt. Ist die Anzahl der anzuschliessenden Punkte sehr gross, so erfordert die angegebene conforme

Uebertragung ziemlich umfangreiche Rechnungen; deshalb werden für diesen Fall zunächst zwei verschiedene Näherungsmethoden angegeben. Die erste besteht darin, dass das conforme Anschlussverfahren, das für zwei Punkte gilt, nach und nach auf sämtliche anzuschliessenden Punkte angewandt wird. Aus den $\frac{1}{2}n(n-1)$ verschiedenen Lagen, die man auf diese Weise für irgend einen Punkt des secundären Netzes erhält, wird dann das Mittel genommen. Beim zweiten Verfahren werden die Punkte des Secundärnetzes mit denen des Hauptnetzes einfach durch die Beziehung $\zeta = c_0 + c_1 z$, wo c_0 und c_1 Constanten sind, in Verbindung gebracht. Es ist dies dasselbe, als wenn man die beiden Netze in ihren gemeinschaftlichen Teilen so auf einander legt, dass, während gleichzeitig der Massstab des einen Netzes geändert wird, die Summe der Quadrate der Abstände gleichnamiger Punkte von einander ein Minimum wird. Da bei diesen beiden Näherungen die Anschlusspunkte nach erfolgtem Anschluss nicht zur Deckung kommen, so wird endlich, um auch dies zu erreichen, noch ein drittes Verfahren eingeschlagen, dessen Resultate durch die folgenden Formeln dargestellt werden.

Es seien x_k, y_k die Coordinaten eines Anschlusspunktes im Secundärnetz, ξ_k, η_k die an ihnen anzubringenden Verbesserungen, um die Uebereinstimmung mit dem Hauptnetz herzustellen, und x, y; ξ, η die entsprechenden Werte für irgend einen beliebigen Punkt des Secundärnetzes; ferner sei

$$x_h - x_k = \Delta x_{h.k}, \quad y_h - y_k = \Delta y_{h.k} \text{ u. s. w.},$$
$$s_{h.k}^2 = \Delta x_{h.k}^2 + \Delta y_{h.k}^2, \quad r_k^2 = (x-x_k)^2 + (y-y_k)^2,$$

dann wird
$$\xi = a_0 + a_1 x + b_1 y,$$
$$\eta = b_0 + b_1 x + a_1 y,$$

wo $G = \Sigma g_k$, $a_0 = (1/G)\,\Sigma g_k \xi_k$, $b_0 = (1/G)\,\Sigma g_k \eta_k$,

$$a_1 = \frac{\Sigma g_h g_k \{\Delta x_{h.k}\Delta \xi_{h.k} + \Delta y_{h.k}\Delta \eta_{h.k}\}}{\Sigma g_h g_k s_{h.k}^2} = \frac{\Sigma g_h g_k s_{h.k}\Delta s_{h.k}}{\Sigma g_h g_k s_{h.k}^2},$$

$$b_1 = \frac{\Sigma g_h g_k \{\Delta x_{h.k}\Delta \eta_{h.k} - \Delta y_{h.k}\Delta \xi_{h.k}\}}{\Sigma g_h g_k s_{h.k}^2} = \frac{\Sigma g_h g_k s_{h.k}^2 \Delta \vartheta_{h.k}}{\Sigma g_h g_k s_{h.k}^2}$$

ist. $\Delta s_{h.k}$ und $\Delta \vartheta_{h.k}$ sind die Aenderungen der linearen Länge und des Azimutes der Anschlussseite $s_{h.k}$; g_k bedeutet das Gewicht, das der Entfernung r_k beizulegen ist. Setzt man beispielsweise $g_k = 1/r_k$, so stimmen beide Netze in den Anschlusspunkten überein. Die erhaltenen Formeln werden schliesslich benutzt, um die Punkte des thüringischen Netzes an die 4 Punkte Leipzig, Wilsdorf, Ettersberg und Inselsberg der hannoverisch-sächsischen Kette der Königlich Preussischen Landesaufnahme anzuschliessen. Es fand sich hierbei gute Uebereinstimmung mit den Werten, die sich ergeben, wenn das thüringische Netz durch strenge Ausgleichung mit dem Hauptnetze verbunden wird. Bö.

A. Börsch und L. Krüger. Die europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite von Greenwich bis Warschau. II. Heft.

Geodätische Linien, Parallelbogen und Lotabweichungen zwischen Feaghmain und Warschau. Berlin: P. Stankiewicz. VII u. 205 S. 4°.

Diese als „Veröffentlichung des Königl. Preussischen Geodätischen Institutes und Centralbureaus der Internationalen Erdmessung“ bezeichnete Schrift ist die Fortsetzung zu dem 1893 erschienenen ersten Hefte: „Hauptdreiecke und Grundlinienanschlüsse von England bis Polen. Herausgegeben von F. R. Helmert. Mit zwei lithographirten Tafeln.“ Berlin: P. Stankiewicz. Ueber den Zweck des Werkes berichtet das Vorwort wie folgt.

„Nach der Veröffentlichung des I. Heftes der Europäischen Längengradmessung in 52° Breite von Greenwich bis Warschau übertrug der Director des Königl. Preussischen Geodätischen Institutes und Centralbureaus der Internationalen Erdmessung, Herr Geheimer Regierungsrat Professor Dr. F. R. Helmert, den beiden Unterzeichneten die Bearbeitung und Herausgabe des vorliegenden II. Heftes. Die Rechnungen wurden zum grossen Teil von jedem von uns gesondert erledigt; wo dieses nicht der Fall war, wurden immer derartige Kontrollen angewandt, dass das Einschleichen eines belangreichen Fehlers nach Möglichkeit vermieden sein dürfte. Auch an der Redaction des Ganzen sind wir beide gleichmässig beteiligt.

Mit dieser Veröffentlichung hat der Teil der Struve'schen Längengradmessung, dessen Bearbeitung vor fast 40 Jahren von J. J. Baeyer übernommen wurde, seinen Abschluss gefunden. Der ursprüngliche Plan für die Längengradmessung hat sich vollständig, wenn auch sehr verspätet, durchführen lassen. Dabei hat gerade die unbeabsichtigte Verzögerung der Vollendung dieser Arbeit es ermöglicht, die Principien der modernen Geodäsie, wie sie von Professor Helmert in dem I. Bande seiner „Theorien der höheren Geodäsie“ dargestellt worden sind — nämlich möglichste Flächenausdehnung bei der Ableitung zusammenhängender Lotabweichungssysteme und Ausnutzung der Laplace'schen Kontrollgleichungen — zu berücksichtigen. Dieses Verfahren wurde uns um so mehr erleichtert, als Professor Helmert in dem I. Heft der „Lotabweichungen“ (Berlin, 1886) seine Theorien und deren Nutzen besonders nach der hier in Frage kommenden Richtung hin weiter ausgeführt und an praktischen Beispielen erläutert hat.“ Lp.

Ch. Lallemand. **Sur l'erreur de réfraction dans le nivellement géométrique.** C. R. **123**, 222-225, 297-301.

Unter der Voraussetzung, dass die Temperatur in den Schichten unmittelbar über dem Erdboden das Gesetz $t = a + b \log(h + c)$ befolgt, wo h die Höhe über dem Boden und a, b, c Constanten bedeuten, die jedesmal durch drei besondere Beobachtungen zu ermitteln sind, wird eine Formel für den bei geometrischen Nivellements zu befürchtenden Refractionsfehler abgeleitet. In der zweiten Note wird die Berechnung dieser Formel, die eine ganze Menge veränderlicher Grössen enthält, ver-

mittelst einer der vom Verf. construirten eigentümlichen graphischen Tafeln (abaques hexagonaux) erläutert und die Formel selbst mit Rücksicht auf den Einfluss ihrer verschiedenen Bestandteile untersucht. Ueberraschend ist das Resultat, dass bei gewöhnlichen atmosphärischen Verhältnissen für Zielweiten von 150 Metern und bei gleichem Gefälle nach beiden Seiten des Instruments der Refractionsfehler den Betrag von 4mm für das Kilometer erreichen kann, also ungefähr das Fünffache des zufälligen Fehlers eines Präcisionsnivellements. Bö.

Ch. Lallemand. Sur le rôle des erreurs systématiques dans les nivellements de précision. C. R. **123**, 410-415.

Bei der Beurteilung der Genauigkeit ausgedehnter geometrischer Präcisionsnivellements spielt der gewöhnlich allein angegebene zufällige mittlere Kilometerfehler eine viel geringere Rolle als die systematischen Fehler. Der Verf. untersucht nach dieser Richtung hin die bis jetzt veröffentlichten oder ihm zugänglichen österreichisch-ungarischen, spanischen, preussischen und französischen neueren Präcisionsnivellements und kommt hierbei zu folgenden Schlüssen:

1. Bis auf wenige Ausnahmen sind alle Präcisionsnivellements mit systematischen Fehlern behaftet, deren mittlerer Coefficient für das Mittel zweier in entgegengesetzter Richtung ausgeführten Messungen von 0,05 mm bis 0,30 mm für das Kilometer schwanken kann.

2. Infolge der teilweisen Compensation der systematischen Fehler in dem eben erwähnten Mittel wird ihr Kilometerbetrag aus den Polygonschlussfehlern immer viel kleiner erhalten, als aus den Differenzen der hin und her geführten Messungen.

3. Lange Strecken geben etwas kleinere systematische Kilometerfehler als kurze.

4. Nivellementsnetze mit grossen Polygonen ergeben aus ihren Schlussfehlern scheinbar eine viel geringere Genauigkeit.

5. In den Polygonschlussfehlern spielen die systematischen Fehler die Hauptrolle.

6. Die Verringerung der systematischen Fehler ist deshalb viel wichtiger als die der zufälligen. Wie das jedoch zu erreichen ist, weiss man noch nicht. Bö.

Ch. Lallemand. Sur la stabilité des piquets employés comme repères provisoires dans les nivellements de précision. C. R. **123**, 457-460.

Für die Beobachtungen des französischen Hauptnivellements werden zwischen je zwei Fixpunkten provisorische Aufstellungspunkte für die Latten in Entfernungen zwischen 100 m und 140 m geschaffen. Sie bestehen aus 30 cm langen und 5 cm dicken unten zugespitzten Holzpfählen, in die oben ein Nagel mit dickem Kopf eingeschlagen ist. In der Zwischenzeit zwischen Hin- und Hernivellement (im Maximum 15 Tage) für je zwei benachbarte Fixpunkte heben oder senken sich

nun die einzelnen Pfähle um geringe Beträge, die mit dem Zustand des Bodens und mit der zwischenliegenden Zeit veränderlich sind. Berechnet man den mittleren zufälligen Kilometerfehler einmal aus den Differenzen von Fixpunkt zu Fixpunkt und das andere Mal aus den Differenzen für jede einzelne Station, so findet man infolge der Nichtconstanz der Pfähle den zweiten Wert im Mittel um 0,1 mm und im Maximum um 0,35 mm grösser. Man kann leicht den mittleren Betrag τ der Hebung oder Senkung der Pfähle in ihrer Abhängigkeit von der Zeit theoretisch ermitteln. Verf. findet hiernach für 15 untersuchte Sectionen des französischen Nivellements die Formel $\tau = 0{,}30\text{ mm} + 0{,}04\, T\text{mm}$, wo T die Anzahl der zwischenliegenden Tage bedeutet. Bö.

P. Schreiber. Die Schreiber'schen barometrischen Höhenformeln. Meteor. Zeitschr. **13**, 141-142.

Hinsichtlich der Prioritätsansprüche, die Sprung und Korselt gegen die Schreiber'sche Arbeit im Civiling. erhoben haben (vergl. F. d. M. **26**, 1110 ff.), erklärt der Verf., dass er durch seine zusammenfassende Darstellung die ganze Theorie der barometrischen Höhenmessungen in möglichst einfacher, übersichtlicher Weise nur als Problem der Statik habe behandeln wollen, ohne dabei zu behaupten, dass alles neu sei; sonst hätte er noch sehr viele andere Arbeiten anführen müssen. Im übrigen wiederholt er die Grundzüge seiner Entwickelungen. Lp.

Weitere Litteratur.

F. Hammer. Tafeln zur Berechnung des Höhenunterschiedes aus gegebener horizontaler Entfernung und gemessenem Höhenwinkel für Entfernungen bis zu 400 m und Höhenwinkel bis 25° (alte Teilung des Quadranten). Stuttgart: Metzler. (1895).

Besprechung Ztschft. f. Arch. u. Bauw. **42**, H. 1-8 [Bd. **1**, H. 1-4], S. 241. F. K.

W. Jordan. Barometrische Höhentafeln für Tiefland und für grosse Höhen. Hannover: Helwing. VIII u. 48 S. 8°. [Meteor. Zeitschr. **13**, (69).]

Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme. Formeln und Tafeln zur Berechnung der geographischen Coordinaten aus den Richtungen und Längen der Dreiecksseiten zweiter Ordnung. 3te Aufl. Berlin: Mittler. 24 S. 8°.

O. Sarrazin und H. Oberbeck. Taschenbuch zum Abstecken von Kreisbögen mit und ohne Uebergangscurven für Eisenbahnen, Strassen und Kanäle. 7. Aufl. Berlin. X + 198 S. 12mo.

V. Wessely. Die Catastral-Vermessung von Bosnien und der Herzegowina. 2. Aufl. Wien: Spielhagen und Schurich. 260 S. Mit 5 Taf. 8°. Bö.

A. Wüst. Leichtfassliche Anleitung zum Feldmessen und Nivelliren. 4. Aufl. Berlin.

L. Zimmermann. Tafeln für die Teilung der Dreiecke, Vierecke und Polygone. 2. Aufl. Liebenwerda: R. Reiss. 64 S. 8°.

Kapitel 2.

Astronomie.

Astronomischer Kalender für 1897. Herausgegeben von der K. K. Sternwarte. N. F. **16.** Jahrgang. Wien: C. Gerold's Sohn. 159 S. 8°.

Enthält erstens: allgemeine Angaben (Genealogie, Tarife u. s. w.); zweitens: Einleitung zum astronomischen Kalendarium; drittens: astronomisches Kalendarium; viertens: 8 Beilagen zum astronomischen Kalender. Dz.

F. J. Studnicka. Bis ans Ende der Welt! Astronomische Causerien. Zweite ergänzte Auflage. (Mit zahlreichen Illustrationen.) Prag: Selbstverlag. 212 S. kl. 8°.

In anmutiger Darstellung, meistens in Form von Gesprächen zwischen mehreren Personen, die sich zuerst in Karlsbad zusammenfinden, dann der böhmischen Hauptstadt Prag einen Besuch abstatten, werden die Hauptlehren der Astronomie vorgetragen. Die Handschrift zu dem Lebenswerk des Copernicus im Nostitz'schen Palaste, das Grabdenkmal von Tycho Brahe in der Teinkirche, die Erinnerungen an Kepler's Aufenthalt in Prag geben Gelegenheit, die Verdienste dieser modernen Väter der Astronomie zu beleuchten. Der Hörsaal der deutschen technischen Hochschule, wo Doppler Mathematik und Physik gelehrt hat, lenkt die Aufmerksamkeit auf die Zeit, in der dieser Forscher unseres Jahrhunderts das nach ihm benannte Princip ausgesprochen hat. Die in diesen Kapiteln niedergelegten historischen Notizen sind ganz wertvoll. Ausser den Illustrationen zur Erläuterung astronomischer Begriffe sind die Abbildungen von Copernicus, von dem Grabmonumente des Tycho Brahe, von Doppler, von Kepler, von Tycho Brahe, sowie verschiedene Nachbildungen von Handschriften zu erwähnen. Lp.

C. E. Mumberg. Grundtraek af Astronomien. Kjöbenhavn: V. Tydes Forlag. 248 S.

Grundzüge der Astronomie. Enthält in populärer Darstellung und sehr leicht fasslich eine Uebersicht der gesamten Astronomie. V.

P. Harzer. Ueber den Einfluss der Schwere auf Kreise astronomischer Instrumente. Astr. Nachr. **141** (No. 3380-81), 321-358.

Die Untersuchung schliesst sich an eine Arbeit Bessel's an. Während dieser aber den Hauptschwerpunkt auf den Nachweis legte, dass die durch die Biegung des Kreises sich ergebenden Fehler bei geeigneter Ausführung der Ablesungen sich eliminiren lassen, werden hier die Deformationen bis zu Ende durchgerechnet, indem die in der Ingenieurmechanik gebräuchlichen Methoden angewandt werden. Verf. wendet dann die erhaltenen Resultate auf den Gothaer Meridiankreis an und stellt die Formveränderungen in sehr starker Vergrösserung (1 : 10000) in einer beigegebenen Figur dar. Dz.

A. Saporetti. Determinazione delle differenze fra i tempi medii ed i veri solari secondo le teorie esposte dal Keplero ridotte a più semplice moderna forma ed analiticamente sviluppata. Bologna Mem. (5) **6**, 47-62.

Enthält eine ausführliche Ableitung der Formeln, welche zur Berechnung der Zeitgleichung dienen. Dz.

C. Hillebrand. Ueber den Einfluss der Elasticität auf die Schwankungen der Polhöhe. Wien. Denkschr. **64**, 283-308.

„Die Ergebnisse der Beobachtungen, welche über die Aenderung der Polhöhe angestellt wurden, zeigen jetzt schon, dass die Annahme eines vollkommen unveränderlichen Erdkörpers zur Erklärung derselben unzureichend ist. Welche von den thatsächlichen Abweichungen von der vorausgesetzten vollkommenen Starrheit bei der erwähnten Erscheinung massgebend sind, ist eine Frage, deren Beantwortung erst bei einem grösseren Beobachtungsmaterial und nach der theoretischen Feststellung über die Art der Einflussnahme jeder dieser Eventualitäten möglich sein wird. Als Beitrag zu dieser Frage soll im Folgenden untersucht werden, in welcher Weise die Rotationsbewegung der Erde durch die Elasticität derselben beeinflusst wird, wobei es sich zeigen wird, dass letztere thatsächlich keine Rolle spielen kann, da dieselbe nur Perioden in der Polbewegung hervorbringt, welche Bruchteile eines Jahres sind, entgegen dem Ergebnisse der Beobachtungen." Lp.

Th. Albrecht. Ableitung der Bewegung des Nordpols in den Jahren 1890-95. Astr. Nachr. **139** (No. 3333), 321-328.

Aus dem Beobachtungsmaterial ist die Bewegung des Nordpols während der angegebenen Zeit nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet worden. Sie scheint hiernach in unregelmässigen Windungen um einen mittleren Ort des Nordpols herumzugehen. Dz.

R. Spitaler. Die Ursache der Breitenschwankungen. Wien. Denkschr. **64**, 633-642.

Der vorliegende Aufsatz führt den rechnungsmässigen Nachweis,

dass die in den Luftströmungen stattfindenden Massenverschiebungen während des Sommers und Winters zur Erklärung der Breitenschwankungen ausreichen. Lp.

H. W. Goodwin. Azimuth tables for the higher declinations (limits of declination 24° to 30°) between the parallels of latitude of 0° and 60°. With examples of the use of the tables in English and French. London: Longmans, Green & Co. 86 S. 8°.

Diese Tafeln erstrecken sich von 24° bis 30° Declination. Die Grenzen umfassen den Mond, die grösseren Planeten nebst einem Gürtel heller Sterne. Die Tafeln haben als das eine Argument die Sternhöhe, mit Ausnahme des Ergänzungsteiles, bezeichnet als Tafel *B*, die dem gewöhnlichen Gebrauche folgt, als Argument des Sternes Stundenwinkel zu benutzen. (Nach Phil. Mag. (5) **42**, 116.) Gbs. (Lp.)

Astronomical papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac. Vols. V, VI, VII. Washington (1894-95). [American M. S. Bull. (2) **3**, 9-29, Ref. von E. W. Brown.]

In dem ausführlichen Referate von Brown werden folgende einzelne Abhandlungen der besprochenen Bände namhaft gemacht: S. Newcomb, A development of the perturbative function in cosines of multiples of the mean anomalies and of angles between the perihelia and common node and in powers of the eccentricity and mutual inclination (Vol. V). S. Newcomb, Inequalities of long period, and of the second order as to the masses, in the mean longitudes of the four inner planets (Vol. V). S. Newcomb, The secular variations of the four inner planets (Vol. V). Tafeln für Sonne, Mercur, Venus von S. Newcomb in Band VI; Tafeln für Jupiter und Saturn von G. W. Hill in Band VII. „Die Veröffentlichung dieser beiden Bände macht eine Epoche in der Geschichte der Himmelsmechanik, die vielleicht von gleicher Bedeutung ist mit derjenigen, welche die Erscheinung von Leverrier's wohl bekanntem Werke über denselben Gegenstand bezeichnete.“ S. Newcomb, Action of the planets on the Moon (Vol. V). Lp.

E. W. Brown. On the application of the principal function to the solution of Delaunay's canonical system of equations. Lond. M. S. Proc. **27**, 385-390.

Delaunay hat seine Transformationen auf directem Wege ausgeführt, während Tisserand gezeigt hat, dass die Jacobi'sche partielle Differentialgleichung schneller zum Ziele führt. Der Verf. benutzt dieselbe Gleichung, welche ihm sehr rasch die Transformationen liefert, deren Identität mit den Delaunay'schen sofort festgestellt wird. Dz.

O. Stone. On the symmetrical form of the differential equations of planetary motions. Annals of Math. **10,** 77-80.

Enthält eine Darstellung der von Radau gegebenen Transformationen, mittelst welcher die verschiedenen Störungsfunctionen entfernt und durch eine einzige ersetzt werden. Dz.

G. W. Hill. On the convergence of the series used in the subject of perturbations. American M. S. Bull. (2) **2,** 93-97.

Die Störungen der Planeten und die Störungen des Mondes sind von den Astronomen in Reihen entwickelt worden, deren Glieder die Sinus oder Cosinus linearer Functionen von zwei oder mehr Argumenten mit positiven oder negativen ganzzahligen Factoren sind. Diese Argumente variiren proportional mit der Zeit, und ihre Perioden werden in Uebereinstimmung mit Begriffen aus der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung als incommensurabel unter einander angenommen. In dem Werke „Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste" (**2,** 277-280) hat Poincaré hervorgehoben, dass diese Reihen unter der letzterwähnten Bedingung im strengen mathematischen Sinne divergent sind. Der Verf. meint, dass die für diese Ansicht vorgebrachten Gründe nicht gerade überzeugend wären und einem gewissen Skepticismus bei den Astronomen begegnet seien. Ohne den Versuch zu machen, einen Fehlschluss bei Poincaré aufzudecken, will der Verf. eine Klasse von Fällen ermitteln, in denen die Convergenz der Reihen nachgewiesen werden kann trotz der Incommensurabilität der componirenden Argumente. Lp.

H. Poincaré. Sur la divergence des séries de la mécanique céleste. C. R. **122,** 497-499.

Die Mitteilung nimmt Bezug auf eine Arbeit von Hill „On the convergence of the series used in the subject of perturbations", deren Ergebnisse auf den ersten Blick mit denen des Verf. im Widerspruch zu stehen scheinen (vergl. das vorangehende Referat). Dem gegenüber wird die Uebereinstimmung betont und gezeigt, dass das hauptsächlichste Resultat von Hill bereits von Poincaré gefunden wurde. Dz.

H. Poincaré. Sur la divergence des séries trigonométriques. C. R. **122,** 557-559.

Berichtigung der irrigen Auffassung von Hill betreffs seiner Bemerkungen über die (in der Mechanik auftretenden) Lindstedt'schen Reihen. Wz.

M. Hamy. Sur le développement approché de la fonction perturbatrice dans le cas des inégalités d'ordre élevé. C. R. **122,** 980-983; Journ. de Math. (5) **2,** 381-439.

Die Arbeit beruht auf denselben Principien, wie frühere Untersuchungen des Verf. über denselben Gegenstand. Es handelt sich um

die Entwickelung von $F_0(\zeta_1, \zeta) = \frac{f(E^{iu}) \cdot f_1(E^{iu_1})}{\Delta^s}$ in eine trigonometrische, nach Vielfachen der mittleren Anomalien ζ_1 und ζ fortschreitende Reihe. Dabei bedeuten f und f_1 ganze Functionen, u und u_1 die excentrischen Anomalien und Δ das Quadrat des Abstandes der beiden Planeten ausschliesslich der von der Neigung abhängigen Glieder.

Verf. behandelt hier den Fall, dass die Excentricität der Bahn des einen Planeten beliebig gross, die Bahn des andern dagegen ein Kreis sei, der von der ersteren Bahn eingeschlossen wird.

Der Gang der Untersuchung ist der, dass die Coefficienten nach der Methode von Poincaré durch einfache Integrale über einen Kreisumfang ausgedrückt, dass dann die singulären Punkte des Integranden innerhalb des Kreises aufgesucht werden und nunmehr die Methode von Darboux, gegeben in dem Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres, Anwendung findet. Dz.

A. Féraud. Sur la valeur approchée des coefficients des termes d'ordre élevé dans le développement de la partie principale de la fonction perturbatrice. C. R. **122**, 871-874.

Es wird vorausgesetzt, dass die eine Bahn elliptisch sei, die andere kreisförmig, ferner dass beide in derselben Ebene liegen und die zweite von der ersten umschlossen wird. Die Coefficienten werden durch Entwickelung einer Function $\varphi(t)$ nach Potenzen von $1/t$ gewonnen, welche der von Poincaré eingeführten Function $\varphi(r)$ entspricht, aber von dieser etwas abweicht. Dz.

C. V. L. Charlier. Ueber die trigonometrischen Entwickelungen in der Störungstheorie. Astr. Nachr. **141** (No. 3377), 273-278.

Entwickelt man eine beliebige Function $\psi(\omega)$ von ω in eine trigonometrische Reihe: $\psi(\omega) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos\omega + a_2 \cos 2\omega + \cdots$, so erhält man den Coefficienten a_m durch fortgesetzte partielle Integration in der Form:

$$\frac{\pi}{2} a_m =$$

$$\int_0^\pi \psi(\omega)\cos\omega \cdot d\omega = \cos m\pi \left[\frac{\psi'(\pi)}{m^2} - \frac{\psi'''(\pi)}{m^4} + \cdots + (-1)^{r+1} \frac{\psi^{2r-1}(\pi)}{m^{2r}}\right]$$

$$- \left[\frac{\psi'(0)}{m^2} - \frac{\psi'''(0)}{m^4} + \cdots + (-1)^{r+1} \frac{\psi^{2r-1}(0)}{m^{2r}}\right]$$

$$+ (-1)^r \int_0^\pi \frac{\cos m\omega}{m^{2r}} \psi^{2r}(\omega) \cdot d\omega.$$

Die Coefficienten erscheinen hier nach Potenzen von $1/m^2$ entwickelt; wenn aber $\psi'(0)$ und $\psi'(\pi) = 0$, so fängt die Entwickelung mit $1/m^4$ an etc. Man kann dies erreichen durch Zuhülfenahme einer zweiten Function $g(\omega)$, indem man setzt: $\psi(\omega) = \beta g(\omega) + \sum A_m \cos m\omega$. Wählt man hier die

Function g und die Constante β passend, so kann die Reihe $\sum A_m \cos m\omega$ viel schneller convergiren, als die ursprüngliche $\sum a_m \cos m\omega$, wie Verf. an einem Beispiel zeigt. Dz.

C. Charlier. Untersuchung über die Methoden zum Tabuliren der Störungen der kleinen Planeten. Münch. Ber. **26**, 287-307.

Der Aufsatz enthält Vorschläge zum Entwerfen von Tafeln von Coefficienten nebst theoretischen Erläuterungen über zweckmässige Integrationsverfahren, von welchen besonders zwei besprochen werden; eines, das der Verf. selbst früher entwickelt hat, und ein anderes, dessen Grundzüge von Gyldén herrühren. Dz.

R. v. Kövesligethy. Störungen im Vielkörpersystem. Ungar. Ber. **13**, 380-412.

In die Differentialgleichungen für die nach Potenzen der störenden Massen geordneten Störungen wird die wahre Länge der Bahn des gestörten Planeten eingeführt und darauf die Integration bewerkstelligt, nachdem das Coordinatensystem passend gewählt worden. Die Formeln für die Störungen enthalten, wie in allen anderen Methoden, Quadraturen, deren Endausdrücke vollständig angegeben werden. Der Aufsatz schliesst mit der Untersuchung des Einflusses, den etwa Sonnenprotuberanzen, die das Potential der Sonne in Bezug auf die Planeten periodisch ändern, auf die Bewegung der Erde und des Mondes, oder auch auf „Trepidationen" der Erde haben könnten. Dz.

K. G. Olsson. Ueber eine neue Methode zur Berechnung der Planetenstörungen im Falle einer genäherten Commensurabilität zwischen den mittleren Bewegungen. Astr. Nachr. **140** (No. 3357), 321-330.

Bekanntlich enthalten die Ausdrücke für die Störungen der mittleren Länge in den Coefficienten im Nenner die Quadrate des Divisors $\delta = i - i'\mu$, wo μ das Verhältnis der mittleren Bewegungen, i und i' ganze Zahlen sind. Diese Nenner können sehr klein werden und daher die Convergenz in Frage stellen. Der Verf. entwickelt eine Umformung der Hansen'schen Theorie der Störungen der kleinen Planeten, durch welche es ihm gelingt, mittelst Trennung der langperiodischen und kurzperiodischen Glieder und durch eigentümliche Behandlung der ersteren auch in die Störungen der mittleren Länge nur die ersten Potenzen von δ einzuführen. Dz.

K. G. Olsson. Ueber eine neue Form der Störungen höherer Ordnung in Hansen's Theorie für die kleinen Planeten. Stockh. Akad. Bihang **22**$_1$ (No. 2), 15 S.

K. G. Olsson. Ueber die Integration der Ungleichheiten langer Periode in der Planetentheorie. Stockh. Öfv. **53**, 55-65, 207-212.

K. G. Olsson. Zur Methode, Planetenstörungen gruppenweise zu berechnen. Stockh. Öfv. **58,** 367-372.

K. G. Olsson. Formeln für eine erste Verbesserung des kleinen Divisors in Commensurabilitätsfällen. Stockh. Öfv. **58,** 373-376.

Bdn.

M. Brendel. Ueber die Lücken im Systeme der kleinen Planeten und über ein Integrationsverfahren im Probleme der drei Körper. Astr. Nachr. **140** (No. 3346), 145-160.

Das Verfahren lehnt sich an die Gyldén'schen Methoden an. Nach Auseinandersetzung der Formen, in welchen Gyldén die Reihenentwickelungen ansetzt, und nach Bestimmung der Integrationsconstanten, sowie Feststellung ihrer Bedeutung folgen allgemeine Betrachtungen über die Ergebnisse, namentlich bezüglich der Convergenz innerhalb eines beschränkten Zeitraumes. Dabei zeigt sich, dass die Lücken in den kleinen Planeten gerade dort zu finden sind, wo die Convergenz in Frage gestellt wird, wie an Beispielen zu sehen ist. Dz.

M. Brendel. Bemerkungen zu dem Aufsatz des Herrn Weiler: „Die Störungen der Planeten für den Fall, dass die mittlere Bewegung etc." Astr. Nachr. **139** (No. 3315), 35-40.

Es handelt sich um die Convergenz (beschränkte und unbeschränkte) gewisser trigonometrischer Reihenentwickelungen und die Bedeutung, welche hierbei die Glieder von langer Periode haben. Dz.

P. Harzer. Bemerkung zu dem Aufsatze des Herrn Weiler in A. N. 3312. Astr. Nachr. **139** (No. 3315), 33-36.

Nach einer Verwahrung gegen einen Vorwurf in genanntem Aufsatz geht der Verf. zur Besprechung eines Artikels von Callandreau über, der zur Bestimmung des Radiusvectors unter besonderen Annahmen die Differentialgleichung aufgestellt hat: $d^2\varrho/dt^2+(1+\varepsilon a+2\varepsilon b\cos 2t)\varrho=0$, welche in ihrer Lösung bekanntlich einen charakteristischen Exponenten mit sich führt, der, wenn er reell wird (wenn $b^2>a^2$), die Stabilität in Frage stellt. Dz.

A. Weiler. Die Störungen der Planeten sind Functionen des Winkels, welchen die Ebenen der Bahnen mit einander bilden. Astr. Nachr. **141** (No. 3362), 17-34.

Nachdem der Verf. in früheren Arbeiten (A. N. 3052-53, 3063, 3256) den Fall behandelt hat, dass beide Bahnen in einer Ebene liegen, geht er hier zum allgemeinen Falle über. Verf. verwirft die Entwickelungen der Störungsfunction nach Kugelfunctionen, lehnt sich dagegen an die Arbeit von Tisserand in den Annales de l'observatoire de Paris 1880 an, dessen Verfahren etwas umgestaltet wird. Dz.

H. Ludendorff. Tafel zur Berechnung der Störungsfunction für die äussersten kleinen Planeten. Astr. Nachr. **140** (No. 3349), 197-202.

Die zu berechnenden Coefficienten sind von der Form:

$$A_n^{(s)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^{2n}\varphi}{(1+2\varepsilon\cos\varphi)^{\frac{1}{2}s}} \cdot d\varphi.$$

Es wird eine Taylor'sche Reihenentwickelung angesetzt, indem $A_n^{(s)}$ und seine Differentialquotienten nach ε für einen bestimmten Wert $\varepsilon = \varepsilon_0$ berechnet werden. Dz.

G. Ravené. Sulle perturbazioni prodotte dai piccoli pianeti. Torino Atti **32**, 144-155.

Nach einigen allgemeinen Bemerkungen über die Grösse der Asteroiden, ihre Gesamtmasse und die zu erwartenden Störungen der grossen Planeten, geht der Verf. zur Aufstellung eines „mittleren" Asteroiden über, dessen Masse er zu $^1/_{113}$ der Erdmasse schätzt. Dann werden die analytischen Entwickelungen vorgenommen unter Beschränkung auf die säculare Störung der Perihellänge des Mars. Aus der numerischen Rechnung ergeben sich zuletzt Rückschlüsse von dieser Störung auf die Gesamtmasse der kleinen Planeten, welche bei $\delta\omega = 5'',55$ in 100 Jahren und bei sonstigen geeigneten Annahmen zu etwa der Hälfte der Marsmasse gefunden wird. Dz.

H. C. Plummer. A graphical method of solving Kepler's equation. Monthly Notices **56**, 317-320.

Rollt ein Kreis vom Radius a auf einer geradlinigen Basis, so beschreibt ein Punkt im Abstande c vom Mittelpunkte des Kreises eine Trochoide, für deren Abscisse x die bekannte Gleichung $x = a\varphi - c\sin\varphi$ gilt, wenn φ der Wälzungswinkel des Kreises ist. Diese Trochoide benutzt der Verf. zur graphischen angenäherten Lösung der Gleichung $M = E - e\sin E$, um dann aus dem Näherungswerte nach bekanntem Verfahren mit der Taylor'schen Reihe weitere Correctionen zu berechnen. Lp.

E. W. Brown. Expressions for the elliptic coordinates of a moving point to the seventh order of small quantities. Monthly Notices **56**, 370-371.

E. J. Stone. Note on Professor Brown's Note. Ibid. 372.

Die von Stone in der Januar-Nummer der Monthly Notices gegebenen Ausdrücke für die Polarcoordinaten eines Punktes, der sich in einer Ellipse um den einen Brennpunkt bewegt, bis zu Grössen der siebenten Ordnung einschliesslich in Bezug auf Excentricität und Neigung finden sich im wesentlichen schon bei Cayley in „Tables of the developments of functions in the theory of elliptic motions" (Memoirs R. A. S. **29**, 191-306, 1861; Collected works **3**, 360-474). Lp.

O. Backlund. Sur l'intégration de l'équation différentielle du rayon vecteur d'un certain groupe des petites planètes. C. R. **122**, 1103-1107.

Es handelt sich um die Ermittelung des Radiusvectors solcher Planetoiden, welche ungefähr doppelt so schnell um die Sonne laufen, wie Jupiter. Die benutzten Methoden sind von Gyldén entwickelt worden.

Dz.

H. Gyldén. Olika methoder att bestämma de horistika termerna i den differentialekvation, som förmedlar härledningen af ojemnheterna i en planets longitud. Stockh. Öfv. **53**, 421-436.

Der Verf. beschäftigt sich mit der Integration von Gleichungen der Form $d^2T/dv^2 = -\sum A_i \sin(2\lambda_i v + 2B_i + s_i T)$, wo T die sogenannte Zeitreduction und v die wahre Länge bedeutet. Bdn.

P. Harzer. Ueber eine allgemeine Methode der Bahnbestimmung. Astr. Nachr. **141** (No. 3371-72), 177-198.

Diese Methode, welche Laplace in ihren Grundzügen in der Mécanique cél. I, première partie, livre II, chap. IV auseinandergesetzt hat, beruht darauf, dass man aus drei oder mehr nahe an einander liegenden Beobachtungen die geometrische Länge und Breite eines Normalortes und deren erste und zweite Differentialquotienten durch ein Interpolationsverfahren berechnet. Aus letzterem folgen nun die heliocentrischen Coordinaten, wobei als Resolvente eine algebraische Gleichung 7. Grades auftritt. Verf. setzt den Olbers'schen und Gauss'schen Methoden gegenüber die Vorzüge der Laplace'schen, hauptsächlich in ihrer Einfachheit bestehend, aber auch ihre Nachteile auseinander, welche in einer Erschwerung der nachträglichen Verbesserungen zu suchen sind. Der Gang der Rechnung wird an einem Beispiel, dem Brorsen'schen Kometen, gezeigt. Dz.

H. Paetsch. Ueber die Unsicherheit einer Bahnbestimmung der kleinen Planeten aus vier Beobachtungen. Diss. Berlin. 35 S. 8°. (1893).

Führt man in der üblichen Weise die Verhältnisse der Dreiecksflächen, sowohl für die Planetenbahn, als auch für die Erdbahn ein, so ergiebt sich aus den Grundgleichungen des Problems sehr einfach eine Gleichung für ϱ, d. i. den „reducirten" Radiusvector, $= \Delta \cdot \cos\beta$, wo Δ der Abstand von der Sonne und β die Breite des Planeten ist. Diese Gleichung ist von der Form $\varrho \cdot A = B$, wo A und B aus bekannten Grössen und den genannten Dreiecksverhältnissen zusammengesetzt sind. Die hieraus folgende Bestimmung von ϱ wird illusorisch, wenn A und B sehr klein werden, und um Aufstellung der Bedingungen dafür handelt es sich. Nach Ueberführung in „Differentialformeln", wie sie unendlich benachbarten Beobachtungen entsprechen würden, zeigt sich B am besten für diese Untersuchung geeignet. Es ergeben sich dann sogenannte „kri-

tische“ Tage, für welche ϱ nicht bestimmt werden kann. Diese kritischen Tage fallen aber nie in die Nähe der Opposition, sondern hinter die Quadraturen; auch giebt es Bahnen, für welche sie ganz fehlen. An einem numerischen Beispiel (Planet Anahita (270)) wird der Fall der Unbestimmbarkeit von ϱ durchgerechnet. Dz.

H. J. ZWIERS. Ueber eine neue Methode zur Bestimmung von Doppelsternbahnen. Astr. Nachr. **139** (No. 3336), 369-380.

Die Methode ist graphisch. Im Anschluss an dieselbe untersucht Verf. die Bahn des Siriusbegleiters. Dz.

J. J. LEE. Theory of the determination, by means of a single spectroscopic observation, of the absolute dimensions, masses and parallaxes of stellar systems whose orbits are known from micrometrical measurement; with a rigorous method for testing the universality of the law of gravitation. Astr. Nachr. **139** (No. 3314), 17-26.

Durch die mikrometrischen Messungen erlangt man Aufschluss über die Bewegung senkrecht zur Sehrichtung, wobei allerdings die wahre Grösse der Bahn unbestimmt bleibt. Die spectroskopische Beobachtung giebt die wahre Geschwindigkeit in der Sehrichtung, aus der, wie leicht einzusehen, in Verbindung mit den mikrometrischen Messungen, die Ausdehnung der Bahn, die Parallaxe und die Summe der Massen gefolgert werden kann, wenn von vorn herein die Annahme gemacht wird, dass das Newton'sche Gravitationsgesetz auch für Doppelsterne gilt. Es wird eine Methode hierzu abgeleitet, die sich auf den Satz stützt, dass der Hodograph der Kepler'schen Ellipse ein Kreis ist. Durch Umkehrung kann nun rückwärts die Richtigkeit des Gravitationsgesetzes bewiesen werden. Dz.

R. LEHMANN-FILHÈS. Ueber den Artikel des Herrn Lee in Astr. Nachr. 3314. Astr. Nachr. **139,** 305-310.

Enthält eine Kritik des genannten Artikels, der sich mit der Bestimmung von Doppelsternbahnen auf Grund mikrometischer Messungen befasst. Es wird der Vorwurf ungenügender und ungeeigneter mathematischer Behandlung des Problems erhoben und dann die Frage nach dem Beweise der Herrschaft des Gravitationsgesetzes für Doppelsterne erörtert. Dz.

E. STRÖMGREN. Berechnung der Bahn des Kometen 1890 II. Acta Univ. Lund. **31,** 106 S.

Die Bahnberechnung gründet sich auf nahezu 900 über 22 Monate erstreckte Beobachtungen. Es werden die Störungen von Seiten der Planeten Jupiter, Saturn, Mars, Erde berücksichtigt. Sechzehn Normalörter. Osculirende Bahn hyperbolisch. Durch eine Rückwärtsrechnung

wird erwiesen, dass die Hyperbolicität zum grössten Teil eine Folge der Störungen der grossen Planeten ist. Der Verf. weist auf die Notwendigkeit hin, bei der Berechnung der Excentricitäten die Störungen in den Geschwindigkeitscomponenten der Sonne in Betracht zu ziehen. Bdn.

E. Pasquier. Sur les solutions multiples du problème des comètes. Belg. Bull. (3) **32**, 111-126.

Ch. Lagrange. Rapport. Ibid. 5-16.

Vervollkommnungen einer Oppolzer'schen Methode, die auch auf die Olbers'sche Methode anwendbar sind. Mn. (Lp.)

K. Schwarzwild. Ueber die Stabilität der Bewegung eines durch Jupiter gefangenen Kometen. Astr. Nachr. **141** (No. 3361), 1-8.

Durch Anwendung des Poincaré'schen Begriffes der Integralinvariante, $\int dx_1\, dx_2\, dx_3 \ldots$, welche der Bewegung einer incompressiblen Flüssigkeit entspricht, weist der Verf. nach, dass ein aus grosser Entfernung kommender, von einem Planeten eingefangener Komet entweder wieder das Sonnensystem verlassen oder schliesslich in die Sonne oder in einen Planeten stürzen muss. Vereinzelte singuläre Ausnahmen werden durch den Beweis nicht ausgeschlossen, durch eine kleine Aenderung seiner Bahnelemente aber beseitigt. Dz.

G. Ravené. Ueber die Masse der Planetoiden. Astr. Nachr. **140** (No. 3359), 355-358.

Nach Newcomb's Untersuchungen weicht die säculare Bewegung des Marsperihels von der theoretisch zu berechnenden um $+5,55''$ pro Jahrhundert ab. Rührt diese Differenz von den Störungen des Planetoidenringes her, so findet der Verf. bei Anwendung der Gauss'schen Methode zur Berechnung der säcularen Störungen für die Masse dieses Ringes

$$m = \frac{1}{37\,130\,000} \text{ Sonnenmasse.}$$

Dz.

E. W. Brown. An introductory treatise on the lunar theory. Cambridge: At the University Press; New-York: Macmillan. XVI + 292 S. 8°.

Nach der Anzeige von Plummer in Phil. Mag. (5) **42**, 369-371, ein empfehlenswertes Werk; die Schlussworte dieser Anzeige lauten: „Wir halten das Buch des Professors Brown für einen äusserst wichtigen und wertvollen Beitrag zu einem höchst interessanten Zweige der Mathematik. Es muss auch erwähnt werden, dass der Band hinsichtlich des Drucks und der allgemeinen Ausstattung durchaus auf der hohen Stufe steht, die wir zu erwarten gewohnt sind bei Büchern, welche unter Förderung der Universität in die Oeffentlichkeit treten, und diese That-

sache ist nicht gering zu veranschlagen in Bezug auf die Durchsichtigkeit der Erläuterungen". Gbs. (Lp.)

L. de Ball. Zur Berechnung des Einflusses der Aenderung der Ekliptik auf die Mondbahn. Astr. Nachr. **139** (No. 3316), 48-49.

Wenn nur die säcularen Aenderungen der Ekliptik in Frage kommen, so können deren Differentialquotienten nach der Zeit constant gesetzt werden. Unter dieser Voraussetzung giebt der Verf. ein einfaches Verfahren an, um die Differentialgleichungen für die Variation der Ebene der Mondbahn zu integriren. Dz.

P. H. Cowell. On the inclinational terms in the Moon's coordinates. American J. **18**, 99-127.

Die Arbeit fusst auf den bahnbrechenden Untersuchungen von Hill. Es werden die Glieder bis zum dritten Grade bezüglich der Neigung in nach Potenzen von m (dem Verhältnis der Bewegung der Sonne zu der des Mondes) fortschreitende Reihen entwickelt, wobei zuerst eine Grösse g zu berechnen ist, die durch zwei verschiedene Methoden bestimmt wird; einmal durch successive Annäherungen, das andere Mal durch die von Hill eingeführte „unendliche" Determinante. Die erhaltenen, von keiner Constante abhängigen, als rationale Zahlenbrüche erscheinenden Coefficienten werden mit den von Delaunay nach seiner Methode gefundenen verglichen. Dz.

E. v. Haerdtl. Notiz, betreffend die Säcularacceleration des Mondes. Wien. Ber. **105**, 8-14.

Es wird gezeigt, dass der Coefficient der Säcularbeschleunigung ($6''$, 18) um etwa $\frac{1}{30}$ vergrössert wird, wenn man die Abplattung der Erde berücksichtigt. Ausserdem werden noch andere Beiträge zu diesem Coefficienten angegeben, welche sich aber gegenseitig aufheben. Dz.

R. Foa. Uno studio geometrico dei movimenti del piano instantaneo dell'orbite lunare. Batt. G. **34**, 118-134.

Nach einer auf Newton's grundlegende Forschungen zurückgreifenden Einleitung werden die Ausdrücke für die differentiellen Variationen der Länge des Mondknotens und der Neigung der Mondbahn rein geometrisch abgeleitet, worauf eine allgemeine Untersuchung der Bewegung der Bahnebene folgt. Dann werden Transformationen zum Zweck der Integrationen vorgenommen, aus welchen die retrograde Bewegung des Mondknotens und die Oscillationen der Neigung gegen die Ekliptik sich ergeben. Dz.

A. Antoniazzi. Equazioni di condizione per le occultazioni osservate a Padova nel 1894 e nel 1895. Ven. Ist. Atti (7) **7**, 327-384.

Es handelt sich um 53 in Padua beobachtete Sternbedeckungen durch den Mond, aus denen sich eben so viele Bedingungsgleichungen für die Coordinaten der Sterne, die Bahnelemente der Mondbahn und den Monddurchmesser ergeben. Diese Gleichungen werden abgeleitet. Dz.

J. v. HEPPERGER. Ueber die Helligkeit des verfinsterten Mondes und die scheinbare Vergrösserung des Erdschattens. Wien. Ber. **104**, 189-225.

Auf Grund der in der Astronomie verwandten Formeln für die Brechung und Absorption des Lichtes in der irdischen Atmosphäre werden die Helligkeitsverhältnisse bei Mondfinsternissen analysirt, wobei die merkwürdige bekannte Vergrösserung des Erdschattens besonders zum Gegenstande der Untersuchung gemacht wird. Dz.

H. BUCHHOLZ. Die Laplace'sche und die Salmon'sche Schattentheorie und das Saturnring-Schattenproblem. Wien. Ber. **104**, 863-908.

Es wird zunächst die von Laplace in der Mécanique céleste entwickelte Methode auf den Schatten des Saturnringes angewandt und so weit gegangen, dass nur noch ein Parameter zu eliminiren wäre, um zur Endgleichung der Schattenfläche zu gelangen. Die Elimination ist aber so schwierig, dass sie sich praktisch als ungangbar erweist, und Verf. wendet sich daher der ganz strengen Theorie zu, indem er sich an Untersuchungen hält, welche Salmon in seiner analytischen Geometrie über die gemeinsame einhüllende abwickelbare Fläche zweier Flächen zweiten Grades angestellt hat. Die wirkliche Berechnung der Endgleichung erweist sich zwar auch hier noch als sehr umständlich; für den Saturnring indessen treten erhebliche Vereinfachungen ein, welche es dem Verf. ermöglichen, sie vollständig zu geben. Zum Schluss werden Vergleiche zwischen beiden Theorien gezogen. Dz.

Observations méridiennes de la planète Mars pendant l'opposition de 1892. Lisbonne (1895).

Dieser Band enthält die auf der Lissaboner Sternwarte angestellten Beobachtungen des Mars während der Opposition 1892. Diese Beobachtungen wurden zufolge einer an alle Sternwarten ergangenen Aufforderung der Washingtoner Sternwarte unternommen und nach einem vom Professor Earstmann vorgeschlagenen Programme durchgeführt. Die Beobachtungen, welche 85 Tafeln des Bandes einnehmen, wurden in der Zeit vom 20. Juni bis 23. September 1892 ausgeführt. Der Band enthält auch die Beschreibung der zu den Beobachtungen verwandten Instrumente, die Darstellung der bei ihrer Anstellung benutzten Methoden, die Beschreibung der Methoden, mittels deren auf der Lissaboner Sternwarte die Instrumente geprüft worden sind, die man in Gebrauch nahm, u. s. w. Tx. (Lp.)

J. Unterweger. Ueber zwei trigonometrische Reihen für Sonnenflecken, Kometen und Klimaschwankungen. Vorläufige Mitt. Wien. Denkschr. **64,** 67-71.

Die beiden Reihen lauten:

1) für die Sonnenflecken Relativzahlen:

$$10{,}260\sin(244^\circ 25' + \tfrac{4}{25}x) + 2{,}099\sin(201^\circ 6' + \tfrac{8}{25}x)$$
$$+ 11{,}218\sin(155^\circ 0' + x) + 2{,}787\sin(284^\circ 27' + 2x);$$

2) für die Kometenfunction:

$$0{,}2019\sin(223^\circ 9' + \tfrac{4}{25}x) + 0{,}3980\sin(9^\circ 52' + \tfrac{8}{25}x)$$
$$+ 0{,}1495\sin(148^\circ 29' + x) + 0{,}0687\sin(193^\circ 16' + 2x),$$

wo für das laufende Jahr $x = 6^\circ 25' 42'',9$. Lp.

F. Goldscheider. Ueber die Gauss'sche Osterformel I. Pr. (No. 97) Luisenstädt. Realgymn. Berlin. 29 S. 4°.

Ableitung dieser Formel aus den zur Bestimmung des Osterfestes geltenden Vorschriften, nebst der Entstehungsgeschichte letzterer. Dz.

M. Hamburger. Ableitung der Gauss'schen Formel zur Bestimmung des jüdischen Osterfestes. J. für Math. **116,** 90-96.

Es wird eine eingehende Analyse der Entstehung der Formel auf Grund der Einrichtung des jüdischen Kalenders und der Vorschriften für das Datum des Osterfestes gegeben. Dz.

Weitere Litteratur.

(Anonymes.) Observations hors du méridien. Brux. Ann. astron. **7,** 41 S.

Détermination de la différence de longitude entre les observatoires de Bruxelles et d'Uccle. Brux. Ann. astron. **7,** 66 S.

L. Arndt. Beitrag zur Berechnung der störenden Kräfte in der Theorie der säcularen Störungen. Diss. Berlin. 44 S. 8° (1895).

B. Baillaud. Cours d'astronomie à l'usage des étudiants des Facultés des Sciences. Vol. II: Astronomie sphérique. Mouvements dans le système solaire. Éléments géographiques. Éclipses. Astronomie moderne. Paris: Gauthier-Villars et Fils.

Sir Robert S. Ball. The elements of astronomy. New edition, thoroughly revised. London: Longmans, Green, and Co. 469 S. [Nature **55,** 28.]

L. de Ball. Catalogue de 382 étoiles faibles de la zone DM + 2° observées à l'Institut astronomique de Liège de 1886 à 1889. Brux. Ann. astron. **7,** 68 S.

U. Bigler. Bewegung der Planeten mittelst Variation der elliptischen Bahnelemente behandelt. Aarau Mitt. Naturf. Ges. 1896, 28 S. 8°.

H. FAYE. Sur l'origine du monde. Théories cosmogoniques des anciens et des modernes. 3[e] édition revue et augmentée. Paris: Gauthier-Villars & Fils.

F. FOLIE. Sur la constante de l'aberration. Belg. Bull. (3) **31**, 46-53.
Mn.

F. FOLIE. Où gît l'erreur fondamentale des formules de réduction rapportées à l'axe instantané. Belg. Bull. (3) **32**, 387-401.

F. FOLIE. Révision des constantes de l'astronomie. Brux. Ann. astron. **7**, 119 S.

F. FOLIE. De la supériorité de la méthode de Laplace sur celle d'Oppolzer quant à la correction du calcul des coordonnées et à la précision des observations. Annuaire Belg. **63**, 220-261.

F. FOLIE. Un mot sur la nutation diurne. Ibid. 262-263.

Verbesserte Werte der auf die Nutation bezüglichen Constanten.

F. FOLIE. Les véritables expressions de la nutation eulérienne et de la variation des latitudes. Ibid. 264-279.

F. FOLIE. Expression complète des termes du second ordre dans les formules de réduction du lieu apparent. Ibid. 280-288.

F. FOLIE. Sur la résolution des équations numériques à cinq ou six inconnues. Ibid. 289-295.

Man ersetzt das gegebene System durch ein anderes, bei welchem die Coefficienten einer Unbekannten sehr klein sind.

F. FOLIE. Détermination définitive de la différence de longitude entre Bruxelles et Uccle. Ibid. 296-297.

F. FOLIE. Sur la constante de l'aberration. Ibid. 298-305.

F. FOLIE. Sur les différences systématiques en déclinaison, constatées à Poulkova. Ibid. 306-309.

Diese Differenzen werden durch die Annahme des Bestehens der täglichen Nutation erklärlich.

E. BYL. Détermination des constantes de la nutation diurne. Ibid. 326-330.
Mn.

CH. LAGRANGE. Méthode pour la détermination des parallaxes par des observations continues. Brux. Ann. astron. **7**, 85 S.

Vergl. F. d. M. **18**, 1101, 1886.

CH. LAGRANGE. Théorèmes de Mécanique céleste indépendants de la loi de l'attraction. Brux. Ann. astron. **7**, 30 S.

Vergl. F. d. M. **18**, 854-855, 1886.

G. DE LANNOY. Précis de cosmographie et de navigation et notions de trigonométrie sphérique. Paris. 8°.

P. LEHMANN. Die Erde und der Mond, vom astronomischen Standpunkte aus betrachtet. Neudruck. Leipzig. IV + 272 S. 8°.



L. NIESTEN. Observations sur l'aspect physique de la planète Mars pendant l'opposition de 1879 à 1880. Brux. Ann. astron. **7**, 31 S.

L. NIESTEN. Observations sur l'aspect physique de la planète Mars pendant l'opposition de 1881-1882. Ibid. 15 S.

L. NIESTEN. Les plans planétaires et l'équateur solaire. Brux. Ann. astron. **7**, 13 S.

J. RIEM. Ueber die Bahn des grossen Kometen 1881 III (Tebbut). Nova Acta Leop. **66**, 208 S. 4°.

E. ROGER. Recherches sur le système du monde. 2e édition entièrement refondue. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 4°.

F. C. STEBBING. Navigation and nautical astronomy. London: Macmillan and Co. VII + 328 S. [Nature **54**, 389-390.]

W. C. THOMAS. Cosmic ethics, or the mathematical theory of evolution, showing the full import of the doctrine of the Moon and containing the principia of the science of proportion. London: Smith. 318 S. 8°.

F. TISSERAND. Traité de mécanique céleste. Tome IV et dernier: Théorie des satellites de Jupiter et de Saturne. Perturbations des petites planètes. Paris: Gauthier-Villars et Fils. XII + 548 S. 4°.

W. VALENTINER. Handwörterbuch der Astronomie. 1. Band. Breslau: E. Trewendt. XIV + 839 S. 8°. Mit 3 Taf. (Aus „Encyklopädie der Naturwissenschaften".)

K. ZELBR. Die Bahnbestimmung der Planeten und Kometen. (Handwörterbuch der Astronomie.) Breslau. 125 S. 8°.

Kapitel 3.

Mathematische Geographie und Meteorologie.

S. GÜNTHER. Handbuch der Geophysik. 2 Bände. II. Auflage. Band I. Stuttgart: Ferd. Enke. XII + 648 S. gr. 8° (1897).

Die Geophysik bespricht geographische Fragen, die physikalischer Behandlung bedürfen. Nun ist jede physikalische Methode auf die Beihülfe der Mathematik angewiesen, und die Abgrenzung des Gebietes, das der erdkundlichen Wissenschaft zufällt, ist gegen die Geologie, Chemie, Astronomie und andere Wissenschaften hin unsicher und dem subjectiven Ermessen überlassen. Der Umkreis der in vorliegendem Werke zur Sprache kommenden Dinge ist also sehr gross, und die Vertreter recht verschiedener Fächer werden es als Nachschlagebuch benutzen, das den Blick weitet, gerade weil es überall auf Nachbargebiete hinüber weist. Es musste sich von selbst aus einem Lehrbuch, das es in erster Auflage zu sein suchte, zum Handbuche auswachsen. Die Einteilung des Stoffes ist geblieben.

Die erste Abteilung bespricht die kosmische Stellung der Erde, also

kosmogonische Hypothesen und die physische Constitution der Körper im Sonnensystem, besonders der erdähnlichen Planeten und des Mondes. In der zweiten Abteilung werden die mathematischen und physikalischen Verhältnisse des Erdkörpers behandelt, nämlich die Erde als Kugel und Rotationssphäroid, die Attractionsphänomene und deren Anwendung zur Bestimmung der Gestalt und Dichte der Erde, das Geoid mit allen geometrischen Unregelmässigkeiten der Erdgestalt und die Lotablenkungen, sowie die Bewegung der Erde im Raum. Ein Abschnitt über Kartenprojectionen, Terrainzeichnung und anderweitige Darstellungen von der Erdoberfläche oder von ihren Teilen fügt sich hier passend ein. Die dritte Abteilung, „Geophysik im engeren Sinn“ überschrieben, enthält Kapitel über Wärmeverhältnisse im Erdinneren, dessen Zustand, über vulkanische Erscheinungen und Erdbeben. Die letzte Abteilung des ersten Bandes behandelt den Erdmagnetismus in seinen allgemeinen Beziehungen zur Sonne wie in seinem örtlichen Auftreten und erläutert die hierher gehörenden Theorien und Berechnungen. Mit einer Besprechung der elektrischen Erscheinungen und der Polarlichter schliesst der Band.

Die in diesen Abteilungen vorgetragenen Lehren werden an der Hand der Mathematik erörtert und erscheinen deshalb in exacterer Fassung, als die geographisch-descriptive Methode, die in dem Werke ganz zurückgedrängt ist, ihnen geben könnte. Eingehend wird ausserdem die geschichtliche Entwickelung der einzelnen Anschauungen und Kenntnisse berücksichtigt. Abgesehen von der namenreichen historisch-litterarischen Einleitung, ist jeder Abteilung ein ungemein ausführlicher Litteraturnachweis angefügt, dessen Fülle den Unkundigeren, der einer kritischen Auslese bedürfte, leicht verwirren kann, jedem aber, der in einem der besprochenen Gebiete arbeiten will, eine unschätzbare Materialsammlung bietet. F. L.

A. Klingatsch. **Zur Bestimmung des mittleren Halbmessers der Erde als Kugel.** Monatsh. f. Math. 7, 335-341.

Gewöhnlich ersetzt man das Rotationsellipsoid der Erdkugel zur Bestimmung des mittleren Radius durch eine Kugel, für deren Halbmesser der Umstand berücksichtigt wird, dass die verschiedenen Werte den mittleren Radienvectoren der Oberfläche unter sich und mit den Werten des mittleren Krümmungsradius der Oberfläche bis auf Glieder von der Ordnung des Quadrates der Abplattung übereinstimmen. Verf. aber ersetzt das Rotationsellipsoid durch eine concentrische Kugel, welche so bestimmt wird, dass in jedem Meridianschnitte die Summe der Quadrate der Abweichungen von dem Ellipsoid ein Minimum wird. Die Rechnung führt auf einen Ausdruck in elliptischen Integralen zweiter Gattung, die der Verf. näherungsweise ausrechnet, indem er nur die Glieder mit dem Quadrate des Modulus benutzt. Hierdurch gelangt er mit Zugrundelegung der Bessel'schen Werte für Halbaxen und Abplattung zu der Zahl $r = 6366731{,}9$ m, während das arithmetische Mittel der Halbaxen $r = 6366738{,}05$ m ergiebt. Bm.

Ch. Davison. On the straining of the Earth resulting from secular cooling. Phil. Mag. (5) **41,** 133-138.

In dieser Abhandlung wird die Tiefe der nicht deformirten Oberfläche unter der Annahme berechnet, dass der Ausdehnungscoefficient mit der Temperatur wächst, also $\varepsilon + \varepsilon' v$ ist, wenn v die Temperatur bezeichnet. Wenn dieses Gesetz der Voraussetzung nach bis zu einer Temperatur von $7000^0 F$ gültig sein sollte, so würde den Zahlenergebnissen, wie anerkannt wird, immerhin eher ein qualitativer, als ein quantitativer Wert zugebilligt werden müssen. Zuerst wird ein Ausdruck für den Betrag ermittelt, um welchen der Radius einer mit der Erde concentrischen Schale gedehnt wird; daraus folgt eine Gleichung zur Bestimmung der Tiefe der deformationsfreien Oberfläche. Indem man ε/ε' zuerst unendlich gross, danach gleich Null setzt, erhält man zwei Grenzen für die Tiefe. Die erste entspricht dem Falle, in welchem der Coefficient der Ausdehnung constant ist, und stimmt mit der ersten von Fisher und Darwin gegebenen Näherung; die zweite dagegen giebt eine obere Grenze für jene Oberfläche, so lange der Ausdehnungscoefficient mit der Temperatur wächst. Entnimmt man das Mittel aus gewissen Bestimmungen der Ausdehnungscoefficienten der Fizeau'schen Tabelle und setzt die Temperatur auf $7000^0 F$ an, so ist die Tiefe der nicht deformirten Oberfläche nach 10^8 Jahren 7,79 (englische) Meilen für die veränderliche Ausdehnung, aber 2,17 Meilen für die constante Ausdehnung. Allgemein ergiebt sich, dass für kleine Werte von ε'/ε die Tiefe nahezu mit t proportional ist, für grosse Werte aber mit $t^{3/4}$. Eine Schätzung wird auch angestellt betreffs des Volumens des gefalteten Gesteins oberhalb der nicht deformirten Fläche, und hieraus wird der Schluss gezogen, dass, falls der Ausdehnungscoefficient mit der Temperatur zunimmt, auch eine beträchtliche Zunahme in der Tiefe der neutralen Oberfläche und in dem Gesamtbetrage der von der Abkühlung der Erde herrührenden Gesteinsfaltung Platz greift. Gbs. (Lp.)

Seismological investigation. — Report of Committee. Brit. Ass. Rep. 1896, 180-230.

Dieser neue Ausschuss besteht grossenteils aus Mitgliedern zweier früheren Ausschüsse, welche die Vibrationen der Erdrinde erforscht haben. Die Rechenschaft über die bisherige Thätigkeit bildet den Hauptteil des vorliegenden Berichtes, dessen Inhalt der folgende ist: I. Bemerkungen über Instrumente, welche Erdbeben von geringer Stärke registiren; von Milne. II. Beobachtungen mit den Milne'schen Pendeln T und U, 1895-1896. III. Aenderungen in der Verticale, beobachtet in Tokio, September 1894 bis März 1896; von Milne. IV. Versuch zu Oxford, verfasst von H. H. Turner. V. Das Perry'sche Tromometer; von Perry. VI. Häufigkeit der Erdbeben; von Knott. VII. In Italien gebräuchliche Instrumente; von C. Davison. Gbs. (Lp.)

R. v. Kövesligethy. **Neue geometrische Theorie der seismischen Erscheinungen.** Ungar. Ber. **13**, 418-464.

Verf. legt die Hypothese zu Grunde, dass der „Erdbebenstrahl" bei seiner Fortpflanzung durch das Erdinnere denselben Gesetzen wie das Licht beim Durchgang durch brechende Medien unterworfen sei. Unter Zugrundelegung eines einfachen Zusammenhanges zwischen Brechungsexponent und Dichte und der Roche'schen Annahme für die Zunahme der letzteren mit der Tiefe erhält der Verf. für den Erdbebenstrahl eine Ellipse. Darauf geht der Verf., auf diese Theorie gestützt, über zur Frage nach der Ausbreitung der Erdbeben, nach dem Emersionswinkel, unter welchem der Strahl an die Oberfläche gelangt, nach der Wellenfläche der Erschütterung, der Intensität des Erdbebens, kurz nach den „Elementen" desselben. Dz.

Ch. Davison. **On the diurnal periodicity of earthquakes.** Phil. Mag. (5) **42**, 463-476.

Eine Uebersicht über die Methoden und Folgerungen von Montessus de Ballore in Arch. sc. phys. (3) **22** (1889) und von F. Omori in Japan Journ. **7** (1894), nebst einer Analyse der von ihnen benutzten Aufzeichnungen oder ähnlicher Registrirungen durch das strengere Verfahren der harmonischen Analyse. Gbs. (Lp.)

Th. Sloudski. **On the rotation of the Earth.** Nature **54**, 161.

Ein kurzer Auszug aus einer in dem Bulletin de la Société impériale des naturalistes de Moscou erschienenen grösseren Abhandlung unter Fortlassung aller mathematischen Entwickelungen. Lp.

H. H. Howorth. **Sir Robert Ball and „The cause of an ice age".** Nature **53**, 29-30.

H. H. Howorth. **The astronomical theory of the glacial period.** Ebenda, 340-341.

H. H. Howorth. **Dr. Ball's two letters on the ice age.** Ebenda, 460.

G. H. Darwin. **The astronomical theory of the glacial period.** Ebenda, 196-197.

R. S. Ball. **The cause of an ice age.** Ebenda, 220; 388-389.

A. R. Wallace. **The cause of an ice age.** Ebenda, 220-221.

A. R. Wallace. **The astronomical theory of a glacial period.** Ebenda, 317.

E. P. Culverwell. **The astronomical theory of the ice age.** Ebenda, 269.

O. Fisher. **The cause of an ice age.** Ebenda, 295.

Erörterungen, welche sich an den ersten Artikel von Howorth

anschliessen, über den schon in F. d. M. **26**, 1107, 1895 berichtet ist, ohne dass eine Einigung in den Ansichten der Streitenden erreicht wird.

Lp.

L. de Marchi. The temperature of air and the problem of an ice age. Nature **53**, 376-377.

Kurze Inhaltsangabe des italienischen Werkes „Le cause dell'era glaciale" zur Berichtigung einer vorangegangenen Anzeige in Nature.

Lp.

R. Hargreaves. Distribution of solar radiation on the surface of the Earth, and its dependence on astronomical elements. Cambr. Trans. **16**, 58-94; Abstract. Cambr. Proc. **9**, 69-71.

Die Wärmemenge, welche eine beliebige Stelle der Erdoberfläche von der Sonne empfängt, wird, zunächst unter Vernachlässigung der atmosphärischen Absorption, nach der Sonnenanomalie Θ in eine Fourier'sche Reihe von der Form $L_0+L_1\cos\Theta+L_2\cos 2\Theta+L_4\cos 4\Theta+\cdots$ entwickelt, von welcher die Coefficienten L_0, L_1, L_2, L_4 (d. h. der unperiodische Term und die Amplituden der jährlichen, halbjährlichen und vierteljährlichen Schwankung) als Functionen der geographischen Breite des Ortes, der Schiefe und Excentricität der Ekliptik angegeben werden. Nur dasjenige Glied, welches zur Periode ein Jahr hat, besitzt einen elementaren Ausdruck. Die Coefficienten der übrigen Glieder berechnen sich durch vollständige elliptische Integrale der drei Gattungen. Vor allem soll der Einfluss etwaiger Variationen in den astronomischen Elementen: Schiefe der Ekliptik, Excentricität der Erdbahn, auf die Strahlungswärme festgestellt werden, um so eine exacte Grundlage für die Beurteilung der Frage zu gewinnen, in wie weit solche Variationen die Eiszeit bedingt haben können. Es zeigt sich: 1) Die mittlere Wärmemenge L_0 wird wesentlich nur durch die Schiefe der Ekliptik beeinflusst. Interessant ist die Abhängigkeit dieser Wärmemenge von der geographischen Breite bei verschiedenen Werten der Schiefe. Für Schiefen $< 45^0$ fällt das Minimum von L_0 auf die Pole, für Schiefen $> 65^0$ auf den Aequator, für dazwischen liegende Werte der Schiefe in dazwischen liegende Breiten. 2) Die Amplitude der jährlichen Schwankung L_1 hängt sowohl von der Schiefe wie von der Excentricität ab. Die Aenderungen, welche durch Aenderungen der letzteren bedingt werden, sind für die entgegengesetzten Hemisphären entgegengesetzt. Bezüglich der hieraus zu ziehenden Folgerungen hinsichtlich der Temperatur auf der Erdoberfläche äussert sich Verf. sehr vorsichtig.

Anhangsweise wird auch die Absorption der Atmosphäre berücksichtigt.

A. S.

Report of Committee. The effect of wind and atmospheric pressure on the tides. Brit. Ass. Rep. 1896, 503-526.

Der Bericht stellt fest, dass die aus einer sorgfältigen Prüfung der in den Tabellen niedergelegten Beobachtungen zu ziehenden Schlüsse

folgende Sätze ergeben: 1. Die Gezeiten werden sowohl durch den Luftdruck wie durch den Wind dermassen beeinflusst, dass ihre Höhe dadurch beträchtlich geändert wird. 2. Die Höhe der Gezeiten wird etwa zu einem Viertel vom Winde bestimmt. 3. Der den Gezeiten anhaftende Einfluss des Luftdrucks wirkt auf einer so ausgedehnten Fläche, dass die an irgend einer besonderen Stelle von dem Barometer angezeigten localen Stärken keinen verlässlichen Hinweis bezüglich der Wirkung auf die Gezeiten an jener Stelle liefern. 4. So weit die Durchschnittswerte reichen, kann zwar ein directer Zusammenhang zwischen der Stärke und Richtung des Windes nachgewiesen werden; indessen bestehen so grosse Widersprüche in den durchschnittlichen Ergebnissen, wenn man sie auf einzelne Gezeiten anwendet, dass keine verlässliche Formel zur Angabe des Betrages der Aenderung in der Fluthöhe aufgestellt werden kann, die einer beliebig gegebenen Windstärke entspricht. 5. In den auf den Luftdruck bezüglichen Tafeln weisen die Resultate darauf hin, dass die Wirkung desselben grösser ist, als allgemein zugegeben wird, indem eine Abweichung um einen halben Zoll von dem durchschnittlichen Drucke eine Aenderung in der Höhe der Gezeiten von 15 Zoll veranlasst.

Gbs. (Lp.)

E. Hermann. **The motions of the atmosphere and especially its waves.** American M. S. Bull. (2) **2**, 285-296.

Uebersetzung des Vortrages: „Ueber die Bewegungen, insbesondere die Wellen des Luftmeeres“ aus den Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte zu Wien $\mathbf{2}_1$, 42-50, 323-324. Lp.

E. Oekinghaus. **Zur Theorie der Anticyklonen.** Meteor. Zeitschr. **13**, 423-427.

Den Zweck des Aufsatzes giebt der Verf. mit folgenden Worten an: „Die Anregung zu den nachstehenden Entwickelungen über die Anticyklonen gab mir der im Jahrgang 1893 dieser Zeitschrift erschienene Aufsatz von Pockels: Zur Theorie der Luftbewegung in stationären Anticyklonen (F. d. M. **25**, 1897, 1893/94), durch welchen die Cyklonentheorie Oberbeck's wesentlich ergänzt und namentlich auch den Stetigkeitsbedingungen hinsichtlich der Gradienten im Grenzkreise genügend Rechnung getragen worden ist. Beim Lesen des mir erst vor kurzem bekannt gewordenen interessanten Aufsatzes fasste ich den Gedanken, zu prüfen, ob sich die genannte Theorie vielleicht auch aus den von mir im Jahre 1891 in Klein's Wochenschrift für Astronomie, bezw. Hoppe's Archiv (vergl. F. d. M. **23**, 1249, 1891 und **25**, 1895, 1893/94) veröffentlichten Gleichungen der cyklonalen Bewegungen ableiten und wenn möglich verallgemeinern liesse. In Ausführung dieses Gedankens habe ich die gewonnenen Resultate zusammengestellt und erlaube mir, dieselben an dieser Stelle mitzuteilen mit dem Bemerken, dass es sich der besseren Orientirung wegen empfehlen dürfte, den betreffenden Aufsatz von Pockels gleichzeitig mit dem kurzgefassten unsern durchzusehen.“ Lp.

M. Möller. Die zur Erzeugung eines Wirbels erforderliche motorische Kraft. Meteor. Zeitschr. **18**, 19-20.

Ueberträgt die bei strömenden Flüssigkeiten in sich verengernden und wieder erweiternden Röhren gemachten Erfahrungen ohne weiteres auf die Vorgänge der Luftbewegung in den Wirbeln. Lp.

W. Köppen. Wirkungen der verticalen Componente der ablenkenden Kraft der Erdrotation. Meteor. Zeitschr. **18**, 18.

In dem Streite um die Bedeutung der verticalen Componente der ablenkenden Kraft der Erdrotation für die Luftbewegung (vergl. F. d. M. **26**, 1111, 1895; **27**, 602, 1896) steht der Verf. auf der Seite von Sprung; er weist in der vorliegenden Note auf den äusserst geringfügigen Betrag der fraglichen Kraft hin im Vergleich mit den Wirkungen der Temperaturänderungen in der Atmosphäre. Lp.

Paul Schreiber. Untersuchungen über einige Gesetzmässigkeiten in der Folge jährlicher Niederschlagsmengen. Civiling. **42**, 11-56, 283-318.

Der Verf. giebt eine eingehende Untersuchung über die aus den Beobachtungen der Niederschlagsmengen zu ziehenden Folgerungen bezüglich der Gesetzmässigkeit, namentlich der Periodicität. Es kommen hauptsächlich drei Periodicitäten in Betracht, die wohl mit den Sonnenflecken zusammenhängende 11jährige und 110jährige Periode, sowie eine Periode von 38 Jahren. Diese letztere Periode hat Brückner unter Benutzung des Hann'schen Gesetzes von der Constanz des Verhältnisses der Jahresniederschlagsmengen für zwei Stationen abgeleitet. Deshalb hat der Verf. zunächst das Hann'sche Gesetz einer Prüfung unterzogen und ist dabei zu negativen Resultaten gelangt. Dasselbe gilt im wesentlichen auch von der Brückner'schen Periode; ist dieselbe vorhanden, so hat sie jedenfalls eine viel kleinere Amplitude, als Brückner angiebt. Schärfer tritt die elfjährige Periode hervor, während von der 110jährigen Periode auch nur ausgesagt wird, dass sie bestehen könne. F. K.

A. Tilp. Wiener Bodentemperaturen in den Jahren 1878 bis 1894. Meteor. Zeitschr. **18**, 455-461.

Am Schlusse des Aufsatzes wird der Versuch gemacht, unter Benutzung von Poisson's Théorie mathématique de la chaleur (Chap. XII) aus den beobachteten Amplituden die Wärmeleitungsconstante des Löss zu bestimmen. Lp.

E. Leyst. Zur Frage über Spiegelung des Regenbogens. Meteor. Zeitschr. **18**, 35-36.

Zur Bestätigung der theoretisch sattsam erörterten Verhältnisse fordert der Verf. Mitteilung von bezüglichen entscheidenden Beobachtungen. Lp.

H. EKAMA. Eine seltene Form des Halo. Meteor. Zeitschr. **13,** 39-40.

Die Form ist ein Circumzenithalkreis, dessen Radius k nach der Formel $\cos k = \sqrt{n^2 - \cos^2 h}$ theoretisch bestimmt wird (h = Sonnenhöhe, n = Brechungsindex des Lichts in Eisnadeln). Ein solcher Bogen wurde am 8. October 1895 zu Loenen an der Vecht zwischen 7 und 8 Uhr Morgens beobachtet. Lp.

Weitere Litteratur.

H. BOUASSE. Introduction à l'étude des théories de la mécanique. Paris. G. Carré (1895.)

M. CASALONGA. Du mécanisme des marées. Assoc. Franç. Bordeaux **24,** 165-167. Lp.

P. CEBRIAN y A. LOS ARCOS. Teoria general de las proyecciones geograficas y su applicacion á la formacion de un mapa de España. Madrid. 270 S. 4° (1895).

G. COORDES. Kleines Lehrbuch der Landkarten-Projection. Zweite vermehrte u. verbesserte Auflage, von S. Koch. 2. Ausgabe. Leipzig.

J. HALM. Versuch einer theoretischen Darstellung des täglichen Ganges der Lufttemperatur. Nova Acta Leop. **67,** Nr. 2, 53 S. 4°. [Meteor. Zeitschr. **13,** (17)-(20), Ref. von J. Maurer.]

E. KAYSER. Wolkenhöhenmessungen. Danzig Naturf. Ges. **9,** 68 S. (1895).

C. KOPPE. Photogrammetrie und internationale Wolkenmessung. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. 108 S. 8°. [Meteor. Zeitschr. **13,** (39).]

A. SUPAN. Grundzüge der physischen Erdkunde. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Leipzig: Veit & Comp. IX u. 706 S. 8°. [Meteor. Zeitschr. **13,** (36).]

E. WEIGHARDT. Mathematische Geographie. Leitfaden für den Unterricht in der Obertertia der Mittelschulen. Bühl: Konkordia. 44 S. 8°.

Anhang.

E. Cesàro. Lezioni di geometria intrinseca. Napoli. Presso l'autore-editore: Via Sapienza 29. 264 S. gr. 8°.

Bekanntlich hat Cesàro durch eine lange Reihe von Arbeiten, welche in den Nouv. Ann., in Mathesis und in Peano's Rivista abgedruckt sind, bewiesen, dass man alle Haupteigenschaften einer ebenen Curve ermitteln kann, wenn diese durch eine Gleichung zwischen dem Bogen s und dem Krümmungsradius ϱ dargestellt ist. Dadurch hat er eine Lücke der ebenen Differentialgeometrie ausgefüllt und den Wert der „Geometria intrinseca" der Ebene ausser Frage gestellt. Eine methodische Darstellung aller vorangehenden getrennten Untersuchungen ist einer der Zwecke des vorliegenden Werkes. Die zwei ersten Kapitel desselben enthalten eine eingehende Discussion einer Plancurve, welche durch eine Gleichung zwischen ϱ und s dargestellt ist; die zur Anwendung kommenden kinematischen Betrachtungen sind denjenigen ähnlich, deren Gebrauch Darboux in der Einleitung seiner Leçons sur la théorie des surfaces gelehrt hat. Wie diese Methoden auf besondere Curven (Kegelschnitte, Cassini'sche Ovale, Ribaucour'sche Curve, sinusoidische Spiralen u. s. w.) angewandt werden können, wird im dritten Kapitel auseinandergesetzt; wie dieselben in der Lehre von der Berührung, der Osculation und den Rouletten gute Dienste leisten können, ersieht man aus den bezüglichen Kapiteln III, IV und V. Nach einer beachtenswerten Vorlesung über die Schwerpunkte und einer über die barycentrischen Coordinaten in der Ebene, beschäftigt sich der Verf. mit den Systemen ebener Curven, um sich einiges Material zu verschaffen, das in späteren Betrachtungen Anwendung findet, und um einige Formeln zu begründen, welche nachher verallgemeinert werden sollen. Neu und schön ist die Betrachtung des Plancurvensystems, welches durch die Schwerpunkte der ∞^2 Bogen einer gegebenen Curve erzeugt wird.

Wie die Grundbegriffe der ebenen „Geometria intrinseca" auf die Raumcurven ausgedehnt werden können, wird im neunten Kapitel gelehrt, zu welchem das folgende (besonderen Raumcurven gewidmete) eine not-

wendige Ergänzung bildet. Wie dieselben Begriffe selbst auf Oberflächen angewandt werden können, ersieht man aus den drei folgenden Kapiteln, deren Ueberschriften der Reihe nach sind: Allgemeine Theorie der Oberflächen; Aufgaben über die Oberflächen; unendlichkleine Umformungen der Oberfläche. Als einen Anhang dazu kann man das unmittelbar folgende Kapitel betrachten, welches von den Strahlensystemen handelt. Eine grössere Neuheit bieten die drei letzten Kapitel, welche die Theorie der dreifach-orthogonalen Flächensysteme, die Curven der höheren Räume und die höheren Räume im allgemeinen behandeln. Hier geht der Verf. sehr schnell in seiner Auseinandersetzung vor, etwas zu schnell: so scheinen einige Verallgemeinerungen nicht vollkommen begründet. Das Werk schliesst mit drei Noten über die Anwendungen der Grassmann'schen Zahlen, über das Gleichgewicht der biegsamen und unausdehnbaren Fäden und über die Elasticitäts-Gleichungen der höheren Räume.

Wir schliessen dieses Referat in der Ueberzeugung, keine präcise Darstellung der hübschen und wichtigen Arbeit Cesàro's geliefert zu haben; aber wie kann man die unübertreffliche Eleganz der Rechnungen und die wunderbare Genialität der Betrachtungen des Verf. beschreiben, ohne das Werk selbst zu übersetzen? Mögen mindestens unsere Worte neue Leser des Werkes anlocken, für den Verf. neue Bewunderer heranziehen. La.

W. F. Osgood. A geometric proof of a fundamental theorem concerning unicursal curves. American M. S. Bull. (2) **2**, 168-173.

Es sei $x = r_1(\lambda)$, $y = r_2(\lambda)$, wo r_1 und r_2 rationale Functionen von λ sind. Während jedem Werte von λ ein einziger Punkt (x, y) entspricht, braucht umgekehrt nicht jedem Punkte (x, y) nur ein Wert von λ zu entsprechen, was aus dem Beispiele $x = \lambda^2$, $y = \lambda^2$ erhellt. Man kann jedoch immer λ durch einen neuen Parameter μ ersetzen, der eine gewisse rationale Function r von λ ist: $\mu = r(\lambda)$, so dass x und y rationale Functionen von μ sind, während einem gegebenen Punkte (x, y) nur ein einziger Wert von μ entspricht (vergl. Lüroth in Math. Ann. **9**, 163-165; F. d. M. **7**, 417, 1875). „Der wesentliche Gedanke, welcher diesen Sätzen zu Grunde liegt, findet seinen klaren Ausdruck in der geometrischen Methode der conformen Abbildung; und umgekehrt, der Wert dieser Methode als eines Forschungsmittels wird in ein helles Licht hierbei gesetzt.“ In diesen Worten spricht der Verf. den Zweck seines Artikels aus. Lp.

R. A. Roberts. On the locus of the foci of conics having double contact with two fixed conics. American M. S. Bull. (2) **2**, 98-110.

Der Ort für die Brennpunkte aller Kegelschnitte, welche mit zwei festen Kegelschnitten eine doppelte Berührung haben, wird ohne Schwierigkeit als eine Curve sechster Ordnung mit sieben Doppelpunkten, also von der sechzehnten Klasse bestimmt. Die Brennpunkte der festen Kegelschnitte sind Doppelbrennpunkte des Ortes; ausserdem sind vier

gewöhnliche Brennpunkte vorhanden. Von den Asymptoten sind entweder zwei reell oder keine. Der kubischen Gleichung für k entsprechend, welche das Zerfallen von $S-kS'$ in zwei Gerade bedingt, besteht der ganze Ort der Brennpunkte aus drei derartigen Curven sechster Ordnung. Der Hauptteil der Arbeit beschäftigt sich nach der Feststellung der angegebenen Resultate mit der Untersuchung solcher Fälle, bei denen die gefundene Curve sechster Ordnung sich auf eine solche von niederer Ordnung reducirt. Bekannt waren schon zwei Fälle: Wenn nämlich die festen Kegelschnitte durch zwei Punktepaare oder zwei Geradenpaare ersetzt werden, so ist im ersten Falle der Ort eine Curve sechster Ordnung, die nach Sylvester in zwei circulare kubische Curven zerfällt, falls die vier Punkte auf einem Kreise liegen; im zweiten Falle ist der Ort eine circulare kubische Curve, welche durch alle Schnittpunkte der vier Geraden geht. Ausser mehreren anderen Fällen, in denen der Ort eine Curve vierter Ordnung wird, untersucht der Verf. am Schlusse auch die entsprechende Aufgabe für sphärische Kegelschnitte.

Lp.

F. Morley. Note on the common tangents of two similar cycloidal curves. American M. S. Bull. (2) **2**, 111-116.

In der November-Nummer der Educational Times für 1895 hat Ramaswami Aiyar einen Satz zum Beweise vorgelegt; aus diesem Satze geht hervor, dass man unter den gemeinsamen Tangenten zweier ähnlichen Cykloiden (einschliesslich der Epi- und Hypocykloiden) n so wählen kann (wo n die Klasse der Curven ist), dass drei von ihnen die übrigen bestimmen, und dass diese n gemeinsamen Tangenten einen Kegelschnitt berühren. Dieses erfordert, dass alle gemeinsamen Tangenten (nämlich μn, wo μ zu ermitteln ist) in μ Systeme zu je n zerfallen und μ Kegelschnitte bestimmen. Die interessante Thatsache des Zerfallens der gemeinsamen Tangenten in n Systeme hat den Verf. veranlasst, die von den μ Kegelschnitten gebildete Configuration zu bestimmen, wobei er sich auf seine früheren bezüglichen Arbeiten im American J. **13** u. **16** bezieht (vergl. F. d. M. **22**, 744, 1890 und **25**, 1156, 1893/94). Es gelingt ihm, die Lage jener Kegelschnitte genau anzugeben, sowie auch einfache Mittel zu ihrer Construction zu finden.

Lp.

H. S. White. Numerically regular reticulations upon surfaces of deficiency higher than 1. American M. S. Bull. (2) **2**, 116-121.

Der Verf. erklärt den Zweck seines Aufsatzes mit den folgenden Worten: „Mit dem Ausdruck Netzteilung (reticulation) werde ich für die gegenwärtigen Zwecke irgend ein System von Linien bezeichnen, die auf einer geschlossenen Oberfläche liegen, samt allen Punkten, in denen diese Linien sich schneiden. Ferner werde ich annehmen, dass sie die Oberfläche in Stücke zerlegen, von denen jedes einfach zusammenhängend ist, d. h. das Geschlecht Null hat. Diese Stücke der geschlossenen

Oberfläche können Flächen genannt werden und ihre Schnittpunkte Ecken, während jede an zwei Folgeecken endigende Grenzlinie eine Kante heisst. Bedeuten F, E und K die Anzahlen der Flächen, Ecken und Kanten in einer Netzteilung, p das Geschlecht der Trägerfläche, dann geht die verallgemeinerte Euler'sche Relation für convexe Polyeder in die Gleichung über: $K = E + F + 2p - 2$. Eine Netzteilung darf offenbar numerisch regulär genannt werden, wenn sie besitzt: 1) in jeder Ecke eine constante Anzahl von Kanten, die in ihr enden (ihre Anzahl sei $\varrho + 2 = r$); 2) in jedem Umfange einer Seite eine constante Anzahl von Kanten (ihre Anzahl sei $\sigma + 2 = s$). Wir können zunächst diese beiden Zahlen ϱ und σ allein als Charakteristiken einer regelmässigen Netzteilung ansehen; für spätere Forschung bleibt dann die Bestimmung der Anzahl wesentlich verschiedener Typen, die irgend ein gegebenes System von Charakteristiken ϱ, σ, p haben. Aus diesen dreien können die Werte von F, E, K berechnet werden, wie man weiter unten findet. Zählt man nun zu einer Klasse alle regelmässigen Netzteilungen, welche durch dieselben Werte von ϱ und σ gekennzeichnet sind, so kann man zeigen, dass auf einer Oberfläche von gegebenem Geschlechte p nur eine endliche Anzahl von Klassen numerisch regelmässiger Netzteilungen vorkommen kann." Lp.

O. Th. Bürklen. **Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik, enthaltend die wichtigsten Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, Algebra, niederen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, mathematischen Geographie, analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes, der höheren Analysis. (Sammlung Göschen Nr. 51.)** Leipzig: G. J. Göschen. 211 S. kl. 8°.

Eine sehr geschickt ausgewählte und recht reichhaltige Sammlung, welche wohl geeignet ist, die Abiturienten der Gymnasien und Oberrealschulen bei den Repetitionen zu unterstützen und ihnen einen klaren Ueberblick über das ganze System der Elementar-Mathematik zu geben. Dass stellenweise über das Pensum der genannten Anstalten hinausgegangen ist, z. B. in der analytischen Geometrie, der höheren Analysis und der Differentialgeometrie, ist kein Nachteil, zumal auch solche, die das Gymnasium absolvirt haben, das Büchlein gern zum Nachschlagen benutzen werden. Die typographische Ausstattung ist vorzüglich. M.

P. Treutlein. **Vierstellige Logarithmen und goniometrische Tafeln nebst den nötigen Hülfstafeln.** Braunschweig: F. Vieweg u. Sohn. 72 S. kl. 8°.

Während es uns auf dem Gymnasium ein Vergnügen machte, grosse siebenstellige Logarithmentafeln zu wälzen, hält man jetzt vierstellige Tafeln für ausreichend, hauptsächlich weil diese die Schreib- und die Rechenarbeit wesentlich erleichtern. Bei der Bearbeitung der vorliegenden

Tafeln hat der Verf. nicht möglichst geringen Umfang, sondern möglichst bequeme und praktische Verwendung im Auge gehabt. So folgen auf die Logarithmen der Zahlen 1 bis 100 und die Mantissen der Logarithmen der Zahlen 100 bis 10000 die wahren Werte der goniometrischen Functionen von 20 zu 20′; darauf die Logarithmen von Sinus und Tangens der Winkel von 0° bis 1° in Intervallen von 10″, endlich die Logarithmen der goniometrischen Functionen von 1° bis 90° von Minute zu Minute. Eine Interpolation ist fast ganz unnötig. Eine Anzahl nützlicher Hülfstafeln macht den Schluss. Die innere Einrichtung ist übersichtlich, das Format handlich, der Druck deutlich. M.

E. Schultz. Vierstellige mathematische Tabellen im engen Anschluss an die mathematischen Tabellen der technischen Kalender. Essen; G. D. Bädeker. 80 S. 8°. Dazu: Anleitung zum Gebrauche der mathematischen Tabellen in den technischen Kalendern. 40 S. 12°.

Da die mathematischen Tabellen in den bekannten technischen Kalendern wegen zu kleinen Druckes die Sehkraft beeinträchtigen, so soll durch die Herausgabe der vorliegenden Tabellen in erster Linie die Schonung des Auges bezweckt werden. Für die Praxis sind vierstellige Logarithmen meist ausreichend. Mit $\log n$ für $n = 1$ bis 1000 vereinigt sind die Werte für n^2, n^3, $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n}$, $\frac{1000}{n}$, πn, $\frac{1}{4}\pi n^2$; dann folgen fünfstellige Logarithmen der Zinsfactoren, natürliche Längen der goniometrischen Linien von 10 zu 10′, vierstellige Logarithmen der Sinus und Cosinus von Minute zu Minute, ferner die der Tangenten und Cotangenten, endlich Bogenlängen, Sehnen, Bogenhöhen und Inhalte der Kreisabschnitte des Einheitskreises von Grad zu Grad und einige wichtige Constanten. In der „Anleitung“ werden 25 Beispiele aus der Praxis durchgeführt. M.

S. W. Holman. Computation rules and logarithms, with tables of other useful functions. New York: Macmillan and Co. XLV + 73 S.

Die Tabellen sind hauptsächlich vierstellige; doch sind fünfstellige Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Verhältnisse ebenfalls gegeben. Die Einleitung enthält vieles, was für die Benutzer solcher Tabellen von Interesse ist, und die Tafeln selbst sind mit besonderer Rücksichtnahme auf die Bedürfnisse der Studenten des Ingenieurfaches und der Practicanten in den Laboratorien aufgestellt worden. Gbs. (Lp.)

B. Esmarch. Die Kunst des Stabrechnens. Gemeinfassliche und vollständige Anleitung zum Gebrauch des Rechenstabes. Für den Selbstunterricht u. s. w. Leipzig: Ernst Günther's Verlag. 192 S. mit 148 Abb. im Text m. 2 Tafeln.

Titelangabe nach Centralbl. der Bauverw. **16,** 434. Besp. Ztschft. f. Arch. u. Ingw. **42,** H. 1-8; **1,** 1-4, 142. F. K.

F. W. Lanchester. The radial cursor: a new addition to the slide rule. Phil. Mag. (5) **41,** 52-59.

Der Zweck dieser Zugabe zu dem Rechenlineal ist die Ermöglichung der leichten Lösung von Aufgaben, wenn die in ihnen vorkommenden Exponenten gebrochen sind, wie z. B. in dem Falle einer adiabatischen Curve $pv^\gamma = \text{const.}$ Ein Mittel musste ausfindig gemacht werden, die Scalenteile proportional dem Werte von γ zu teilen, was der Division und Multiplication der bezüglichen Logarithmen der in Frage kommenden Grössen nach dem Verhältnisse der Exponenten von p und v, d. h. $1:\gamma$, entspricht. Diese proportionale Teilung wird an dem neuen Schieber durch einen radialen Indexarm bewirkt. Derselbe ist so eingerichtet, dass er um einen Knopf sich dreht; dieser letztere selber wird von einer gleitenden Stange getragen, die rechtwinklig zu dem Lineal in einer Führung läuft. Alle Ablesungen werden an den Schnittpunkten der Linie mit den Kanten des Lineals gemacht. Einige Beispiele erläutern die Klasse der Rechnungen, für welche das Instrument bestimmt ist. Lp.

L. Torres. Machines algébriques. Assoc. Franç. Bordeaux **24,** 90-102.

Unter Bezugnahme auf seine spanische Abhandlung „Memoria sobre las Máquinas algebricas" (Bilbao, 1894) entwickelt der Verf. die Ueberlegungen, durch welche er zu dem Bau einer Maschine für die Lösung algebraischer Gleichungen geführt ist. Die Abbildung eines ausgeführten Modells, durch welches die Wurzeln trinomischer Gleichungen bis auf einen Fehler von 0,01 gefunden werden können, ist gleichfalls beigefügt. Lp.

M. d'Ocagne. Principes de la machine à résoudre les équations de M. Leonardo Torres. Journ. de phys. (3) **5,** 310-315.

Der spanische Ingenieur Leonardo Torres hat den Weg zur Construction von Maschinen angegeben, die zur Auflösung beliebiger Gleichungen dienen sollen. Zwangläufige Systeme sind so angeordnet, dass die Einschreibung der Coefficienten auf gewisse graduirte Trommeln ausreicht, die Werte der gesuchten Wurzeln auf einer letzten Trommel herauskommen zu lassen, deren Winkelverrückungen von denen der vorangehenden abhängen. Vor der physikalischen Gesellschaft in Paris ist 1896 ein Modell gezeigt worden, das eine der beiden Gleichungen auflösen konnte: $x^9+Ax^3 = B$, $x^9+Ax^7 = B$. Die weitere Construction von anderen Modellen war in Aussicht genommen. Die Einzelheiten der constructiven Gedanken und ihrer Ausführung ist in der knapp gefassten Mitteilung nachzulesen (vergl. das vorangehende Referat). Lp.

LAMOTTE. Planimètre de M. Petersen. Journ. de phys. (3) **5**, 216-219.

Der Verf. giebt eine kurze Beschreibung und die Theorie des Petersen'schen Planimeters, dessen einfache Construction und leichte Handhabung gerühmt wird. Lp.

B. PERSON. Zur Bestimmung des Umfanges und der Fläche des Kreises mit Hülfe des Zirkels und Lineals. Centralbl. der Bauverw. **16**, 448.

Beruht darauf, dass der halbe Umfang des Kreises sehr nahe mit $3r + \frac{1}{10} r \sqrt{2}$ übereinstimmt. F. K.

Weitere Litteratur.

V. ADAM. Taschenbuch der Logarithmen. 23. Aufl. Wien. 9 + 99 S. 12mo.

A. BREUSING. Nautische Hülfstafeln. 6. Aufl. Hrsg. von C. Schilling. Bremen. M. Heinsius Nachf. 325 S. 8°. Mit 2 Karten.

A. L. CRELLE. Rechentafeln, welche alles Multipliciren und Dividiren mit Zahlen unter 1000 ganz ersparen, bei grösseren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Tables de calcul où se trouvent les multiplications et divisions toutes faites de tous les nombres au-dessous de 1000 et qui facilitent et assicurent le calcul. Mit Vorwort von C. Bremiker. 7te Stereotyp-Ausgabe. Berlin. X + 450 S. gr. 4° (1895).

DUHAMEL. Tableau donnant les carrés et les racines carrées des nombres entiers. Paris.

J. DUPUIS. Tables de logarithmes à cinq décimales, d'après J. de Lalande, disposées à double entrée et revue. Édition stéréotype, contenant les logarithmes des nombres de 1 à 10000, les logarithmes des sinus et des tangentes des angles calculés de minutes en minutes jusqu'à 90 degrés. Paris: Hachette. IV + 230 S. 12mo.

F. G. GAUSS. Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. 47-50. Aufl. Halle. 166 u. 35 S. gr. 8°.

J. W. GORDON. Mathematical tables (actuarial). London: Lockwood. 8°.

A. GREVE. Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln, nebst einer grösseren Anzahl von Hülfstafeln. 6. Aufl. Bielefeld. IV u. 174 S. gr. 8°.

H. HARTENSTEIN. Fünfstellige Briggische Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000, nebst den sechsstelligen Logarithmen der Zahlen von 10000 bis 10800, für Realschulen und verwandte Anstalten, namentlich zu E. Bardey's arithmetischen Aufgaben und Lehrbuch der Arithmetik herausgegeben. Leipzig: G. Teubner. 32 S. 8°.



G. KEWITSCH. Vierstellige Logarithmen für den Schulgebrauch. Leipzig: O. R. Reisland. 40 S. 8°.

R. IGI. Tavole di logaritmi a 11 decimali di F. Thoman. Milano. 23 S. 8°.

E. G. AF KLINT. Nautiska och logaritmiska Tabeller. 5. upplaga. Stockholm. 459 S. 4° (1895).

W. LIGOWSKI. Sammlung fünfstelliger logarithmischer, trigonometrischer und nautischer Tafeln, nebst Erklärungen und Formeln der Astronomie. (Nautische Tafeln.) 3. Aufl. Kiel. Univers.-Buchhdlg. XXIII + 252 S. 8°.

J. A. MÜLLER-BERTOSSA. Anleitung zum Rechnen mit dem logarithmischen Rechenschieber, durch Beispiele erläutert und mit 2 lithographirten Tafeln versehen. 2. Aufl. Zürich: A. Raustein. IV + 60 S. 8°.

A. SICKENBERGER. Vierstellige logarithmisch - trigonometrische Tafel zum Schul- und Handgebrauch. 3. Aufl. München: Th. Ackermann. 20 S. 12°.

S. STAMPFER. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln nebst verschiedenen anderen Tafeln und Formeln und einer Anweisung, mit Hülfe derselben logarithmische Rechnungen auszuführen. 17. Aufl. Wien. 24 u. 122 S. gr. 8°.

G. VEGA. Thesaurus logarithmorum completus, ex Arithmetica logarithmica et ex Trigonometria artificiali A. Vlacci collectus, plurimis erroribus purgatus, in novum ordinem redactus. Lipsiae 1794. Riproduzione fotozincografica dell' Istituto Geografico Militare. Firenze. 3+29+684 S. 4°.

WEISBACH's Ingenieur. Sammlung von Tafeln, Formeln und Regeln der Arithmetik, der theoretischen und praktischen Geometrie, sowie der Mechanik und des Ingenieurwesens. 7. Aufl. von F. Reuleaux. Braunschweig: F. Vieweg u. Sohn. XX + 1058 S. 8°.

T. WITTSTEIN. Fünfstellige logarithmisch - trigonometrische Tafeln. 17. Aufl. Hannover. 36 u. 122 S. gr. 8°.

L. ZIMMERMANN. Die gemeinen oder briggischen Logarithmen der natürlichen Zahlen 1 - 10009 auf 4 Decimalstellen nebst einer Productentafel, einer Quadrattafel und einer Tafel zur Berechnung der Kathete und Hypotenuse und zur Bestimmung der Wurzeln aus quadratischen Gleichungen. Zum Gebrauch für Schule und Praxis. Liebenwerda: R. Reiss. 40 S. 8°.

L. ZIMMERMANN. Rechentafeln, welche die Producte aller Zahlen unter 10000 in alle Zahlen bis 100 enthalten und daher die Multiplication und Division mit diesen Zahlen ganz ersparen, bei grösseren Zahlen aber zur Erleichterung und Sicherung der Rechnung dienen. Grosse Ausgabe. Liebenwerda: R. Reiss. XVI + 205 S. 4°.

A. GAY. Les machines de M. Torres à résoudre les équations. Rev. gén. des sc. 7, 684-688.

D. Hurmuzescu. Nouvelle détermination du rapport *v* entre les unités électrostatiques et électromagnétiques. Thèse. Paris: Gauthier-Villars et Fils. 99 S. 4°.

Des Ingenieurs Taschenbuch. Herausgegeben vom akademischen Verein „Hütte". 16[te] völlig neu bearbeitete Auflage. In 2 Teilen. Berlin: Ernst. VI + 984, XII + 618 S.

Intermediate science mixed mathematical papers; being the questions set at the University of London from 1877 to 1895. London. 44 S. 8°.

Intermediate mathematics. A guide to the mathematics of the intermediate examinations in arts and sciences in the City of London. 4[th] ed. London: Clive. 144 S. 8°.

P. Leyssenne. Choix de problèmes de mathématiques, rangés par ordre de difficultés, avec solutions raisonnées, à l'usage des candidats aux deux brevets. Paris: Colin. 238 S. 12[mo].

J. C. Maxwell. Ueber Faraday's Kraftlinien. (1855.) Herausgegeben von L. Boltzmann. Leipzig: Engelmann. 130 S. 8°. (Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften. No. 69.)

T. T. Rankine. Complete solutions to papers in mathematics (second stage) 1887-94, science and art examinations. 2[nd] ed. London. 104 S. 8°.

Namenregister.

Seite

Abel, N. H. Memorias sobre las ecuaciones algébricas 63
Abu Hamid Al-Gazzali. Abhandlung (astron. u. philos. Inhalts) . 40
Adam, Ch. Correspondance de Descartes 9
Adam, H. Calcul de Descartes ou Introduction à sa Géométrie . . 35
Adam, P. Sur un problème de déformation 510
Adam, V. Taschenbuch der Logarithmen 821
Adams, J. C. The scientific papers. Vol. 1 18
Aicardi, V. Il triangolo 391
Aiello, C. Numero dei numeri primi inferiori ad un dato limite . . 152
Airy, G. B. Autobiography of Sir George Biddle Airy 18
Aiyar, R. Solution of question 12847 139
Aladow, N. Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste von einer Primzahl P in der Reihe 1, 2, . . ., $P-1$ 146
Alagna, R. Le relazioni irreduttibili fra gl'invarianti d'una forma qualunque d'ottavo ordine 77
Albert, G. Die Platonische Zahl 40
Albrecht, Th. Bewegung des Nordpols in den Jahren 1890-95 . . 793
Aletrop. Sur un problème de la géométrie de la règle 393
Algenstaedt, W. Zur Determination der Elemente des Dreiecks . 404
Almansi, E. Sull'integrazione dell' equazione differenziale $\Delta^2\Delta^2=0$ 284
Amagat, E. H. 1) Loi des états correspondants de Van der Waals 763
2) Sur les variations du rapport des deux chaleurs spécifiques des gaz 766
3) Sur les chaleurs spécifiques des gaz et les propriétés des isothermes 766
4) Sur les variations du rapport des deux chaleurs spécifiques des gaz avec la température et la pression 766
Amodeo, F. 1) Appunti di geometria projettiva 419
2) Sulla introduzione alla geometria projettiva 420
3) Curve k-gonali di 1ª e di 2ª specie. II. 470
4) Curve aggiunte e serie specializzate 471
5) Sistemi lineari di curve algebriche di genere massimo ad intersezioni variabili collineari 471
Ampère. Discussion de l'équation des courbes du second degré . . 480
Anderegg, F. Trigonometry for schools and colleges 390
Anderson, A. Maximum deviation of a ray of light by a prism . 718
Andoyer, H. 1) Cours d'algèbre 124
2) Sur la construction de courbes algébriques 478
3) Sur l'intersection de deux quadriques 527

Seite
Andoyer, H. 4) Sur l'extension que l'on peut donner au théorème de Poisson, relatif à l'invariabilité des grands axes 612
Andrade, J. 1) Sur la méthode des moindres carrés 182
2) Sur les droites de contact des courbes gauches 503
André, D. 1) Théorème nouveau de réversibilité algébrique 114
2) Démonstration de la relation entre le nombre des permutations alternées et celui des permutations quasi-alternées 178
Andreiew, K. A. Leben und wissenschaftliche Thätigkeit von W. G. Imschenetzky 19
Andrews, G. A. Composite geometrical figures 391
Angel, H. Practical plane and solid geometry 387
Anissimow, W. 1) Riccati's Gleichung allgemeiner Form 256
2) Ueber die Form der Differentialgleichungen mit periodischen Coefficienten 258
Antomari, X. 1) Manuel du baccalauréat 387
2) Cours de géométrie descriptive 417
Antoniazzi, A. Equazioni di condizione per le occultazioni osservate a Padova nel 1894 e nel 1895 803
Apollonius of Perga. Treatise on conic sections. Edited by Heath 4
Appell, P. 1) Quelques exemples de séries doublement périodiques 347
2) Exercices sur les courbes de direction 495
3) Traité de mécanique rationnelle. II 566
4) Remarques sur la communication de M. di Pirro 606
5) Sur l'emploi des équations de Lagrange dans la théorie du choc et des percussions 630
Aratus. Translation of the astronomy and meteorology by C. L. Prince 40
Archimedes. The works of Archimedes. Edited by Heath . . . 4
Los Arcos, A. Teoria general de las proyecciones geograficas . . 814
Ariès, E. Chaleur et énergie 762
Arnaldi, M. Sui determinanti orlati 108
Arnaudeau, A. Table de triangulaires de 1 à 100000 205
Arndt, L. Beitrag zur Berechnung der störenden Kräfte in der Theorie der säcularen Störungen 805
Arzela, C. Sull'esistenza degl'integrali nelle equazioni differenziali ordinarie 238
Ascione, E. Sopra alcune involuzioni dello spazio 425
Astor, A. 1) Sur le nombre des périodes d'une fonction uniforme . 326
2) Quelques applications de géométrie cinématique 582
3) Courbes unicursales sous l'influence d'une force centrale . . . 611
Atmanspacher, O. Grundlagen unserer Herrschaft über die Zahlen 48
Aubry. 1) Essai historique sur la théorie des équations 30
2) Notice historique sur la géométrie de la mesure 34
3) Sur l'extraction des racines carrées et cubiques 123
4) Lettre adressée à M. G. de Longchamps 377
5) De l'usage des figures de l'espace pour la définition et la transformation de certaines courbes 495
Auer. 10 Figurentafeln und 84 Uebungsblätter zur Geometrie . . . 383
Autenheimer, F. Differential- und Integralrechnung. Russisch von Goebel 223
Autonne, L. 1) Sur les substitutions régulières non linéaires . . . 101
2) Sur les pôles des fonctions uniformes à deux variables indépendantes 315
3) Sur une différentielle exacte 514
4) Représentation des courbes gauches algébriques 525
d'Avillez, J. F. 1) Sobre algumas proposiçóes de geometria . . . 398
2) Sur les puissances d'un triangle 399

Seite
d'Avillez, J. F. 3) Exercices sur un triangle remarquable 400
4) Sobre um systema tri-tangente 434
5) Sobre a área de um triangulo parabolico 485

Backlund, O. Sur l'intégration de l'équation différentielle du rayon vecteur d'un certain groupe des petites planètes 800
Bäcklund, A. V. En undersökning inom theorien för de elektriska strömmarne 754
Bagard, H. Phénomène de Hall dans les liquides 739
Bagnera, F. Sul teorema dell'esistenza delle funzioni Fuchsiane . 328
Bagnera, G. Sul luogo dei contatti tripunti delle curve di un fascio con le curve di una rete 476
Baillaud, B. Cours d'astronomie. II 805
Baisch. Eine Erweiterung des Satzes vom Reversionspendel . . . 618
Baker, A. L. Algebraic symbols 60
Balitrand, F. Détermination des points d'inflexion dans le développement de la section plane d'un cône 527
Balitrand, J. Solution de la question 152 488
Ball, Sir Robert. 1) Note on a point in theoretical dynamics 580, 629
2) On a form of the differential equations of dynamics 610
3) The elements of astronomy 805
4) The cause of an ice age 810
Ball, W. W. R. Mathematical recreations and problems 189
de Ball, L. 1) Einfluss der Aenderung der Ekliptik auf die Mondbahn 803
2) Catalogue de 382 étoiles faibles de la zone $DM+2^0$ 805
Ballue, E. Le nombre entier, considéré comme le fondement de l'analyse mathématique 49
Bally, E. Cône de Chasles et cubique des normales 530
Banal, R. Sulle varietà a tre dimensioni con una curvatura nulla e due eguali 538
Bantlin, A. Elementare Ableitung der Trägheitsmomente 594
Barbarin, P. 1) Définition géométrique des logarithmes 331
2) Triangle dont les bissectrices sont données 404
3) Application de la méthode de Gergonne à la sphère. Triangles sphériques et triangles circulaires plans 407
Barberis. Costruzione e misurazione dei solidi geometrici 391
Bardelli, G. Coordinate obliquangole nella meccanica razionale . 584
Bardey, E. 1) Methodisch geordnete Aufgabensammlung 124
2) Arithmetische Aufgaben, nebst Lehrbuch der Arithmetik . . . 124
Barisien, E. N. 1) Note relative à la distance du centre du cercle circonscrit à un triangle à son centre de gravité 394
2) Exercices sur l'ellipse et l'hyperbole 481
3) Solutions de questions 483, 484, 492
4) Propriétés des cercles de Chasles 484
Barker, A. H. Graphical calculus 220
Barrachina, E. S. Raíces de los numeros 124
Bartl, J. 1) Die Berechnung der Centrifugalregulatoren 642
2) Zur Berechnung der Federregulatoren 695
Bartolucci, L. Manuale d'aritmetica e principi d'algebra 124
Barton, E. H. 1) Elementary teaching concerning focal lengths . . 718
2) Graphical methods for finding the focal lengths of mirrors and lenses 718
3) Distancias focales de espejos y lentes 719
Bass, E. W. Differential calculus 223
Basset, A. B. Stability of a frictionless liquid 646

Seite

Bassi, A. Sulla condizione necessaria e sufficiente affinchè una porzione di superficie sia convessa in ogni punto 505
Baudran, E. Solution de la question 286 65
Baur, L. Zur Theorie der algebraischen Functionen 323
Beaupain, J. 1) Fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur . . 334
2) Sur les fonctions hypergéométriques de seconde espèce et d'ordre supérieur 334
Beck, A. Schmiegungsebenen der Schnittcurve zweier Kegel . . . 414
Beck, P. 1) Der Substanzbegriff in der Naturwissenschaft 676
2) Theorie des remanenten Magnetismus von Föppl 743
3) Bemerkungen zu Kohn über magnetisch weiche und harte Körper 744
Beck, Th. Historische Notizen XVIII. Leonardo da Vinci . . . 631
Becker, H. Geometrisches Zeichnen 417
Beez. Zur Theorie der Vectoren und Quaternionen 463
Behse, W. H. Die darstellende Geometrie 417
Beke, E. Beitrag zur Theorie der rationalen Functionen 102
Bell, G. J. A practical treatise on segmental and elliptical oblique or skew arches 695
Bellacchi, G. 1) Problema di geometria elementare 398
2) 2ª nota sul problema del Malfatti 399
Beltrami, E. Sulla teoria delle funzioni sferiche 365
Beman, W. W. Plane and solid geometry 387
Bendixson, J. 1) Équations différentielles linéaires à solutions périodiques 248
2) Démonstration de l'existence de l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles linéaires 268
Bendt, F. Katechismus der Differential- und Integralrechnung . . 223
Benischke, G. Magnetismus und Elektricität mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der Praxis 755
Benndorf, H. Weiterführung der Annäherungsrechnung in der Maxwell'schen Gastheorie 777
Bennecke. Verfahren zu Durchschnittsalters-Ermittelungen 185
Benucci. Tavola pitagorica 391
Berger, A. 1) Sur le développement de quelques fonctions discontinues en séries de Fourier 202
2) Généralisation algébrique des nombres de Lamé 252
de Bernardières. Vie et travaux du contre-amiral Fleuriais . . . 21
Bernès. Comparaison des constructions relatives à l'équation $a \sin x + b \cos x = c$ 405
Bernhardt, P. Ph. Melanchthon als Mathematiker und Physiker . . 7
Berthet, J. La méthode de Descartes avant le discours 9
Bertini, E. 1) Sulle configurazioni di Kummer più volte tetraedroidali 381
2) Le tangenti multiple della Cayleyana di una quartica piana generale 490
Bertolani, G. 1) Contributo alla teoria della funzione $E(x)$ 152
2) Sulle derivate logaritmiche di ordine superiore delle funzioni theta iperellittiche a due argumenti 363
Bertrand, J. 1) Sur la théorie des gaz 772
2) Seconde note sur la théorie des gaz 772
3) Réponse aux lettres de M. Boltzmann 772
Berwi, N. W. 1) Kurzer Abriss des gegenwärtigen Standes der Theorie der zahlentheoretischen Functionen 156
2) Die Auflösung einiger allgemeinen Fragen der Theorie der zahlentheoretischen Functionen 156
3) Zahlentheoretische Anwendungen der Analysis des Unendlichkleinen und analytische Anwendungen der Zahlentheorie. Functionen mit singulären Linien 157

Seite

Berzolari, L. 1) Sulle curve piane che in due dati fasci hanno un semplice o un doppio contatto oppure si osculano 455
2) Sulle intersezioni di tre superficie algebriche 514
3) Sulle equazioni differenziali delle quadriche di uno spazio ad n dimensioni 541
Bettazzi, R. 1) Bollettino dell'Associazione Mathesis 28
2) Sulla catena di un ente in un gruppo 61
3) Fondamenti per una teoria generale dei gruppi 61
4) Gruppi finiti ed infiniti di enti 62
Beudon, J. Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles dont les caractéristiques dépendent d'un nombre fini de paramètres . 274
Bezdíček, J. Ueber befreundete und vollkommene Zahlen 138
Bianchi, L. 1) Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore 282
2) Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica 370
3) Vorlesungen über Differentialgeometrie 497
4) Nuove ricerche sulle superficie pseudosferiche 511
5) Sopra una classe di superficie collegate alle superficie pseudosferiche 513
Biasi, G. I poligoni equivalenti 393
Bickerdike, C. Solution of a question 622
Bickmore, C. E. 1) Sur les fractions décimales périodiques . . . 122
2) On the numerical factors of $a^n - 1$ 139
3) Solution of a question 139
Biddle, D. Solutions of questions 181, 182, 494
Biermann, O. 1) Zur Lie'schen Theorie von den partiellen Differentialgleichungen 287
2) Ueber Functionen zweier reellen Variabeln 314
3) Zur Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische 340
Bigelow, F. H. On the best form for the components of systems of deflecting forces 754
Bigler, U. 1) Ueber die Isotimen und Isophasen einer Function . 332
2) Conforme Abbildung der inneren Fläche eines Kreises in die innere Fläche eines regulären Vielecks 562
3) Bewegung der Planeten, mittelst Variation der elliptischen Bahnelemente behandelt 805
Binder, W. Theorie der unicursalen Plancurven vierter bis dritter Ordnung in synthetischer Behandlung 439
Björling, C. F. E. 1) Lärobok i nyare Plan-Geometri 387
2) Eine approximative Trisectio anguli 395
Birkenmajer, L. Ueber einen zahlentheoretischen Satz 141
Blaikie, J. Text-book of geometrical deductions 387
Blasendorff, M. Ueber die Teilung des Kreisbogens 394
Blichfeldt, H. F. Triangles with rational sides and areas 148
Blondel, M. Le christianisme de Descartes 9
Blümcke, Ad. Bemerkung zu Oberbeck: „Ueber den Verlauf der elektrischen Schwingungen bei den Tesla'schen Versuchen" . . 735
Blutel, E. Surfaces à lignes de courbure sphériques 506
Bobynin, W. W. 1) Mathematische Wissenschaften im Occident . 2
2) Esquisse de l'histoire du calcul fractionnaire 31
3) Entwickelung der Operationen mit den Zahlen 31
4) Racines carrées dans la Grèce antique 31
Bôcher, M. 1) On Cauchy's theorem concerning complex integrals 232
2) Regular points of linear differential equations of the second order 263
Bochow, K. Einheitliche Theorie der regelmässigen Vielecke . . . 396
Bocquet, J. A. Cours élémentaire de mécanique 575



Seite
Bödige, N. Kanon der Planimetrie 382
Boehm, K. Untersuchungen über die Reduction partieller Differentialgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen 266
Böklen. Graphische Darstellung des Ohm'schen Gesetzes 726
Börsch, A. Die europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite von Greenwich bis Warschau. II. Geodätische Linien, Parallelbogen und Lotabweichungen 788
Bohlmann, G. Continuirliche Gruppen von quadratischen Transformationen der Ebene 106
Bohny, F. Der continuirliche Zweigelenkbogen 695
Bolte, F. Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie 387
Boltzmann, L. 1) Unentbehrlichkeit der Atomistik in der Naturwissenschaft 675
2) Ein Wort der Mathematik an die Energetik 756
3) Zur Energetik 759
4) Entgegnung auf die wärmetheoretischen Betrachtungen von E. Zermelo 760
5) Sur la théorie des gaz 772
6) Ueber die Berechnung der Abweichungen der Gase vom Boyle-Charles'schen Gesetz 774
7) Siehe J. C. Maxwell 823
Bolyai, J. The science absolute of space, independent of the truth or falsity of Euclid's axiom XI. Translated by Halsted. 4th ed. 34
Bolza, O. Mathematical papers read at the mathem. congress in Chicago 27
Bonnel, J. Les hypothèses dans la géométrie 378
Bonolis, A. Sul prodotto delle matrici 108
von Boole, W. 1) Arithmometer von P. Tschebyschew 40
2) Die Rechenmaschinen der russischen Erfinder 40
Booth, W. On Hamilton's singular points and planes on Fresnel's wave surface 533
Borel, E. 1) Sur le théorème de Descartes 65
2) siehe J. Tannery 134
3) Théorie des séries divergentes sommables 197
4) Région de sommabilité d'un développement de Taylor 197
5) Sur les séries de Taylor admettant leur cercle de convergence comme coupure 198
6) Sur les séries de Taylor 198
7) Applications des séries divergentes sommables 200
8) Sur les fonctions de deux variables réelles 315
9) Démonstration d'un théorème de M. Picard 321
10) Sur l'extension aux fonctions entières d'une propriété importante des polynômes 321
11) Remarques sur les problèmes de forces centrales 610
Boreux, H. Points d'inflexion de la transformée par développement d'une courbe C tracée sur un cône 417
Bortolotti, E. 1) Determinanti di funzioni nel calcolo alle differenze finite 225
2) Forma aggiunta di una forma lineare alle differenze 262
Bosscha, J. Christian Huygens 10
Botelho, A. Estudo sobre os systemas de forças girantes 583
Bouasse, H. 1) De la nature des explications des phénomènes . . 49
2) Introduction à l'étude des théories de la mécanique 814
Boulanger, A. 1) Sur certains invariants relatifs au groupe de Hesse 78
2) Sur la perspective des arcades 413
Boulvin, J. Cours de mécanique appliquée aux machines 575

Seite
Bouquet. Analytical geometry of two dimensions 465
Bourlet, C. 1) Leçons d'algèbre élémentaire 124
2) Sur les nombres parfaits 138
Boussinesq, J. 1) Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section . . 647
2) Formules des pressions moyennes locales dans un fluide animé de mouvements tourbillonnants et tumultueux 647
3) Expression du frottement extérieur dans l'écoulement tumultueux d'un fluide 647
4) Formules du coefficient des frottements intérieurs dans l'écoulement tumultueux graduellement varié des liquides 647
5) Lois générales du régime uniforme dans les lits à grande section 647
6) Du régime uniforme dans les canaux rectangulaires larges et dans les tuyaux ou canaux à section circulaire 647
7) Lois de deuxième approximation du régime uniforme dans les tuyaux circulaires 647
8) Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section 655
Boutin, A. Sur la question 409 488
Boutroux, E. Morale et science dans la philosophie de Descartes . 9
Bouty, E. 1) Les flammes sensibles et les lentilles acoustiques . . 700
2) Sur les flammes sensibles 700
Bouwman, W. De Plücker'sche grootheden der deviatie kromme . 466
Bovey, H. T. A treatise on hydraulics 656
Bowser, W. A. Friendly societies' valuation and other tables . . 189
Boyer, J. Le mathématicien franc-comtois F. J. Servois 12
Brambilla, A. Di taluni sistemi di quartiche gobbe razionali annesse ad una superficie cubica 448
Brambilla, G. Storia della ragioneria presso i popoli antichi . . 31
Brand, E. 1) Note sur les déterminants 112
2) Un problème de projection 412
Braun, C. Die Gravitationsconstante, die Masse und mittlere Dichte der Erde 665
von Braunmühl, A. 1) Nicolaus Copernicus 6
2) Prosthaphäretische Methode der Trigonometrie 36
Bredt, R. Kritische Bemerkungen zur Drehungselasticität 686
van der Breggen, J. Integraalrekening 223
Brendel, M. 1) Ueber die Lücken im Systeme der kleinen Planeten 798
2) Bemerkungen zu Weiler: „Die Störungen der Planeten für den Fall, dass die mittlere Bewegung etc.“ 798
Brennand, W. Hindu astronomy 40
Brennecke, L. Ueber Erddruck und Stützmauern 592
Bretschneider, M. Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik . . . 124
Breusing, A. Nautische Hülfstafeln. Hrsg. von C. Schilling . . . 821
Bricard, R. 1) Question de géométrie relative aux polyèdres . . . 407
2) Sur un déplacement remarquable 578
Briggs, W. 1) The intermediate algebra 118
2) Elementary textbook of hydrostatics 596
Brill, J. 1) Note on matrices 109
2) Generalization of certain properties of the tetrahedron 114
3) Functions derivable from the exponential function 331
4) Form of the energy integral in the motion of an incompressible fluid 645
Brillouin, M. Viseur stroboscopique 720
Brioschi, F. 1) Sur l'équation Jacobienne du sixième degré . . . 69
2) Sopra un teorema del sig. Hilbert 74



Seite
Brioschi, F. 3) Il risultante di due forme binarie biquadratiche . . 75
4) Invariants de deux formes binaires à facteur commun 89
5) Le equazioni differenziali lineari equivalenti alle rispettive equazioni differenziali aggiunte di Lagrange 257
6) La moltiplicazione complessa per $\sqrt{-23}$ delle funzioni ellittiche 348
7) Sulle equazioni modulari 353
8) Relations différentielles entre les périodes des fonctions hyperelliptiques $p=2$ 362
Briot. Analytical geometry of two dimensions 465
Brocard, G. 1) Centres de transversales angulaires égales 402
2) Sur la transformation homographique des propriétés métriques des figures planes 433
Brochard, V. Le traité des passions de Descartes 9
Brodén, T. Das Weierstrass-Cantor'sche Condensationsverfahren . 298
Brömel. Der Gleichgewichtszustand einer Flüssigkeit in einer verticalen capillaren konischen Röhre 696
Brown, E. W. 1) On the application of the principal function to the solution of Delaunay's canonical system of equations . . . 794
2) Expressions for the elliptic coordinates of a moving point to the seventh order of small quantities 799
3) Introductory treatise on the lunar theory 802
Bruff, L. L. A textbook of ordnance and gunnery 642
de Brun, F. Till teorien för algebraiska funktioner 322
Brunel, G. Systèmes de triades formés avec $6n+1$ éléments . . . 107
Brunhes, B. 1) L'évolutionnisme et le principe de Carnot 684
2) Sur le principe de Huygens et sur quelques conséquences du théorème de Kirchhoff 703
3) Condition de biréfringence d'un milieu et absorption cristalline 712
Bryan, G. H. 1) The intermediate algebra 118
2) Elementary textbook of hydrostatics 596
Bryant, R. Note on the convergence of series 197
Bubendey. Die Tragfähigkeit gerammter Pfähle 692
Bucherer, A. H. Nachtrag zu: Die Wirkung des Magnetismus auf die elektromotorische Kraft 747
Buchholz, H. Die Laplace'sche und die Salmon'sche Schattentheorie und das Saturnring-Schattenproblem 804
Bürklen, O. Th. 1) Verbesserter Zeichenwinkel 417
2) Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik 818
Büttner, A. Elemente der Buchstabenrechnung und Algebra . . . 124
Bützberger, F. Zum hundertsten Geburtstage Jakob Steiner's . . 15
Buffone. Studio di un'elica sferica ed algebrica 534
Bugaiew, N. W. 1) Die Methode der successiven Annäherungen in ihrer Anwendung auf die numerische Auflösung der algebraischen Gleichungen 70
2) Die Methode der successiven Annäherungen und ihre Anwendung auf die Entwickelung der Functionen in stetige Reihen . . 70
3) Die Methode der successiven Annäherungen und ihre Anwendung auf die Ableitung der Theoreme von Taylor und Lagrange in einer modificirten Form 70
4) Die Methode der successiven Annäherungen und die Integration der Differentialgleichungen 70
5) Bestimmte Zahlenintegrale nach den Divisoren vermischten Charakters 158
6) Sur le théorème de Taylor avec l'approximation du troisième degré 201
Bullard, C. Quantitative study of correlated variation and the comparative variability of the sexes 185

Seite
Bunitzky, E. Reihen mit constantem Excess 209
Bunkofer, W. Arithmetische Functionen der 3 ersten Ordnungen . 486
Burali-Forti, C. 1) Le classi finite 60
2) Sur la définition de l'intégrale définie 230
3) Sur quelques propriétés des ensembles d'ensembles 328
4) Il metodo del Grassmann nella Geometria proiettiva. Nota 1ª . 377
Burbury, S. H. 1) On Boltzmann's law of the equality of mean kinetic energy for each degree of freedom 773
2) On the stationary motion of a system of equal elastic spheres in a field of no forces 774
3) Application of the kinetic theory to dense gases 774
Burch, G. J. 1) On a method of drawing hyperbolas 416
2) Trazado de la hipérbola 416
Burgatti, P. 1) Di alcuni invarianti relativi alle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine e del loro uso 275
2) Torsione geodetica delle linee sopra una superficie 506
Burkhardt, H. Zur Theorie der linearen Scharen von Punktaggregaten auf algebraischen Curven 468
Burnside, W. 1) Isomorphism of a group with itself 96
2) Doubly transitive groups of degree n and order $n(n-1)$ 97
3) Doubly transitive groups of degree 2^m and order $2^m(2^m-1)$. 97
Busch, A. Ueber oscillatorische Condensatorentladungen 737
Busche, E. 1) Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes . . 142
2) Ueber die Teiler der natürlichen Zahlenreihe 151
3) Die Schubert'sche Lösung eines Bachet'schen Problems 178
Busse, F. 1) Ueber eine punktweise eindeutige Beziehung zweier Flächenstücke 563
2) Ueber eine specielle conforme Abbildung der Flächen constanten Krümmungsmasses auf die Ebene 563
Byl, E. Détermination des constantes de la nutation diurne 806

Cabreira, A. 1) Geometria das curvas trigonometricas 495
2) Sobre a geometria da espiral 496
3) Sobre as velocidades na espiral 610
Cailler, C. 1) Henri Resal (1828—1896) 26
2) Mouvement d'une planète dans un milieu résistant 611
Cajori, F. 1) A history of elementary mathematics 1
2) Multiplication and involution of semi-convergent series 196
Caldarera, G. 1) Le sostituzioni rappresentate mediante trasposizioni 106
2) Trattato di trigonometria rettilinea e sferica 390
Calinon, A. 1) La géométrie à deux dimensions des surfaces à courbure constante 451
2) Le théorème de Gauss sur la courbure 507
Callandreau, O. Notice sur M. Hugo Gyldén 24
Campetti, A. Moto di un dielettrico in un campo magnetico . . . 749
Candy, A. L. A general theorem relating to transversals 399
Cannizzo, F. Rotazione nello spazio a cinque dimensioni 452
Cantor, M. Functionalgleichungen mit drei Veränderlichen 312
Capel, A. D. Common sense Euclid. Part I 387
Capelli, A. 1) Sopra un principio generale di aritmetica ed una nuova deduzione del teorema di Hilbert 74
2) Estensione del teorema di Hilbert al caso di polinomi con infiniti termini 74
Capelo, J. Tratado de algebra elemental 124
Carboni, O. Geometria descrittiva. II 417
Carda, K. 1) Zur Quadratur des Ellipsoids 354

Seite

Carda, K. 2) Elementare Bestimmung der Punkttransformationen des Raumes, welche alle Flächeninhalte invariant lassen 560
Cardinaal, J. 1) Sur quelques cas de cônes circonscrits à une quadrique 448
2) Construction de l'accélération du point de rencontre de deux tiges mobiles 577
Carli, A. Bibliografia Galileiana 1568—1895 8
Carlini, L. 1) Ricerca del massimo comun divisore di due o più numeri medjante la divisione 123
2) Progressioni aritmetiche e numeri primi 151
Carnot, L. N. Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal 223
Cartan, E. Sur la réduction à sa forme canonique de la structure d'un groupe de transformations fini et continu 288
Carvallo, E. 1) Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes 72
2) Généralisation et extension à l'espace du théorème des résidus de Cauchy 320
3) Absorption de la lumière par les milieux doués du pouvoir rotatoire 712
4) Absorption de la lumière par les cristaux 713
Casalonga, M. Du mécanisme des marées 814
Castellano, F. Lezioni di meccanica 575
Castelnuovo, G. 1) Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica 522
2) Sulle superficie di genere 0 523
3) Aggiunta ad una memoria del Sig. Enriques 523
4) Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques 524
Catania, S. Sulla deduzione della relazione $a^2 = b^2 + c^2$ 406
Catchpool, E. A textbook of sound 701
Cauchy, A. Oeuvres complètes (1) 9 13
Cayley, A. 1) Collected mathematical papers. Vol. 11, 12, 13 . . 21
2) Vier Briefe über elliptische Modulfunctionen 349
Cazamian. Solution d'une question 488
Cazzaniga, T. Sopra i determinanti di cui gli elementi principali variano in progressione aritmetica 111
Cebrian, P. Teoria general de las proyecciones geograficas . . . 814
Cels. Note sur les fonctions implicites 328
Cesáro, E. 1) Sulla distribuzione dei numeri primi 152
2) Des polyèdres superposables à leur image 382
3) Lezioni di geometria intrinseca 815
Chailan, E. Résumé d'algèbre élémentaire 124
Chapel, F. Sur une nouvelle étude de balistique extérieure de M. Siacci 634
Charlier, C. V. L. 1) Ueber die trigonometrischen Entwickelungen in der Störungstheorie 796
2) Untersuchung über die Methoden zum Tabuliren der Störungen der kleinen Planeten 797
Charpy, G. Répartition des déformations dans les métaux 695
Chaudy, F. Machines hydrauliques 656
Chauvenet, W. Plane geometry, by W. E. Byerly 387
Chemnitzer, B. Coordinatentransformationen auf beliebiger Oberfläche in conjugirt-complexen Variabeln 499
Chessin, A. S. 1) On non-uniform convergence of infinite series . 195
2) On infinite products 195
3) A new classification of infinite series 195
4) Limit for regular sequences of rational numbers 196
5) Additional note on divergent series 196
6) Note on Cauchy's numbers 206

Seite
Chessin, A. S. 7) Singularities of single-valued and generally analytic functions 301
8) On a point of the theory of functions 301
9) Motion of a homogeneous sphere on an inclined plane, taking into account the rotation of the Earth 629
Chiari, A. Elementi di geometria 388
Chini, M. Sulle equazioni a derivate parziali del 2° ordine 280
Chree, C. 1) The equilibrium of isotropic elastic solid shells of nearly spherical form 686
2) Forced vibrations in isotropic elastic solid spheres 687
3) Comparison and reduction of magnetic observations 754
Christoffel, E. B. Die Convergenz der Jacobi'schen ϑ-Reihe mit den Moduln Riemann's 347
Chrystal, G. 1) Fundamental theorem regarding the equivalence of systems of ordinary linear differential equations 259
2) Theory of the refraction of thin approximate axial pencils . . 717
Ciamberlini, C. 1) Relazione tra le distanze di 5 punti dello spazio 114
2) Ancora sulla simmetria in alcune dimostrazioni della geometria 392
Ciani, E. 1) Sopra la configurazione di Kummer 381
2) La quartica di Caporali 441
Cirodde, P. L. Lecciones de algebra 125
Clavenad. Masse: Capacité pour le mouvement 571
Coccoz. Carrés magiques en nombres non consécutifs 179
Cohn, J. Geschichte des Unendlichkeitsproblems bis Kant 33
Còle, R. S. 1) Graphical methods for lenses 719
2) Métodos gráficos relativos á las lentes 719
Collet, J. 1) Les équations linéaires et leurs équations 263
2) Équations simultanées linéaires à coefficients constants 263
Collignon, Éd. Une remarque sur certains nombres 489
de Colnet d'Huart. Les équations de la théorie de l'électricité et de la lumière de Maxwell et celles de la théorie des courants de M. Boltzmann 755
Columba, G. M. Eratostene e la misura del meridiano terrestre . . 40
de Comberousse, Ch. 1) Leçons de géométrie. I 384
2) Solutions des exercices et problèmes 385
3) Cours de mathématiques. V: Géométrie analytique, plane et dans l'espace. Éléments de géométrie descriptive 465
Combette, E. Compléments du cours d'algèbre et notions de géométrie analytique 465
Cominotto, E. Una disposizione particolare dei triangoli simili . . 393
Conant, L. L. The number concept: its origin and development . . 46
Coondoo, N. Solution of a question 181
Coordes, G. Kleines Lehrbuch der Landkarten-Projection 814
Cordone, G. 1) Una classe d'equazioni risolubili algebricamente . 64
2) Gruppo di sostituzioni razionali e lineari 103
Cornu, A. 1) Les travaux de Fresnel en optique 11
2) Discours prononcé aux funérailles de M. Hippolyte Fizeau . . . 24
3) Félix Tisserand 26
4) Les forces à distance et les ondulations 679
5) Sur la caustique d'un arc de courbe réfléchissant les rayons émis par un point lumineux 717
Cosserat, E. Sur la théorie de l'élasticité. I 684
Cosserat, F. Sur la théorie de l'élasticité. I 684
Costa-Reghini, A. Appunti di trigonometria piana 390
Cotterill, J. H. The steam engine as a thermodynamic machine . 772
Cotton, A. 1) Recherches sur l'absorption et la dispersion de la lumière par les milieux doués du pouvoir rotatoire 714



Seite

Cotton, A. 2) Note sur l'emploi de la lame de Bravais 714
Cotton, E. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables 278
Cousin, P. Sur les fonctions d'une variable complexe admettant des singularités de nature quelconque 329
Couturat, L. 1) De l'infini mathématique 49
2) Études sur l'espace et le temps de MM. Lechalas, Poincaré, Delboeuf, Bergson, L. Weber et Évelin 378
Cowell, P. H. Inclinational terms in the Moon's coordinates . . . 803
Craig, Th. 1) Sur une suite d'équations linéaires aux dérivées partielles, provenant de la théorie des surfaces 284
2) Surfaces à lignes de courbure isométriques 507
3) Solution of a system of equations 525
Crane, W. R. A curvimeter 416
Cranz, C. Compendium der theoretischen äusseren Ballistik . . . 631
Crawley, E. S. Plane and spherical trigonometry 390
Crelier, L. Sur quelques propriétés des fonctions Besséliennes . . 366
Crelle, A. L. Rechentafeln 821
Cremer. Ueber Erddruck und Stützmauern 593
Crockett, C. W. Plane and spherical trigonometry 390
Crone, C. Om Keglesnit, hvis Tangenters Skaeringspunkter med en Kurve af 4de Orden kunne bestemmes ved Passer og Lineal . 441
Cugnin, E. Notions fondamentales des sciences mathématiques . . 48
Cullis, C. E. Die Bewegung durchlöcherter Körper in einer incompressiblen Flüssigkeit 656
Culverwell, E. P. The astronomical theory of the ice age 810
Cumming, L. 1) Mechanics for beginners, treated experimentally . 575
2) The pound as a force 575
Cunningham, A. 1) On 2 as a 16-ic residue 146
2) Note 146
Curjel, H. W. Solutions of questions 367, 467, 494
Curtze, M. 1) Uebersetzungen der Elementa im Mittelalter 3
2) Ueber Johann von Gemunden 6
3) Ueber die sogenannte Regel Ta Yen in Europa 30
4) Zur Geschichte der Physik im 14. Jahrhundert 37
5) Im Mittelalter zur Feldmessung benutzte Instrumente 39
Cusack's algebra. Part I: elementary 125

Dandolo, G. Intorno al numero; discussioni psicologiche 49
Danielewicz, B. Mathematische Grundlagen der Lebensversicherung 186
v. Dantscher, V. Ueber die Ellipse vom kleinsten Umfange durch drei gegebene Punkte. II. 227
Darboux, G. Leçons sur la théorie générale des surfaces. IV . . 497
Dariès, G. 1) Cubature des terrasses et mouvement des terres . . 391
2) Mécanique, hydraulique, thermodynamique 575
Darwin, G. H. The astronomical theory of the glacial period . . 810
Darzens, G. Sur l'entropie moléculaire 761
Dauge, F. 1) Cours de méthodologie mathématique. 2me éd. . . . 49
2) Sur la géométrie non-euclidienne 375
Davenport, C. B. Quantitative study of correlated variation and the comparative variability of the sexes 185
Davis, R. F. Question 9484 400
Davison, Ch. 1) On the straining of the Earth resulting from secular cooling 809
2) On the diurnal periodicity of earthquakes 810
D. E. Neue Geometrie des Dreiecks 403
Dedoff, Th. Untersuchungen über quadratische Formen 168

Seite

Degenhardt, G. Praktische Geometrie auf dem Gymnasium . . . 54
Delannoy, H. Emploi de l'échiquier pour la résolution de certains problèmes de probabilités . . . 180
Delassus, É. 1) Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles . . . 267
2) Sur les systèmes algébriques et leurs relations avec certains systèmes d'équations aux dérivées partielles . . . 267
3) Sur les transformations des systèmes différentiels . . . 267
4) Sur les équations linéaires aux dérivées partielles . . . 273
5) Sur les séries de puissances et les fonctions majorantes . . . 305
Delaunay, N. Eigenschaften der projectiven Transformation . . . 476
Dellac, H. Solution de questions . . . 584
Demoulin, A. La géométrie réglée par G. Koenigs . . . 374
Deruyts, F. Sur certains groupes d'éléments communs à deux involutions 448
Deruyts, J. 1) Fonctions invariantes associées à un système transformable . . . 88
2) Propriétés du déterminant d'un système transformable . . . 88
Dewey, J. The psychology of number . . . 55
Dickson, L. E. Analytic functions suitable to represent substitutions 105
Dickstein, S. 1) Hoene Wronski. Sein Leben und seine Werke . 13
2) Découvertes mathématiques de Wronski . . . 13
3) s. Fr. Meyer . . . 32
Dieckmann, J. s. Koppe's Arithmetik . . . 119
Diesselhorst, H. Potential von Kreisströmen, mit einer Anwendung auf das Helmholtz'sche Elektrodynamometer . . . 746
Dieterici, C. Abhängigkeit der specifischen Wärme des Wassers von der Temperatur . . . 766
Dikshit, S. B. The Indian calendar . . . 40
Dini, U. Sulle equazioni a derivate parziali del 2° ordine . . . 279
Dixon, A. C. 1) On a point in the calculus of variations . . . 294
2) The reduction of the second variation of an integral . . . 294
3) A projective proof of the anharmonic property of tangents to a plane curve . . . 437
4) Cartesian ovals . . . 492
5) Method of discussing the plane sections of surfaces . . . 499
Dixon, A. L. The potential of cyclides . . . 661
Dixon, E. T. The position of the retinal images . . . 721
Dodds, W. Algebra for beginners . . . 125
Döhlemann, K. Zur Massbestimmung in den einförmigen Grundgebilden . . . 426
Dolbear, A. E. Mechanical conceptions of electrical phenomena . 755
Dolbnia, J. P. 1) Sur la réduction des intégrales abéliennes dépendant d'une équation algébrique binôme . . . 358
2) Reduction der von den Wurzeln der binomischen algebraischen Gleichungen abhängigen Abel'schen Integrale . . . 358
3) Logarithmischer Ausdruck von $\int dx/R(x)$, wo $R(x) = \sqrt[4]{x^4+px^2+q}$ 359
4) Neuer Fall der Integration in Logarithmen . . . 359
5) Aus der Theorie der Abel'schen Integrale . . . 359
Dolezal, E. Relationen bei regulären Polygonen . . . 396
Domalip, K. Studien über elektrische Resonanz . . . 736
Drach, J.; s. J. Tannery . . . 134
Drago, G. Dottrina dei caratteri della divisibilità . . . 125
Droz-Farny, A. 1) Concours d'agrégation de 1895 . . . 433
2) Triangles équilatéraux inscrits à une conique . . . 437
3) Solution de la question 490 . . . 438, 483, 484
4) Les cercles de Chasles . . . 484

Seite

Drude, P. 1) Ueber den Begriff des dielektrischen Widerstandes . 727
2) Zur Theorie stehender elektrischer Drahtwellen 755
Dubosque, J. Études théoriques et pratiques sur les murs de soutènement et les ponts et viaducs en maçonnerie 695
Duhamel. Tableau donnant les carrés et les racines carrées des nombres entiers 821
Duhamel, J. M. C. Des méthodes dans les sciences de raisonnement 48
Duhem, P. 1) Stabilité d'un navire qui porte du lest liquide . . . 597
2) De l'influence qu'un chargement liquide exerce sur la stabilité d'un navire 597
3) Fragments d'un cours d'optique 702
4) Sur la propagation des actions électrodynamiques 729
5) Sur les déformations permanentes et l'hystérésis 762
Dumont, F. 1) Sur la classification des cubiques planes 490
2) Théorème sur la détermination d'une surface du troisième ordre générale par la hessienne 530
3) Représentation de la surface cubique sur un plan 530
Duplaix, M. 1) Abaques des efforts tranchants et des moments de flexion développés dans les poutres à une travée 690
2) Sur la résistance des ponts sous le passage de convois périodiques 693
Duporcq, E. 1) Quelques propriétés des biquadriques gauches . . 449
2) Solution d'une question 479
3) Concours général de mathématiques spéciales 1896 483
4) Sur les centres de gravité des courbes parallèles 589
Duport. 1) Mémoire sur la constitution des atomes 675
2) Constitution des atomes et action de la matière sur la matière 675
Dupuis, J. Tables de logarithmes à cinq décimales 821
Dupuy, P. La vie d'Evariste Galois 12
Duran-Loriga, J. J. 1) Ueber Radical-Kreise 397
2) Segunda nota sobre los circulos radicales 398
3) Sur les cercles radicaux 397, 480
Durège, H. Elements of the theory of functions of a complex variable 329
Duse, A. L. Quadratura del circolo 395
Dyck, W. Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik 48

Ebert, H. Magnetische Kraftfelder. I 755
Echols, W. H. 1) Calculus of functions derived from limiting ratios 222
2) The fundamental problem of the differential calculus 224
3) Expansion of a function without use of derivatives 302
Edgeworth, F. Y. 1) The asymmetrical probability curve 184
2) The compound law of error 184
Edwards, J. An elementary treatise on the differential calculus . . 223
Egorow, D. Zur Theorie des Entsprechens der Flächen 500
Ekama, H. Eine seltene Form des Halo 814
Ekholm, Nils. Ueber die Grössenordnung der Kräfte, die verticale Beschleunigungen der Luft hervorrufen 602
Ekström, A. Om stående elektriska vågor i metalltrådar 736
Elgé. 1) Exercices sur les déterminants 111
2) Point délicat dans la construction des courbes 466
3) Sur le faisceau isogonal 479
4) Un théorème sur les cubiques circulaires 488
5) Sur la courbe de Rolle 490
6) Sur les quartiques bicirculaires 492
7) Sur le folium double 493

Seite

Elgé. 8) Sur une génération par points de la cubique aux pieds des normales à une quadrique 531
Elliott, E. B. 1) Note on the linear factors of a quartic 75
2) Systems of four and five irreducible invariants of the binary quintic and the binary sextic 76
3) Note on a class of exact differential expressions 225
Emch, A. 1) On the fundamental property of the linear group of transformation in the plane 290
2) A special class of connected surfaces 380
3) Projective groups of perspective collineations in the plane, treated synthetically 424
4) Compound curves in railroad engineering 494
5) Projective groups of perspective collineations in the plane, treated synthetically 557
6) Involutoric transformation of the straight line 557
7) Involutoric collineation in the plane and in the space 557
Emmerich, A. 1) Formel für die Summe der Quadratzahlen . . . 206
2) Stereometrische Gruppenaufgaben 408
Emtage, W. T. A. 1) Light 701
2) On the relation between the brightness of an object and that of its image 717
Eneström, G. 1) Questions 56—61. Remarque sur la question 34 2
2) Le commentaire de Ziegler sur la „Saphea“ de Zarkali 5
3) Les femmes dans les sciences exactes 29
4) Om lifränteberäkningsmetoderna under sextonhundratalet 187
5) Ett bidrag till mortalitetstabellernas historia före Halley . . . 187
6) Befolkningsstatistiska formler för dödligheden, då hänsyn tages till emigration och immigration 187
7) Generalisation af ett par formler inom befolkningsstatistiken . 188
8) Sur une formule de l'assurance de survie 188
9) Om aritmetiska och statistiska metoder för proportionella val . 189
Engel, Fr. 1) s. Hermann Grassmann 17
2) Das Pfaff'sche Problem 269
Engels, H. Untersuchungen über den Seitendruck der Erde . . . 591
Enriques, F. 1) Equazioni differenziali lineari del 4° ordine che divengono integrabili quando è noto un loro integrale particolare 257
2) Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche 473
3) Sopra le superficie algebriche di cui le curve canoniche sono iperellittiche 518
4) Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche . . . 518
5) Sui piani doppi di genere uno 523
6) Sur quelques récents résultats dans la théorie des surfaces algébriques 524
v. Eötvös, R. Untersuchungen über Gravitation und Erdmagnetismus 665
Epaphroditus et Vitruvius. Traités d'arpentage et de géométrie. Nouveau texte, publié par Mortet. Introduction par Tannery . 35
Epstein, J. S. H. von Helmholtz als Mensch und Gelehrter . . . 20
Epstein, P. Zur Lehre von den hyperelliptischen Integralen . . . 361
Ermakow, W. P. Worin besteht das Wesen der Algebra? 47
Esmarch, B. Die Kunst des Stabrechnens 819
Euler, L. Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie. Hrsg. von E. Hammer 406
Évellin, F. La divisibilité dans la grandeur 49
Everett, J. D. On absolute and relative motion 602
Ewald, J. R. Die Hebelwirkung des Fusses, wenn man sich auf die Zehen erhebt. 2. Mitteilung 587



Seite

Fabre, A. Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles d'ordre n, à deux variables x_1, x_2 et une fonction X . 286
Fabry, Ch. Passage de la lumière à travers une lame mince . . . 706
Fabry, E. 1) Sur les intégrales de Fresnel 235
2) Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série 303
3) Sur les courbes planes unicursales 475
4) Sur les courbes algébriques à torsion constante 517
Fagnart, E. Sur le calcul des annuités viagères 186
Falchi, M. Un particolare problema sulle superficie minime . . . 536
Fano, G. 1) Uno sguardo alla storia della matematica 1
2) Endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen 104
3) Sulle varietà algebriche con un gruppo continuo non integrabile di trasformazioni projettive in sè 290
4) Lezioni di geometria della retta 451
5) Sulle varietà algebriche dello spazio a quattro dimensioni con un gruppo continuo integrabile di trasformazioni projettive in sè 537
6) Aggiunto alla nota: „Sulle congruenze di rette del terzo ordine prive di linea singolare" 543
7) Sulle superficie algebriche con un gruppo continuo transitivo di trasformazioni projettive in sè 561
8) Sui gruppi continui di trasformazioni Cremoniane del piano e sopra certi gruppi di trasformazioni projettive 561
Faraday, M. Experimentaluntersuchungen über Elektricität. I, II. Hrsg. von A. J. von Oettingen 755
Favaro, A. 1) Indice cronologico del carteggio Galileano 8
2) Amici e corrispondenti di Galileo Galilei 8
3) Bibliografia Galileiana 1568—1895 8
Faye, H. Sur l'origine du monde 806
Fazio, A. G. Sui multipli dei numeri della forma $10Q+R$ 138
Feder, J. Die Configuration $(12_6, 16_3)$ und die zugehörige Gruppe von 2304 Collineationen und Correlationen 380
Fenkner, H. Lehrbuch der Geometrie. II 388
Féraud, A. Sur la valeur approchée des coefficients des termes d'ordre élevé dans la fonction perturbatrice 796
Fermat. Oeuvres de Fermat. 3 9
Ferrari, F. Proprietà dei punti isobarici nello spazio 525
Ferrini, R. 1) Elettricità e magnetismo 755
2) Fisica tecnologica. Elettricità e magnetismo 755
Ferval, H. Éléments de géométrie descriptive 417
F. J. Volume des segments de sphère, d'ellipsoïde et d'hyperboloïdes 407
Fink, K. 1) Elementare systematische und darstellende Geometrie . 383
2) Sammlung von Sätzen und Aufgaben zur Geometrie 383
3) 10 Figurentafeln und 84 Uebungsblätter zur Geometrie 383
Finkel. Solution of a question 182
Fischer, K. Kanonische Systeme algebraischer Functionen einer Veränderlichen in einem Gattungsbereich dritter oder vierter Ordnung 323
Fischer, Otto. 1) Beiträge zur Muskelstatik. I: Ueber das Gleichgewicht zwischen Schwere und Muskeln am zweigliedrigen System 587
2) Ueber Grundlagen und Ziele der Muskelmechanik 587
Fisher, J. Elements of geometry 389
Fisher, O. The cause of an ice age 810
Fiske, T. S. 1) The straight line as a minimum length 379
2) The length of a curved line 467
Fitzgerald, G. F. On the longitudinal component in light 738

Seite

Flamant, A. Stabilité des constructions; résistance des matériaux 695
Flamm, O. Ueber die Stabilität von Schiffen 597
Fleuri, G. Elementary exposition of the theory of power series . 213
Fleury, H. L'analyse dite infinitésimale sans limites ni infiniment petits 223
v. d. Fliet, A. Zur Frage der Wellentheorie 650
Floquet, G. Sur certaines fonctions à trois déterminations 263
Foa, R. Movimenti del piano instantaneo dell' orbite lunare 803
Föppl, A. 1) Vereinfachte Darstellung meiner Theorie der Laval'schen Turbinenwelle 654
2) Kritische Bemerkungen zur Drehungselasticität 686
3) Prüfung von Metallen auf ihre Härte 690
4) Prüfung eines Satzes der Fachwerklehre durch den Versuch . . 690
5) Die Berechnung von Röhren und anderen ringförmigen Körpern auf Druck in einer Durchmesserebene 694
6) Kritische Geschwindigkeit von Wellen mit grosser Umlaufszahl 694
7) Die Geometrie der Wirbelfelder 755
Foerster, O. Elasticitätscoefficienten und Wellenbewegungserscheinungen als Functionen der Moleculargewichte und specifischen Wärmen 678
Foldberg, P. T. Tilnaeret Beregning af Produkter og Qvotienter . 123
Folie, F. 1) Sur la constante de l'aberration 806
2) Erreur fondamentale des formules de réduction rapportées à l'axe instantané 806
3) Révision des constantes de l'astronomie 806
4) Supériorité de la méthode de Laplace sur celle d'Oppolzer . . 806
5) Un mot sur la nutation diurne 806
6) Les véritables expressions de la nutation eulérienne 806
7) Expression complète des termes du second ordre dans les formules de réduction du lieu apparent 806
8) Résolution des équations numériques à 5 ou 6 inconnues . . . 806
9) Différence de longitude entre Bruxelles et Uccle 806
10) Sur la constante de l'aberration 806
11) Différences systématiques en déclinaison à Poulkowa 806
Fontana, A. Correzioni del peso dei corpi nell' aria 770
Fontené, G. 1) Sur l'addition des arguments dans les fonctions périodiques du second ordre 343
2) Expression de la quantité $\wp(u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n})$ 343
3) Cas remarquable de la projection gauche 413
Fontès. 1) Pierre Forcadel, lecteur du Roy ès mathématiques . . 7
2) Sur les carrés à bordure de Stifel (1544) 179
Ford, T. A. V. Systematical course of geometrical drawing 417
Forsyth, A. R. 1) Algebraical theorems connected with the theory of partitions 135
2) Geodesics on quadrics, not of revolution 528
3) Conjugate points on geodesics on an oblate spheroid 528
Fortey, H. Solutions of questions 181
Foster, G. C. Elementary treatise on electricity and magnetism . . 755
Fouché, E. Déplacement de l'axe de rotation d'un corps solide dont une partie est rendue momentanément mobile 627
Fouché, M. 1) Sur la définition de l'intégrale définie 230
2) Déplacement de l'axe de rotation d'un corps solide dont une partie est rendue momentanément mobile 627
de Francesco, D. Sulla statica nello spazio a quattro dimensioni 584
de Franchis, M. Sulla curva luogo dei contatti d'ordine k delle curve d'un fascio colle curve d'un sistema lineare ∞^k 443
Francke, Ad. 1) Der steife Seilträger 589



Seite
Francke, Ad. 2) Träger auf elastischer Unterlage 691
Franel, J. 1) Sur la fonction $\xi(t)$ de Riemann 153
2) Sur la formule sommatoire d'Euler 237
Franke. Erwiderung auf die Antwort des Dr. Münter 624
Franke, J. H. Die Conformität in Bayern 786
Franklin, C. L. The positions of the retinal images 721
Franzen, H. Bewegung eines materiellen Punktes unter Einwirkung einer Newton'schen Centralkraft und der Erdschwere 611
Frasca, G. Nozioni d'algebra 125
Frattini, G. 1) Intorno a una proprietà dell'equazione di sesto grado 69
2) Risoluzione dell' equazione $ax^2+bxy+cy^2=m$ 165
3) Dell' equazione di Pell a coefficiente algebrico 165
4) Poligoni concavi e convessi 393
5) Una bella osservazione del De Paolis 397
Frédéric, H. Doctrine de la transformation des forces 575
Freeland, W. Algebra for schools and colleges 125
Frege, G. 1) Begriffsschrift des Herrn Peano und meine eigene . . 45
2) Le nombre entier 49
Freitag, H. Untersuchung I. der Curve $(x/a)^{\frac{2}{3}}+(y/b)^{\frac{2}{3}}=1$, II. der Fläche $(x/a)^{\frac{2}{3}}+(y/b)^{\frac{2}{3}}+(z/c)^{\frac{2}{3}}=1$ 494
Fricke, R. 1) Einfache Gruppe von 360 Operationen 103
2) Discontinuität gewisser Collineationsgruppen 326
3) Ueber die Theorie der automorphen Modulgruppen 326
Friedländer, Benedict. Absolute oder relative Bewegung? . . . 571
Friedländer, Imm. Absolute oder relative Bewegung? 571
Frobenius, G. 1) Zur Theorie der Scharen bilinearer Formen . . 79
2) Cogrediente Transformationen der bilinearen Formen 79
3) Ueber Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe 91
4) Ueber Gruppencharaktere 92
5) Ueber die Primfactoren der Gruppendeterminante 94
6) Ueber vertauschbare Matrizen 109
Frolow, M. Réponse aux observations de M. Mansion 374
Frontera, G. Éléments de géométrie analytique 465
Frost, A. H. The construction of Nasik squares of any order . . . 180
Fuchs, L. 1) Remarque sur une note de M. A. Loewy 106
2) Eine Klasse linearer homogener Differentialgleichungen 241
Funcke, H. Methodische Aufgaben zu Mehler's Hauptsätzen . . . 391
Fuss, K. Sammlung von Constructions- und Rechenaufgaben . . . 391

de Galdeano, Z. G. El álgebra simbólica, las geometrias no-euclídeas y el concepto de hiper-espacio 47
Galileo Galilei. Le opere di Galileo Galilei. 6 7
Gallatly, W. Mechanics for beginners 575
Gallop, E. G. The electric and magnetic images of a multiple point in a sphere 731
Galopin-Schaub, C. Premières notions du calcul des quaternions 60
Gambardella, F. Elementi di calcolo infinitesimale 223
Gambioli, D. Raccolta di esercizi di aritmetica, algebra e meccanica 125
Gantzer, R. Analogien der ebenen und körperlichen Geometrie . . 406
Garbasso, A. Sopra un punto della teoria dei raggi catodici . . . 740
Gardenghi, G. Manuale tecnico per le società di mutua soccorso 190
Gascó, L. G. 1) Reglas para es desarrollo de las determinantes . 111
2) Diagramas mnemónicos de trigonometría 404
Gauss, F. G. Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln 821

Seite
Gay, A. Les machines de M. Torres à résoudre les équations . . 73
Gazzaniga, P. Libro di aritmetica e di algebra elementare . . . 125
Gegenbauer, L. 1) Zwei allgemeine Sätze über Sturm'sche Ketten 65
2) Bemerkung über reelle Primzahlen 149
3) Arithmetische Bemerkung 158
4) Notiz über die Kugelfunctionen 365
Geiser, C. F. Räumliches Sechseck und Kummer'sche Fläche . . . 449
von Geitler, J. Schwingungsvorgang in complicirten Erregern Hertz'scher Wellen 755
Gelin, E. 1) Recueil de problèmes d'arithmétique 119
2) Du meilleur système de numération 121
3) 450 questions d'arithmologie 125
4) Traité d'arithmétique élémentaire 125
5) Trigonométrie plane et sphérique 390
Gensen, L. 1) Zeichnerische Bestimmung von Schwerpunkten . . . 588
2) Seilzug durch drei gegebene Punkte nebst einigen Anwendungen auf den Dreigelenkbogen 588
3) Zur Berechnung der Stabkräfte in Bogenbrücken 693
Gentry, R. On the forms of plane quartic curves 490
Georgiévsky, P. Nouvelle théorie sur l'origine des revenus nets . 190
Gérard, E. Mesures électriques 755
Gérard, L. 1) Équivalence de deux portions de droites 392
2) Construction du polygone régulier de 17 côtés au moyen du seul compas 396
Gérard, S. Géométrie descriptive 417
Gerbaldi, F. 1) Sulle serie di funzioni analitiche 302
2) Un teorema sulle singolarità della jacobiana di quattro superficie algebriche 516
Gerhardt. Zur Berechnung von Windrädern 655
Gerland, G.; E. L. A. v. Rebeur-Paschwitz 22
Gibbs, J. W. Velocity of propagation of electrostatic force . . . 730
Gibson, B. La Géométrie de Descartes au point de vue de sa méthode 9
Gibson, G. A. 1) M. Cantor's Geschichte der Mathematik. III . . 1
2) A reduction formula for indefinite integrals 228
3) Some properties of parabolic curves 494
Giermann, S. Anwendungen der Binomialgleichungen $x^n \pm 1 = 0$. 66
Gilbert, R. Sur les réseaux de coniques 480
Gillet, J. A. 1) Elementary algebra 125
2) Euclidean geometry 388
Gimler, K. Der Festpunkt des Denkens 40
Gioffredo, A. Lezioni di aritmetica, geometria e sistema metrico 125
Girardon, E. Leçons d'artillerie 642
Girardville, P. Sur le vol des oiseaux 655
Girod, J. 1) Résolution trigonométrique de l'équation cubique . . 67
2) Sur un problème de géométrie analytique 486
Giudice, F. 1) Sull'equazione di 5° grado 68
2) Sulle frazioni continue numeriche 168
3) Comunicazione 376
Glaisher, J. W. L. Correction of an error 208
Glan, P. 1) Theoretische Untersuchungen über elastische Körper . 704
2) Theoretische Untersuchungen über elastische Körper und Licht 704
3) Theoretische Untersuchungen über Licht 704
Glas, R. Krümmungshalbmesser. Constructionen der Kegelschnitte 437
Glazebrook, R. T. James Clerk Maxwell and modern physics . . 37
Glösel, K. 1) Ueber die Zerlegung der ganzen Zahlen 135
2) Notiz über die Zerlegung der ganzen Zahlen 136



Seite

Gmeiner, J. A. Ueber die ganzen Zahlen im Rationalitätsgebiete der fünften Einheitswurzeln 159
Godt, W. 1) Ueber eine merkwürdige Kreisfigur 399
2) Ueber den Feuerbach'schen Kreis und eine Steiner'sche Curve vierter Ordnung dritter Klasse 400
Goebel, K. Die Zahl und das Unendlichkleine 46
Goedseels, E. Note 571
Götting, E. Scheinbarer Ort eines unter Wasser befindlichen leuchtenden Punktes 721
Goldbeck, E. Kepler's Lehre von der Gravitation 37
Goldscheider, F. Ueber die Gauss'sche Osterformel. I 805
Good, T. W. Science and art of geometry. II: Solid geometry . . 388
Goodwin, H. W Azimuth tables for the higher declinations . . . 794
Gopalachniar. Solution of a question 367
Gordon, J. W. Mathematical tables (actuarial) 190
Gottscho, L. Miscellen aus den Curven und Flächen 2. O. . . . 529
Goudin, J. B. Considérations élémentaires sur le calcul infinitésimal 223
Gouilly, A. Géométrie descriptive 417
Gould, E. S. A primer of calculus 223
Goursat, E. 1) Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. I . 264
2) Sur les équations linéaires et la méthode de Laplace 277
3) Sur les systèmes en involution d'équations du second ordre . . 278
4) Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre 278
5) Sur le théorème de Salmon 437
6) Sur les lignes asymptotiques 498
Gouy. Rôle des milieux diélectriques en électrostatique 722
Graefe, Fr. Strecken- und Punktrechnung 463
Graf, J. H. 1) Zur Geschichte der Mathematik in der Schweiz . . 2
2) Briefwechsel zwischen J. Steiner und L. Schläfli 15
3) Ludwig Schläfli (1814 bis 1895) 22
4) Ableitung der Formeln für die Bessel'schen Functionen, bei welchen das Argument eine Distanz darstellt 366
Graham, J. An elementary treatise on the calculus 219
Grassi, G. Termodinamica 772
Grassmann, Hermann. Gesammelte Werke. 1, II. In Gemeinschaft mit H. Grassmann dem Jüngeren hrsg. von Fr. Engel . . 17
Grassmann, H. Punktrechnung und projective Geometrie 462
Gravé, D. A. 1) Sur le problème de Dirichlet 318
2) Sur la construction des cartes géographiques 564
3) Hauptaufgaben der mathematischen Kartenconstruction 565
4) Sur le problème de trois corps 611
Gray, A. 1) Armand Hippolyte Louis Fizeau 24
2) Lord Kelvin 27
3) Lord Kelvin's jubilee 27
Greenhill, A. G. 1) Differential and integral calculus 220
2) Transformation and division of elliptic functions 345
3) The spherical catenary 590
4) The associated dynamics of a top and of a body under no forces 624
Gremigni, M. Aggiunte e note alla teoria dei poligoni equivalenti 379
Greve, A. Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln 821
Grévy, A. Étude sur les équations fonctionnelles 311
Grönvall, H. 1) Några användningar af de 2 n-periodiska funktionerna på teorin för system af lineära totala differentialekvationer 285
2) Ueber Integrale algebraischer Differentialausdrücke von mehreren Veränderlichen 314

Seite
von Grofe, G. Mathematisches Pendel von veränderlicher Länge 617
Grolleau, C. École Normale supérieure. Concours de 1895 . . . 485
Grossmann, L. Die Mathematik im Dienste der Nationalökonomie 186
Gruber, F. Zur Theorie der Fermat'schen Congruenzen 141
Grusintzew, A. P. H. von Helmholtz in seinen letzten Werken . . 20
Gubler, E. Ueber ein discontinuirliches Integral 232
Günther, P. Zur Theorie der adjungirten Differentialgleichung . . 244
Günther, S. 1) Jakob Ziegler, ein bayerischer Mathematiker . . . 5
2) Biographien Kepler's und Galilei's 8
3) Handbuch der Geophysik. II. Aufl. Band I 807
Guest, J. J. Mechanism for describing conic sections 582
Guglielmi, A. Le nozioni di geometria solida 388
Guichard. 1) Sur la déformation des surfaces 509
2) Sur les surfaces minima non-euclidiennes 536
Guidi, C. 1) Sul calcolo delle travi a parete piena 691
2) Lezioni sulla scienza delle costruzioni. I, II, III 695
Guilmin, A. Algèbre élémentaire 125
Guitel, E. Propriétés relatives aux polygones équivalents 392
Guitton. Solution d'une question 66
Guldberg, A. 1) Om integration af Differentialligninger af 2den orden 249
2) Om Differentialligninger af anden orden 250
3) Unbeschränkt integrable totale Differentialgleichungen 261
Guliani, G. Elementi di algebra 125
Gustavicz, B. Die Ausgleichungsrechnung 182
Gutsche, O. Neue Beweise und Ergänzungen zu Lehrsätzen Steiner's über Kegelschnitte 436
Gutzmer, A. 1) Zur Theorie der adjungirten Differentialgleichungen 245
2) Sur certaines équations différentielles linéaires 245
Guyou, E. Stabilité de l'équilibre des corps flottants 598
Gyldén, H. 1) Hans Masal 22
2) Sur une équation différentielle du second ordre non-linéaire et à coefficients doublement périodiques 253
3) Remarques ultérieures 253
4) Olika methoder att bestämma de horistika termerna i den differentialekvation etc. 800

H. 1) Erdbelastung von Bauwerken 593
2) Beanspruchung statisch unbestimmter Tonnengewölbe 693
3) Verticalkraft eines einseitig überlasteten gelenklosen Bogens . 695
4) Spannungen im Mauerwerk 695
Haas, A. Eine Bemerkung über befreundete Zahlen 138
Hack, F. Beiträge zur Anwendung der Gruppentheorie auf kubische und biquadratische Gleichungen 68
Hadamard, J. 1) Mémoire sur l'élimination 90
2) Distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ 154
3) Les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann 154
4) Sur la fonction $\zeta(s)$ 155
5) Sur les fonctions entières. (2 Noten) 321
6) Une forme de l'intégrale de l'équation d'Euler 342
7) Une propriété des mouvements sur une surface 615
8) Stabilité des rotations dans le mouvement d'un corps pesant autour d'un point fixe 622
v. Haerdtl, E. Säcularacceleration des Mondes 803
Häseler. Auf Verdrehung beanspruchte Brückenquerträger 695
Hagemann, E. Uebungsbuch für die Anwendung der Ausgleichungsrechnung auf die praktische Geometrie 783



	Seite
Hagen, J. G. Index operum Leonardi Euleri	11
Halm, J. Täglicher Gang der Lufttemperatur	814
Halsted, G. B. 1) s. J. Bolyai	34
2) The essence of number	48
Hamburger, M. Ableitung der Gauss'schen Formel zur Bestimmung des jüdischen Osterfestes	805
Hammer, E. Gesamtverzerrung von Coordinaten	786
Hammer, F. Tafeln zur Berechnung des Höhenunterschiedes aus gegebener horizontaler Entfernung und gemessenem Höhenwinkel	791
Hammond, J. On the a, b, c form of the binary quintic	76
Hamy, M. 1) Note sur la série de Lagrange	305
2) Sur le développement approché de la fonction perturbatrice dans le cas des inégalités d'ordre élevé	795
Hancock, H. 1) Calculus of variation. II.	291
2) The calculus of variations: Derivation of some of the fundamental Weierstrassian formulae	291
3) Number of catenaries through two fixed points	291
4) Textbook of mechanics and hydrostatics	575
Hannequin, A. La preuve ontologique cartésienne	9
Hargreaves, R. 1) Expansion of elliptic integrals by zonal harmonics	341
2) The continuity of pressure in vortex motion	643
3) An ellipsoidal vortex	643
4) Distribution of solar radiation on the surface of the Earth	811
Harley, R. Results connected with the theory of differential resolvents	225
Hartenstein, H. Fünfstellige Briggische Logarithmen	821
Hartl, H. Lehrbuch der Planimetrie	388
Harzer, P. 1) Einfluss der Schwere auf Kreise astronomischer Instrumente	792
2) Bemerkung zu Weiler in A. N. 3312	798
3) Ueber eine allgemeine Methode der Bahnbestimmung	800
Hasenoehrl, F. Ein mechanisches Polycykel als Analogon der Inductionswirkungen beliebig vieler Kreisströme	731
Hathaway, A. S. A primer of quaternions	60
Haure, M. Recherches sur les points de Weierstrass d'une courbe plane algébrique	468
Hausdorff, F. Infinitesimale Abbildungen der Optik	716
Havemann. Diagramme über die Tragfähigkeit sämtlicher Normalprofile der I und [-Eisen	695
Hayashi, T. Note on a geometrical theorem	483
Hazzidakis, J. N. Biegung mit Erhaltung der Hauptkrümmungsradien	510
Hearson, T. A. The kinematics of machines	581
Heawood, J. On certain distinctions between the theories of converging fractions and converging multiples	169
Hecht, B. Interferenzerscheinungen, welche Platten aus Zwillingskrystallen in convergentem polarisirten Lichte zeigen	714
Heffter, L. 1) Ueber gemeinsame Vielfache linearer Differentialausdrücke und lineare Differentialgleichungen derselben Klasse	244
2) Ueber Modellirung von Isogonalflächen	534
Hegemann, E. Uebungsbuch für die Anwendung der Ausgleichungsrechnung auf die praktische Geometrie	190
Heger, R. Die Erhaltung der Arbeit	673
Hégly. Sur le passage d'un écoulement par orifice à un écoulement par déversoir	648
H. H. G.-A. Obituary notice of General J. T. Walker	26
Heiberg, J. L. 1) Den graeske Mathematiks Overleverings historie	2

Seite
Heiberg, J. L. 2) Euclidis optica, catoptrica 3
Heinze, M. Gedächnisrede auf M. W. Drobisch 23
Hellmann, W. Mathematischer Unterricht an den Erfurter Schulen im 16. und 17. Jahrhundert 30
Helm, G. Zur Energetik 758
Helmert, F. R. Berichtigung zu S. 473/474 786
v. Helmholtz, H. 1) Zwei hydrodynamische Abhandlungen. Hrsg. von A. Wangerin 643
2) Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden (1859). Hrsg. von A. Wangerin 697
3) Die Lehre von den Tonempfindungen 701
4) Handbuch der physiologischen Optik 715
Henrici, J. Lehrbuch der Elementar-Geometrie. II 388
Henry, Ch. Lois d'établissement et de persistance de la sensation lumineuse 721
Hensel, K. 1) Grösster gemeinsamer Teiler aller durch eine ganze Function von n Veränderlichen darstellbaren Zahlen 322
2) Ueber die Darstellung der Integrale erster Gattung durch ein Fundamentalsystem 322
3) Reduction algebraischer Systeme auf kanonische Form 323
v. Hepperger, J. Helligkeit des verfinsterten Mondes 804
Hercher, B. Lehrbuch der Geometrie zum Gebrauche an Gymnasien. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet 388
Hermes, J. Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl in Summanden. II 135
Hermes, O. Verzeichnis der einfachsten Vielflache 444
Hermite, Ch. 1) Sur les polynômes de Bernoulli 209
2) Sur une formule de M. Fontené 343
3) Sur une extension du théorème de Laurent 353
Herrmann, E. 1) Bemerkungen über die verticale Componente der ablenkenden Kraft der Erdrotation 602
2) Noch einmal der „Satz von der Erhaltung der Fläche" 602
3) The motions of the atmosphere 812
Hertz, H. Miscellaneous papers 19
Hess, E. J. F. C. Hessel. Zur Säcularfeier seines Geburtstages . 11
Hettwer, O. Zur Bewegung eines schweren Punktes auf einer krummen Linie von der Gleichung $r^m = a^m \cos m\vartheta$ 613
von der Heyden. Das Rechenlineal 55
Heydweiler, A. Verwendung des Telephons zur Bestimmung von Dielektricitätsconstanten leitender Körper 727
Heymann, J. Geometrisches Linearzeichnen 417
Heymann, W. 1) Didaktische Bemerkungen zur kubischen Gleichung 67
2) Drei algebraisch-geometrische Aufgaben 406
3) Stereometrische Paradoxa 408
Heyn, R. Wechselbeziehungen zwischen Gewölben und Widerlagsmauern 693
Hicks, W. M. 1) On bicyclic vortex aggregates 643
2) On Hill's special vortex 643
Hilbert, D. 1) Ein neuer Beweis des Kronecker'schen Fundamentalsatzes über Abel'sche Zahlkörper 62
2) Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen 297
Hill, G. W. 1) Celestial mechanics since the middle of the century 39
2) Convergence of the series used in perturbations 795
Hill, M. J. M. 1) Generalisation of Vandermonde's theorem . . . 117
2) Cauchy's condensation test for the convergence of series . . . 197
3) Volumes of certain species of tetrahedra 407



Seite
Hillebrand, C. Einfluss d. Elasticität auf d. Schwankungen d. Polhöhe 793
Hillyer, C. E. Solution of a question 401
Himstedt, A. Secanten und Tangenten des Folium Cartesii . . . 489
Hioux, V. Intersection d'une droite et d'une quadrique 417
Hobbs, C. A. The elements of plane geometry 388
Hobson, E. W. 1) On a type of spherical harmonics of unrestricted degree, order and argument 366
2) Formulae for the potentials of ellipsoids, shells, and disks . . . 659
Hoech, Th. Ueber Erddruck und Stützmauern 592
Hölder, O. Ueber die Principien von Hamilton und Maupertuis . 574
Höppner, J. D. Note on four-dimensional figures 121
Hoffmann, J. C. V. 1) Erzeugung der Fläche und des Körpers . . 47
2) Ueber den geometrischen Begriff „Figur" 393
Hollender, H. J. Neue graphische Zusammensetzung von Kräften 583
Holman, S. W. Computation rules and logarithms 819
Holzmüller, G. 1) Beziehungen des mathematischen Unterrichts zum Ingenieurwesen und zur Ingenieurerziehung 50
2) Ueber die Tragweite einer Reihenformel 55
3) Lehrbuch der Elementar-Mathematik. II 388
Hoppe, O. Elementares Lehrbuch der technischen Mechanik . . . 596
Hoppe, R. 1) Bezirke der drei Wurzelformen der Gleichung 4. Grades 68
2) Zur analytischen Curventheorie 500
3) Gleichseitig hyperbolischer Schnitt der Flächen 2. Grades . . . 526
Horn, J. Reihenentwickelung der Integrale eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen 260
Hornbrook, A. R. 1) Laboratory methods of teaching mathematics 55
2) Concrete geometry for beginners 388
Hoskins, L. M. Maximum stresses in bridge members 695
Hossfeld, C. Beiträge zur Theorie der Raumcurven 517
Hough, S. S. The rotation of an elastic spheroid 687
Houllevigue, L. 1) De l'influence de l'aimantation sur les phénomènes thermo-électriques 749
2) Chaleur de vaporisation et dimensions moléculaires 769
Housman, R. H. The electrical resistance of alloys 756
Howorth, H. H. 1) Sir Robert Ball and „The cause of an ice age" 810
2) The astronomical theory of the glacial period 810
3) Dr. Ball's two letters on the ice age 810
Hoyer, P. 1) Partialbruchzerlegung rationaler Functionen eines algebraischen Gebildes zweier Veränderlichen 324
2) Ueber Riemann'sche Flächen mit beschränkt veränderlichen Verzweigungspunkten 324
Hromadko, F. 1) Sammlung von Aufgaben aus der Algebra . . . 125
2) Proben aus Diophantos 146
Huisken, A. F. De doorsnijding eener drieassige ellipsoïde door een vlakkenbundel 527
Humbert, E. 1) Invariant de la forme cubique 67
2) Sur l'équation générale des coniques qui passent par l'intersection de deux autres 486
Humbert, G. Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes du genre trois 535
Hurion, A. Polarisation de la lumière diffusée par les milieux troubles 712
Hurmuzescu, D. Nouvelle détermination du rapport v entre les unités électrostatiques et électromagnétiques 823
Hurwitz, A. 1) Équations avec des racines à partie réelle négative 73
2) Ueber die Zahlentheorie der Quaternionen 162
3) Kettenbrüche, deren Teilnenner arithmetische Reihen bilden . . 169
Husmann, A. Ueber das Doppler'sche Princip 701

Seite
Jack, J. Development of sn x, cn x, dn x 345
Jackson, C. S. Units of force 575
Jackson, F. H. A certain linear differential equation 258
Jackson, M. J. The pound as a force 575
Jacob, J. Formel für die Ausflussgeschwindigkeit der Gase 648
Jacobi, C. G. J. 1) Bildung und Eigenschaften der Determinanten. Hrsg. von Stäckel 107
2) Ueber die Functionaldeterminanten. Hrsg. von Stäckel 107
v. Jacobs, H. Das Volk der „Sieben-Zähler" 30
Jadanza, N. 1) Per la storia del cannocchiale 38
2) Influenza dell'errore di verticalità della stadia sulla misura delle distanze e sulle altezze 785
Jäger, G. . 1) Zur Theorie der Dissociation der Gase. II 683
2) Fortpflanzung des Schalles in bewegter Luft 699
3) Zur Theorie der Zustandsgleichung der Gase 764
4) Gasdruckformel mit Berücksichtigung des Molecularvolumens . . 775
5) Einfluss des Molecularvolumens auf die mittlere Weglänge der Gasmolekeln 776
Jaerisch, P. Zur Integration der Elasticitätsgleichungen isotroper Rotationskörper 685
Jahnke, E. Ueber ein allgemeines, aus Thetafunctionen von zwei Argumenten gebildetes Orthogonalsystem 363
Jamet, V. 1) Sur les intégrales de Fresnel 235
2) Sur une équation aux dérivées partielles 279
Janisch, E. 1) Construction des Osculationskreises der ebenen Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte 439
2) Ueber eine specielle Fusspunktcurve der Steiner'schen Hypocykloide 494
Jaumann, G. 1) Longitudinales Licht 711
2) Réponse aux observations de M. H. Poincaré sur la théorie des rayons cathodiques 741
3) Déviation électrostatique des rayons cathodiques 741
Jelínek, V. 1) Ueber das ebene Tangentenviereck 394
2) Ueber den Pyramidenstumpf 407
3) Ueber den rollenden Kegel 579
Jentzen, Ed. Darstellende Geometrie 417
Jerabek, V. 1) Sur les triangles semblables et homologiques . . . 393
2) Sur les coniques qui se touchent en deux points donnés 434
J. F. 1) Éléments de géométrie 388
2) Exercices de géométrie 391
Igel, B. Zur Theorie der elliptischen Functionen 348
Igi, R. Tavole di logaritmi a 11 decimali di F. Thoman 822
Imschenetzky, W. G. 1) Aufstellung gewisser Systeme kanonischer Gleichungen und vollständig integrirbarer partieller Differentialgleichungen 271
2) Bemerkung über partielle Differentialgleichungen 271
Indra, A. 1) Einrichtung und Gebrauch des Coordimeters 641
2) Bestimmung der Temperatur einer veränderlichen Wärmequelle in einer bestimmt gegebenen Zeit 781
Ingalls, J. M. Resistance of the air to the motion of oblong projectiles 637
Johannesson, P. 1) Das Beharrungsgesetz 570
2) Bemerkung zur Lehre von der Resonanz 699
Joly, Ch. J. Quaternion invariants of linear vector functions . . . 109
Jones, G. W. A drill-book in trigonometry 390
Jones, J. V. On the magnetic field due to an elliptical current . . 747
de Jonquières. 1) Lettre de Gauss, du mois de juin 1805 13

Seite

de Jonquières. 2) Zwei Druckfehler in Gauss' Werken 13
3) Propriétés des racines primitives des nombres premiers 144
4) Propriétés des racines secondaires des nombres premiers . . . 144
5) Au sujet d'une précédente communication 145
6) Au sujet des nombres premiers dont un nombre quelconque donné ne peut être racine primitive 145

Jordan, C. 1) Henry Resal 26
2) Cours d'analyse de l'École Polytechnique. III 223

Jordan, W. 1) Handbuch der Vermessungskunde III 783
2) Queraxige Coordinaten 785
3) Conforme Abbildung 785
4) Conforme Kegelprojection 786
5) Congruente oder conforme Coordinaten 786
6) Der mittlere Verzerrungsfehler 786
7) Bemerkungen zu einem Aufsatz von O. Koll 786
8) Gesammtverzerrung von Coordinaten 786
9) Barometrische Höhentafeln für Tiefland und grosse Höhen . . 791

Josephson, O. Studier öfver elastiska rotationskroppars deformation 695

Joubin, P. Dimensions des grandeurs électriques et magnétiques . 726

Joukowsky, N. E. 1) Leben und wissenschaftliche Thätigkeit von W. G. Imschenetzky 19
2) Gleichgewichtsbedingung eines festen Körpers, welcher sich mit seiner Unterfläche auf eine unbewegliche Ebene stützt 586
3) A propos d'une communication de M. R. Liouville, sur la rotation des solides 621

Journée. Note sur la résistance de l'air aux petites vitesses . . . 637

Isaachsen, J. Wirkungen von Centrifugalkräften in Flüssigkeiten . 654

Isè, E. Composizione delle forze di 3° ordine 583

Isnoskow, J. A. Magische Quadrate 180

Israel-Holtzwart, K. Intuitive mathematische Darstellungsmittel 52

Judd, Ch. H. Raumwahrnehmungen im Gebiete des Tastsinnes . . 49

Juel, C. 1) Parameterbestimmung auf Curven 2. u. 3. O. Eine geometrische Einleitung in die logarithmischen und elliptischen Functionen 337
2) Om Punktets Definition i Geometrien 379
3) Elementaer Stereometri 388

Junker, Fr. 1) Die elementaren symmetrischen Functionen und die Potenzsummen einer oder mehrerer Reihen von Veränderlichen 115
2) Die symmetrischen Functionen der gemeinschaftlichen Variabelnpaare ternärer Formen 116

Iwanow, J. Ueber eine Congruenz dritten Grades 149

Käuffer, P. Energie-Arbeit 684

Kagan, W. Geometrisches System von Lobatschefsky 373

zur Kammer, A. 1) Integration einer linearen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung 263
2) Zur Theorie der Curven in analytischer Behandlungsweise . . . 500

Kantor, S. 1) Ueber die endlichen Gruppen von Correlationen . . 562
2) Theorie der Transformationen im R_r, welche sich aus quadratischen zusammensetzen lassen 562

Kapteyn, W. 1) Over een vraagstuk uit de Analysis situs 380
2) Het construeeren van krommen der derde klasse 487

Kayser, E. Wolkenhöhenmessungen 814

Keck, W. Vorträge über Mechanik. I 569

Lord Kelvin. 1) On the motion of a heterogeneous liquid 656
2) Velocity of propagation of electrostatic force 730

Kempinski, S. Ueber Fuchs'sche Functionen zweier Variabeln . 328

Seite
Kerntler, F. Die elektrodynamischen Grundgesetze 755
Kessler, J. Berechnung der Schwungräder und Centrifugalregulatoren 642
Kewitsch, G. 1) Die Basis der Bürgi'schen Logarithmen 32
2) Bemerkungen zu dem vorigen Aufsatze 32
3) Vierstellige Logarithmen für den Schulgebrauch 822
Kheil, C. P. Bearbeitungen des Buchhaltungstractates von L. Pacioli 6
Kiechl, J. Gleichungen über zwei Transversalen eines Dreiecks . 391
Kiepert, L. Grundriss der Differential- und Integralrechnung. II. 221
Kierboe, T. Lineaer Konstruktion af det niende Skaeringspunkt for 2 Kurver af 3die Orden gjennem 8 givne Punkter 437
Kikuchi, D. 1) Ajima's method of finding the length of an arc of a circle 35
2) Metodo giapponnese per determinare l'area del cerchio 36
Kilbinger, G. Der Axencomplex der Rotationsflächen 2. O. 447
Killing, W. Ueber transfinite Zahlen 46
Kimura, S. On the nabla of quaternions 59
Kirsch. Kritische Geschwindigkeit von Wellen mit grosser Umlaufszahl 694
Kitchin, J. L. Solution of a question 622
Kleiber, J. 1) Aphorismen zum Aufgaben-Repertorium 52
2) Fläche zweiten Grades aus neun Punkten 446
3) Die Amsler'schen Flächensätze im Gebiete affin veränderlicher Systeme 580
4) Zur kinematischen Theorie der Gelenkmechanismen 580
Klein, E. Poläre Koordinater i elementär geometri 479
Klein, F. 1) L'oeuvre géométrique de Sophus Lie 34
2) Sullo spirito aritmetico nella matematica 44
3) The arithmetizing of mathematics 44
4) Ueber Arithmetisirung der Mathematik 44
5) Die Anforderungen der Ingenieure und die Ausbildung der mathematischen Lehramtscandidaten 49
6) Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie. I. Ausgearbeitet von A. Sommerfeld 163
7) Sur une représentation géométrique du développement en fraction continue ordinaire 177
8) Ueber neuere geometrische Forschungen 379
9) Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaire . . . 391
10) Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare . . 391
11) Ueber die Bewegung des Kreisels 622
12) Sur le mouvement d'un corps grave de révolution suspendu par un point de son axe 622
Kleinmichel, W. Maxima und Minima auf dem Gymnasium 226
Klemenčič, J. Energieverbrauch bei der Magnetisirung durch oscillatorische Condensatorentladungen 745
Klingatsch, A. Zur Bestimmung des mittleren Halbmessers der Erde 808
af Klint, E. G. Nautiska och logaritmiska Tabeller 822
Kluyver, J. C. 1) Sur les valeurs que prend la fonction $\zeta(s)$ de Riemann pour s entier positif et impair 155
2) Solution of a problem 342
v. Knebel. Ueber Kriegsdistanzmesser 720
Kneser, A. 1) Neue Beweise für die Convergenz der Reihen, welche bei der Integration linearer Differentialgleichungen in der Umgebung der einfachsten singulären Stellen auftreten 241
2) Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Differentialgleichungen 253
3) Zwei Sätze über Bewegungen in der Nähe labiler Gleichgewichtslagen 601

Seite

von Koch, H. Convergence des déterminants d'ordre infini 112
Koenen, M. Berechnung des Seiten- und Bodendrucks in Silozellen 592
Koenig, M. Die geometrische Teilung des Winkels. II. 395
Koenigs, G. 1) Sur les invariants intégraux 229
2) Problèmes de variations relatifs aux intégrales doubles 296
3) Sur un théorème de Kronecker 313
4) Solutions périodiques du problème du mouvement d'un corps pesant quelconque, suspendu par un de ses points 623
Königsberger, Leo. Ueber die Principien der Mechanik 572
Köpcke, A. Eine Function mit Symmetrien in jedem Intervall . . 307
Köppen, W. Wirkungen der verticalen Componente der ablenkenden Kraft der Erdrotation 813
Köster, T. E. Aufgaben aus dem Gebiete der Arithmetik und Algebra 125
Köstlin, W. Singularitäten ebener algebraischer Curven 478
Kötter, F. Eine Darstellung der Richtungscosinus zweier orthogonalen Coordinatensysteme durch Thetafunctionen zweier Argumente 363
von Kövesligethy, R. 1) Ueber eine neue Methode der Morphometrie der Erdoberfläche 784
2) Störungen im Vielkörperproblem 797
3) Neue geometrische Theorie der seismischen Erscheinungen . . 810
Kohlrausch, F. Ueber elektrolytische Verschiebungen in Lösungen und Lösungsgemischen 725
Kohn, Alfons. Versuche über magnetisch weiche und harte Körper 743
Kohn, G. 1) Kubische Raumcurven, welche die Tangentenfläche einer kubischen Raumcurve in 4, 5 oder 6 Punkten berühren 448
2) Die homogenen Coordinaten als Wurfcoordinaten 461
Kolaček, F. 1) Ueber elektrische Oscillationen in einer leitenden und polarisationsfähigen Kugel 734
2) Studien über elektrische Resonanz 736
3) Inductionscoefficienten langer Spulen 755
Koll, O. Soldner'sche oder Gauss'sche Coordinaten (3 Noten) . . . 786
Kommerell, V. Neue Formel für die mittlere Krümmung 507
Kononowitsch, A. K. Résolution du système des équations linéaires à trois inconnues par la méthode des moindres carrés 184
Koppe, C. Photogrammetrie und internationale Wolkenmessung . . 417
Koppe, K. Arithmetik und Algebra. Bearb. von J. Dieckmann. 13. Aufl. I, II 119
Koppe, M. Zur Kreiselbewegung 624
Kopsel. Zur Methode der kleinsten Quadrate 183
Korkine, A. Équations différentielles ordinaires du premier ordre (2 Noten) 247, 248
Korn, A. Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik. I 678
Korteweg, D. J. 1) Das Geburtsjahr von Johannes Hudde 10
2) Descartes et les manuscrits de Snellius 38
3) Sur un théorème énoncé par M. P. H. Schoute 237
Kotelnikow, A. P. Schraubenrechnung und ihre Anwendungen . . 298
Kowalewska, S. Jugenderinnerungen 18
Kowalsky, M. Neue Methode zur Integration der nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung 273
Krause, B. Zur Berechnung einer dreistelligen Logarithmentafel . 124
Krause, M. 1) Gustav Ferdinand Mehler † 22
2) Zur Transformation der Thetafunctionen. V 348
Kreuter, Fr. Zur Bestimmung der Tragkraft von Pfählen 692
Kreutz, H. Carl Nicolaus Adalbert Krüger 24

Seite
Kreuzberg, G. Zerlegbarkeit rationaler ganzer Functionen 64
Krigar-Menzel, O. Gravitationsconstante und mittlere Dichtigkeit der Erde 665
Kriloff, A. Théorie du tangage sur une mer houleuse 653
Krishmachandra De. Solution of a question 622
Kröger, M. Die Planimetrie in ausführlicher Darstellung 389
Krüger, L. 1) Anschluss eines secundären Dreiecksnetzes an ein Hauptnetz 787
2) Die europäische Längengradmessung in 52 Grad Breite von Greenwich bis Warschau. II 788
Krüger, R. Beiträge zum mathematischen Unterricht 478
Krüger, Rich. Graphische Pläne zur Ermittelung der Höhen schmiedeeiserner Träger und Holzbalken 696
Krüger, S. Ellipsoïdale evenwichtsvormen eener wentelende homogene vloeistofmassa 599
Kuenen, J. P. Invloed van de zwaartekracht op de kritische verschijnselen van enkelvoudige stoffen en van mengsels 765
Künssberg, H. Zum Andenken an Ludwig Ofterdinger 26
Küpper, C. 1) Projective Erzeugung der Curven m^{ter} Ordnung C^m . 443
2) Ueber k-gonale Curven C_p^n n^{ter} Ordnung vom Geschlechte p . 469
3) Beziehungen zwischen polygonalen und Raumcurven 469
4) Nachtrag zu den k-gonalen Curven 469
5) Die ultraelliptischen Curven C_p^n, $p > 1$ 469
Kuhn, K. 1) Lehrbuch der Elementar-Arithmetik. 1. 125
2) Lehrbuch der Stereometrie 389
Kuhn, M. Unmittelbare und sinngemässe Aufstellung der „Energie" als mechanischen Hauptbegriffes 674
Kummell, Ch. H. To express the roots of the solvable quantics as symmetrical functions of homologues 67
Kurz, A. 1) Die Wasserwellen 651
2) Kraftwirkung eines Magnets auf einen anderen 744
3) Potentielle Energie eines Magnets 744
4) Potential einer magnetischen Kugel 744
5) Die magnetische Induction 744
6) Solenoid, Ring- und Kugelspirale 744
7) Adiabatische Ausdehnung realer Gase 764
8) Erwärmung flüssiger und fester Körper durch Druck 770
Kusch, E. C. G. J. Jacobi und Helmholtz auf dem Gymnasium . . 20
Kutta, M. Geometrie mit constanter Zirkelöffnung im Altertum . . 35

Lachlan, R. On the double foci of a bicircular quartic and the nodal focal curves of a cyclide 492
Lacour, E. Décomposition en facteurs de la fonction $\Theta[u^{(i)}(z)-G_i]$ 345
Längst, H. Kegelschnitte. 2. Teil 486
Laffaille, J. La science des chiffres 126
Lagrange, Ch. 1) Démonstration du théorème de Bernoulli . . . 182
2) Moindres carrés 182
3) Solution du problème universel de Wronski 264
4) Sur les équations du champ physique. III, IV 677
5) Détermination des parallaxes par des observations continues . 806
6) Théorèmes de Mécanique céleste indépendants de la loi de l'attraction 806
Laisant, C. A. 1) Sur les méthodes d'approximation dans les équations algébriques 72
2) Propriétés des coefficients du binôme 113



Seite
Laisant, C. A. 3) Identités relatives à des polynômes entiers . . 115
4) Recueil de problèmes de mathématiques. Géométrie du triangle 386
Lallemand, Ch. 1) Sur l'erreur de réfraction dans le nivellement . 789
2) Erreurs systématiques dans les nivellements de précision . . . 790
3) Sur la stabilité des piquets employés comme repères provisoires dans les nivellements de précision 790
Lamotte. Planimètre de M. Petersen 821
Lampe, E. 1) Nachruf für Julius Worpitzky 23
2) Note on question 992 496
3) Ueber Körper grösster Anziehung 664
Lanchester, F. W. The radial cursor 820
Land, R. Einfache Ableitung der Euler'schen Knickformel 690
Landsberg, G. 1) Fundamentalsysteme und bilineare Formen . . . 80
2) Fundamentalsystem und Discriminante der Gattungen algebraischer Zahlen, welche aus Wurzelgrössen gebildet sind 159
Lang, P. Krümmungsverhältnisse der drei Scharen von Flächen zweiten Grades, die mit einem Ellipsoide confocal sind 528
Lange. Ein elementarer Beweis des Reciprocitätssatzes 143
Langley, E. M. Sur quelques identités trigonométriques 405
de Lannoy, G. Précis de cosmographie et de navigation 806
Lanson, G. L'influence de Descartes sur la littérature française . 9
Lapointe, G. Extension d'une propriété de l'hyperbole équilatère 529
Laporte, M. Simple contribution à l'étude des fonctions additives 330
Larmor, J. 1) On the geometrical method 55
2) Period of the Earth's free Eulerian precession 687
3) Absolute minimum of optical deviation by a prism 718
4) A dynamical theory of the electric and luminiferous medium. Part. II. Theory of electrons 737
Larose. Démonstration du théorème de M. Vaschy sur une distribution quelconque de vecteur 320
Lasswitz, K. Gustav Theodor Fechner 17
Latoon, F. On common and perfect magic squares 190
Lauenstein, R. 1) Leitfaden der Mechanik. 2. Aufl. 575
2) Die graphische Statik 596
Laurent, H. 1) Sur les fonctions entières 91
2) Théorie nouvelle de substitutions linéaires 95
Laurent, P. Note sur les fonctions secondaires de dérivation . . . 639
Lauricella, G. 1) Integrazione dell' equazione $\Delta^2(\Delta^2 u) = 0$ in un campo di forma circolare 284
2) Equazioni delle vibrazioni delle placche elastiche incastrate . 688
3) Vibrazioni delle plastre elastiche incastrate 688
Lauscher, W. J. Die Algebraregeln für die mittleren Klassen . . 126
Lauvernay. Résolution de l'équation $a \sin x + b \cos x = c$ 405
Lawrence, F. W. Factorisation of numbers 137
Lazzeri, G. Sopra un problema di strategia navale 496
Léauté, H. Remarques au sujet d'une note de M. Lecornu 630
Lebedew, G. Ueber die ponderomotorische Wirkung der Wellen auf ruhende Resonatoren. II. Hydrodynamische Oscillationsresonatoren 652, 701
Lebon, E. 1) Géométrie élémentaire. 2 vol. 389
2) Géométrie appliquée 417
Léchalas, G. 1) Nature du raisonnement mathématique 48
2) Étude sur l'espace et le temps 49
3) Note sur la réversibilité du monde matériel 49
4) Identité des plans de Riemann et des sphères d'Euclide 375
5) Note sur la géométrie non-euclidienne 379
6) La courbure et la distance en géométrie générale 379

Seite
Le Chatelier, H. Particularités des courbes de solubilité 682
Le Conte Stevens, W. Recent progress in optics 38
Lecornu, L. 1) Sur l'équilibre d'une enveloppe ellipsoïdale 590
2) Sur le pendule de longueur brusquement variable 618
3) Sur un mode nouveau de régulation des moteurs 630
4) Sur la régulation des moteurs 630
5) Sur l'équilibre d'élasticité d'un corps tournant 686
Lee, J. J. Theory of the determination, by means of a single spectroscopic observation, of the absolute dimension, masses and parallaxes of stellar systems 801
Lees, W. Acoustics. Sound (advanced). Enlarged edition 701
Lefevre, A. Number and its algebra 126
Lefèvre, L. 1) Construction de l'intersection de deux quadriques de révolution dont les axes se rencontrent 418
2) Sur les coordonnées polaires 465
Leflaive, J. 1) Etude de la stabilité des navires par la méthode des petits modèles 598
2) Étude théorique sur la plongée des sous-marins 598
Legoux. Sur le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe 623
Lehmann, O. Dr. Joh. Müller's Grundriss der Physik 672
Lehmann, P. Die Erde und der Mond 806
Lehmann-Filhès, R. Ueber den Artikel von Lee in Astr. Nachr. 3314 801
Lehmer, D. N. Proof of a theorem in continued fractions 168
Leinekugel, G. 1) Sur deux problèmes de géométrie que l'on peut avoir à résoudre dans un levé hydrographique 493
2) Surface remarquable du quatrième ordre 532
Lemaire, Ed. 1) Séries entières à plusieurs variables indépendantes 201
2) Solution d'une question 484
Lémeray, E. M. 1) Convergence des substitutions uniformes . . . 70
2) Sur les racines de l'équation $x = a^x$ 72
3) Sur la dérivée des fonctions interpolées 224
4) Sur les fonctions itératives et sur une nouvelle fonction . . . 311
5) Interprétation des formules de Fresnel sur la réflexion et la réfraction vitreuses de la lumière polarisée 711
Lemoine, É. 1) Lettre à M. G. de Longchamps 401
2) Mélanges sur la géométrie du triangle 401
3) Solutions de questions 401, 494
4) Lettre adressée à M. G. de Longchamps 405
5) Sur l'équation $a \sin x + b \cos x = c$ 405
Lemoine, J. Vérification de la loi de Kerr. Mesures absolues . . 739
Lengauer, J. Die Grundlehren der Stereometrie 384
Leonhardt, G. Zwiespalt auf elementargeometrischem Gebiete . . 393
León y Ortiz, E. Tablas logarítmicas de adición y sustracción . 331
Leray. Sur la nature de l'espace 376
Lerch, M. 1) Sur un théorème de Zolotarev 141
2) Ueber einen arithmetischen Satz von Zolotarev 141
3) Sur diverses formules d'arithmétique 159
4) Transformation abélienne des séries trigonométriques 202
5) Abel'sche Transformation trigonometrischer Reihen 203
6) Ueber eine Gattung semiconvergenter Entwickelungen 207
7) Sur une espèce de séries semiconvergentes 207
8) Betrachtungen über einige Fragen der Integralrechnung 233
9) Verschiedenes über die Gammafunction 333
Le Roux, J. Sur une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre 279
Leroy, C. F. A. Traité de géométrie descriptive 418
Le Roy, E. 1) Sur la méthode mathématique 48

Seite

Le Roy, É. 2) Sur l'idée de nombre 49
3) Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires et du second ordre à caractéristiques imaginaires 276
4) Sur le problème de Dirichlet et les fonctions harmoniques fondamentales attachées à une surface fermée 319
5) Sur le problème des membranes vibrantes 689
Levavasseur, R. Sur les groupes d'opérations 105
Levi, A. Sulle singolarità della jacobiana di quattro superficie . . 516
Levi-Civita, T. 1) Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche . 603
2) Sugli integrali algebrici delle equazioni dinamiche 604
3) Sul moto di un sistema di punti materiali soggetti a resistenze proporzionali alle rispettive velocità 608
4) Moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso 619
5) Sul moto dei sistemi con tre gradi di libertà 620
Lévy, L. 1) Sur la question 393 382
2) Systèmes de surfaces triplement orthogonaux 504
Lévy, Maurice. Notice sur Amé-Henry Resal 26
Lévy Salvador, P. Hydraulique agricole. I 656
Leyssenne, P. Choix de problèmes de mathématiques 126
Leyst, E. Zur Frage über Spiegelung des Regenbogens 813
Lez, H. Foyers des sections coniques en coordonnées trilinéaires . 480
Liapounoff, A. Sur une série relative à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques 252
Libicky, A. Grundlagen der Grassmann'schen geometrischen Rechnungsweise 462
Lie, S. 1) Zur allgemeinen Transformationstheorie. I. Ueber Differentialgleichungen, die eine continuirliche Gruppe gestatten . . 238
2) Zur allgemeinen Transformationstheorie. II. Einige Bemerkungen über Pfaff'sche Ausdrücke und Gleichungen 268
3) Zur allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. Polnisch von K. Zorawski 286
4) Zur Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen 290
5) Theorie der Translationsflächen und Abel'sches Theorem . . . 326
6) Geometrie der Berührungstransformationen. Dargestellt von S. Lie und G. Scheffers. I 547
7) Infinitesimale Berührungstransformationen der Optik 703
Lieber, H. Isogonische und isodynamische Punkte des Dreiecks . 401
Liebmann, H. 1) Fläche zweiten Grades aus neun Punkten . . . 445
2) Ueber die ebenen Curven 4. O. vom Geschlechte 1 490
Ligowski, W. Sammlung fünfstelliger Tafeln 822
v. Lilienthal, R. Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenscharen 503
Limb, C. Mesure directe des forces électromotrices en unités absolues électromagnétiques 726
Lindelöf, E. Sur les équations homogènes 273
Lindemann, F. 1) Zur Geschichte der Polyeder und der Zahlzeichen 30
2) Ueber die linearen Transformationen einer quadratischen Mannigfaltigkeit in sich 81
3) Analytische Fortsetzung derjenigen Functionen, welche das Innere eines Kegelschnitts conform auf die Halbebene abbilden 320
Ling, G. H. 1) On the solution of a certain differential equation . 291
2) On the solution of a certain differential equation which presents itself in Laplace's kinetic theory of tides 653
Liouville, R. 1) Sur la rotation des solides et le principe de Maxwell 621
2) Mouvement d'un solide dans un liquide indéfini 649

Seite

Lippmann, G. Entretien du mouvement du pendule sans perturbations . . . 616
Frau Litwinowa, E. Aus dem Gebiete der höheren Arithmetik . . 297
de la Llave y Garcia, J. Problemas de balistica aplicados a la fortificación y a la tactica . . . 642
Lock, J. B. Trigonometry for beginners. By J. A. Miller 390
Lodge, O. J. 1) Elementary mechanics. New edition 575
2) The pound as a force . . . 575
3) Elementary teaching concerning focal lengths . . . 718
4) Neueste Anschauungen über Elektricität . . . 756
Ritter v. Loessl, Fr. Die Luftwiderstands-Gesetze, der Fall durch die Luft und der Vogelflug . . . 633
Löwe, M. Zahlenrechnen an der sächsischen Realschule 53
Löwenberg, G. Lehrbuch der Mathematik . . . 119
Loewy, A. 1) Transformationen einer quadratischen Form in sich selbst 83
2) Zur Theorie der linearen Substitutionen . . . 87
3) Bemerkungen zur Theorie der conjugirten Transformation einer bilinearen Form in sich selbst . . . 88
4) Sur les formes quadratiques définies à indéterminées conjuguées de M. Hermite . . . 106
Lognon. Généralisation de la formule de Wilson . . . 140
London, Fr. Constructionen dritten und vierten Grades mittelst der geraden Linie und einer festen Curve dritter Ordnung 438
Loney, S. L. Plane trigonometry . . . 390
de Longchamps, G. 1) Deux problèmes de géométrie infinitésimale 466
2) Le problème de la duplication du cube . . . 485
3) École Polytechnique. Concours de 1896 . . . 533
Loos, W. Grundprobleme der projectiven Geometrie . . . 432
Lorentz, H. A. 1) Eene algemeene stelling omtrent de beweging eener vloeistof met wrijving . . . 645
2) Over het theorema van Poynting . . . 731
3) Over de entropie eener gasmassa . . . 774
4) Over het evenwicht der warmtestraling bij dubbelbrekende lichamen . . . 779
Lorenz, L. Oeuvres scientifiques. Revues par H. Valentiner . . . 17
Lorenzoni, G. L'effetto della flessione del pendolo sul tempo della sua oscillazione . . . 616
Loria, G. 1) Un'opera recente sulla storia delle matematiche . . . 1
2) Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche . . 33
3) Matematica. Articolo del Dizionario illustrato di Pedagogia . . 42
4) I poligoni di Steiner nelle cubiche razionali . . . 439
5) Sugli enti geometrici generati da forme fondamentali in corrispondenza algebrica . . . 453
6) I poligoni di Steiner nelle cubiche razionali . . . 486
Loudon, W. J. An elementary treatise on rigid dynamics 567
Love, A. E. H. Examples illustrating Lord Rayleigh's theory of the stability or instability of certain fluid motions . . . 646
Lovett, E. O. 1) On the general projective transformation 425
2) Invariants of curves and surfaces of the second degree by the group of motions and the group of similitude . . . 529
Lucas, E. 1) Récréations mathématiques . . . 190
2) Formulas fundamentales de geometría tricircular y tetraesférica . 406
Ludendorff, H. Tafel zur Berechnung der Störungsfunction für die äussersten kleinen Planeten . . . 799
Lübsen, H. B. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra 59
Lüders, J. Ueber den Kreisprocess der Gasmaschine 772
Lüroth, J. Gemeinsamer Factor zweier binären Formen 89

Seite

Lugli, A. Soluzioni della quistione 250 404
Lugol, P. Aberrations dans les miroirs sphériques 720
del Lungo, C. 1) Sul meccanismo delle forze a distanza 679
2) Sopra la teoria cinetica dei gas 773
Lynn, W. T. Claudius Ptolemy and his work 5

Macdonald, H. M. 1) Waves in canals and on a sloping bank . . 650
2) The electrical distribution induced on an infinite plane disc with a circular hole in it 722
Macé de Lépinay, A. 1) Compléments d'algèbre et notions de géométrie analytique 465
2) Influence de la capillarité sur les pesées hydrostatiques . . . 696
3) Sur les changements de phase par diffraction 706
Mac Gregor, J. G. 1) The hypotheses of abstract dynamics and the question of the number of the elastic constants 572
2) Conductivity of mixtures of electrolytes 725
Mach, E. Die Principien der Wärmelehre 756
Mackay, J. S. Symmedians of a triangle and concomitant circles . 402
Mackenzie, Th. Practical mechanics 576
MacMahon, P. A. Theory of the partition of numbers. Part I . 134
MacMillan, W. G. The electrical resistance of alloys 756
Macnab, S. Trigonometry simplified 390
Macnie, J. Elements of plane geometry. Edited by White 389
Maddison, J. On singular solutions of differential equations of the first order 240
Madsen, W. H. O. Grafisk Lösning af Ligninger 78
Maggi, A. Sull'area delle superficie curve 236
Maillard, S. Extrait d'une lettre 256
Maillet, Ed. 1) Note sur les groupes de substitutions 102
2) Propriétés des groupes de substitutions d'ordre donné 102
3) Décomposition d'un nombre entier en une somme de cubes d'entiers positifs 148
4) Quelques extensions du théorème de Fermat sur les nombres polygones 148
5) Sur une application à l'analyse indéterminée de la théorie des suites récurrentes 148
Majorana, Q. Azione di un raggio luminoso, periodicamente interrotto, sul selenio 727
Mair, D. B. An algebrically complete system of quaternariants . . 78
Makarow, N. Linear-Perspective in der Ebene 418
Malagoli, R. Sugli spostamenti di fase che produce un voltametro percorso da correnti alternanti 723
Mallock, P. Experiments on fluid viscosity 682
Maltézos, C. 1) Sur quelques propriétés des rayons X traversant des milieux pondérables 742
2) Sur les rayons X 742
3) Sur les rayons limites ($X=0$) 742
Maluski, A. Manuel du baccalauréat 387
Mamberg, C. E. Grundtraek af Astronomien 792
Mandic, S. Entwickelung des pythagoreischen Lehrsatzes 392
Mandl, J. Darstellung der scheinbaren Beleuchtung krummer Flächen 413
Maneuvrier, G. Traité élémentaire de mécanique rationnelle et appliquée 576
Mangeot, S. 1) Étude analytique sur la symétrie 477
2) Rapport des deux courbures d'une courbe gauche 501
von Mangoldt, H. Sur le mémoire de Riemann relatif au nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée 153

Seite

Mannheim, A. 1) Solutions de questions 433, 442, 484
2) Détermination en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice 447
3) Sur les surfaces apsidales 449
4) Rapport des deux courbures d'une courbe gauche 501
5) Sur le paraboloïde des huit droites et les nappes de développées de surfaces 505
6) Propriété nouvelle de la surface de l'onde 532

Mannoury, G. Sur une note de M. P. H. Schoute 237

Mansion, P. 1) Notice sur Eugène-Charles Catalan 19
2) J. Graindorge 24
3) Teoría sucinta de las funciones hiperbólicas 331
4) Sur une formule de Newton 332
5) Sur une démonstration du postulatum d'Euclide 374
6) Premiers principes de la métagéométrie 374
7) La géométrie non-euclidienne avant Lobatschefsky 374
8) Note (sur la géométrie non-euclidienne) 375
9) Sur la non-identité du plan riemannien et de la sphère euclidienne 375
10) Une nouvelle forme de la relation entre les distances de cinq points en géométrie non-euclidienne 375
11) Analyse de l'ouvrage de Engel et Stäckel sur l'histoire de la théorie des parallèles 379
12) Question 814 408
13) Réponse à M. Vicaire 571

De Mantel. Le leggi dell'interesse 190

Marchand, E. Nouvelle théorie des pompes centrifuges 656

de Marchi, L. The temperature of air and the problem of an ice age 811

Marcolongo, R. 1) Sulla equazione $\Delta_2 U + k^2 U = 0$ in uno spazio di n dimensioni 285
2) Sur une propriété de deux mouvements à la Poinsot concordants . 624
3) Sur un cas particulier du mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini 649

Margules, M. Zusammensetzung gesättigter Dämpfe von Mischungen 769

Mariantoni, F. Nota sulle relazioni che intercedono tra i multirapporti di due n-uple di elementi 432

Markow, A. A. 1) Neue Anwendungen der Kettenbrüche 174
2) Nouvelles applications des fractions continues 176
3) Sur l'équation de Lamé 252
4) Ueber eine Differentialgleichung 256
5) Differenzenrechnung 261
6) Neue Theoreme zu den analytischen Functionen 329
7) Ueber die Nullwerte der ganzen Functionen von Hermite und der Functionen von Lamé 334

Marotta, G. Elementi di aritmetica 126

Marotte, F. 1) Application de la théorie des groupes continus à l'étude des points singuliers des équations différentielles linéaires 240
2) Sur les singularités des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre 273

Marrecas Ferreira, L. F. Estudo sobre o planimetro de Amsler 238

Martin, A. 1) Square numbers whose sum is a square 147
2) Biquadrate numbers whose sum is a biquadrate 147
3) Cube numbers whose sum is a cube number. II 147

Martinetti, V. Un osservazione relativa alla configurazione di Kummer 381

Martini-Zuccagni, A. Lezioni di aritmetica teorica 126

Martuscelli. F. Complementi d'algebra 126



Seite

Marx, J. C. Over de ontbinding in priemfuncties van geheele transcendentale functies 324
Maschke, H. 1) Mathematical papers read at the mathem. congress in Chicago 27
2) The representation of finite groups by Cayley's color diagrams . 105
3) Ueber die Darstellung endlicher Gruppen durch Cayley'sche Farbendiagramme 105
4) Six points lying in three ways in involution 475
Masi, F. La teoria dei meccanismi 582
Massau, J. Cours de mécanique. Tome II. 568
Massini, P. Sistemi di linee di una superficie lossodromici 514
Massny, W. Ueber ebene Curven, die bei circularer Inversion sich selbst zugeordnet sind 559
Mata y Maneja, O. Tratado di balistica interior 642
Mathews, G. B. 1) Representation of a number as a sum of squares 147
2) The division of the lemniscate 354
3) A geometrical locus 529
Mathieu. Méthodes de division à la fin du siècle dernier 31
Mathy, E. 1) Expression des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur 658
2) Calcul des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur 659
Matthiessen, L. Grundzüge der antiken und modernen Algebra . 59
Matz. Solutions of questions 341, 494
Maurain, Ch. Les courants polyphasés et les champs tournants. . 723
Maurer, L. Mittelwerte der Functionen einer reellen Variabeln . . 299
Maurolico, F. Commemorazione del 4⁰ centenario 6
Maxwell, J. C. 1) Análisis armonico 329
2) Ueber Faraday's Kraftlinien (1855). Hrsg. von L. Boltzmann . 823
Mayer, A. 1) Die Kriterien des Minimums einfacher Integrale bei variabeln Grenzwerten 291
2) Existenzbedingungen eines kinetischen Potentiales 599
Mayer, J. 1) Grundrechnungsarten mit periodischen Decimalbrüchen 122
2) Zu Kessler's „Periodlänge“ unendlicher Decimalbrüche 142
Mayo, C. H. P. Elementary algebra 127
Mayor, B. Sur les forces de l'espace et les conditions d'équilibre d'une classe de systèmes déformables 584
Mazzola, G. Nuova teoria delle approssimazioni aritmetiche . . . 123
McAulay, Alex. „Octonions“ 59
McLellan, J. A. The psychology of number. 55
McMahon, J. Notes on the expression for a velocity-potential in terms of functions of Laplace and Bessel 698
Medeiros, J. C. O ponto $\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$ relativamente aos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) 479
Meder, A. Einige Arten singulärer Punkte von Raumcurven . . . 501
de Medici, C. Medici's rational mathematics 389
Meigen, F. 1) Lehrbuch der Geometrie 384
2) Lehrbuch der Trigonometrie 384
Meissner, G. Hydraulik. II 656
Van der Mensbrugghe, G. Note sur les nombreux effets de l'élasticité des fluides 697
Méray, Ch. Nouveaux exemples d'interpolations illusoires. 204
Merriman, M. Higher mathematics 218
Mertens, F. 1) Ueber die Gaussischen Summen 144
2) Ueber die Transcendenz der Zahlen e und π 329

Seite

Mestschersky, J. V. Bemerkungen über ein System kanonischer Gleichungen von W. G. Imschenetzky und über „analytische Kräfte“ von Lecornu 271
Metzler, G. F. Equations and variables associated with the linear differential equation 245
Mewes, R. 1) Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwerkraftstrahlen 680
2) Die elementare Physik des Aethers 684
Meyer, A. Ueber indefinite ternäre quadratische Formen 167
Meyer, Fr. 1) Stand der Invariantentheorie. Polnisch von S. Dickstein 32
2) Rapport sur les progrès de la théorie des invariants 32
3) Stato presente della teoria degli invarianti 32
Meyer, Lothar. Die Atome und ihre Eigenschaften 674
Meyers, W. J. Manual of the straight line and the circle 389
Michaut, A. Matériel de campagne pour l'artillerie suisse 641
Michel, Ch. 1) Le déterminant symétrique gauche d'ordre pair . . 110
2) Courbe d'ombre sur une surface du 4e ordre 413
3) Sur l'involution généralisée 425
4) Théorie géométrique des quadriques homofocales 446
5) Courbes unicursales du 2e et du 3e ordre 481
6) École Centrale (1re Session 1895). Solution 481
Michelson, A. A. The theory of the X-rays 742
Mildner, R. Ueber einige allgemeinere, durch einfache und Doppelintegrale ausdrückbare unendliche Reihen und Producte 213
Milinowski, A. Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte 437
Miller, G. A. 1) List of transitive substitution groups of degree 12 97
2) The regular substitution groups whose order is less than 48 . 97
3) On several theorems on operation groups 98
4) On the lists of all the substitution groups that can be formed with a given number of elements 98
5) The substitution groups whose order is the product of two unequal prime numbers 98
6) Sur les groupes de substitutions (2 Noten) 99
7) The non-regular transitive substitution groups whose order is the cube of any prime number 99
8) The substitution groups whose order is four 99
9) The operation groups of order $8p$ 100
Miller, W. J. C. Solutions of questions 181, 482
Millosevich, E. Aurelio Lugli † 25
Milne, J. J. The conics of Apollonius 437
Minchin, G. M. A treatise on statics with applications to physics. I 576
Minkowski, H. 1) Geometrie der Zahlen. Lfg. 1 127
2) Sur les propriétés des nombres entiers qui sont dérivées de l'intuition de l'espace 133
3) Généralisation de la théorie des fractions continues 170
Mischpeter, E. Behandlung des Trägheitsmoments in der Schule . 593
Mitcheson, T. 1) Examples in algebra 126
2) Answers to the examples in algebra 126
Mlodziewsky, B. Der Apparat von Prof. Mehmke für die Auflösung der Gleichungen höherer Grade 72
von Močnik, F. Geometrische Anschauungslehre 391
Modè, G. Proprietà del dodecaedro e dell' icosaedro 408
Möller, M. 1) Zu dem Artikel von E. Herrmann, „Erhaltung der Fläche“ 602
2) Ein Beitrag zur Berechnung der Wellen und der Ebbe und Flutbewegung des Wassers 656
3) Die zur Erzeugung eines Wirbels erforderliche motorische Kraft 813



Seite
Möller, P. Zur Berechnung der Schwimmdocks 599
Mohr. Beitrag zur Geometrie der Massen 595
Molenbroek, P. Leerboek der Meetkunde. I: Planimetrie . . . 389
Molk, Jules. Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. II 335
Mollame, V. Le equazioni cubiche con radici reali 66
Mondiet, O. Cours élémentaire de mécanique 576
Monetti, F. Il triangulo sferico 406
Montet, F. Esquisse d'une étude analytique des courbes 467
Moore, E. H. 1) Mathematical papers read at the mathematical congress in Chicago 27
2) A doubly-infinite system of simple groups 104
3) A two-fold generalization of Fermat's theorem 139
4) Concerning transcendentally transcendental functions 307
5) Tactical memoranda I—III 472
Morawitz, J. Zur analytischen Geometrie des Punktes und der Geraden 486
Morera, G. 1) Dimostrazione di una formola di calcolo integrale . 228
2) Sopra una formola di calcolo integrale 228
3) Sull'espressione analitica del principio di Huygens 703
Morley, F. Common tangents of two similar cycloidal curves . . . 817
Mortara, E. 1) Osservazioni critiche circa il calcolo delle probabilità 180
2) Sviluppo e costruzione dei solidi geometrici 392
3) Osservazione sul principio delle aree 603
Mortet, V. siehe Epaphroditus et Vitruvius 35
Morton, W. B. Electromagnetic theory of moving charges 733
Mouret, G. L'entropie, sa mesure et ses variations 772
van Mourik, P. Bijdrage tot de theorie van de vector-potentiaal . 731
Müller, Chr. F. Henricus Grammateus und sein Algorismus . . . 31
Müller, E. Die Geometrie der Punktepaare und Kreise im Raume nach Grassmann'schen Principien 377
Müller, Hubert. Die Lehrpläne von 1892 51
Müller, J. Die sieben arithmetischen Operationen 120
Müller, Reinh. Ueber die doppelpunktige Focalcurve 490
Müller, W. Transformationstheorie der Monge-Ampère'schen Differentialgleichungen 285
Müller-Bertossa, J. A. Anleitung zum Rechnen mit dem logarithmischen Rechenschieber 822
Müller-Breslau, H. F. B. Graphische Statik der Bauconstructionen 596
Münter. Antwort auf die Kritik Seite 570 des vor. Jahrganges . . 624
Muir, Th. On the eliminant of a set of ternary quadrics 91
Muirhead, R. F. 1) On deducing the properties of the trigonometrical functions from their addition equations 331
2) On superposition by the act of dissection 392
3) On the number and nature of the solutions of the Apollonian contact problem 399

Nachtikal, F. Zwei arithmetische Sätze 139
Naetsch, E. Untersuchungen über die Reduction und Integration von Picard'schen Differentialgleichungen 250
Nagaoka, H. Aussenwirkung magnetisirter Rotationsellipsoide . . 744
Nagel, A. Grundlehren der Methode der kleinsten Quadrate 784
Nager, J. Einige merkwürdige Punkte des Kreisvierecks 403
Nagy, A. Alcuni teoremi intorno alle funzioni logiche 46
Nanson, E. J. 1) Transformation of a series 206
2) Hessian of an implicit function 224
3) Change of independent variables in the Hessian 224

Seite

Nanson, E. J. 4) Conditions for maximum or minimum of stationary value of a function of any number of variables 226
5) On the condition that a quadric may be of invariable sign when the variables are connected by given linear relations 226
6) Conditions that a quadric may be one-signal 227
7) On certain definite integrals, single and multiple 235
8) The content of the common self-conjugate n-gon of two n-ary quadrics 541
9) The period-equation of a constrained system oscillating about a position of equilibrium 609
Nash. Solution of a question 367
Nasimow, P. S. 1) Halphen's „Traité des fonctions elliptiques" . . 342
2) Definition der Ebene bei Lobatschefsky 373
Natorp, P. Le développement de la pensée de Descartes 9
Nekrassow, P. A. 1) Leben und wissenschaftliche Thätigkeit von W. G. Imschenetzky 19
2) Theorie der Wahrscheinlichkeiten 180
3) Imschenetzky's Regel zur Auffindung der algebraischen rationalen Integrale einer linearen Differentialgleichung 258
4) Methode von P. Ermakow zur Auffindung der rationalen Integrale der linearen Differentialgleichung 258
5) Zur Bemerkung von W. G. Imschenetzky über partielle Differentialgleichungen 271
6) Simultane kanonische Differentialgleichungen, welche mit gewissen complexen Grössen zusammenhängen 271
7) Zur Abhandlung über simultane kanonische Differentialgleichungen etc. 271
8) Einige Gleichungen der Dynamik, welche mit Hülfe der Methode der complexen Grössen integrirt werden können 271
9) Algebraische Methode der Auflösung der geometrischen Constructionsaufgaben 386
10) Einige dynamische Gleichungen, welche vermittelst der Methode complexer Grössen integrirt werden können 609
11) Recherches analytiques sur un cas de rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe 620
Nelson, R. Methodisches zum Unterricht in der Arithmetik 52
Neppi-Modona, A. Questioni e formule di geometria analitica . 465
Nernst, W. Ueber Berührungselektricität 722
Nestler, O. Geometrische Elemente bis zu den Parallelen 377
Netto, E. 1) Die arithmetisch-algebraischen Tendenzen Kronecker's 32
2) Vorlesungen über Algebra. 1. 58
3) Irreductibilität ganzzahliger ganzer Functionen 64
4) Zur Theorie der Resultanten (nebst Nachtrag) 89
5) Analogon zu den Euler'schen Interpolationsformeln 205
Neuberg, J. 1) J. Graindorge 24
2) Sur une suite récurrente 209
3) Sobra una serie recurrente 209
4) Note sur un article de M. Brocard 402
5) Solutions de questions 403, 479
6) Sur un système de coniques 434
Neuffer. Behandlung der geometrischen Oerter im Elementarunterricht der analytischen Geometrie 478
Neumann, C. 1) Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen 658
2) Ueber die elektrodynamischen Elementarwirkungen 728
Neumann, E. Beiträge zur Elektrostatik 721

Seite

Neumann, F. E. Theorie der doppelten Strahlenbrechung. Hrsg. von A. Wangerin 704
Neumann, M. Zur Zerlegung ungerader Zahlen in Factoren . . . 138
Newcomb, S. The influence of atmospheric and oceanic currents upon terrestrial latitudes 628
Newson, H. B. 1) On a remarkable covariant of a system of quantics 78
2) The Hessian, Jacobian, Steinerian in geometry of one dimension 467
3) Continuous groups of projective transformations treated synthetically 556
4) Notes to the article on continuous groups 556
Niccoletti, O. Sulla trasformazione delle equazioni lineari omogenee alle derivate parziali del secondo ordine 276
Nichols, E. H. Elementary and constructional geometry 389
Nicholson, J. W. Elements of the differential and integral calculus 223
Nicodemi, R. Rigate gobbe di quarto grado nella congruenza delle normali ad una quadrica 531
Nielsen, N. 1) En Determinantformel 111
2) En Egenskab ved Talraekken 140
3) Sur la sommation de quelques séries 208
4) Summation of nogle elementaere Raekker 208
5) Sur la transformation d'une intégrale définie 232
6) Om Definitioner for Lie—x 330
Niesten, L. 1) La planète Mars pendant l'opposition de 1879 à 1880 807
2) La planète Mars pendant l'opposition de 1881—1882 807
3) Les plans planétaires et l'équateur solaire 807
Nieuwenhuyzen Krusemann, J. La propagation du son d'après la théorie cinétique des fluides élastiques 701
Niewenglowski, B. Cours de géométrie analytique. Tome III . . 459
Noble, Ch. A. Lösung der Randwertaufgabe für eine ebene Randcurve mit stückweise stetig sich ändernder Tangente 320
Noether, M. Gemeinsamer Factor zweier binären Formen 89
Nordmann, M. Zur Behandlung innerer Kräfte im physikalischen Unterricht der Prima 619
Norman, A. W. Death duty tables 190
Norrenberg. Zur indirecten Beweisführung 55
Novotny, J. Geometrische Uebungen 478
Noyer, A. Sur l'involution généralisée 425
Nüsslein, T. Ueber die ebenen Configurationen 9_3 382
Nyland, A. A. Over een bijzondere soort van geheele functiën . . 332

Obejero, A. B. Sur les triangles équipotentiels 398
Oberbeck, H. Taschenbuch zum Abstecken von Kreisbögen . . . 791
d'Ocagne, M. 1) Sur les équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés 73
2) Théorème relatif aux abaques 73
3) Sur l'emploi des systèmes réguliers de points cotés pour la représentation des équations 73
4) Sur la représentation nomographique des équations du second degré à trois variables 73
5) Géométrie descriptive et infinitésimale 411
6) Sur l'ombre propre des polyèdres 412
7) Segments de coniques limités à une normale 482
8) Note au sujet de la question 470 482
9) Correspondance 485
10) Sur les cordes normales de la parabole 485
11) Signe de la torsion des courbes gauches 502

Seite

d'Ocagne, M. 12) Application générale de la nomographie au calcul des profils de remblai et déblai 596
13) Abaque de l'équation des marées diurnes et semidiurnes . . . 653
14) Principes de la machine à résoudre les équations de M. Leonardo Torres 820
Oekinghaus, E. 1) Die Hyperbel als ballistische Curve (Schluss) . 638
2) Die ballistischen Leistungen des schweizerischen Gewehres Modell 1889 638
3) Schallgeschwindigkeit beim scharfen Schuss 638
4) Erwiderung auf Dr. Sprung's Aufsatz betreffend „die Ablenkung der Geschosse durch die Erdrotation" 640
5) Zur Theorie der Anticyklonen 812
von Oettingen, A. J. 1) s. J. Steiner 418
2) s. M. Faraday 755
Olsson, K. G. 1) Berechnung der Planetenstörungen im Falle einer genäherten Commensurabilität der mittleren Bewegungen . . . 797
2) Ueber eine neue Form der Störungen höherer Ordnung in Hansen's Theorie für die kleinen Planeten 797
3) Ueber die Integration der Ungleichheiten langer Periode in der Planetentheorie 797
4) Zur Methode, Planetenstörungen gruppenweise zu berechnen . . 798
5) Formeln für eine erste Verbesserung des kleinen Divisors in Commensurabilitätsfällen 798
Oltramare, G. 1) Note sur l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos yx}{(a^2+b^2x^2)^n}\,dx$ 236
2) Intégration des équations linéaires aux différences mêlées à coefficients constants 263
3) Sur le nombre des fonctions arbitraires qui entrent dans l'intégrale complète des équations linéaires aux différentielles ou aux différences partielles à coefficients constants 286
Oosting, H. J. Graphische Darstellungen aus der Elektricitätslehre 756
Oppenheimer, H. Doppelpunkte der algebraischen Curven 474
Osborn, G. Addendum on the quadratic residues of primes . . . 165
Osgood, W. F. 1) Ueber die ungleichmässige Convergenz und die gliedweise Integration der Reihen 193
2) A geometrical method for the treatment of uniform convergence and certain double limits 194
3) Zur Differentiation des bestimmten Integrales nach einem Parameter 231
4) Some points in the elements of the theory of functions 301
5) A geometric proof of a fundamental theorem concerning unicursal curves 816
Osnos, M. Ermittelung der „Ueberschuss"-Arbeit bei Bestimmung des Ungleichförmigkeitsgrades von Maschinen mit Kurbelmechanismus 630
Ostwald, W. 1) Zur Energetik 758
2) Die Ueberwindung des wissenschaftlichen Materialismus 759
Ottini. Costruzione e misurazione dei solidi geometrici 391
Otto, F. O. Ein Attractionsproblem 610
d'Ovidio, E. Geometria analitica 457

Pacioli, L. Divina proportione. Uebersetzt von C. Winterberg . 6
Paczowski, J. Ueber Differentialgleichungen, welche infinitesimale Transformationen gestatten 286
Padoa, A. Di alcune proposizioni fondamentali relative al mutuo separarsi di coppie di punti 425



Seite

Paetsch, H. Ueber die Unsicherheit einer Bahnbestimmung der kleinen Planeten aus vier Beobachtungen 800
Page, J. M. Note on singular solutions 240
Painlevé, P. 1) Sur les équations différentielles du premier ordre . 247
2) Sur les équations différentielles du premier ordre. Réponse à M. Korkine 248
3) Inversion des systèmes de différentielles totales 310
4) Sur les fonctions uniformes définies par l'inversion de différentielles totales 311
5) Transformations biuniformes des surfaces algébriques 560
6) Transformations des équations de la dynamique 607
7) Singularités des équations de la dynamique 607
8) Sur les singularités des équations de la dynamique et sur le problème des trois corps 608
Paloque, J. Étude sur la bicyclette 642
Papelier, G. Note sur les équations linéaires 529
Papperitz, E. Lehrbuch der darstellenden Geometrie 409
Pardini, D. L. Formulario di geometria. 2da edizione 389
Parenty, H. Sur le débit des gaz parfaits et de la vapeur d'eau sous pression à travers les orifices 772
Pascal, E. 1) I determinanti, teoria ed applicazioni 107
2) Relazioni fra i determinanti di una matrice rettangolare 108
3) Relazioni fra i determinanti formati coi medesimi elementi . . . 108
4) Un teorema del sig. Netto relativo ai determinanti 108
5) Infinitesimalrechnung. Polnisch von Dickstein 223
6) Funzioni olomorfe nel campo ellittico 313
7) Sopra due relazioni rimarchevoli fra i valori delle derivate delle funzioni ϑ ellittiche per argomento zero 346
8) Sulla ricerca del secondo termine dello sviluppo in serie delle funzioni sigma abeliane pari di genere tre 363
Pasch, M. Zur projectiven Geometrie 420
Pasquier, E. Solutions multiples du problème des comètes . . . 802
Patrassi, P. Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche . . 354
Pauli, R. Der erste und zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie 763
Peano, G. 1) Saggio di calcolo geometrico 464
2) Sul pendolo di lunghezza variabile 617
3) Sul moto del polo terrestre 628
Pearson, K. Contributions to the mathematical theory of evolution 185
Peirce, B. O. On a certain class of equipotential surfaces 283
Pellat, H. Électrostatique non fondée sur les lois de Coulomb . . 722
Pellet, A. Mouvement d'une droite assujettie à quatre conditions . 527
Pennacchietti, G. Sui parametri differenziali 227
Pepin. Formes linéaires des diviseurs de $x^2 \pm A$ 145
Péreire, E. Tables de l'intérêt composé des annuités 190
Perna, A. Sulla derivabilità reciproca per polare di due funzioni delle stesse serie di variabili 226
Perry, J. The force of one pound 575
Person, B. Zur Bestimmung des Umfanges und der Fläche des Kreises mit Hülfe des Zirkels und Lineals 821
Petersen, J. 1) Methoder og Theorier 392
2) Geometriske Opgaver til Skolebrug 392
Petrovitch, M. 1) Un problème sur les séries 200
2) Décomposition des intégrales définies en éléments simples . . . 231
3) Remarques algébriques sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre 246
4) Sur une équation différentielle du premier ordre 248

Seite
Petrovitch, M. 5) Sur l'équation différentielle de Riccati 256
6) Résidus des fonctions définies par les équations différentielles . 308
7) Sur les fonctions symétriques et périodiques des diverses déterminations d'une fonction algébrique 323
8) Remarques sur les équations de dynamique et sur le mouvement tautochrone 614
Pettee, G. D. Plane geometry 389
del Pezzo, P. 1) Una trasformazione cremoniana fra spazi a quattro dimensioni 540
2) Le trasformazioni coniche dello spazio 560
Pflieger, W. Elemente der Arithmetik 120
Pflüger, J. Tratado de estatica grafica 596
Phillips, A. W. 1) Hubert Anson Newton 25
2) Elements of geometry 389
Phragmén, E. Sur la théorie des élections multiples 188
Picard, É. 1) Traité d'analyse. Tome III 214
2) Sur l'extension des idées de Galois à la théorie des équations différentielles 239
3) Sur la détermination des intégrales d'une équation aux dérivées partielles par ses valeurs sur un contour fermé 276
4) Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques imaginaires 277
5) Sur une classe de fonctions transcendantes 308
6) Remarques sur une communication de M. Borel 321
7) Sur deux invariants nouveaux dans la théorie générale des surfaces algébriques 514
Picart, L. Sur la rotation d'un corps variable 626
Picciatti, G. Sulla trasformazione delle equazioni della dinamica . 605
Pieri, M. 1) Principii che reggono la geometria di posizione . . . 420
2) Un sistema di postulati per la geometria projettiva astratta degli iperspazi 431
3) Sul problema degli spazi secanti 453
Pierpont, J. 1) On the Ruffini-Abelian theorem 63
2) Invariance of the factors of a substitution-group 102
3) Note on C. S. Peirce's paper on „A quincuncial projection of the sphere“ 562
Pietrocola, C. Sui numeri e polinomi di Bernoulli 212
Piltschikow, N. D. Einige Anwendungen des thermodynamischen Potentials auf die elektrochemische Mechanik 724
Pimentel, M. H. Populaire Handleiding voor Rente en Levensverzekerings-Berekningen 190
Pincherle, S. 1) Le operazioni distributive e le omografie 78
2) Algebra elementare. 6a edizione 126
3) Esercizi sull' algebra elementare 126
4) Validità effettiva di alcuni sviluppi in serie di funzioni 302
5) Sopra alcune equazioni simboliche 312
6) Operazioni distributive: l'integrazione successiva 313
7) Operazioni distributive: le equazioni differenziali lineari non omogenee 313
di Pirro, G. 1) Sulle trasformazioni delle equazioni della dinamica 605
2) Integrali primi quadratici delle equazioni della meccanica . . . 606
3) Intégrales quadratiques des équations de la dynamique 606
Pizzetti, P. 1) Sopra un punto della teoria di Laplace relativa alla figura di equilibrio di una massa fluida rotante 598
2) Intorno alla determinazione teorica della gravità alla superficie terrestre 664



Seite

Pizzetti, P. 3) Osservazioni intorno alla Nota del prof. Nobile: „Abbreviazione del calcolo di una linea geodetica“ etc. 785
Planck, M. 1) Ueber elektrische Schwingungen, welche durch Resonanz erregt und durch Strahlung gedämpft werden 734
2) Absorption und Emission elektrischer Wellen 756
3) Gegen die neuere Energetik 757
Pleskot, A. 1) Zur Eliminationstheorie 91
2) Ueber einige goniometrische Formeln 405
Plücker, J. Physikalische Abhandlungen. Hrsg. von Fr. Pockels . 16
Plummer, H. C. A graphical method of solving Kepler's equation 799
Plummer, W. E. Obituary notice of Dr. John Russell Hind . . . 21
Pockels, Fr. 1) s. J. Plücker 16
2) Die durch eine Abhängigkeit der Dielektricitätsconstante von der Feldstärke bedingte optische Wirkung eines elektrischen Feldes 728
Poincaré, H. 1) La vie et les travaux de F. Tisserand 26
2) Sur la nature du raisonnement mathématique 48
3) Le continu mathématique 49
4) Le mécanisme et l'expérience 49
5) Calcul des probabilités 190
6) La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet 316
7) L'espace et la géométrie 379
8) Réponse à quelques critiques 379
9) Sur les solutions périodiques et le principe de la moindre action 608
10) Sur la méthode de Bruns 612
11) Forme nouvelle des équations du problème des trois corps . . 612
12) Sur l'équilibre et les mouvements des mers 652
13) Sur l'équilibre d'un corps élastique 684
14) Observations au sujet d'une communication de M. Jaumann (2 Noten) 741
15) Divergence des séries de la mécanique céleste 795
16) Divergence des séries trigonométriques 795
Pokrowsky, P. M. 1) Die Grundlagen der Lehre von den transcendenten Functionen, welche ein Additionstheorem besitzen . . . 360
2) Additionstheorem der transcendenten Functionen 360
3) Functionen von zwei Argumenten, welche den Weierstrass'schen elliptischen Transcendenten analog sind 360
4) Fonctions ultraelliptiques à deux arguments 360
Ponsot, A. 1) L'influence de la pression dans les changements d'état 682
2) Tension de vapeur d'un corps comprimé par un gaz qu'il dissout 770
Poort, W. A. Een bijzondere klasse van Abel'sche integralen . . 358
Poretsky, P. La loi des racines en logique 46
Portier, B. Le carré diabolique de 9 et son dérivé 179
Poulain, A. Sur une nouvelle définition des perpendiculaires . . . 377
de Prada, A. R. Elementos de matemáticas 389
Preston, Th. Continuity of isothermal transformation from the liquid to the gaseous state 764
Prince, C. L. s. Aratus 40
Pringsheim, A. 1) Die Grundlage der modernen Wertlehre: Daniel Bernoulli, Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung . 185
2) Ueber die sogenannte Grenze und die Grenzgebiete zwischen Convergenz und Divergenz 191
3) Ueber Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Functionen 300
4) Zur Theorie der synektischen Functionen 300
Prochazka, B. Ueber Schnittpunkts-Trajectorien 577

Seite

Prochazka, Fr. 1) Zur Anwendung der Kinematik in der neueren und in der darstellenden Geometrie 415
2) Beitrag zur Photogrammetrie 416
Provost, L. Axe des projections des sections planes du cylindre et du cône 418
Pszeborski, A. G. Ueber die Functionen eines Arguments, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen 341
Puchberger, E. Eine allgemeine Integration der Differentialgleichungen 264
Puchewicz, W. Aproximaciones en el cálculo logarítmico 331
Püning, H. Herleitung des ersten und dritten Kepler'schen Gesetzes 610

van Raay, W. H. L. Janssen. Sur une formule de la géométrie non-euclidienne 375
Radaković, M. Ueber die analytische Darstellung des Zwanges eines materiellen Systemes in allgemeinen Coordinaten 575
Radhakrishnan. Solutions of questions 182, 494
Rados, G. Zur Theorie der adjungirten Substitutionen 110
Radzig, A. A. Die Anwendung des Theorems von Sylow auf die symmetrische Gruppe 105
Raffalli. 1) Sur les commencements de la géométrie 377
2) Démonstration d'un théorème élémentaire 404
3) Sur la surface du biais passé gauche 414
4) Construction du faisceau $ax^2+bxy+cy^2=0$ 479
Raffy, L. 1) Sur la méthode de quadrature de Gauss 238
2) Surfaces rapportées à un réseau conjugué azimutal 498
3) Signe de la torsion des courbes gauches 502
4) Sur deux classes de surfaces analogues aux surfaces tétraédrales 535
Rahusen, A. E. Sur une construction du centre des moindres carrés d'un système de droites 393
Rajola-Pescarini, L. Lezioni di geometria piana. II 389
Rankine, T. T. Complete solutions to papers in mathematics (second stage) 1887—94, science and art examinations. 2nd ed. 823
Rateau, A. 1) Sur la théorie des turbines, pompes et ventilateurs . 654
2) Sur une loi relative à la vapeur d'eau 771
Raveau, C. Vérification du théorème des états correspondants . . 763
Ravené, G. 1) Sulle perturbazioni prodotte dai piccoli pianeti . . 799
2) Ueber die Masse der Planetoiden 802
Rawley, J. S. Practical plane and solid geometry 389
Lord Rayleigh. 1) Stability or instability of certain fluid motions 646
2) Propagation of waves upon the plane surface separating two portions of fluid of different vorticities 646
3) Theoretical considerations respecting the separation of gases by diffusion and similar processes 682
4) The theory of sound. II 701
5) On the theory of optical images, with special reference to the microscope 719
6) The electrical resistance of alloys 756
Razzaboni, A. Sul movimento d'un punto materiale sopra una superficie non levigata 615
del Re, A. 1) Sulla struttura geometrica dello spazio 378
2) Geometria proiettiva ed analitica 432
3) Sulla successiva proiezione di una varietà quadratica su sè stessa 540
Recknagel, G. Ebene Geometrie 389
Reichesberg, N. Der berühmte Statistiker Quetelet 16

Seite

Reiff, R. Neue Deutung der magnetischen Drehung der Polarisationsebene . . . 739
Renner, L. Ueber die Gruppe der 24 Collineationen, durch welche ein ebenes Viereck oder Vierkant in sich selbst übergeht . . . 432
Rethwisch, E. Die Bewegung im Weltenraum . . . 680
Reuschle, C. 1) Abgekürzte algebraische Division . . . 123
2) Geometrische Bedeutung der Partialbruchzerlegung . . . 123
Reye, Th. 1) Beweis einiger Sätze von Chasles über confocale Kegelschnitte . . . 435
2) Ueber quadratische Transformationen und rationale Flächen mit Kegelschnittscharen . . . 558
Reyes Prósper, V. Fórmulas trigonométricas de un ángulo igual á la suma ó diferencia de dos dados . . . 405
Reymann, O. C. Festigkeit und Reibung der Dampfkolben . . . 696
Riboni, G. 1) Elementi di geometria. II ed. . . . 389
2) Osservazioni circa una nota del Ciamberlini . . . 392
Ricci, F. Le condizioni di divisibilità per alcuni numeri . . . 126
Ricci, G. Sistemi di congruenze ortogonali in una varietà . . . 543
Richard, J. 1) Note sur l'intégrale définie . . . 236
2) Sur le mouvement des planètes . . . 611
Richarz, F. Gravitationsconstante und mittlere Dichtigkeit der Erde 665
Richter. Diagramme über die Tragfähigkeit sämtlicher Normal-Profile der I und [-Eisen . . . 695
Riem, J. Ueber die Bahn des grossen Kometen 1881 III . . . 807
Riemann, B. Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée . . . 155
Riquier, Ch. 1) Les axiomes mathématiques . . . 48
2) De l'idée du nombre . . . 49
Ritter, Aug. Lehrbuch der technischen Mechanik . . . 576
Ritter, E. 1) Ueber Riemann'sche Formenscharen auf einem beliebigen algebraischen Gebilde . . . 324
2) Hypergeometrische Function mit einem Nebenpunkt . . . 334
Ritter, F. Viète. Notice sur sa vie et ses oeuvres . . . 7
Rizzi, G. Intorno ai sistemi nodali delle membrane vibranti . . . 689
Roberts, E. H. Note on infinite determinants . . . 112
Roberts, R. A. 1) Centres of similitude of certain pairs of circles . 432
2) On the locus of the foci of conics having double contact with two fixed conics . . . 816
Roberts, W. R. W. On elliptic and hyperelliptic systems of differential equations . . . 340
de Rocquigny-Adanson, G. Les nombres triangulaires . . . 213
Rodenberg. Der Beschleunigungszustand kinematischer Ketten . . 582
Roe, E. D. Trigonometry for schools and colleges . . . 390
Roeder (Kambly). Stereometrie und sphärische Trigonometrie . . 388
Rogel, Fr. 1) Entwickelung nach Bernoulli'schen Functionen . . . 329
2) Zur Entwickelung nach Euler'schen Functionen . . . 329
3) Theorie der Euler'schen Functionen . . . 333
Roger, E. Recherches sur le système du monde . . . 807
Rohn, K. Lehrbuch der darstellenden Geometrie . . . 409
Romano, S. Sulla convergenza delle serie . . . 205
Rosing, B. On the possibility of explaining the phenomena of magnetism by the hypothesis of participation of matter . . . 744
Roth, A. Herleitung von Spannungen neu zu berechnender Träger aus alten berechneten . . . 691
Roubaudi, C. Intersection d'une droite avec une quadrique gauche 418
Rouché, E. 1) Leçons de géométrie. I. . . . 384
2) Solutions des exercices et problèmes . . . 385

Seite
Rougier, J. Sous-groupes de 11e classe du groupe modulaire . . . 353
Rouquet, V. 1) Cas particulier du mouvement à cinq conditions . 578
2) Note sur le mouvement à cinq conditions 579
Routh, E. J. 1) A treatise on analytical statics. I 576
2) Theorems on the attraction of ellipsoids for certain laws of force other than the inverse square 660
Rudio, F. 1) Vierteljahrsschrift der Naturf.-Ges. in Zürich 1896. Jubelband 27
2) Zur Theorie der Strahlensysteme, deren Brennflächen sich aus Flächen zweiten Grades zusammensetzen 543
Rücker, A. W. On the objective existence of combination tones . 701
Rueda, C. J. Estudio de un logar geométrico curioso 434
Ruffini, F. P. Delle accelerazioni che nel moto di un sistema rigido con un punto fisso sono dirette a uno stesso punto 576
Rulf, W. 1) Ein Ellipsensatz 437
2) Gleichseitige Hyperbeln eines Kegels zweiten Grades, welche eine Hauptebene des letzteren zur Symmetrie-Ebene haben . . 446
Rupp, O. Zur synthetischen Theorie der Kreis- und Kugelsysteme 444
Russjan, C. Theorie der Integration der Differentialgleichung $\Sigma X dx = 0$ und die Methode von Pfaff 269

Saalschütz, L. 1) Einfache Beweise der Newton'schen Identitäten 117
2) Zwei Sätze über arithmetische Reihen 213
Sabinin, F. Ueber eine Fläche constanter negativer Krümmung . 537
Sachau, R. The elements of Euclid, books 1 and 2 390
Sagnac, G. Illusions qui accompagnent la formation des pénombres. Applications aux rayons X 742
de Saint-Germain, A. Note sur le pendule sphérique 618
Salomon, A. Ueber orthoaxiale Kegelschnitte 481
Samuelson, A. Einige Gesetze des Widerstandes der Flüssigkeiten 648
Sanjana. Solutions of questions 394, 483
Saporetti, A. Determinazione delle differenze fra i tempi medii ed i veri solari 793
Sarkar, N. Solution of a question 341
Sarrazin, O. Taschenbuch zum Abstecken von Kreisbögen 791
de Saussure, R. 1) Method of perspective by direct projection . . 413
2) Representation of imaginary plane curves 542
3) Étude de géométrie cinématique réglée 544
4) Sur une géométrie de l'espace réglée 544
5) Sur une mécanique réglée 601
Sautreaux, C. Sur une question d'hydrodynamique 656
Scarpis, U. Primi elementi della teoria dei numeri 127
Schaefer, H. Beitrag zur perspectivischen Geometrie der Kegelschnitte 437
Schatunowsky. Beweis der Existenz der transcendenten Zahlen 329
Scheele, K. Auflösung algebraischer Gleichungen durch Reihen . . 70
Scheffers, G. Siehe S. Lie 547
Scheffler, H. 1) Wesen der Mathematik und Aufbau der Welterkenntnis 42
2) Die Grundfesten der Welt. Selbstkritik 42
Scheiner, J. Doppler und das Doppler'sche Princip 12
v. Scheve. Aufstellung von Schusstafeln für Mörser und Haubitzen 640
Schiappa Monteiro, B. Sur une inégalité 122
Schicht, F. Beitrag zur Theorie der Determinanten 112
Schidlowsky, W. Zur Lehre vom Differential und Integral . . . 227
Schilling, C. Siehe A. Breusing 821



Seite

Schlegel, V. Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre 36
Schlesinger, L. 1) Ueber die Integration linearer homogener Differential-Gleichungen durch Quadraturen 242
2) Zur Theorie der Euler'schen Transformirten einer homogenen linearen Differentialgleichung der Fuchs'schen Klasse 243
Schlömilch, O. Ueber einige unendliche Producte und Reihen . . 206
Schlotke, J. 1) Lehrbuch der darstellenden Geometrie. IV . . . 418
2) Projectivische Geometrie 432
Schlumberger, G. Ueber n-dimensionale lineare und quadratische Kugelsysteme 542
Schmehl, Chr. Lehrbuch der Geometrie 390
Schmid, K. 100 ausführlich gelöste geometrische Aufgaben . . . 392
Schmid, Th. Trilinear verwandte Felder als Raumbilder 429
Schmidt. Erwiderung auf die Antwort des Dr. Münter 624
Schmidt, Adolf (Gotha). 1) Neue Berechnung des erdmagnetischen Potentials 750
2) Verteilung des erdmagnetischen Potentials 753
3) On the best form for the components of systems of deflecting forces 754
v. Schmidt, E. Zum Begriff und Sitz der Seele 41
Schmidt, J. P. Erörterungen über Fragen der Arithmetik und Algebra 126
Schneider, J. Laerebog i elementaer Mekanik 576
Schober, K. Ueber die Construction der gleichseitig hyperbolischen Schnitte der Flächen zweiten Grades 446
Schoenflies, A. 1) Ueber einen Satz aus der Analysis situs . . . 379
2) Ueber die Abbildung von Würfeln verschiedener Dimensionen auf einander 451
Schöngut, L. Ueber Kant's mathematische Hypothese 48
Schönherr, R. Auflösung einiger eingekleideter Aufgaben 122
Schotten, H. Grenze zwischen Philosophie und Mathematik . . . 44
Schoute, P. H. 1) L'aire des paraboles d'ordre supérieur 237
2) Ueber eine gewisse Einhüllende 439
3) Solutions des questions 430, 431, 436 447
4) Sur les types de crystaux du système régulier de l'espace à quatre dimensions 452
5) Quelques figures à $n+2$ inversions dans l'espace à n dimensions 452
6) Het vierdimensionale prismoide 452
7) Over de ligging der enkelvoudige brandpunten eener circulaire kubische kromme van het eerste geslacht 487
8) Quartiques à trois points doubles d'inflexion 493
9) Over het oppervlak van Steiner 531
10) Het vierdimensionale prismoïde 540
Schreiber, P. 1) Die Schreiber'schen barometrischen Höhenformeln 791
2) Untersuchungen über einige Gesetzmässigkeiten in der Folge jährlicher Niederschlagsmengen 813
Schreiner, J. Kardioide, bei welcher die Ebenen des rollenden und des festen Kreises zu einander senkrecht bleiben 534
Schwalbe, B. Beziehungen des mathematischen Unterrichts zur Ingenieur-Erziehung 50
Schwartze, Th. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwerkraft . . 681
Schwarz, H. Descartes, sur la connaissance du monde extérieur . 9
Schwarzschild, K. 1) Die Poincaré'sche Theorie des Gleichgewichtes einer homogenen rotirenden Flüssigkeitsmasse 598
2) Stabilität der Bewegung eines durch Jupiter gefangenen Kometen 802
Schwering, K. Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik. I, II, III 120
Schubert, H. 1) Arithmetik und Algebra 120

Seite

Schubert, H. 2) Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra . . 120
3) Veranschaulichung der Berechnung der Zahl π 395
4) Elementare Ableitung einer genaueren Pendelformel 616
Schülke, A. Zur Decimalteilung des Winkels 36
Schütz, Ign. Verhältnis des Princips der geradesten Bahn zum Princip der kleinsten Wirkung 601
Schultz, E. Vierstellige mathematische Tabellen 819
Schulze, E. W. G. Geometrischer Unterricht in Quarta 53
Schulze, Fr. W. 1) Queraxige rechtwinklige sphärische Coordinaten 785
2) Bemerkungen zu Jordan: über queraxige Coordinaten 786
Schur, F. 1) Ueber den Pohlke'schen Satz 412
2) Ueber ebene einfache Fachwerke 585
Schuster, A. On electric currents induced by rotating magnets . . 750
Schutts, G. G. Plane and solid geometry 390
Scioletto, G. B. Equilibrio interno dei sistemi elastici lineari . . 696
Scott, Miss C. A. 1) Note on adjoint curves 473
2) Note on equianharmonic cubics 486
Searle, G. F. On problems in electric convection 730
Sée, R. Théorème de géométrie cinématique 578
Seeliger, H. Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz 679
Segre, C. 1) Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche 454
2) Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche 515
de Séguier. Sur les sommes de Gauss 143
Seidelin, C. Forlaesninger over deskriptiv Geometrie 418
Seidemann, C. Ein mechanisches Doppelproblem 614
Seiffert, A. Ueber eine neue geometrische Einführung in die Theorie der elliptischen Functionen 337
Sepp, M. Zur Auflösung der kubischen Gleichungen 66
Sereni Antinoensis opuscula. Edidit J. L. Heiberg 3
Serret, J. A. Traité d'arithmétique 126
Serret, P. 1) Sur une double série récurrente de points toujours homocycliques 487
2) Sur une classe de propositions analogues au théorème Miquel-Clifford 487
3) Sur l'emploi d'un cercle fixe, dérivé d'un groupe quelconque de sept tangentes d'une conique 487
Servus, H. 1) Regeln der Arithmetik und Algebra 126
2) Lehrbuch der ebenen Trigonometrie 391
3) Trigonometrisches Nachschlagebuch 391
Sewell, R. The Indian calendar 40
Sforza, G. 1) Sulle forme bilineari simili (fine) 83
2) Comunicazione 376
Sharp, W. J. C. Solution of a question 181
Shaw, J. B. Development of some useful quaternion expressions . 60
Siacci, F. 1) Sur une proposition de mécanique 601
2) Sulla stabilità dell' equilibrio, e sopra una proposizione di Lagrange 601
3) Sulla resistenza dell'aria dei projetti 634
Sickenberger, A. 1) Leitfaden der elementaren Mathematik. II. . 385
2) Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafel 822
Siertsema, L. H. Over de onbestaanbaarheid van diamagnetische stoffe volgens Duhem 744
Sikstel, W. 1) Einige Folgerungen des XI. Axioms 373
2) Théorèmes fondamentaux de la géométrie sphérique 408



Seite
Silberstein, L. Entstehung von Wirbelbewegungen in einer reibungslosen Flüssigkeit 644
Silow, P. Vereinfachung der Huygens'schen Construction für die Reflexion und Brechung der Lichtstrahlen 718
Simmons, T. C. Solutions of questions 181, 394
Simon, H. Vandermonde's Vornamen 11
Singer, O. Wechselseitige Induction zweier auf eine Kugelschale gleichmässig gewickelter Windungslagen 733
Sinram, A. Kritik der Formel der Newton'schen Gravitationstheorie 681
Sinzow, D. 1) Ueber eine Eigenschaft der Flächen 2. Grades . . 527
2) Theorie der Connexe im Raume 545
Sloudski, Th. On the rotation of the Earth 810
Smith, B. A. Table of Bessel's functions Y_0 and Y_1 367
Smith, D. E. 1) History of modern mathematics 1
2) Sex in mathematics 51
3) Plane and solid geometry 387
Smith, H. J. Cusack's mensuration 390
de Smolan, Smoluchowski. 1) Recherches sur une loi de Clausius au point de vue d'une théorie générale de la radiation 780
2) Recherches sur la dépendance entre le rayonnement d'un corps et la nature du milieu environnant 780
Sobotka, J. 1) Einige Constructionen bezüglich der Schnittcurven von Umdrehungsflächen mit Ebenen 415
2) Construction von Krümmungskugeln an Raumcurven 448
3) Eine Aufgabe aus der Geometrie der Bewegung 577
Söderblom, A. Inledning till Rymdens analytiska Geometri . . . 465
Sokolow, N. 1) Numerationssysteme mit einer veränderlichen Basis 122
2) Ein Theorem aus der Arithmetik 141
Sollertinsky, B. 1) Note de géométrie 403
2) Solution d'une question 403
Somigliana, C. 1) Espressione della forza viva nel problema del moto di un corpo rigido in un fluido incompressibile illimitato . 648
2) Sulle deformazioni elastiche dei solidi cristallini 685
3) Sul problema della temperatura nell'ellissoide 779
Sommerfeld, A. 1) Siehe F. Klein 163
2) Mathematische Theorie der Diffraction 706
3) Diffractionsprobleme in exacter Behandlung 711
Somoff, P. Schraubenbewegungen eines starren Körpers, dessen Bedingungen durch Ungleichungen ausgedrückt werden 579
Sonin. Sur les polynômes de Bernoulli 209
Sonnet, H. Éléments de géométrie analytique 465
Soons. Théorème de géométrie 402
de Sparre. Notice sur le tir courbe 642
Speckmann, G. 1) Arithmetische Studien 126
2) Ueber die Factoren der Zahlen 137
3) Auflösung der Congruenz $x^2 \equiv a$ 145
4) Ueber unbestimmte Gleichungen x^{ten} Grades 166
Spelta, C. Sull'integrazione dei sistemi di equazioni differenziali simultanee di qualunque ordine e grado. I, II 264
Sperber, J. Das Parallelogramm der Kräfte als Grundlage des periodischen Systems in der Chemie 684
Spieker, T. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra 126
Spindeler, K. Zur Einführung in räumliche Configurationen 382
Spitaler, R. Die Ursache der Breitenschwankungen 793
Sporer, B. 1) Niedere Analysis 191
2) Ueber Kreise, welche einen Kegelschnitt doppelt berühren . . 434

Seite

Sporer, B. 3) Ueber den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte zweier algebraischen Curven 475
Sprung, A. Ablenkung der Geschosse durch die Erdrotation . . . 640
Ssorokin, K. Complexe Zahlen mit einfachen Moduln 163
Stäckel, P. 1) Ein Brief von Gauss an Gerling 34
2) siehe C. G. J. Jacobi 107
3) Ueber Goldbach's empirisches Theorem 136
4) Das Additionstheorem der Function $\wp(u)$ 342
5) Beiträge zur Flächentheorie 497
6) Sur la déformation des surfaces 509
Stahl, H. Theorie der Abel'schen Functionen 355
Stampfer, S. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln 822
Stankewitsch, B. 1) Anwendung der Transformationsmethode vermittelst reciproker Radienvectoren 645
2) Ueber ein Problem der Hydrokinematik 646
3) Zur Theorie der Lichtstrahlen 703
Stary, W. Arithmetik. 7. Aufl. 127
Staude, O. 1) Sinn der Richtung, Krümmung und Windung einer Curve 501
2) Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung 526
Stebbing, F. C. Navigation and nautical astronomy 807
Steggall, J. E. A. 1) Note for the formula for $\tan(A+B)$ 405
2) Envelope of the Simson line of a polygon 480
Steiff. Zur Wahl der Art und Lage des Coordinatensystems einer Landesvermessung 786
Steiner, G. F. Katakaustiken algebraischer ebener Curven 478
Steiner, J. Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Hrsg. von A. J. von Oettingen 418
Steinschneider, M. 1) Die Mathematik bei den Juden 2
2) Johannes Anglicus und sein Quadrant 5
3) Bemerkung zur Bibl. Math. 1896, S. 4 6
Steklow, W. A. 1) Entwickelung einer gegebenen Function in eine Reihe nach den harmonischen Functionen 203
2) Mouvement d'un solide dans un liquide indéfini 649
Stern, M. Ueber algebraische Beziehungen an einem symmetrischen Kreissechseck 397
v. Sterneck, R. Daublebsky. 1) Zur Vervollständigung der Schrift des Jordanus Nemorarius: „Tractatus de numeris datis“ . . . 5
2) Zur additiven Erzeugung der ganzen Zahlen 136
3) Ueber den Wilson'schen Satz 140
4) Ueber einige specielle zahlentheoretische Functionen 149
5) Bemerkungen über die von Dirichlet in seiner Breslauer Habilitationsschrift behandelten Functionen 150
Stodólkiewicz, A. J. 1) Die Principien der höheren Calcule . . 223
2) Ueber das Pfaff'sche Problem 271
Störmer, C. 1) En Egenskab ved Løsningen af den Pellske Ligning 166
2) Sur les solutions entières de l'équation $\Sigma x_i \operatorname{arctg}(1/k_i) = \frac{1}{4}k\pi$. 166
3) Om en generalisation af integralet $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ 236
Stokes. On the nature of the Röntgen rays 740
Stolz, O. 1) Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. II. 217
2) Der von G. Peano aufgestellte Begriff des bestimmten Integrals 229
3) Bemerkung zu einem früheren Aufsatze 376
Stone, E. J. Note on Professor Brown's Note 799



Seite

Stone, O. On the symmetrical form of the differential equations of planetary motions 795
Stoney, G. J. Microscopic vision 719
Stouff, X. 1) Sur les lois de réciprocité 143
2) Sur une application des fonctions elliptiques 353
3) Sur les rapports entre la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre et la théorie des surfaces 499
4) Généralisation de la formule de l'aire du triangle sphérique . . 541
Stracciati, E. Adolfo Bartoli 23
Strecker, K. Logische Uebungen. 1. Heft 45
Strnad, A. Sammlung von Aufgaben aus der Algebra 125
Strömgren, E. Berechnung der Bahn des Kometen 1890 II 801
Stromillo, S. Lezioni elementari di geometria. III 390
Studnička, F. J. 1) Beitrag zur Theorie der Determinanten . . . 108
2) Potenzdeterminanten und deren wichtigste Eigenschaften 111
3) Multiplicatorische Spielereien 122
4) Astronomische Causerien 792
Study, E. 1) Ueber eine besondere Klasse von Functionen einer reellen Veränderlichen 306
2) Bewegungsinvarianten und elementare Geometrie 369
3) Betrachtungen über Doppelverhältnisse 461
Sturm, A. Das delische Problem 35
Sturm, R. Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in systematischer Behandlung. III. 450
Stuyvaert. Propriété focale des coniques à centre 435
Sucharda, A. Ueber die asymptotischen Curven gewisser Flächen dritter Ordnung mit gewöhnlichem Knotenpunkte 530
Suhle, H. Zur Theorie der reellen Curven einer rationalen Function n^{ten} Grades für complexe Variable 474
Supan, A. Grundzüge der physischen Erdkunde 814
Susloff, G. K. 1) Monocyklische Systeme von Helmholtz 603
2) Die Helmholtz'schen Monocykeln 761
Suter, H. 1) Bemerkung zur Anfrage 60 2
2) Die Araber als Vermittler der Wissenschaften in deren Uebergang vom Orient in den Occident 5
3) Nochmals der Jakobsstab 39
Sutherland, W. 1) High tensions in moving liquids 649
2) Thermal transpiration and radiometer motion 770
Sveistrup. Erdbelastung von Bauwerken 593
Sweschnikoff, P. 1) Elementare Theorie der Ellipse 403
2) Ueber eine Art von Flächen 537
Swyngedauw, R. Différence d'action de la lumière ultra-violette sur les potentiels explosifs statique et dynamique 741
Sylvester, J. J. 1) On the Goldbach-Euler theorem 137
2) Del plagiógrafo ó pantógrafo de inclinación 582

Dr. T. Nekrolog Brockmann 23
Taber, H. 1) On certain sub-groups of the general projective group 100
2) Note on the special linear homogeneous group 100
3) Automorphic linear transformation of a bilinear form 101
4) On the group of linear transformations whose invariant is an alternate bilinear form 101
5) On a twofold generalization of Stieltjes' theorem 113
Tagiuri, A. Somma delle potenze simili dei numeri naturali . . . 330
Tait, P. G. 1) On the linear and vector function 109
2) Circles of curvature of a plane curve 466
3) Note on centrobaric shells 658

Seite
Tait, P. G. 4) Movimiento armónico 610
de Tannenberg, W. 1) Note sur la théorie des coniques 486
2) Équations du mouvement d'un point matériel sur une surface quand on tient compte du frottement 615
Tanner, H. W. L. 1) On the enumeration of groups of totitives. 101
2) Notes on a ternary cubic 167
Tannery, J. 1) Introduction à l'étude de la théorie des nombres et de l'algèbre supérieure. Par E. Borel et J. Drach 134
2) Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. II 335
Tannery, P. 1) Descartes physicien 9
2) Sur le concept du transfini 49
Tauber, A. Ueber das specielle Zweiteilungsproblem der hyperelliptischen Functionen 362
Taylor, H. M. Euclid's elements of geometry. Books XI and XII . 385
Taylor, W. W. Evaluation of a certain dialytic determinant. . . . 111
Tedone, O. 1) Sulla integrazione delle equazioni della elasticità . 685
2) Sulle vibrazioni dei corpi elastici 688
3) Sulla dimostrazione della formola che rappresenta analiticamente il principio di Huygens 702
Teichmann. Statische und Trägheitsmomente von Querschnitten . 595
Teixeira, F. G. 1) Curso de analyse infinitesimal. Calcolo differencial 220
2) Sur le développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus 304
3) Développement de x^k en série ordonnée suivant les puissances du sinus de la variable 305
Testi, G. M. Corso di matematiche. III 390
Tetmajer, L. Die Gesetze der Knickungsfestigkeit 689
Thabourin, V. Cours élémentaire de mécanique 576
Thiéry, A. Ueber geometrisch-optische Täuschungen 49
Thomae, J. 1) Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre 298
2) Untersuchungen über zwei-zweideutige Verwandtschaften und einige Erzeugnisse derselben 426
3) Ueber die durch die leuchtende Sonnenkugel und den Saturnring erzeugte Schattenfläche 535
Thomas, W. C. Cosmic ethics, or the mathematical theory of evolution 807
Thompson, H. D. Elementary solid geometry and mensuration . . 386
Thomson, D. Vibraciones y ondas sonoras 698
Thomson, J. J. 1) Longitudinal electric waves, and Röntgen's X-rays 740
2) Mathematical theory of electricity and magnetism 756
Thomson, W. Text-book of geometrical deductions 387
Thomson, W. S. 100 papers in difficult higher arithmetic 127
Thybaut, A. 1) Sur certaines classes d'équations de Laplace à invariants égaux 285
2) Sur une classe de surfaces isothermiques dépendant de deux fonctions arbitraires 285
Tichomandritzky, M. A. Adjungirte Functionen dritter Art . . . 360
De Tilly. Sur les valeurs principales des radicaux 330
Tilp, A. Wiener Bodentemperaturen in den Jahren 1878 bis 1894 . 813
Tischer, E. Begründung der Infinitesimalrechnung durch Newton und Leibniz 33
Tisserand, F. 1) Notice sur les travaux de M. Hind 21
2) Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal 221
3) Traité de mécanique céleste. IV 807
Tissot, A. 1) Sur les cercles bitangents aux coniques 400

Seite
Tissot, A. 2) Polaire d'un point par rapport à une conique . . . 433
3) Question 324. Développement et solution 481
Tocco, F. Descartes jugé par Vico 9
Toldt, A. Das Verhältnis der Unterstützungen zu den Beitragsleistungen bei den Bruderladen in Oesterreich. I: Invalidenpensionen 190
Torelli, G. Forme lineari alle differenze con fattori di primo grado commutabili 261
Torres, L. 1) Memoria sobre las maquinas algebricas 190
2) Machines algébriques 820
Touche. Calcul de la résistance des fluides à un disque mince . . 656
Toulon, P. Résistance des poutres droites à travées solidaires sur appuis élastiques 691
Townsend, J. S. A problem in geometry 528
Traub, K. 1) Der verjüngte Magister Matheseos 376
2) Berechnung der Radien der acht Berührungskreise beim Apollonischen Problem 399
Tresse, A. Détermination des invariants ponctuels de l'équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$ 254
Treutlein, P. 1) Der Lehrplan für den mathematischen Unterricht des badischen Realgymnasiums 51
2) Lehrbuch der Elementar-Geometrie. II 388
3) Vierstellige Logarithmen 818
Tschaplygin, S. 1) Ueber die Bewegung eines schweren Drehungskörpers auf einer horizontalen Fläche 624
2) Mögliche Verallgemeinerung der Flächentheoreme mit Anwendung auf das Problem des Rollens der Kugeln 625
Tsoucalas, L. Note sur de nouvelles tables pour le calcul de la résistance des canons frettés 694
Tucker, R. 1) Solution of a question 402
2) Properties of some groups of Wallace lines 479
Tumlirz, O. 1) Die Erstarrungswärme in Lösungen 767
2) Ueber die Verdampfungswärme von Lösungen 768
Turksma, B. Begründung der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung 293
Turner, A. Die strahlende Materie 677
Turner, H. H. A. C. Pritchard, Memoirs of his life 19

Uhlich, P. Die Berechnung des mittleren Fehlers von Richtungsbeobachtungen bei vollen Sätzen 784
Unbehaun, J. Versuch einer philosophischen Selectionstheorie . . 41
Ungenannt. 1) Compte rendu du bureau local du Comité Lobatschefskij 14
2) Die Enthüllung des Lobatschefskij-Denkmals in Kasan 14
3) Obituary notice of Charles Chambers 23
4) Professor Dr. Moritz Wilhelm Drobisch † 23
5) Obituary notice of Dr. Adalbert Krüger 24
6) Dr. Bernhard Minnigerode † 25
7) Zur Erinnerung an Dr. Christian Wiener 27
8) Fünfundzwanzigjähriges Jubiläum der Moskauer Math. Ges. . . 28
9) Il Pitagora, Giornale di Matematica 28
10) Report of Committee. On the establishment of a national physical laboratory 50
11) Report of Committee. Teaching of science in elementary schools 55
12) Les frères des écoles chrétiennes. Eléments d'algèbre 125
13) Calculation of the $G(r, \nu)$-integrals 234
14) Mathematical functions. Report of committee 368
15) „Cromerite". A mechanical problem 603

Seite

Ungenannt. 16) Tabelle für die Wellenlänge der Spectren der Elemente . . . 711
17) Experiments for improving the construction of practical standards for electrical measurements . . . 765
18) Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme . . . 791
19) Astronomischer Kalender für 1897 von der K. K. Sternwarte . 792
20) Astronomical papers prepared for the use of the American Ephemeris and Nautical Almanac. Vols. V, VI, VII . . . 794
21) Observations méridiennes de la planète Mars pendant 1892 . . 804
22) (Anonymes.) Observations hors du méridien . . . 805
23) Différence de longitude entre Bruxelles et Uccle . . . 805
24) Seismological investigation. — Report of Committee . . . 809
25) Report of Committee. The effect of wind and atmospheric pressure on the tides . . . 811
26) Des Ingenieurs Taschenbuch. Hrsg. vom Verein „Hütte" . . . 823
27) Intermediate science mixed mathematical papers . . . 823
28) Intermediate mathematics . . . 823

Unterweger, J. Ueber zwei trigonometrische Reihen für Sonnenflecken, Kometen und Klimaschwankungen. Vorläufige Mitt. . 805

Vaes, F. J. Goniometrische Studie . . . 392
Vahlen, K. Th. Ueber Steiner'sche Kugelketten . . . 445
Vailati, G. Sull' importanza della storia delle scienze . . . 29
Valentiner, H. Remarques sur les mémoires contenus dans le premier fascicule des „Oeuvres scientifiques" de L. Lorenz . . 18
Valentiner, W. Handwörterbuch der Astronomie. I . . . 807
de la Vallée Poussin, Ch. J. 1) Démonstration simplifiée du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique . . . 150
2) Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers . . 155
3) Recherches arithmétiques sur la composition des formes binaires quadratiques . . . 164
4) Sur la série de Lambert . . . 209
Valyi, J. Ueber die mehrfachen Involutionen . . . 476
Vannini, T. Questioni e formule di geometria analitica . . . 465
Vaschy. 1) Erreurs admises comme vérités en électromagnétisme . 749
2) Méthodes de calcul en électromagnétisme . . . 749
Vecchi, S. Lezioni di geometria proiettiva . . . 432
Vega, G. Thesaurus logarithmorum completus . . . 822
Veillon, H. Magnetisirung des Stahles durch die oscillatorische Entladung der Leydener Flasche . . . 745
Velten, A. W. Eine neue Ableitung von harmonischen Eigenschaften des Vierecks . . . 432
van Velzer, C. A. Plane and solid geometry . . . 390
Veronese, G. Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti e infinitesimi attuali . . . 370
Versluys, J. Hauptsätze der Normal-Axonometrie . . . 413
Vert, G. Représentation graphique des ondes lumineuses . . . 704
Vessiot, E. 1) Sur la recherche des équations finies d'un groupe continu fini de transformations . . . 287
2) Remarques sur la théorie des fonctions algébriques . . . 323
3) Sur l'étude d'une courbe autour d'un de ses points . . . 473
Vianello, V. Luca Pacioli nella storia della ragioneria . . . 6
Vicaire, E. 1) Observations sur une note de M. Leray . . . 376
2) Nature et principes de la mécanique rationnelle . . . 571
3) Nécessité du mouvement absolu en mécanique . . . 571
4) Observations sur une note de M. Mansion . . . 571

Seite

Vicaire, E. 5) Observations critiques sur les „Leçons de Mécanique“ de Kirchhoff . . . 571
Vidaillet, J. Sur une interprétation géométrique des coordonnées trilinéaires . . . 465
Vigarié, E. La bibliographie de la géométrie du triangle 37
Vincent, G. 1) Sur la méthode mathématique . . . 48
2) Sur l'idée de nombre . . . 49
Vintéjoux, F. Éléments d'arithmétique, de géométrie et d'algèbre 127
Visalli, P. Sulle collinearità e correlazioni ordinarie ed eccezionali in due spazi a quattro dimensioni . . . 430
Vivanti, G. 1) Ueber die Ikosaederirrationalität . . . 69
2) Contributo alla teoria delle equazioni a derivate parziali del secondo ordine . . . 285
R. Vogeler. 1) Berechnung einer geodätischen Linie aus geographischen Coordinaten und conformen, ebenen Coordinaten . . . 786
2) Vergleichung der mecklenburgischen conformen Kegelprojection mit der congruenten Soldner'schen Projection . . . 786
3) Vergleichung der mecklenburgischen conformen Kegelprojection mit der Soldner'schen Projection . . . 786
Vogt, H. 1) Résolution algébrique de l'équation binôme $x^p - 1 = 0$. 66
2) Réduction simultanée de deux formes quadratiques de trois variables à des formes canoniques . . . 77
3) Résolution algébrique de l'équation $x^p - 1 = 0$. . . 396
Voigt, W. 1) Compendium der theoretischen Physik. I, II 666
2) Aenderung der Schwingungsform des Lichtes beim Fortschreiten in einem dispergirenden oder absorbirenden Mittel . . . 705
3) Fluorescenz und kinetische Gastheorie . . . 711
4) Lage der Absorptionsbüschel in zweiaxigen pleochroitischen Krystallen . . . 713
5) Einige kinetische Betrachtungen im Zusammenhang mit der Theorie der Verdampfung und verwandter Vorgänge . . . 777
6) Eine neue Methode zur Untersuchung der Wärmeleitung in Krystallen I . . . 779
Volkmann, P. Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften . . . 48
Vollprecht, H. Zur Uebertragung der Rechnungsarten auf die Geometrie . . . 378
Volpi, R. Di un'applicazione della teoria dei gruppi del Cantor al problema gnoseologico . . . 49
Volterra, V. 1) Osservazioni sulla nota del prof. Lauricella e sopra una nota di analogo argomento dell' Ing. Almansi . . . 284
2) Sulla inversione degli integrali definiti . . . 309
3) Sulla inversione degli integrali multipli . . . 309
4) Sull'inversione degli integrali definiti . . . 309
5) Lezioni di meccanica. Prime nozioni di cinematica . . . 569
6) Rotazione di un corpo in cui esistono sistemi policiclici 627
Vonderlinn, J. Statik der Bauhandwerker . . . 696
Voss, A. 1) Cogrediente Transformation der bilinearen Formen in sich 81
2) Ueber die Anzahl der cogredienten und adjungirten Transformationen einer bilinearen Form in sich selbst . . . 82
3) Symmetrische und alternirende Lösungen der Gleichung $SX = XS'$ . . . 82
4) Ueber infinitesimale Flächendeformationen . . . 508
de Vries, J. 1) Ueber gewisse Sturm'sche Ketten . . . 65
2) Geometrische Beweise zahlentheoretischer Sätze . . . 134
3) Ueber eine gewisse Klasse ganzer Functionen . . . 332
4) Over optellingstheorema's voor elliptische integralen 342

Seite

de Vries, J. 5) Recherches sur les coordonnées multipolaires . . 465
6) Over bipolaire coördinaten 491
7) Over en betrekking tusschen een stelsel confocale ovalen van Descartes en een eenvlakkige hyperboloïde 491
8) Recherches sur les coordonnées multipolaires 491
9) Zur Geometrie der Ringfläche 533

van der Waals, J. P. Over kenmerken ter beslissing over den loop van de plooipuntslijn voor en mengsel van twee stoffen . 769
Wadsworth, F. L. O. A note on Mr. Burch's method of drawing hyperbolas 416
Waelsch, E. Ueber die Lamé'schen Polynome zweiter Ordnung einer Form fünfter Ordnung 75
Wagener, A. Elemente der Mechanik 576
Walker, G. T. On a dynamical top 623
Wallace, A. R. 1) The cause of an ice age 810
2) The astronomical theory of a glacial period 810
Wallenberg, G. Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung 246
Wallentin, F. Lehr- und Uebungsbuch der Arithmetik. 3. Aufl. . 127
Wangerin, A. 1) F. E. Neumann 22
2) s. H. v. Helmholtz 643, 697
3) s. F. E. Neumann 704
Wassiliew, A. W. 1) Die Bedeutung von Lobatschefskij für Kasan 14
2) Éloge historique de Nicolas J. Lobatschefsky 15
Wassmuth, A. Ueber lineare Stromverzweigungen 727
Wasteels, C. E. Aires et volumes relatifs à la chaînette 496
Weber. Logik und Sprachrichtigkeit im mathematischen Unterricht 55
v. Weber, E. 1) Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles simultanées 274
2) Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen in drei Variabeln 274
3) Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die sich durch gewöhnliche Differentialgleichungen integriren lassen 275
4) Ueber Linienconnexe 544
Weber, Ed. Zahlenbegriff in der elementaren Arithmetik 54
Weber, H. 1) Lehrbuch der Algebra. 2. 56
2) Ueber einen in der Zahlentheorie angewandten Satz der Integralrechnung 160
3) Bemerkungen zu den Briefen über elliptische Modulfunctionen von A. Cayley 349
4) Darstellung der Fresnel'schen Wellenfläche durch elliptische Functionen 532
Weighardt, E. Mathematische Geographie 814
Weigner, A. 1) Zur Frage des zukünftigen Infanteriegewehrs . . . 641
2) Zur Frage des zukünftigen Feldgeschützes 642
Weiler, A. 1) Parallelprojectionen und Axonometrie 418
2) Die Störungen der Planeten sind Functionen des Winkels, welchen die Ebenen der Bahnen mit einander bilden 798
Weill. 1) Géométrie plane 390
2) Solution d'une question 484
Ed. Weyr. Ueber das System der Orthogonalflächen 560
Weingarten, J. Sur la déformation des surfaces 508
Weisbach, J. 1) Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik 576
2) Ingenieur. Sammlung von Tafeln, Formeln und Regeln 822
Weishaupt, H. Das Ganze des Linearzeichnens 418



Seite

Weiss, W. 1) Zum Noether'schen Fundamentalsatze der Theorie der algebraischen Functionen 322
2) Ueber die Curven, welche eine algebraische Curve an mehreren Stellen und in höherer Ordnung berühren 472
Wekwerth, M. Sammlung von Aufgaben aus der niederen Mathematik 127
Wellisch, S. Das 2000jährige Problem der Trisection 395
Welsch. Sur la question 409 488
Welsford, J. W. Elementary algebra 127
Wentworth, G. A. Syllabus of geometry 390
W. E. P. 1) Obituary notice of Hubert A. Newton 25
2) François Félix Tisserand 26
Wernell, A. Lifförsäkringen, dess Grunder, Hafel og Vigt 190
Wertheim, G. 1) Die Arithmetik des Elia Misrachi. 2. verb. Aufl. 31
2) Zerlegung ungerader Zahlen in Factoren 138
3) Primitive Wurzeln der Primzahlen $2^{\varkappa} q^{\lambda}+1$ 144
4) Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln g aller Primzahlen p zwischen 3000 und 5000 144
Wessel, C. Om directionens analytiske Betegning 465
Wessely, V. Catastralvermessung von Bosnien und der Herzegowina 791
Weyr, Ed. 1) Die Feier des 100. Geburtstages von N. J. Lobatschefskij 15
2) P. L. Tschebyscheff 20
3) Ueber die Construction der Osculations-Hyperboloide an windschiefen Flächen 415
4) Ueber das System der Orthogonalflächen 506
White, E. E. A school algebra 127
White, H. S. 1) Mathematical papers read at the mathem. congress in Chicago 27
2) Kronecker's linear relation among minors of a symmetric determinant 110
3) Numerically regular reticulations upon surfaces of deficiency higher than 1 817
Wickersheimer. 1) Sur la strophoïde droite 489
2) Sur les conchoïdes 493
Wiechert, E. 1) Ueber die Grundlagen der Elektrodynamik . . . 728
2) Maxwell's Theorie der Elektrodynamik 728
3) Elektrodynamik und die Röntgen'sche Entdeckung 756
Wiedeburg, O. Der Interferentialrefractor für elektrische Wellen 738
Wien, Max 1) Ueber die Periode, für welche die Amplitude einer erzwungenen Schwingung ein Maximum wird 699
2) Einheitsrollen der Selbstinduction 733
Wien, Willy. 1) Cyklonartige Bewegungsformen 644
2) Ueber die auf einer schweren Flüssigkeit möglichen Wellen von sehr kleiner Höhe 651
3) Wirkung eines rechteckig gespannten Strombandes auf eine Spule mit kreisförmigem Querschnitt 745
4) Energieverteilung im Emissionsspectrum eines schwarzen Körpers 780
Wilby, K. F. Der Dualismus in der Materie 49
Williams, W. On the convergency of the Fourier series 202
Williamson, B. An elementary treatise on the integral calculus . 221
Wilson, W. N. Geometrical drawing. II 418
Wiman, A. Einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen . . . 103
Wind, C. H. Eene studie over de theorie der magneto-optische verschijnselen in verband met het Hall-effect 739

Seite

Winter. Die graphische Bestimmung der Tangentenlängen beim Entwerfen von Spurplänen 596
Winter, W. Algebra. Lehrbuch mit Aufgabensammlung 121
Wirtinger, W. 1) Beiträge zu Riemann's Integrationsmethode für hyperbolische Differentialgleichungen 281
2) Zur Theorie der $2n$-fach periodischen Functionen 364
3) Ueber eine Eigenschaft des Potentials unter Annahme eines Green'schen Wirkungsgesetzes 656
Wittenbauer. Der Beschleunigungszustand kinematischer Ketten . 582
Wittstein, A. Notiz über das eigentliche Oval. — Nachtrag hierzu 493
Wittstein, T. Fünfstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln . 822
Wölffing, E. 1) Krümmung der Raumcurven in singulären Punkten 502
2) Die singulären Punkte der Flächen 515
Woodall, H. J. Solutions of questions 341, 494
Woodward, R. S. Higher mathematics 218
Woronoi, G. Verallgemeinerung des Kettenbruch-Algorithmus . . 170
Wright, Th. W. Elements of mechanics 576
Wüst, A. Leichtfassliche Anleitung zum Feldmessen und Nivelliren 792
v. Wuich, N. R. Beitrag zur Theorie der Gasspannungsmesser . . 771
Wundt, W. Ueber naiven und kritischen Realismus 41
Fräulein Wythoff, A. G. Over de stabiliteit van elliptische banen, beschreven onder de werking van drie centrale krachten . . . 613

Z. Die Bezeichnung Widerstandsmoment 690
Zahradník, K. Zum pythagoreischen Lehrsatze 394
Zanotti Bianco, O. Per la storia delle superficie geoidiche . . . 39
Zantschewsky, J. Le problème de Pfaff 271
Zaremba. Contribution à la théorie de la fonction de Green . . . 320
Freiherr von Zedlitz und Neukirch. Eine zweckmässige Umformung alter ballistischer Formeln 639
Zelbr, K. 1) Das Problem der kürzesten Dämmerung 39
2) Die Bahnbestimmung der Planeten und Kometen 807
Zermelo, E. 1) Ein Satz der Dynamik und die mechanische Wärmetheorie 759
2) Ueber mechanische Erklärungen irreversibler Vorgänge 760
Zerr. Solution of questions 181
Zeuthen, H. G. 1) Om den historiske Udvikling af Mathematiken som exakt Videnskab indtil Udgangen af det 18de Aarhundrede 29
2) Die geometrische Construction als „Existenzbeweis“ in der antiken Geometrie 35
3) Forelaesninger over Bevaegelseslaere 576
Zimmermann. 1) Ueber Erddruck und Stützmauern 592
2) Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last 691
Zimmermann, J. Tafeln für die Teilung der Dreiecke, Vielecke und Polygone 792
Zimmermann, L. 1) Gemeine oder briggische Logarithmen . . . 822
2) Rechentafeln 822
Zimmermann, O. Ordnung der Enveloppe gewisser ebenen Curvenreihen 453
Zimmermann, W. Sprunglinien in der Variationsrechnung 294
Zindler, K. 1) Methode, aus Configurationen andere abzuleiten . . 380
2) Neue Erzeugungsweise des linearen Complexes 542
Zoccoli, E. G. Di un'applicazione della teoria dei gruppi del Cantor al problema gnoseologico 49



Seite
Zschetzsche, A. 1) Zur Berechnung der Stabkräfte in Bogenbrücken 692
2) Berechnung von Mauerankern 694
Zsigmondy, K. Beiträge zur Theorie Abel'scher Gruppen und ihrer Anwendung auf die Zahlentheorie 160
Züge, H. Zum Problem der Anziehung homogener Ringkörper . . 662
Zwiers, H. J. Neue Methode zur Bestimmung von Doppelsternbahnen 801

Berichtigungen.

Seite	2	Zeile	6/7	von unten ist der Satz: Suter bemerkt... vor die Zeile 61) Ueber das Erscheinen ... zu setzen.
„	51	„	4	von unten u. ff. Wie im Jahrbuche üblich ist und aus dem citirten Eingange erhellt, giebt das Referat nur objectiv den Inhalt der besprochenen Schrift an, enthält aber nicht ein Urteil des Referenten.
„	104	„	4	von unten lies: „G. Fano“ statt F. Fano.
„	153	„	1	„ „ „ „inférieurs“ statt inférieur.
„	188	„	20	„ oben „ $\int_0^1\int_0^\tau f(t)\,dt\,d\tau$ statt $\int_0^1\int_0^t f(t)\,dt\,d\tau$.
„	284	„	11	„ „ „ „Th. Craig“ statt P. Craig.
„	334	„	2	„ unten „ „54“ statt 64.
„	406	„	2	„ „ „ „triangolo“ statt triangulo.
„	419	„	16	„ „ „ „Omografie“ statt Omagrafie.
„	443	„	21	„ „ „ „Memoria“ statt Memorie.
„	507	„	10	„ „ „ „Th. Craig“ statt J. Craig.
„	531	„	14	„ „ „ „P. H. Schoute“ statt P. A. Schoute.
„	656	„	21	„ oben ist „ou“ zu streichen.
„	712	„	12	„ „ lies: „B. Brunhes“ statt R. Brunhes.
„	802	„	10	„ „ „ „Schwarzschild“ statt Schwarzwild.

Erklärung zu Bd. **26**, S. 72:

Balawelder, Abstammung des Allseins.

Auf S. 12, Zeile 11 und 14 meiner Schrift hat sich ein den Sinn gänzlich verstellender Fehler eingeschlichen, auf welchen in der Besprechung (Bd. **26**, 72) des Jahrbuchs aufmerksam gemacht wurde. Statt „Mathematik“ soll daselbst „Raum“ stehen.

Der Verfasser.

